

博士学位論文

曲面オフセット処理における  
モデルデータ品質の低下を抑制する  
オフセット曲面近似手法に関する研究

岩手大学大学院工学研究科  
デザイン・メディア工学専攻

佐藤 直之

2014年3月



## 概要

ものづくり分野において製品の高品質化・低コスト化・短納期化を図るため、3次元CADシステムを中核としたIT化が広く浸透している。3次元CADシステムは製品形状を立体モデルで設計するためのソフトウェアである。立体モデルは、部品の自動加工であるNC加工やコンピュータ・シミュレーションなどで活用される。本論文は、3次元CADシステムの機能の1つである曲面オフセット処理において、従来技術では避けられないモデルデータの品質低下を抑制する方法を提案するものである。曲面オフセット処理とは、立体の表面を表す曲面に対して、オフセット曲面を生成する処理である。通常、3次元CADシステムは立体の表面を複数の曲面を連結して表す。例えば立方体の表面は、6枚の正方形の平面によって表され、各平面は正方形領域の境界である直線上で他の平面と連結する。オフセット曲面とは、与えられた曲面上の任意の点に対して、曲面の法線ベクトル方向に一定距離だけ離れた曲面である。曲面オフセット処理は、製品外装など一定肉厚となる形状の設計や、NC加工における工具経路の計算などに利用される。オフセット曲面は数学理論上、一般に無理式で表される。これに対し3次元CADシステムは、一般に多項式で曲面をモデルデータ化する。従って3次元CADシステムは、一般に、オフセット曲面を理論式どおりにモデルデータ化できない。このため曲面オフセット処理では、オフセット曲面を多項式で表した曲面によって近似する方法が広く用いられている。ところが2枚の連結した曲面に対して曲面オフセット処理すると、従来のオフセット曲面近似方法では避けられない、モデルデータの品質低下が発生することがある。具体的には、(1) オフセット曲面間に微小要素が発生することがある。(2) オフセット曲面間を滑らかに連結できないことがある。

(1)の問題における微小要素とは長さが非常に短い曲線、および、曲面の境界曲線間の距離が非常に近い細長い曲面である。微小要素は、表側から見て凸状に折れて連結した2枚の曲面に対し、曲面オフセット処理したときに発生することがある。2枚の曲面が表側から見て凸状に折れて連結する場合、オフセット曲面は与えられた曲面の法線ベクトル方向に生成されるため、生成されるオフセット曲面間には隙間が生じる。従来の方法を用いてオフセット曲面を近似する場合も、生成される近似オフセット曲面間には隙間が生じる。一般に外装設計やNC加工においてオフセット曲面間に隙間が生じる場合、隙間を補間する曲面を生成して隙間を塞ぐ必要がある。このとき2枚の曲面間の折れ具合がわずかであると、オフセット曲面間の隙間も非常に小さくなるため、補間曲面が微小要素となってしまうことがある。微小要素はシステムによっては小さすぎて扱えないため、微小要素を含むモデルデータをシステム間で受け渡すと失敗することがある。従って微小要素を含むモデルデータは低品質であり、微小要素を含むモデルデータは生成されないようにしなければならない。

(2)の問題は、2枚の滑らかに連結した曲面に対し、曲面オフセット処理したときに生じることがある。2枚の曲面が滑らかに連結した状態とは、連結部の境界曲線の形状が曲面間で一致し、かつ、連結部の境界曲線に沿って両側の曲面の法線ベクトル方向が一致している状態である。2枚の滑らかに連結した曲面に対するオフセット曲面間は、理論上滑らかに連結することが数学的に証明されている。しかし従来の方法を用いてオフセット曲面を近似すると、オフセット曲面間の連結部において、境界曲線形状や法線ベクトル方向がオフセット曲面の形状に依存して別々に計算されるため、近似曲面間が滑らかに連結されないことがある。具体的には、オフセット曲面間の連結部において、境界曲線形状が近似曲面間で一致せず、近似曲面間に隙間が生じることがある。また近似曲面間に隙間が生じなくても、近似曲面間の連結部において法線ベクトル方向が近似曲面間で一致せず、2枚の近似曲面間が折れて連結されることがある。滑らかに連結されるべき曲面間に隙間や折れがあると、(1)の問題と同様に、品質低下によるデータ交換の失敗を引き起こすことがある。

本研究の目的は、上述した2つの問題をそれぞれ解決することである。(1)の問題を解決するため、本論文は、オフセット曲面の境界曲線を近似して曲線の枠を生成した後、生成した曲線枠を境界曲線として近似曲面を生成するという、2段階の処理に分かれるオフセット曲面近似手法を提案する。本手法はオフセット曲面間の隙間が非常に小さい場合、近似曲面間に隙間が生じないように、2つの曲線枠を生成する。従って補間曲面を生成する必要がなくなり、微小要素の発生が抑制される。(2)の問題を解決するため、本論文は、オフセット曲面間の連結部において境界曲線形状と法線ベクトル方向を、近似曲面間で拘束して計算するオフセット曲面近似手法を提案する。本手法は、(1)の問題を解決する手法と同様に、近似曲面間に隙間が生じないように2つの曲線枠を生成し、生成した曲線枠を境界曲線とする近似曲面を生成する。そして、近似曲面間の連結部となる境界曲線上の各点において、両側の近似曲面の接平面を同一平面に拘束し、近似曲面の形状を修正する。結果として、隙間や折れのない滑らかに連結される2枚の近似曲面が生成される。本論文では、上述した2つの提案手法を幾つかの実用的な立体モデルに適用し、(1)の問題と(2)の問題がそれぞれ解決されることを実証する。

# 目次

<b>第1章 序論</b>	<b>1</b>
1.1 本研究の背景と目的 . . . . .	1
1.2 本論文の構成 . . . . .	10
<b>第2章 従来技術の課題</b>	<b>12</b>
2.1 曲面表現と曲面間の接続 . . . . .	12
2.2 従来のオフセット曲面近似技術 . . . . .	25
2.3 従来技術の分析と課題 . . . . .	33
2.4 まとめ . . . . .	35
<b>第3章 微小要素による品質低下を抑制する曲面オフセット処理</b>	<b>36</b>
3.1 オフセット曲面の近似処理 . . . . .	36
3.2 オフセット曲面間の接続処理 . . . . .	45
3.3 適用例 . . . . .	49
3.4 まとめ . . . . .	52
<b>第4章 隙間や折れによる品質低下を抑制する曲面オフセット処理</b>	<b>53</b>
4.1 オフセット曲面の近似処理 . . . . .	53
4.2 オフセット曲面の連続性の調整処理 . . . . .	62
4.2.1 調整対象と拘束条件 . . . . .	62
4.2.2 調整処理 . . . . .	69
4.3 適用例 . . . . .	73
4.4 まとめ . . . . .	77

<b>第 5 章 結論</b>	<b>78</b>
5.1 本研究の成果 . . . . .	78
5.2 今後の課題 . . . . .	82
<b>付 録 A 最小自乗法を用いた 3 次 Bézier 曲線の生成</b>	<b>88</b>
<b>付 録 B 最小自乗法を用いた双 3 次 Bézier 曲面の生成</b>	<b>90</b>
<b>付 録 C 最小自乗法を用いた制御点位置の調整</b>	<b>92</b>

# 第1章 序論

## 1.1 本研究の背景と目的

ものづくり分野において、製品形状を3次元CAD (Computer Aided Design) システムで設計し、NC (Numerical Control) 加工や、コンピュータ・シミュレーションなどに活用する、デジタルエンジニアリングが発展している。デジタルエンジニアリングは、高品質な製品を低コストかつ短納期で製造することを狙いとしたものづくり分野のIT (Information Technology) であり、航空機・自動車・家電など様々な業界に広く浸透している。ものづくり分野において、品質・コスト・納期は生産性を測る指標としてQCD (Quality Cost Delivery) と呼ばれ、高品質化・低コスト化・短納期化を実現することはQCDの向上と呼ばれている。ものづくり分野における各企業においてQCDの向上を図ることは、競合との競争に勝つための、また、新しい製品を実用化するための主要な取り組みとなっている。そのためデジタルエンジニアリングは、ものづくり分野に広く浸透している。3次元CADシステムは、図面のような平面図形ではなく立体図形によって形状を設計するシステムであり、パーソナルコンピュータなどで動作するソフトウェアとして、幾つものシステムが市販され多くの企業で利用されている。3次元CADシステムを用いて製品を設計することで、図面では表現できなかった曲面形状を正確に表すことが可能になり、また、図面を解釈して頭の中に立体を描かなくても、3次元CG (Computer Graphics) で直感的に立体形状を把握することが可能になる。

3次元CADシステムで作成されたデータは、CAM (Computer Aided Manufacturing) システムに受け渡され、NC加工に利用される。CAMシステムでは、受け渡されたデータを元に素材を部品形状に切削加工するための工具経

路が計算され、NC加工に引き渡される。NC加工では、部品を自動加工することにより、一定の作業時間と精度で部品が加工されるため、人手に比べてより速く加工でき、品質のばらつきも小さくできる。また、3次元CADシステムで作成されたデータは、CAE（Computer Aided Engineering）システムに受け渡され、コンピュータ・シミュレーションに利用される。CAEシステムでは、受け渡されたデータを元に製品の強度解析や振動解析、空力試験や衝突試験などの製品評価をコンピュータ・シミュレーションにより実施する。製品評価にコンピュータ・シミュレーションを用いることで、大掛かりな実験装置を用意したり試作品を作らなくても、安全性・耐久性・快適性などの品質向上を図ることができる。このように3次元CADシステムは、CAM/CAEシステムに受け渡すデータを作成するため、デジタルエンジニアリングにおいて中核をなすシステムである [20]。

3次元CADシステムは、一般に、複数の面を連結して立体を表現する。例えば立方体であれば6枚の平面を連結して表現する。このとき面と面の間に連結情報をもたせることで、単に空間上に面を配置するだけでなく、立体の内部と外部とを区別できるようにしている。つまり空間の一部を占める物体として立体を表現している。これにより、現実存在し得る物体として整合した形状をコンピュータ内に生成している。このように空間の一部を占める物体としてコンピュータ上に表現される形状は、ソリッドモデル（solid model）と呼ばれ、ソリッドモデルにおいて面と面の間に連結情報をもたせることで立体を表現する方法は、境界表現（boundary representation）と呼ばれている [21]。境界表現では点・線・面などの形状要素によって立体が構成される。線は長さをもった曲線区間として表現され、曲線区間の境界は始点と終点の2点により規定される。面は面積をもった曲面領域として表現され、曲面領域の境界は境界曲線と呼ばれる幾つかの線で規定される。境界曲線は始点および終点で他の境界曲線と連結し、曲面領域をとり囲む曲線枠を形成する。例えば立方体では、4本の線分による正方形の曲線枠が形成される。境界表現では、各境界曲線が他の面のどの境界曲線と一致するかという情報を管理することで、面と面の間

に連結情報をもたせている。曲線や曲面の表現には、一般に3次元空間形状を規定する多項式が用いられる。具体的は、曲線であれば直線や円弧などの解析表現 (analytic representation) による多項式や、より自由に形状表現ができる Bézier 曲線や B-spline 曲線などによる多項式が用いられる。曲面であれば平面や球面などの解析表現による多項式や、より自由に形状表現ができる Bézier 曲面や B-spline 曲面などによる多項式が用いられる。

3次元CADシステムによる設計作業は、3次元空間に曲線・曲面を作成する作業が主体となる。3次元CADシステムにおいて曲線・曲面を作成する処理はモデリングと呼ばれ、モデリングによって生成される形状はモデルと呼ばれる [11]。通常3次元CADシステムには、モデリング作業を効率化するための様々な機能が用意されている。例えばスイープ処理 (sweep)、集合演算処理 (boolean operation)、曲面ブレンディング処理 (surface blending) などである [22, 21, 8]。スイープ処理は、曲線を空間上で移動させ、移動によって曲線が描く軌跡を曲面として生成する機能である。例えば円を円がのる平面に対して垂直に移動させることで、円柱面が生成される。集合演算処理は、2つの立体を干渉するように空間上に配置し、2つの立体を合体させて1つの立体を生成したり、一方から他方の空間領域を切り取った立体を生成したりする機能である。例えば直方体に干渉するように円柱を配置し、直方体から円柱を切り取ることで直方体に穴を空けることができる。曲面ブレンディング処理は、空間に配置された2枚の曲面と滑らかに接する曲面を生成する機能である。例えば直方体において連結する2枚の平面と滑らかに接する曲面として、円柱面を生成することができる。曲面ブレンディング処理は、部品の角を丸める設計などで頻繁に用いられる。部品の角を丸めることで部品に手を触れても怪我をしないようにしたり、部品の強度や加工性を向上させることができる。他にも3次元CADシステムには数多くの機能が搭載されており、3次元CADシステム間の差別化の対象にもなっている。このため、ものづくりの現場では幾つかの異なる3次元CADシステムが利用されており、異なる3次元CADシステム間でモデルデータが受け渡されることも多い。

3次元CADシステムがもつ機能の一つに、曲面オフセット処理 (surface offset) がある [11, 14, 23]. 曲面オフセット処理とは、与えられた曲面に対してオフセット曲面を生成する処理である。オフセット曲面とは、与えられた曲面上の任意の点に対して、曲面の法線ベクトル方向に一定距離だけ離れた曲面である。曲面オフセット処理は、製品外装など一定肉厚となる形状の設計や、NC加工における工具経路の計算などに利用される [9, 25]. 数学理論上オフセット曲面は、平面や球面など解析曲面となる場合を除き、一般に無理式となる。平面は法線ベクトル方向が一定のため、平面に対するオフセット曲面は平面で表せる。球面は中心点から球面上の点に向かう方向が、法線ベクトル方向となるため、球面に対するオフセット曲面は元の球面と同じ中心点をもつ球面として表せる。円柱面や円錐面などの解析曲面についても、同じ表現形式の解析曲面としてオフセット曲面を表すことができる。しかし Bézier 曲面や B-spline 曲面など、より自由に形状が表現できる曲面に対しては、オフセット曲面は曲面の単位法線ベクトルを含んだ数式となるため無理式となる。曲面の単位法線ベクトルは根号を含んだ式で表され、一般に根号を外すことができないためである。従ってオフセット曲面は、一般に多項式では表せない [2, 30]. そこで、一般に曲面オフセット処理は、オフセット曲面を多項式曲面で近似する。具体的にはオフセット曲面の領域を碁盤目状に区分し、各区分領域を多項式曲面で近似することによって1枚の近似曲面を生成する。つまり、オフセット曲面を部分的に近似した曲面を連結して1枚の近似曲面を生成する。オフセット曲面の領域を碁盤目状に区分する位置は、オフセット曲面上にサンプル点を発生させて決定する。各区分領域の近似では、区分領域の四隅の点を補間する多項式曲面が計算される。曲面オフセット処理で生成されるオフセット曲面は、集合演算処理における曲面間の干渉計算や、曲面ブレンディング処理における曲面間の接線計算など、曲面式の微分計算を伴う処理に引き渡されることがある。従って生成される近似曲面は、曲面領域内で微分連続である必要がある。微分連続な多項式曲面によってオフセット曲面を近似する方法に関しては、幾つかの方法が提案されている [7, 13, 28]. しかし2枚の連結した曲面に対して、そ

れら従来の方法を用いてオフセット曲面を近似すると、モデルデータの品質低下という問題が発生することがある。具体的には、次に挙げる2つの問題が生じることがある。

**問題1** オフセット曲面間に微小要素が発生することがある

**問題2** オフセット曲面間を滑らかに連結できないことがある

問題1における微小要素とは長さが非常に短い曲線、および、曲面の境界曲線間の距離が非常に近い細長い曲面である。微小要素は、表側から見て凸状に折れて連結した2枚の曲面に対し、曲面オフセット処理したときに発生することがある。2枚の曲面が表側から見て凸状に折れて連結する場合、オフセット曲面は与えられた曲面の法線ベクトル方向に生成されるため、生成されるオフセット曲面間には隙間が生じる。一般に外装設計やNC加工においてオフセット曲面間に隙間が生じる場合、隙間を補間する曲面を生成して隙間を塞ぐ必要がある。このとき2枚の曲面間の折れ具合がわずかであると、オフセット曲面間の隙間も非常に小さくなるため、補間曲面が微小要素となってしまうことがある。従来方法においても、曲面の法線ベクトル方向にサンプル点を求めてオフセット曲面を近似するため、2枚の曲面が表側から見てわずかに凸状に折れて連結していると、理論上のオフセット曲面と同様に、補間曲面が微小要素となってしまうことがある。モデルデータに微小要素が含まれると、モデルデータをシステム間で受け渡す際に微小要素が欠落してしまうことがある。微小要素の欠落は、主にシステム間で許容誤差が異なることにより発生する。許容誤差とは平行・交差・一致などの幾何条件の判定に用いられる有限桁の実数値である。モデルデータを扱うシステムは、曲線や曲面といった幾何形状を有限桁の実数値によってデータ化する。例えば3次元空間上の座標位置は、 $(x, y, z)$ の3つの有限桁の浮動小数点数によってデータ化する。しかし、そのようにデータ化すると実数の表現形式や演算方法の違いによって、計算結果に数値演算上の誤差が生じてしまうことがある。このため平行・交差・一致などの幾何条件は、許容誤差をもって判定せざるを得なくなり、許容誤差よりも小

さい値は、長さなどを表す数値として扱えなくなる。しかし許容誤差による幾何条件の判定は、実用的なシステムを構築する上で現状避けて通れない手段である。ところがモデルデータに微小要素が含まれると、システムによっては微小要素が扱えない長さの曲線、あるいは、扱えない長さの幅をもった細長い曲面となってしまうため、システム内で微小要素が欠落することがある。例えば最も小さい長さとして  $10^{-6}$  で数値表現されたものを扱えるシステムと、 $10^{-2}$  までしか扱えないシステムがあるとする。このとき前者で  $10^{-4}$  の長さの曲線を生成して後者のシステムにモデルデータを受け渡すと、後者では  $10^{-2}$  までの長さしか扱えないため曲線が欠落する。モデルデータに含まれる微小要素が欠落すると、面と面の間の連結関係が破綻するため、立体の内部と外部とを区別することができなくなってしまう。つまりソリッドモデルによる立体表現が破綻する。この結果、モデルデータの受け渡しに失敗する。また、集合演算処理における曲面間の干渉計算や、曲面ブレンディング処理における曲面間の接線計算などで、微小要素に対する数値計算に失敗する可能性も高くなる。従って微小要素を含むモデルデータは低品質であり、微小要素を含むモデルデータは生成されないようにしなければならない [16]。

問題 2 は、2 枚の滑らかに連結した曲面に対し、曲面オフセット処理したときに生じることがある。2 枚の曲面が滑らかに連結した状態とは、連結部の境界曲線の形状が曲面間で一致し、かつ、連結部の境界曲線に沿って両側の曲面の法線ベクトル方向が一致している状態である。2 枚の滑らかに連結した曲面に対するオフセット曲面間は、理論上滑らかに連結することが数学的に証明されている [10]。しかし従来の方法を用いてオフセット曲面を近似すると、オフセット曲面間の連結部において、境界曲線形状や法線ベクトル方向がオフセット曲面の形状に依存して別々に計算されるため、近似曲面間が滑らかに連結されないことがある。具体的には、オフセット曲面間の連結部において、境界曲線形状が近似曲面間で一致せず、近似曲面間に隙間が生じることがある。境界曲線形状が近似曲面間で一致しなくなる原因は、オフセット曲面領域を基盤目状に区分する際、オフセット曲面の形状に依存して区分位置が決定されるた

めである。オフセット曲面の形状に依存して区分位置が決定されると、2枚のオフセット曲面が同一形状でない限り、一般に2枚のオフセット曲面の区分位置は一致しない。つまりオフセット曲面間の連結部において、境界曲線の区分位置が両側のオフセット曲面間で一致なくなることがある。境界曲線の区分位置が一致しないと、各区間は近似による補間であるため、生成される境界曲線の形状が近似曲面間で一致しない。結果として、生成される近似曲面間に隙間が生じてしまうことがある。また近似曲面間に隙間が生じなくても、近似曲面間の連結部において法線ベクトル方向が近似曲面間で一致せず、2枚の近似曲面間が折れて連結されることがある。近似曲面間が折れて連結される原因は、オフセット曲面の形状に依存してオフセット曲面の区分領域が補間計算されるためである。具体的には、区分領域の四隅におけるオフセット曲面の2次微分値が、補間計算に用いられるためである。オフセット曲面の2次微分値が補間計算に用いられると、連結するオフセット曲面間が2次微分連続でない限り、一般に、オフセット曲面間の連結部において両側に生成される曲面の法線ベクトル方向が一致しない。結果として、生成される近似曲面間に折れが生じてしまうことがある。滑らかに連結されるべき曲面間に隙間があると、システムが曲面間を連結できなくなり立体表現が破綻してしまうことがある。また、滑らかに連結されるべき曲面間に折れがあると、それらの曲面を用いた処理において低品質なモデルデータを生成してしまうことがある。例えば曲面オフセット処理に用いると、問題1について上述したとおり、曲面間の折れ具合がわずかである場合に微小要素が発生することがある。従って滑らかに連結されるべき曲面間に隙間や折れがあると、問題1と同様に、品質低下によるデータ交換の失敗を引き起こすことがある。

上述したとおり、従来技術を用いた曲面オフセット処理には、モデルデータの品質低下という問題が存在する。曲面オフセット処理以外にもモデルデータの品質低下の問題は存在し、3次元CADシステムを利用する上で課題となっている[17, 29, 31, 33]。低品質なモデルデータによる経済損失は、日本の自動車産業においては年間数千万ドル、米国の自動車産業においては年間十

億ドル以上とも試算されている [33, 31]. 国際標準化機構 (ISO) においては、モデルデータの品質規準が定められるようになった [16]. 従って、3次元CADシステムにおいてモデルデータの品質低下を抑制することは、ものづくり分野においてQCDの向上を図ることになる. そこで本研究は、3次元CADシステムにおける曲面オフセット処理において、上述した2つの問題をそれぞれ解決することを目的とする.

問題1を解決するため、本論文は、オフセット曲面の境界曲線を近似して曲線の枠を生成した後、生成した曲線枠を境界曲線として近似曲面を生成するという、2段階の処理に分かれるオフセット曲面近似手法を提案する. 本手法はオフセット曲面間の隙間が非常に小さい場合、近似曲面間に隙間が生じないように、2つの曲線枠を生成する. 従って補間曲面を生成する必要がなくなり、微小要素の発生が抑制される. 具体的な手順としては、まず2枚のオフセット曲面の境界曲線をそれぞれ近似し、近似曲線による2つの曲線枠を生成する. 次に、元の曲面間の連結部に対応した2本の近似曲線について、近似曲線間の距離が非常に近い部分が存在するかどうかを測定する. 測定では、元の曲面間の連結部の曲線上に幾つかのサンプル点を求め、各サンプル点に対応する近似曲線上の点である2点間の距離を測定する. 測定の結果、距離がある閾値以下となる非常に近い2点が存在した場合、オフセット曲面間に微小要素が発生すると判断する. 微小要素が発生すると判断された場合、測定に用いた各2点の中間点を通る曲線を生成し、2本の近似曲線と置き換える. そして置き換え前の近似曲線と連結していた各近似曲線を、置き換え後の曲線と再び連結するように変形する. この変形処理により、中間点を通る曲線を共有した状態で、2つの曲線枠が再構築される. そして再構築された曲線枠を境界曲線とし、曲面領域内で微分連続な2枚の近似曲面を生成する. 再構築された2つの曲線枠が1本の曲線を共有するため、2枚の近似曲面は隙間なく連結される. 結果として、補間曲面を生成する必要がなくなり微小要素の発生が抑制される.

問題2を解決するため、本論文は、オフセット曲面間の連結部において境界曲線形状と法線ベクトル方向を、近似曲面間で拘束して計算するオフセット曲

面近似手法を提案する。本手法は、問題 1 を解決する手法と同様に、近似曲面間に隙間が生じないように 2 つの曲線枠を生成し、生成した曲線枠を境界曲線とする近似曲面を生成する。そして、近似曲面間の連結部となる境界曲線上の各点において、両側の近似曲面の接平面を同一平面に拘束し、近似曲面の形状を修正する。結果として、隙間や折れのない滑らかに連結される 2 枚の近似曲面が生成される。具体的な手順としては、先ず問題 1 を解決する手法と同様に、2 枚のオフセット曲面の境界曲線をそれぞれ近似し、近似曲線による 2 つの曲線枠を生成する。各境界曲線の近似では、境界曲線の形状に応じて適応的にサンプル点を発生させ、サンプル点を補間するように近似曲線を生成する。このとき、オフセット曲面間の連結部における境界曲線については、2 つの曲線枠で 1 本の近似曲線を共有するようにする。次に、生成された 2 つの曲線枠をそれぞれ境界曲線として、曲面領域内で微分連続となる 2 枚の近似曲面を生成する。2 つの曲線枠は 1 本の近似曲線を共有しているので、生成される 2 枚の近似曲面間は隙間なく連結される。そして、近似曲面間の連結部となる境界曲線上の各点において、接平面が同一平面となるように両側の近似曲面の形状を修正する。このとき曲面領域内で微分連続な状態、および、近似曲面間で隙間なく連結した状態を維持しつつ、両側の近似曲面の形状を修正する。結果として、近似曲面間の連結部となる境界曲線上の各点において、両側の近似曲面の法線ベクトル方向が一致するため、2 枚の近似曲面間が滑らかに連結される。

以上 2 つの提案手法により、前述した 2 つの問題が解決される。どちらの手法においても生成される近似曲面は、曲面領域内で微分連続であるため、曲面式の微分計算を伴う処理に引き渡すことが可能である。本論文では、上述した 2 つの提案手法を幾つかの実用的な立体モデルに適用し、問題 1 を解決する手法によって、微小要素の発生によるモデルデータの品質低下が抑制されること、問題 2 を解決する手法によって、オフセット曲面間を滑らかに連結できないことによるモデルデータの品質低下が抑制されることを実証する。

## 1.2 本論文の構成

本論文は、本章を含めた5つの章によって構成され、各章は幾つかの節によって構成される。次章となる第2章では、オフセット曲面の詳細について述べ、従来技術の課題を明らかにする。続いて第3章と第4章において、従来技術の課題を解決する具体的な手法を提案する。最後に第5章において、本研究の結論を述べる。各章の概要は次のとおりである。

- 第1章 序論（本章）

第2章から始まる本論への導入のため、1.1節において本研究の背景と目的を述べ、1.2節（本節）において本論文の構成を説明する。

- 第2章 従来技術の課題

第1章で述べた背景において従来技術が抱える問題点を分析し、解決すべき課題を示す。先ず2.1節において、本研究の内容を理解するために必要な3次元CAD分野の知識として、3次元CADシステムにおける曲面表現および曲面間の接続について説明する。次に2.2節において、本研究で取り扱うオフセット曲面の数学上の定義と特徴を述べ、オフセット曲面を生成する従来技術について説明する。そして2.3節において、従来技術が抱える問題を解決するため、微小要素の発生を抑制する近似オフセット曲面の生成、および、隙間なく滑らかに連結する近似オフセット曲面の生成という2つの課題を示す。最後に2.4節において、第2章のまとめを述べる。

- 第3章 微小要素による品質低下を抑制する曲面オフセット処理

第2章で示した課題の1つである、微小要素の発生を抑制する近似オフセット曲面の生成について具体的な解決手法を提案する。先ず3.1節において、微小要素の発生を抑制する処理に用いる1枚の近似オフセット曲面の生成手法について説明する。次に3.2節において、微小要素の発生を抑制する近似オフセット曲面を生成する手法について説明する。そ

して 3.3 節において、幾つかの実用データに対し提案手法を適用した結果を示し、最後に 3.4 節において、第 3 章のまとめを述べる。

- 第 4 章 隙間や折れによる品質低下を抑制する曲面オフセット処理  
第 2 章で示したもう 1 つの課題である、隙間なく滑らかに連結する近似オフセット曲面の生成について具体的な解決手法を提案する。先ず 4.1 節において、隙間なく連結する 2 枚の近似オフセット曲面を生成する手法について説明する。次に 4.2 節において近似オフセット曲面間を滑らかに連結する手法について説明する。そして 4.3 節において、幾つかの実用データに対して提案手法を適用した結果を示し、最後に 4.4 節において、第 4 章のまとめを述べる。

- 第 5 章 結論  
本研究の成果をまとめ、今後の課題を示す。先ず 5.1 節において、第 2 章で示した課題に対する第 3 章と第 4 章の提案による成果をまとめる。そして 5.2 節において、今後の課題を示す。

## 第2章 従来技術の課題

### 2.1 曲面表現と曲面間の接続

第1章で述べたとおり，一般に3次元CADシステムは，多項式で表現した曲面によって立体を表現する．曲面を多項式で表現するときは，一般に2次元直交座標系における2つのパラメータを用い，式(2.1)のように表現する．

$$\mathbf{S}(u, v) = \begin{bmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

ここで， $x(u, v)$ ， $y(u, v)$ ， $z(u, v)$  は，パラメータ  $u$ ， $v$  の関数である．つまり，パラメータ  $u$ ， $v$  による2次元直交座標系の1点が，3次元直交座標系における，曲面上の1点に対応する．本論文では，曲面を表現する2次元直交座標系を**パラメータ空間**と呼ぶ．パラメータ  $u$ ， $v$  の定義域は，一般にそれぞれ区間  $[0, 1]$  とされる．従って，曲面はパラメータ空間において四辺形の領域をなす(図2.1)．パラメータ空間において，座標軸と平行な線分は**等パラメータ線**と呼ばれ，3次元直交座標系においては空間曲線を表す．等パラメータ線のうち， $(u, 0)$ ， $(1, v)$ ， $(u, 1)$ ， $(0, v)$  で表される4本の線分は曲面領域の境界であり，**境界曲線**と呼ばれる[6]．一般に，空間曲線をパラメータを用いた関数で表すときは，式(2.2)のように表現する．

$$\mathbf{C}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

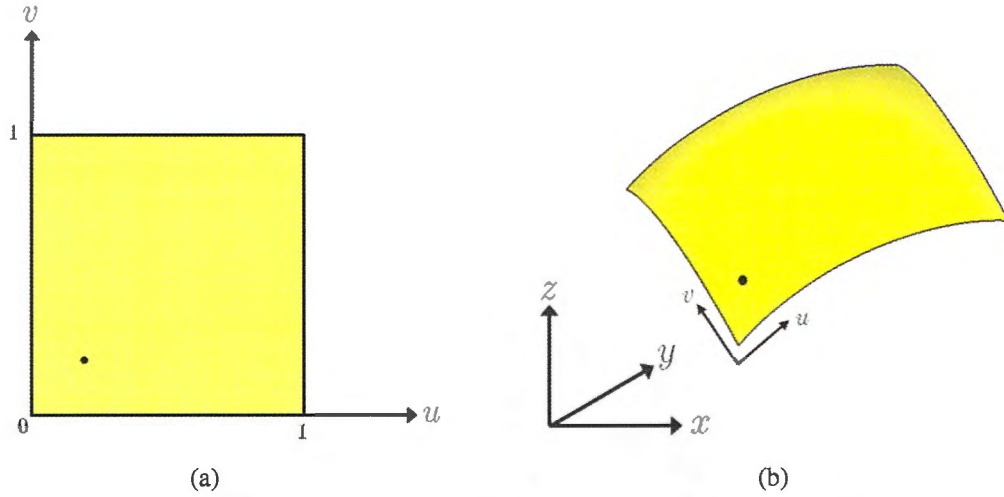


図 2.1: (a) パラメータ空間, (b) 3次元直交座標系.

ここで,  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  は, パラメータ  $t$  の関数である. つまり, パラメータ区間内の 1 点が, 3次元直交座標系における曲線上の 1 点に対応する. パラメータの定義域は, 一般に区間  $[0, 1]$  とされる. 式 (2.2) で表される曲線が, パラメータ  $t$  により  $r$  階微分可能であるとき,  $\mathbf{C}(t)$  は  $C^r$  連続な曲線と呼ばれる. また, 式 (2.1) で表される曲面が, パラメータ  $u$ ,  $v$  により  $r$  階偏微分可能であるとき,  $\mathbf{S}(u, v)$  は  $C^r$  連続な曲面と呼ばれる. 2本の曲線が 1 点を共有して連結するとき, 2本の曲線は接続すると表現され, また, 2枚の曲面が 1本の境界曲線を共有して連結するとき, 2枚の曲面は接続すると表現される [6]. 2枚の曲面が接続するとき, 2枚の曲面が共有する境界曲線を, 本論文では**共有境界**と呼ぶ.

接続する 2本の曲線を 1本の曲線とみなしたとき, 接続点における微分値が 2本の曲線間で  $r$  階まで互いに一致すれば, 2本の曲線は  $C^r$  連続に接続すると表現される [6].  $C^1$  連続に接続する 2本の曲線を 1本の曲線とみなすとき, 一方の曲線  $\mathbf{C}^a(t)$  の区間を  $t \in [0, t']$ , 他方の曲線  $\mathbf{C}^b(t)$  の区間を  $t \in [t', 1]$  とすると, 2本の曲線は式 (2.3) の関係を満たす.

$$(1 - t') \frac{d}{dt} \mathbf{C}^a(t) \Big|_{t=t'} = t' \frac{d}{dt} \mathbf{C}^b(t) \Big|_{t=t'}. \quad (2.3)$$

接続する 2枚の曲面を 1枚の曲面とみなしたとき, 共有境界上において, 共有

境界を横切る方向の偏微分ベクトルが、2枚の曲面間で  $r$  階まで一致すれば、2枚の曲面は  $C^r$  連続に接続すると表現される [6]. なお、曲面の境界曲線を横切る方向の偏微分ベクトルは、**境界横断微分ベクトル**と呼ばれている [11].  $C^1$  連続に接続する2枚の曲面を1枚の曲面とみなすとき、一方の曲面  $\mathbf{S}^a(u, v)$  の領域を  $u \in [0, u']$ ,  $v \in [0, 1]$ , 他方の曲面  $\mathbf{S}^b(u, v)$  の領域を  $u \in [u', 1]$ ,  $v \in [0, 1]$  とすると、2枚の曲面は式 (2.4) の関係を満たす.

$$(1 - u') \frac{\partial}{\partial u} \mathbf{S}^a(u, v) \Big|_{u=u'} = u' \frac{\partial}{\partial u} \mathbf{S}^b(u, v) \Big|_{u=u'}. \quad (2.4)$$

共有境界で接続する2枚の曲面間の接続状態を、次の2つに分類する.

- 折れた状態
- 滑らかな状態

折れた状態とは、共有境界上で、両側の曲面の単位法線ベクトルが一致しない点が存在する状態である. 曲面  $\mathbf{S} = \mathbf{S}(u, v)$  の単位法線ベクトル  $\mathbf{N} = \mathbf{N}(u, v)$  は、式 (2.5) で与えられる.

$$\mathbf{N} = \frac{\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v} \right|}. \quad (2.5)$$

滑らかな状態とは、共有境界上で、両側の曲面の単位法線ベクトルが一致する状態である. 曲面  $\mathbf{S}^a(u, v)$  の単位法線ベクトルを  $\mathbf{N}^a(u, v)$ , 曲面  $\mathbf{S}^b(u, v)$  の単位法線ベクトルを  $\mathbf{N}^b(u, v)$  で表し、これら2枚の曲面が共有境界  $\mathbf{S}^a(1, v)$  および  $\mathbf{S}^b(0, v)$  で接続するとき、2枚の曲面間の接続が滑らかな状態であれば、式 (2.6) の関係を満たす.

$$\mathbf{N}^a(1, v) = \mathbf{N}^b(0, v). \quad (2.6)$$

2枚の曲面間の接続が滑らかな状態であるとき、式 (2.5) と式 (2.6) より、共有境界上の各点において両側の曲面の  $u$  方向、および、 $v$  方向の偏微分ベクトルは同一平面にのる. 式 (2.6) で示されるように、接続する2枚の曲面の単位法

線ベクトルが共有境界上で一致するとき，2枚の曲面の接続関係は  $G^1$  連続と呼ばれる [6]．2枚の曲面  $\mathbf{S}^a(u, v)$ ， $\mathbf{S}^b(u, v)$  が， $\mathbf{S}^a(1, v)$  と  $\mathbf{S}^b(0, v)$  において  $G^1$  連続に接続するとき，式 (2.7) の関係を満たすスカラー関数  $\alpha(v)$ ， $\beta(v)$ ， $\gamma(v)$  が存在する．

$$\alpha(v) \frac{\partial}{\partial u} \mathbf{S}^a(u, v) \Big|_{u=1} + \beta(v) \frac{\partial}{\partial u} \mathbf{S}^b(u, v) \Big|_{u=0} + \gamma(v) \frac{\partial}{\partial v} \mathbf{S}^a(u, v) \Big|_{u=1} = 0. \quad (2.7)$$

3次元CADシステムでは，曲線・曲面の形状評価や変形などの形状処理を，代数方程式を解くことで処理することが頻繁に行われる．このため，3次元CADシステムでは，代数計算で扱いやすいように，多項式で表現される曲線・曲面が用いられる．多項式は次数が高ければ高いほど，複雑な曲線・曲面形状を表現できるが，代数計算は複雑になり処理も遅くなる．従って，多項式は低次であるほど扱いやすい．3次元CADシステムでは，複雑な曲線・曲面形状を幾つかの曲線区間・曲面領域に区分し，各区間・領域を3次以下の低次の多項式で表現することが多い．各区間を表現する曲線は**曲線セグメント**，あるいは単にセグメントと呼ばれ，各領域を表現する曲面は**曲面パッチ**，あるいは単にパッチと呼ばれる [6, 4]．3次元CADシステムで主に用いられる曲線表現は，直線，円弧，楕円などの解析的な表現 (analytic representation) による曲線 [25]，および，より自由に形状表現ができる Bézier 曲線や B-spline 曲線などの多項式である．曲面表現は，平面，球面，円柱面，円錐面などの解析的な表現による曲面 [25]，および，より自由に形状表現ができる Bézier 曲面や B-spline 曲面などの多項式である．

Bézier 曲線は，式 (2.8) で表現される．

$$\mathbf{C}(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \mathbf{P}_i, \quad (2.8)$$

ここで， $\mathbf{P}_i$  は，空間上に任意に配置される  $n + 1$  個の制御点である．制御点とは，多項式の曲線・曲面において，形状を制御するために空間に配置される点である．式 (2.8) において， $B_i^n(t)$  は Bernstein 基底と呼ばれる多項式である

[6]. Bernstein 基底は、式 (2.9) の形式で与えられる.

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i}. \quad (2.9)$$

式 (2.8) において、曲線の端点  $\mathbf{C}(0)$ ,  $\mathbf{C}(1)$  は、制御点  $\mathbf{P}_0$ ,  $\mathbf{P}_n$  である. 従って Bézier 曲線は、制御点と Bernstein 基底によって端点間を補間する曲線である. Bernstein 基底の微分は式 (2.10) のとおり計算できる [6].

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} B_i^n(t) &= \frac{in!}{i!(n-i)!} t^{i-1} (1-t)^{n-i} - \frac{(n-i)n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i-1} \\ &= \frac{n(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} t^{i-1} (1-t)^{n-i} - \frac{n(n-i)!}{i!(n-i-1)!} t^i (1-t)^{n-i-1} \\ &= n(B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)), \end{aligned} \quad (2.10)$$

ここで、 $B_{-1}^{n-1}(t) = B_n^{n-1}(t) = 0$  である. Bézier 曲線の微分は、式 (2.10) を用いて式 (2.11) のとおり計算できる [6].

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} C(t) &= n \sum_{i=0}^n (B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)) \mathbf{P}_i \\ &= n \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) \mathbf{P}_{i+1} - n \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) \mathbf{P}_i \\ &= n \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) (\mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{P}_i). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Bézier 曲線の両端点における微分は、式 (2.12) のとおり 2 つ制御点間の差分ベクトルを用いて求めることができる.

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} C(t) \right|_{t=0} &= n (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0), \\ \left. \frac{d}{dt} C(t) \right|_{t=1} &= n (\mathbf{P}_n - \mathbf{P}_{n-1}). \end{aligned} \quad (2.12)$$

2本の Bézier 曲線を式 (2.13) のとおり表す.

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^a(t) &= \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \mathbf{P}_i, \\ \mathbf{C}^b(t) &= \sum_{i=0}^m B_i^m(t) \mathbf{Q}_i. \end{aligned} \quad (2.13)$$

式 (2.13) の 2 本の Bézier 曲線が  $\mathbf{C}^a(1)$ ,  $\mathbf{C}^b(0)$  において  $C^1$  連続に接続するとき, 式 (2.3) と式 (2.12) を用いると, 式 (2.14) の関係が得られる.

$$n\mu(\mathbf{P}_n - \mathbf{P}_{n-1}) = m(\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_0), \quad (2.14)$$

ここで  $\mu$  は, 2 本の Bézier 曲線を 1 本の曲線とみなしたときの,  $\mathbf{C}^a(t)$  に対する  $\mathbf{C}^b(t)$  のパラメータ区間の比である.

Bézier 曲面は, 式 (2.15) で表現される.

$$\mathbf{S}(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_i^n(u) B_j^m(v) \mathbf{P}_{ij}, \quad (2.15)$$

ここで,  $\mathbf{P}_{ij}$  は,  $(n+1) \times (m+1)$  個の制御点であり,  $B_i^n(u)$  と  $B_j^m(v)$  は, Bernstein 基底である. 式 (2.15) は, 式 (2.16) および式 (2.17) のとおり変形できる.

$$\mathbf{S}(u, v) = \sum_{j=0}^m B_j^m(v) \left\{ \sum_{i=0}^n B_i^n(u) \mathbf{P}_{ij} \right\}, \quad (2.16)$$

$$\mathbf{S}(u, v) = \sum_{i=0}^n B_i^n(u) \left\{ \sum_{j=0}^m B_j^m(v) \mathbf{P}_{ij} \right\}. \quad (2.17)$$

式 (2.16) および式 (2.17) の中括弧内は, それぞれ式 (2.8) の形式である. 従って, 式 (2.15) の Bézier 曲面は,  $m+1$  本の Bézier 曲線または  $n+1$  本の Bézier 曲線を用いて表現できる曲面とみなせる. 式 (2.15) にパラメータ  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(0, 1)$  を与えると, 制御点  $\mathbf{P}_{00}$ ,  $\mathbf{P}_{n0}$ ,  $\mathbf{P}_{nm}$ ,  $\mathbf{P}_{0m}$  の 4 点が, パラメータ空間における曲面領域の四隅に対応した点であることがわかる. Bézier 曲面は, 制御点と Bernstein 基底による多項式で, これら四隅に対応した点を補間

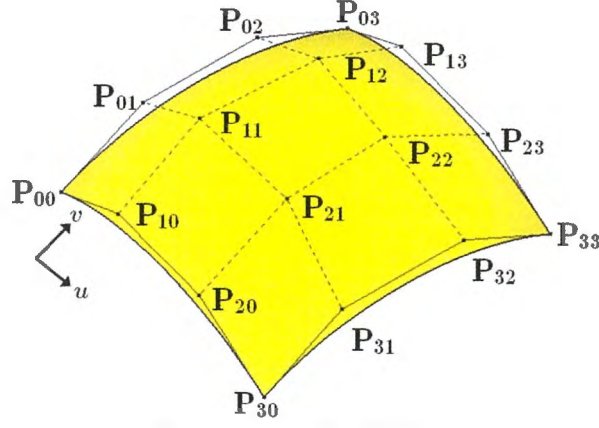


図 2.2: 双 3 次 Bézier 曲面.

する曲面である．図 2.2 は，双 3 次 Bézier 曲面の例である．式 (2.15) に境界曲線のパラメータ  $(u, 0)$ ,  $(1, v)$ ,  $(u, 1)$ ,  $(0, v)$  を代入すると，それぞれ式 (2.8) の形式になるため，Bézier 曲面の境界曲線は Bézier 曲線である．従って，Bézier 曲面は Bézier 曲線で囲まれた枠の内部を補間する曲面である．式 (2.15) で表される Bézier 曲面の各境界曲線の形状は， $u$  方向の境界曲線であれば  $n + 1$  個の制御点によって， $v$  方向の境界曲線であれば  $m + 1$  個の制御点によって制御される．本論文では，曲面の境界曲線の形状を制御する制御点を**境界上の制御点**と呼び，それ以外の曲面の制御点を**内部制御点**と呼ぶ．Bézier 曲面の偏微分は，式 (2.11) を用いると式 (2.18) のとおり計算できる．

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} S(u, v) &= n \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m B_i^{n-1}(u) B_j^m(v) \{P_{(i+1)j} - P_{ij}\}, \\ \frac{\partial}{\partial v} S(u, v) &= m \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{m-1} B_i^n(u) B_j^{m-1}(v) \{P_{i(j+1)} - P_{ij}\}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Bézier 曲面の各境界曲線における境界横断微分ベクトルは，式 (2.19) のとおり 2 つの制御点間の差分ベクトルを用いて求めることができる．

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial}{\partial u} \mathbf{S}(u, v) \right|_{u=0} &= n \sum_{j=0}^m B_j^m(v) \{ \mathbf{P}_{1j} - \mathbf{P}_{0j} \}, \\
\left. \frac{\partial}{\partial v} \mathbf{S}(u, v) \right|_{v=0} &= m \sum_{i=0}^n B_i^n(u) \{ \mathbf{P}_{i1} - \mathbf{P}_{i0} \}, \\
\left. \frac{\partial}{\partial u} \mathbf{S}(u, v) \right|_{u=1} &= n \sum_{j=0}^m B_j^m(v) \{ \mathbf{P}_{nj} - \mathbf{P}_{(n-1)j} \}, \\
\left. \frac{\partial}{\partial v} \mathbf{S}(u, v) \right|_{v=1} &= m \sum_{i=0}^n B_i^n(u) \{ \mathbf{P}_{im} - \mathbf{P}_{i(m-1)} \}.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

2 枚の Bézier 曲面を式 (2.20) のとおり表す.

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}^a(u, v) &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_i^n(u) B_j^m(v) \mathbf{P}_{ij}, \\
\mathbf{S}^b(u, v) &= \sum_{i=0}^{\ell} \sum_{j=0}^m B_i^{\ell}(u) B_j^m(v) \mathbf{Q}_{ij}.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

式 (2.20) で表される 2 枚の Bézier 曲面が,  $\mathbf{S}^a(1, v)$ ,  $\mathbf{S}^b(0, v)$  を共有境界として  $C^1$  連続に接続するとき, 式 (2.4) と式 (2.19) を用いると, 式 (2.21) の関係が得られる.

$$n\mu(\mathbf{P}_{nj} - \mathbf{P}_{(n-1)j}) = \ell(\mathbf{Q}_{1j} - \mathbf{Q}_{0j}) \quad (j = 0, 1, \dots, m), \tag{2.21}$$

ここで  $\mu$  は, 2 枚の Bézier 曲面を 1 枚の曲面とみなしたときの,  $\mathbf{S}^a(u, v)$  に対する  $\mathbf{S}^b(u, v)$  の  $u$  方向のパラメータ区間の比である. 式 (2.20) で表される 2 枚の Bézier 曲面が,  $\mathbf{S}^a(1, v)$ ,  $\mathbf{S}^b(0, v)$  を共有境界として  $G^1$  連続に接続するとき, 式 (2.7) と式 (2.19) および式 (2.11) を用いると, 式 (2.22) の関係が得られる.

$$\begin{aligned}
&\alpha(v)n \sum_{j=0}^m B_j^m(v) \{ \mathbf{P}_{nj} - \mathbf{P}_{(n-1)j} \} + \\
&\beta(v)\ell \sum_{j=0}^m B_j^m(v) \{ \mathbf{Q}_{1j} - \mathbf{Q}_{0j} \} + \\
&\gamma(v)m \sum_{j=0}^{m-1} B_j^{m-1}(v) \{ \mathbf{P}_{1(j+1)} - \mathbf{P}_{1j} \} = 0.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

B-spline 曲線は，曲線全体を幾つかの曲線セグメントに区分して表現できる曲線であり，式 (2.23) で表現される [27].

$$\mathbf{C}(t) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(t) \mathbf{P}_i, \quad (2.23)$$

ここで， $\mathbf{P}_i$  は  $n+1$  個の制御点であり， $N_{i,p}(t)$  は B-spline 基底と呼ばれる多項式である．B-spline 基底は，式 (2.24) の形式で与えられる．

$$N_{j,0}(t) = \begin{cases} 1 & t_j < t_{j+1} \text{ かつ } t_j \leq t < t_{j+1} \text{ のとき} \\ 0 & \text{その他のとき} \end{cases}, \quad (2.24)$$

$$N_{j,r}(t) = \frac{t - t_j}{t_{j+r} - t_j} N_{j,r-1}(t) + \frac{t_{j+r+1} - t}{t_{j+r+1} - t_{j+1}} N_{j+1,r-1}(t)$$

$$(r = 1, 2, \dots, p),$$

ここで， $t_k$  ( $k = 0, 1, \dots, n+p+1$ ) は，ノット (knot) と呼ばれる  $t_k \leq t_{k+1}$  となる任意のスカラーであり，ノットの数列はノットベクトル (knot vector) と呼ばれる．式 (2.24) において  $N_{j,r}(t)$  に 0 除算が生じる場合は，その項は 0 とみなす．式 (2.24) より，式 (2.23) は式 (2.25) のとおり表すことができる [14].

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(t) &= \sum_{i=0}^n \left\{ \frac{t - t_i}{t_{i+p} - t_i} N_{i,p-1}(t) + \frac{t_{i+p+1} - t}{t_{i+p+1} - t_{i+1}} N_{i+1,p-1}(t) \right\} \mathbf{P}_i \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{t - t_i}{t_{i+p} - t_i} N_{i,p-1}(t) \mathbf{P}_i + \sum_{i=1}^{n+1} \frac{t_{i+p} - t}{t_{i+p} - t_i} N_{i,p-1}(t) \mathbf{P}_{i-1} \quad (2.25) \\ &= \sum_{i=0}^{n+1} N_{i,p-1}(t) \frac{(t - t_i) \mathbf{P}_i + (t_{i+p} - t) \mathbf{P}_{i-1}}{t_{i+p} - t_i}, \end{aligned}$$

ここで， $\mathbf{P}_{-1} = 0$ ， $\mathbf{P}_{n+1} = 0$  である．さらに， $r = 1, 2, \dots, p$  において  $\mathbf{P}_{-r} = 0$ ， $\mathbf{P}_{n+r} = 0$  とし，かつ， $\mathbf{P}_i^0 = \mathbf{P}_i$  とおくと，式 (2.25) は式 (2.26) のとおり表せる．

$$\mathbf{C}(t) = \sum_{i=0}^{n+p} N_{i,0}(t) \mathbf{P}_i^p, \quad (2.26)$$

ここで，

$$\mathbf{P}_i^r = \frac{(t - t_i) \mathbf{P}_i^{r-1} + (t_{i+p+1-r} - t) \mathbf{P}_{i-1}^{r-1}}{t_{i+p+1-r} - t_i} \quad (r = 1, 2, \dots, p). \quad (2.27)$$

式(2.24)より,  $t_k < t_{k+1}$  である区間  $[t_k, t_{k+1})$  において, 非零となる 0 次の B-spline 基底は  $N_{k,0}(t)$  である. 従って  $t \in [t_k, t_{k+1})$  において, 式(2.23)の B-spline 曲線は式(2.26)および式(2.27)を用いて式(2.28)のとおり表せる [14].

$$\mathbf{C}(t) = \mathbf{P}_k^p. \quad (2.28)$$

式(2.27)と式(2.28)より,  $t_k < t_{k+1}$  である区間  $[t_k, t_{k+1})$  において, B-spline 曲線の区分形状は  $p+1$  個の制御点  $\mathbf{P}_{k-p}, \mathbf{P}_{k-p+1}, \dots, \mathbf{P}_k$  と  $2p$  個のノット  $t_{k-p+1}, t_{k-p+2}, \dots, t_{k+p}$  によって決定される. 従って,  $k$  は  $p$  以上  $n$  以下である必要がある. つまり, 式(2.23)における B-spline 曲線は定義域が  $[t_p, t_{n+1})$  であり,  $t_k < t_{k+1}$  である区間によって区分表現される. ただし実用においては  $N_{n,0}(t_{n+1}) = 1$  とし, 定義域を  $[t_p, t_{n+1}]$  として扱う. また, セグメント単位で B-spline 曲線を扱う場合も  $N_{k,0}(t_{k+1}) = 1$  とし, セグメントの定義域を  $[t_k, t_{k+1}]$  とする.

式(2.23)における B-spline 曲線において, ノット挿入 (knot insertion) と呼ばれる操作により,  $t_k < t_{k+1}$  である区間を 2 つの区間に分割できる. B-spline 曲線においてノット挿入は, 曲線の定義域内でノットを 1 つ追加し, 同じ次数で同じ形状の B-spline 曲線を再定義する処理である [27]. 式(2.23)において, ノットベクトルのノット数は  $n + p + 1$  であるので, ノット挿入後の B-spline 曲線は, ノット挿入前の B-spline 曲線よりも制御点数が 1 つ増える. 式(2.23)において,  $t_k < t_{k+1}$  である区間にノット挿入するとき, 再定義される B-spline 曲線を式(2.29)のとおり表す.

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n+1} \tilde{N}_{i,p}(t) \mathbf{Q}_i &= \sum_{i=0}^n N_{i,p}(t) \mathbf{P}_i, \\ \mathbf{T} &= [t_0, t_1, \dots, t_k, t_{k+1}, \dots, t_{n+p+1}], \\ \tilde{\mathbf{T}} &= [\tilde{t}_0, \tilde{t}_1, \dots, \tilde{t}_k, \tilde{t}_{k+1}, \tilde{t}_{k+2}, \dots, \tilde{t}_{n+p+2}], \end{aligned} \quad (2.29)$$

ここで,  $\mathbf{T}, \mathbf{P}_i$  はノット挿入前のノットベクトルと制御点であり,  $\tilde{\mathbf{T}}, \mathbf{Q}_i$  はノット挿入後のノットベクトルと制御点である. また,  $N_{i,p}(t), \tilde{N}_{i,p}(t)$  はノット

ト挿入前後の B-spline 基底である．式 (2.29) において挿入されるノットは  $\tilde{t}_{k+1}$  であり， $0 \leq j \leq k$  においては  $\tilde{t}_j = t_j$ ， $k+1 \leq j \leq n+p+1$  においては  $\tilde{t}_{j+1} = t_j$  である．また，式 (2.28) より式 (2.29) は， $0 \leq j \leq k-p$  において  $\mathbf{Q}_j = \mathbf{P}_j$ ， $k \leq j \leq n$  において  $\mathbf{Q}_{j+1} = \mathbf{P}_j$  である． $k-p+1 \leq j \leq k$  における  $\mathbf{Q}_j$  については，式 (2.30) の関係が与えられることが知られている [1, 14, 27].

$$\mathbf{Q}_j = (1 - \alpha_j)\mathbf{P}_{j-1} + \alpha_j\mathbf{P}_j, \quad (2.30)$$

ここで，

$$\alpha_j = \frac{\tilde{t}_{k+1} - t_j}{t_{j+p} - t_j}. \quad (2.31)$$

つまり式 (2.30) は，追加したノットが内分するノット区間の内分比により，ノット挿入前において隣り合う制御点間を内分する位置に，ノット挿入後の制御点を配置する．ノット挿入では，ノットの値が重複するようにノット挿入することもできる．例えば，式 (2.23) における B-spline 曲線において， $t_k < t_{k+1}$  である区間に対し  $t = t_k$  となるノットを挿入できる．ノットベクトルにおいて値が重複しているノットは，多重ノット (multiple knot) と呼ばれ，値が同じノットの個数は，そのノットの多重度 (multiplicity) と呼ばれる [27]. 式 (2.23) における B-spline 曲線において多重度  $p$  となるノットがある場合，式 (2.28) より，そのノットのパラメータ位置には制御点が配置される．つまりセグメントの端点に制御点が配置される．式 (2.28) において定義区間の両端のノットが多重度  $p$  である場合，つまり  $t_{k-p+1} = t_{k-p+2} = \dots = t_k$ ，かつ， $t_{k+1} = t_{k+2} = \dots = t_{k+p}$  である場合，式 (2.28) は式 (2.32) のとおり表せる．

$$\mathbf{C}(t) = \sum_{i=0}^p \frac{p!}{i!(p-i)!} \cdot \frac{(t - t_i)^i (t_{k+1} - t)^{p-i}}{(t_{k+1} - t_k)^p} \mathbf{P}_{k-p+i}. \quad (2.32)$$

つまり式 (2.32) は式 (2.8) と式 (2.9) により，同じ次数の Bézier 曲線に変換できる．従って，B-spline 曲線は Bézier 曲線のセグメントで区分された曲線として表現できる．式 (2.23) の B-spline 曲線において，式 (2.32) の形式による 2 本の Bézier 曲線セグメントが  $C^1$  連続に接続しているとき，セグメント間の節点の

ノットを  $t_{k+1} = t_{k+2} = \dots = t_{k+p}$  とすると、式 (2.14) より節点の制御点  $P_k$  は、 $P_{k-1}$  と  $P_{k+1}$  を  $(t_{k+1} - t_k) : (t_{k+p+1} - t_{k+p})$  に内分する。従って、式 (2.29) と式 (2.30) より、節点におけるノットと制御点をそれぞれ 1 つ取り除き、同じ次数で同じ形状の B-spline 曲線を再定義できる。このように、B-spline 曲線からノットおよび制御点を除去する操作はノット除去 (knot removal) と呼ばれている [32, 27]。ノット除去を用いると B-spline 曲線のデータ量を減らすことができる。

B-spline 曲面は、曲面全体を幾つかの曲面パッチで区分して表現できる曲面であり、式 (2.33) で表現される。

$$\mathbf{S}(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) \mathbf{P}_{ij}, \quad (2.33)$$

ここで、 $\mathbf{P}_{ij}$  は  $(n+1) \times (m+1)$  個の制御点であり、 $N_{i,p}(u)$  および  $N_{j,q}(v)$  は式 (2.24) の形式で与えられる B-spline 基底である。式 (2.33) は、式 (2.34) および式 (2.35) のとおり変形できる。

$$\mathbf{S}(u, v) = \sum_{j=0}^m N_{j,q}(v) \left\{ \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \mathbf{P}_{ij} \right\}, \quad (2.34)$$

$$\mathbf{S}(u, v) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \left\{ \sum_{j=0}^m N_{j,q}(v) \mathbf{P}_{ij} \right\}. \quad (2.35)$$

式 (2.34) と式 (2.35) の中括弧内は、それぞれ式 (2.23) の形式であるので、式 (2.33) の B-spline 曲面は  $m+1$  本の B-spline 曲線、または、 $n+1$  本の B-spline 曲線を用いて表される曲面とみなせる [6]。式 (2.33) において、 $N_{i,p}(u)$ 、 $N_{j,q}(v)$  に与えるノットベクトルを、それぞれ  $u_k$  ( $k = 0, 1, \dots, n+p+1$ )、 $v_\ell$  ( $\ell = 0, 1, \dots, m+q+1$ ) とすると、 $u_k < u_{k+1}$  かつ  $v_\ell < v_{\ell+1}$  となる領域において、非零となる 0 次の B-spline 基底は  $N_{k,0}(u)$  および  $N_{\ell,0}(v)$  である。従って式 (2.33) の B-spline 曲面は、 $u_k < u_{k+1}$  かつ  $v_\ell < v_{\ell+1}$  となる領域において、 $(p+1) \times (q+1)$  個の制御点  $\mathbf{P}_{k-p,\ell-q}$ 、 $\mathbf{P}_{k-p+1,\ell-q}$ 、 $\dots$ 、 $\mathbf{P}_{k,\ell-q}$ 、 $\mathbf{P}_{k-p,\ell-q+1}$ 、 $\mathbf{P}_{k-p+1,\ell-q+1}$ 、 $\dots$ 、 $\mathbf{P}_{k,\ell}$  と、 $2p+2q$  個のノット  $u_{k-p+1}$ 、 $u_{k-p+2}$ 、 $\dots$ 、 $u_{k+p}$ 、 $v_{\ell-q+1}$ 、

$v_{\ell-q+2}, \dots, v_{\ell+q}$  によって形状が決定される．つまり，式 (2.33) の B-spline 曲面は， $u_k < u_{k+1}$  かつ  $v_\ell < v_{\ell+1}$  となる領域ごとに区分的に表現される曲面である．式 (2.34) の中括弧内の B-spline 曲線において， $u_k < u_{k+1}$  となるノット区間で  $u_k$  と  $u_{k+1}$  がそれぞれ多重度  $p$  であるとき，区間  $[u_k, u_{k+1}]$  における曲線セグメントは，式 (2.32) により，同じ次数の Bézier 曲線に変換できる．同様に，式 (2.35) の中括弧内の B-spline 曲線において， $v_\ell < v_{\ell+1}$  となるノット区間で  $v_\ell$  と  $v_{\ell+1}$  がそれぞれ多重度  $q$  であるとき，区間  $[v_\ell, v_{\ell+1}]$  における曲線セグメントは，同じ次数の Bézier 曲線に変換できる．従って，式 (2.33) の B-spline 曲面は， $u_k < u_{k+1}$  かつ  $v_\ell < v_{\ell+1}$  となる領域において， $u_k$  と  $u_{k+1}$  がそれぞれ多重度  $p$  であり， $v_\ell$  と  $v_{\ell+1}$  がそれぞれ多重度  $q$  であるとき，式 (2.16) と式 (2.17) により Bézier パッチで区分表現できる．式 (2.33) の B-spline 曲面において， $u$  方向に多重ノット  $u_{k+1} = u_{k+2} = \dots = u_{k+p}$  が存在し，等パラメータ線  $S(u_{k+1}, v)$  上を共有境界として，両側にある Bézier パッチ間が  $C^1$  連続に接続していると仮定する．このとき，式 (2.16) の中括弧内の B-spline 曲線は，節点  $u_{k+1}$  において両側のセグメントが Bézier 曲線で表される．また，節点  $u_{k+1}$  の両側の Bézier セグメント間は  $C^1$  連続であるので，節点  $u_{k+1}$  における制御点は，節点  $u_{k+1}$  と隣り合う制御点間を  $(u_{k+1} - u_k) : (u_{k+p+1} - u_{k+p})$  の比に内分する．従ってノット除去により，節点  $u_{k+1}$  における制御点を取り除くことができる．そしてノット除去の結果，式 (2.33) の B-spline 曲面は， $S(u_{k+1}, v)$  上において制御点が存在しない，同じ次数で同じ形状の B-spline 曲面として再定義できる [27]．図 2.3 は，パッチ間の接続が  $C^1$  連続な，双 3 次 B-spline 曲面の例である．図 2.3 の双 3 次 B-spline 曲面は， $u$  方向と  $v$  方向がそれぞれ 2 等分に区分されている．図 2.3(a) は B-spline 曲面のパッチの制御点を表示しており，各パッチは双 3 次 Bézier 曲面である．図 2.3(b) はノット除去後の B-spline 曲面の制御点を表示しており，パッチ間の共有境界上に制御点は存在していない．

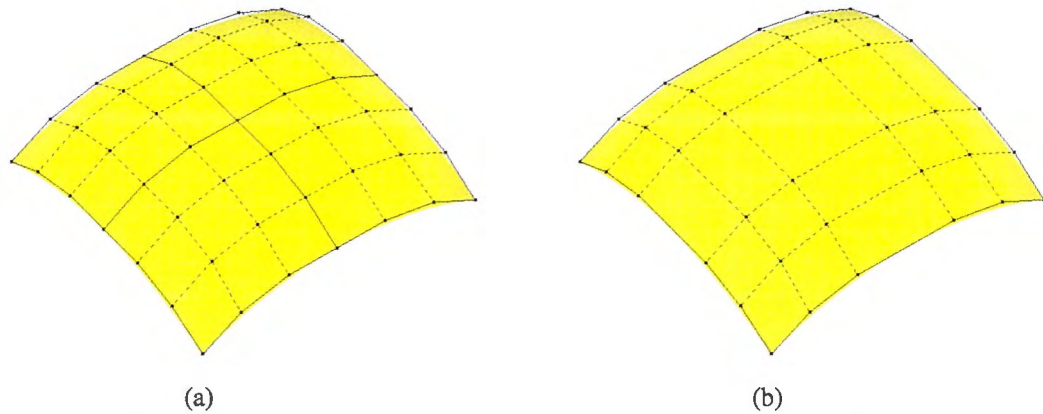


図 2.3: (a)B-spline 曲面のパッチ, (b)B-spline 曲面の制御点.

## 2.2 従来のオフセット曲面近似技術

3次元CADシステムがもつ機能の一つに、曲面オフセット処理 (surface offset) がある [11, 14, 23]. 曲面オフセット処理とは、与えられた曲面に対してオフセット曲面を生成する処理である. オフセット曲面とは、与えられた曲面上の任意の点に対して、曲面の法線ベクトル方向に一定距離だけ離れた曲面である. 曲面オフセット処理は、製品外装など一定肉厚となる形状の設計や、NC加工における工具経路の計算などに利用される [9, 25]. 本論文では、オフセット曲面の生成に与えられる曲面のことを、**元曲面**と呼ぶ. 元曲面  $S = S(u, v)$  に対する、オフセット曲面  $S^o = S^o(u, v)$  は、式 (2.36) で定義される [7].

$$S^o = S + Nd, \quad (2.36)$$

ここで  $N$  は、式 (2.5) で計算される曲面  $S$  の単位法線ベクトルであり、 $d$  は一定の距離を表す. 式 (2.36) より、オフセット曲面の偏微分は、式 (2.37) により計算される [7].

$$\begin{aligned} S_u^o &= S_u + N_u d, \\ S_v^o &= S_v + N_v d, \end{aligned} \quad (2.37)$$

ここで,  $\mathbf{S}_u^o$ ,  $\mathbf{S}_u$ ,  $\mathbf{N}_u$ , および,  $\mathbf{S}_v^o$ ,  $\mathbf{S}_v$ ,  $\mathbf{N}_v$  は,  $\mathbf{S}^o$ ,  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{N}$  の  $u$  方向および  $v$  方向の偏微分ベクトルであり,  $\mathbf{N}_u$ ,  $\mathbf{N}_v$  は, 式 (2.38) によって求めることができる [10].

$$\begin{aligned}\mathbf{N}_u &= \frac{Ff - Ge}{EG - F^2} \mathbf{S}_u + \frac{Fg - Ef}{EG - F^2} \mathbf{S}_v, \\ \mathbf{N}_v &= \frac{Fg - Gf}{EG - F^2} \mathbf{S}_u + \frac{Ff - Eg}{EG - F^2} \mathbf{S}_v,\end{aligned}\tag{2.38}$$

ここで,  $E, F, G$  と  $e, f, g$  は, 式 (2.39) で表される, 曲面  $\mathbf{S}$  の第 1 基本量 (first fundamental quantities) と第 2 基本量 (second fundamental quantities) である [10].

$$\begin{aligned}E &= \mathbf{S}_u \cdot \mathbf{S}_u, \quad F = \mathbf{S}_u \cdot \mathbf{S}_v, \quad G = \mathbf{S}_v \cdot \mathbf{S}_v, \\ e &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{S}_{uu}, \quad f = \mathbf{N} \cdot \mathbf{S}_{uv}, \quad g = \mathbf{N} \cdot \mathbf{S}_{vv},\end{aligned}\tag{2.39}$$

ここで,  $\mathbf{S}_{uu}$ ,  $\mathbf{S}_{vv}$ ,  $\mathbf{S}_{uv}$  は,  $\mathbf{S}$  についての  $u$  方向の 2 階偏微分ベクトルと  $v$  方向の 2 階偏微分ベクトル, および,  $u$  と  $v$  の双方向の 2 階偏微分ベクトルである. 式 (2.38) の関係は, 式 (2.40) の関係から導くことができる [18].

$$\mathbf{S}_u \cdot \mathbf{N} = 0, \quad \mathbf{S}_v \cdot \mathbf{N} = 0, \quad \mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = 1.\tag{2.40}$$

式 (2.40) の 1 番目と 2 番目の式を, それぞれ  $u$  および  $v$  で偏微分すると式 (2.41) の関係が得られる.

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_{uu} \cdot \mathbf{N} + \mathbf{S}_u \cdot \mathbf{N}_u &= 0, \quad \mathbf{S}_{uv} \cdot \mathbf{N} + \mathbf{S}_u \cdot \mathbf{N}_v = 0, \\ \mathbf{S}_{vu} \cdot \mathbf{N} + \mathbf{S}_v \cdot \mathbf{N}_u &= 0, \quad \mathbf{S}_{vv} \cdot \mathbf{N} + \mathbf{S}_v \cdot \mathbf{N}_v = 0.\end{aligned}\tag{2.41}$$

従って式 (2.39) の  $e$ ,  $f$ ,  $g$  は, 式 (2.41) により式 (2.42) のとおり表せる.

$$\begin{aligned}e &= -\mathbf{S}_u \cdot \mathbf{N}_u, \\ f &= -\mathbf{S}_u \cdot \mathbf{N}_v = -\mathbf{S}_v \cdot \mathbf{N}_u, \\ g &= -\mathbf{S}_v \cdot \mathbf{N}_v.\end{aligned}\tag{2.42}$$

式 (2.40) の 3 番目の式を  $u$  および  $v$  で偏微分すると, 式 (2.43) の関係が得られる.

$$\mathbf{N}_u \cdot \mathbf{N} = 0, \quad \mathbf{N}_v \cdot \mathbf{N} = 0.\tag{2.43}$$

式(2.43)により、 $\mathbf{N}_u$  と  $\mathbf{N}_v$  が、それぞれ  $\mathbf{N}$  と直交することが判る。従って、 $\mathbf{S}_u$  と  $\mathbf{S}_v$  も  $\mathbf{N}$  と直交することから、 $\mathbf{N}_u$  と  $\mathbf{N}_v$  は、それぞれ式(2.44)のとおり表せる。

$$\mathbf{N}_u = a_{11}\mathbf{S}_u + a_{12}\mathbf{S}_v, \quad \mathbf{N}_v = a_{21}\mathbf{S}_u + a_{22}\mathbf{S}_v. \quad (2.44)$$

式(2.44)について、 $\mathbf{S}_u$  および  $\mathbf{S}_v$  と内積をとると、式(2.39)および式(2.42)を用い、式(2.45)の関係を与えることができる。

$$\begin{aligned} -e &= a_{11}E + a_{12}F, & -f &= a_{21}E + a_{22}F, \\ -f &= a_{11}F + a_{12}G, & -g &= a_{21}F + a_{22}G. \end{aligned} \quad (2.45)$$

従って、式(2.45)を  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{21}$ ,  $a_{22}$  について解き、 $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{21}$ ,  $a_{22}$  を式(2.44)に代入すると、式(2.38)の関係を導くことができる。

式(2.38)を式(2.37)に代入すると、オフセット曲面の各偏微分ベクトルは、元曲面の  $u$  方向および  $v$  方向の偏微分ベクトルを、合成したベクトルであることが判る。式(2.5)のとおり、曲面の単位法線ベクトルは、 $u$  方向と  $v$  方向の偏微分ベクトル間の外積を正規化したベクトルである。従ってパラメータ空間の同じ位置で、元曲面とオフセット曲面の単位法線ベクトルは一致する。ゆえに2枚の元曲面が滑らかに接続していれば、生成される2枚のオフセット曲面も滑らかに接続される。一方、2枚の元曲面が折れて接続している場合、共有境界上の各点で、元曲面の単位法線ベクトルどうしが一致しない。従って元曲面の共有境界に対応した、オフセット曲面の境界曲線どうしは一致しない。ゆえに2枚の元曲面が折れて接続しているとき、生成される2枚のオフセット曲面は接続しない。このとき元曲面どうしの接続は、表側から見て凹状に折れている場合と、凸状に折れている場合とに分けられる(図2.4)。凹状に折れている場合は、生成されるオフセット曲面は互いに干渉し、凸状に折れている場合は、生成されるオフセット曲面は互いに離れる。一般に、一定肉厚形状の設計やNC加工における工具経路の計算においては、オフセット曲面間が干渉する場合は互いの干渉を除去し、オフセット曲面間が離れる場合は互いを補間する曲面を生成する。オフセット曲面どうしの干渉の除去では、干渉線を境に

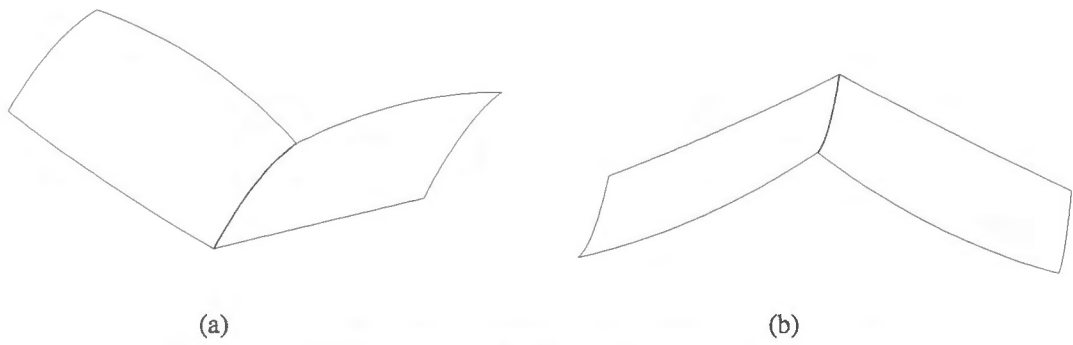


図 2.4: (a) 凹状に折れた接続, (b) 凸状に折れた接続.

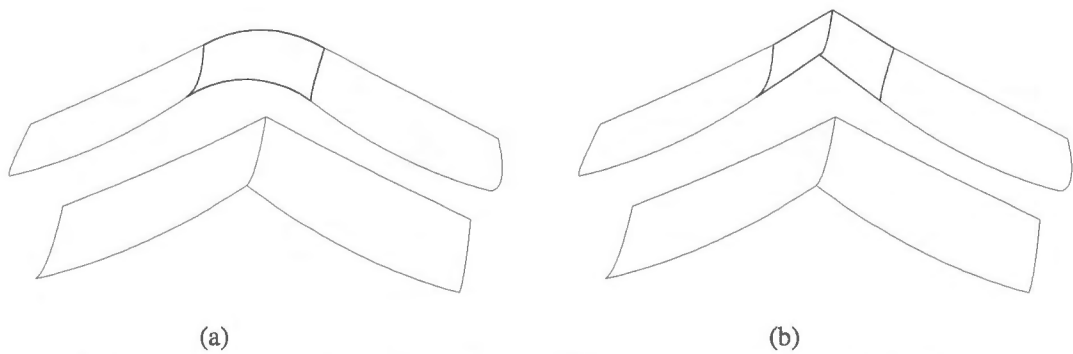


図 2.5: (a) 丸みを帯びた補間面, (b) 2 枚の曲面で構成された補間面.

各オフセット曲面を，相手の表側と裏側の 2 つの領域に分け，表側の領域どうしを接続する．オフセット曲面間を補間する曲面の生成では，オフセット曲面の利用用途によって，異なる形状の曲面を生成する．例えば，NC 加工における工具経路の計算などでは，図 2.5(a) の様に，丸みを帯びた曲面を生成し，一定肉厚形状の設計では，図 2.5(b) の様に，2 枚の曲面を生成することもある．オフセット曲面間を補間する曲面を，本論文では**補間面**と呼ぶ．

式 (2.36) および式 (2.5) のとおり，オフセット曲面は表現式に無理式を含むため，元曲面が解析表現による曲面である場合を除き，一般に多項式では表せない [2, 30]．このため 3 次元 CAD システムでは，オフセット曲面を多項式で近似する方法が広く用いられている．本論文では，オフセット曲面を多項式で近似した曲面を，**近似オフセット曲面**と呼ぶ．オフセット曲面は，曲面間の干渉線やブレンディング曲面の計算など，一階微分方程式の数値計算に引き渡されることがある [24, 8]．このため近似オフセット曲面は，少なくとも  $C^1$  連続

である必要がある．少なくとも  $C^1$  連続な近似オフセット曲面を生成する方法としては，主に次の 3 つの方法が提案されている．

- Farouki の方法 [7]
- Hoschek の方法 [13]
- Piegl の方法 [28]

どの方法も，低次で扱いやすい曲面パッチでオフセット曲面を近似できる．

Farouki の方法 [7] は，3 次 Hermite 基底を用いたパッチで，オフセット曲面を区分的に近似するものである．3 次 Hermite 基底は，式 (2.46) で表される．

$$\begin{aligned} h_0(t) &= B_0^3(t) + B_1^3(t), & h_2(t) &= B_1^3(t)/3, \\ h_1(t) &= B_2^3(t) + B_3^3(t), & h_3(t) &= -B_2^3(t)/3, \end{aligned} \quad (2.46)$$

ここで， $t$  はパラメータであり， $B_i^3$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) は，式 (2.9) で表される Bernstein 基底である． $t = 0$  および  $t = 1$  のとき，3 次 Hermite 基底の各値と各微分値は，式 (2.47) のとおり得られる．

$$\begin{bmatrix} h_0(0) & h_0(1) & h'_0(0) & h'_0(1) \\ h_1(0) & h_1(1) & h'_1(0) & h'_1(1) \\ h_2(0) & h_2(1) & h'_2(0) & h'_2(1) \\ h_3(0) & h_3(1) & h'_3(0) & h'_3(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.47)$$

3 次 Hermite 基底を用いたパッチは，オフセット曲面のパラメータ空間を  $u$  方向に  $n$  等分， $v$  方向に  $n$  等分した  $n^2$  個の正方形の各領域に生成される．パッチが近似する領域を曲面  $\mathbf{r}(u, v)$  ( $0 \leq u \leq 1$ ,  $0 \leq v \leq 1$ ) とおくと，パッチ  $\mathbf{s}(u, v)$  ( $0 \leq u \leq 1$ ,  $0 \leq v \leq 1$ ) の表現式は，式 (2.46) を用いて式 (2.48) により表すことができる．

$$\mathbf{s}(u, v) = \begin{bmatrix} h_0(u) & h_1(u) & h_2(u) & h_3(u) \end{bmatrix} \mathbf{Q} \begin{bmatrix} h_0(v) \\ h_1(v) \\ h_2(v) \\ h_3(v) \end{bmatrix}, \quad (2.48)$$

ここで  $\mathbf{Q}$  は、式 (2.49) で表される。

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}(0, 0) & \mathbf{r}(0, 1) & \mathbf{r}_v(0, 0) & \mathbf{r}_v(0, 1) \\ \mathbf{r}(1, 0) & \mathbf{r}(1, 1) & \mathbf{r}_v(1, 0) & \mathbf{r}_v(1, 1) \\ \mathbf{r}_u(0, 0) & \mathbf{r}_u(0, 1) & \mathbf{r}_{uv}(0, 0) & \mathbf{r}_{uv}(0, 1) \\ \mathbf{r}_u(1, 0) & \mathbf{r}_u(1, 1) & \mathbf{r}_{uv}(1, 0) & \mathbf{r}_{uv}(1, 1) \end{bmatrix}, \quad (2.49)$$

ここで、 $\mathbf{r}_u$  と  $\mathbf{r}_v$  は  $u$  方向と  $v$  方向の偏微分ベクトルであり、 $\mathbf{r}_{uv}$  は  $u$  方向と  $v$  方向の双方向の 2 階偏微分ベクトルである。つまり  $\mathbf{s}(u, v)$  は、 $\mathbf{r}(u, v)$  のパラメータ空間の四隅の点と、それらの点における偏微分ベクトルおよび双方向の 2 階偏微分ベクトルを、3 次 Hermite 基底によって補間する曲面である。パラメータ空間の四隅の点において、曲面の双方向の 2 階偏微分ベクトルは、ツイストベクトルと呼ばれている。パッチの境界曲線  $\mathbf{s}(0, v)$  は、式 (2.46) と式 (2.47) の第 1 列の値を、式 (2.48) に代入することにより、式 (2.50) のとおり表せる。

$$\begin{aligned} \mathbf{s}(0, v) = & B_0^3(v)\mathbf{r}(0, 0) + \\ & B_1^3(v) \{ \mathbf{r}(0, 0) + \mathbf{r}_v(0, 0)/3 \} + \\ & B_2^3(v) \{ \mathbf{r}(0, 1) - \mathbf{r}_v(0, 1)/3 \} + \\ & B_3^3(v)\mathbf{r}(0, 1). \end{aligned} \quad (2.50)$$

その他の境界曲線  $\mathbf{s}(1, v)$ ,  $\mathbf{s}(u, 0)$ ,  $\mathbf{s}(u, 1)$  についても同様である。従って、式 (2.48) で表される 2 枚のパッチが接続するとき、共有境界において両端点および両端点における接線ベクトルは互いに等しい。なお、式 (2.8) と式 (2.11) により、式 (2.50) は 3 次 Bézier 曲線と等しいことがわかる。 $u = 0$  および  $u = 1$  におけるパッチの  $u$  方向の偏微分は、式 (2.47) の第 3 列と第 4 列の値を式 (2.48)

に代入することにより，式 (2.51) のとおり計算できる．

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \mathbf{s}(u, v) \Big|_{0,v} &= \begin{bmatrix} \mathbf{r}_u(0,0) & \mathbf{r}_u(0,1) & \mathbf{r}_{uv}(0,0) & \mathbf{r}_{uv}(0,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0(v) \\ h_1(v) \\ h_2(v) \\ h_3(v) \end{bmatrix}, \\ \frac{\partial}{\partial u} \mathbf{s}(u, v) \Big|_{1,v} &= \begin{bmatrix} \mathbf{r}_u(1,0) & \mathbf{r}_u(1,1) & \mathbf{r}_{uv}(1,0) & \mathbf{r}_{uv}(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0(v) \\ h_1(v) \\ h_2(v) \\ h_3(v) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

$v = 0$  および  $v = 1$  におけるパッチの  $v$  方向の偏微分についても同様である．従って，式 (2.48) で表現される 2 枚のパッチが接続するとき，共有境界の両端点において，パッチのツイストベクトルが一致し，かつ，共有境界を横切る方向の偏微分ベクトルが一致すれば，2 枚のパッチ間は  $C^1$  連続である．オフセット曲面のパラメータ空間は，各パッチが許容誤差を満たすまで細かく分割される．各パッチは，四隅における位置と偏微分ベクトル，および，ツイストベクトルが，式 (2.36) で表現される理論上のオフセット曲面と一致するように生成される．従って，隣接するパッチ間の連続性は  $C^1$  連続である．

Hoschek の方法 [13] は，双 3 次 Bézier パッチでオフセット曲面を区分的に近似するものである．パッチはオフセット曲面のパラメータ空間を， $u$  方向と  $v$  方向に細分割した各矩形領域に生成され，四隅の位置と境界横断微分ベクトルの方向が，理論上のオフセット曲面と一致する．パッチの制御点は，境界上の制御点と内部制御点とに分けて計算される．境界上の制御点は，近似する境界上に求めたサンプル点を利用し，最小自乗法によって計算される．内部制御点は，近似する領域内に求めたサンプル点を利用し，最小自乗法によって計算される．パッチの制御点を計算するときは，境界横断微分ベクトルの方向が理論上のオフセット曲面と一致するように拘束条件が与えられ，かつ，隣接する

パッチ間が  $C^1$  連続となるように拘束条件が与えられる。パラメータ空間の細分割では、矩形領域の曲面形状がなるべく起伏をもたないように、パラメータ空間を分割する位置が決定される。このとき、近似する曲面領域内に幾つかの等パラメータ線を求め、求めた等パラメータ線の曲率を評価することにより、細分割するパラメータ位置が決定される。つまり、パラメータ空間の細分割は、オフセット曲面の形状に依存する。

Piegl の方法 [28] は、双 3 次 B-spline 曲面でオフセット曲面を近似するものである。先ずオフセット曲面のパラメータ空間内に、等間隔に多量のサンプル点を求める。このときサンプル点の数  $n$  は、式 (2.52) により決定される。

$$n = \left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{0.34} \sqrt{\frac{M_1 + 2M_2 + M_3}{8}}, \quad (2.52)$$

ここで、 $\epsilon$  は許容誤差であり、 $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  は、オフセット曲面  $\mathbf{S}^o(u, v)$  の 2 次偏微分の大きさ、 $|\mathbf{S}_{uu}^o(u, v)|$ ,  $|\mathbf{S}_{uv}^o(u, v)|$ ,  $|\mathbf{S}_{vv}^o(u, v)|$  の各最大値である。次に、求めたサンプル点間を補間する  $C^2$  連続な双 3 次 B-spline 曲面を生成する。このとき、生成される双 3 次 B-spline 曲面は、サンプル点と同じ数の制御点をもつ。そして許容誤差の範囲でノット除去することによって、制御点の数を減らしている。つまり最初にオフセット曲面のパラメータ空間を等パラメータ線で細かく区分した後、区分している等パラメータ線を除去しながら区分を粗くしている。従ってパラメータ空間の最終的な区分位置は、最初の区分によって決定される。また、区分されるパラメータ位置は、オフセット曲面の 2 次偏微分値に依存する。つまりパラメータ空間の区分位置は、オフセット曲面の形状に依存する。

## 2.3 従来技術の分析と課題

2.2 節で示したオフセット曲面を近似する従来の方法は、2 枚の接続した曲面に対して近似オフセット曲面を生成する場合、モデルデータの品質低下を引き起こすことがある。具体的には、第 1 章で述べた問題 1 と問題 2 による、モデルデータの品質低下を引き起こすことがある。問題 1 は、2 枚の元曲面が表側から見て凸状に折れて接続する場合、2.2 節で説明した補間面が微小要素になることがあるという問題である。このとき元曲面間の折れ具合がわずかであると、元曲面間の共有境界上の各点において、両側の元曲面の法線ベクトルのなす角が非常に小さくなる。この場合、式 (2.36) のとおりオフセット曲面は元曲面の法線ベクトル方向に生成されるので、元曲面間の共有境界に対応したオフセット曲面の境界曲線間の距離も非常に小さくなる。このため、生成される補間面の境界曲線間も非常に近くなり、補間面が微小要素となってしまうことがある。近似オフセット曲面においても、従来の方法では元曲面の法線ベクトル方向にサンプル点を求めてオフセット曲面を近似するため、元曲面間の折れ具合がわずかであると、補間面が微小要素となってしまうことがある。問題 2 は、2 枚の元曲面が  $G^1$  連続に接続している場合に、生成されるオフセット曲面間に隙間や折れが生じることがあるという問題である。2.2 節で述べたとおり、2 枚の元曲面が  $G^1$  連続に接続している場合、2 枚のオフセット曲面間は理論上  $G^1$  連続に接続する。しかし、従来の方法を用いてオフセット曲面を近似すると、境界曲線の形状や境界曲線上における法線ベクトルの方向が、オフセット曲面の形状に依存してしまうため、近似オフセット曲面どうしが折れて接続したり、近似オフセット曲面間に隙間が生じてしまうことがある。

Farouki[7] の方法で、 $G^1$  連続に接続する 2 枚のオフセット曲面を、それぞれ近似した場合、パラメータ空間の分割数を互いに一致させれば、オフセット曲面間の共有境界上においてパッチは 1 対 1 に接続する。このため、近似オフセット曲面どうしは隙間なく接続される。しかし、オフセット曲面間の共有境界上において、両側のパッチのツイストベクトルは一般に一致しないため、 $G^1$

連続性は保障されない。従って、近似オフセット曲面どうしは、一般に折れて接続される。図 2.6(a) は、折れて接続した 2 枚の近似オフセット曲面である。図 2.6(b) は、図 2.6(a) を拡大した図であり、近似オフセット曲面の境界曲線上に単位法線ベクトルを表示し、共有境界上で、単位法線ベクトルが一致していない箇所が存在する様子を示したものである。図 2.6 で示されるように、近似オフセット曲面どうしが折れて接続されるため、文献 [7] の方法は、形状データの品質を低下させてしまう。Hoschek[12] の方法で、 $G^1$  連続に接続する 2 枚

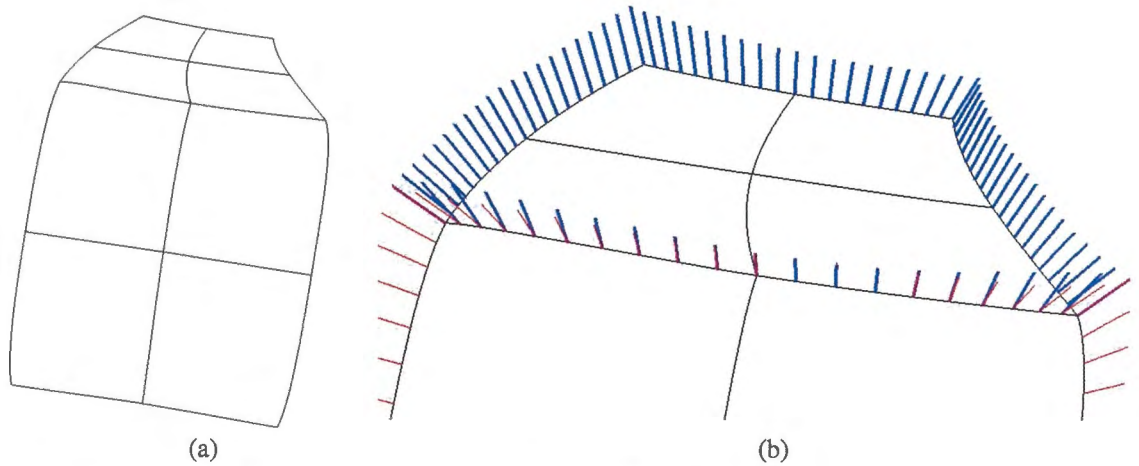


図 2.6: (a) 折れて接続した 2 枚の近似曲面, (b)(a) の拡大図と単位法線ベクトル。

のオフセット曲面を、それぞれ近似した場合、細分割がオフセット曲面の形状に依存しているため、オフセット曲面どうしの共有境界上で、一般に双方のパラメータ空間の分割地点は一致しない。すなわち、共有境界上で一般に境界曲線の形状が一致しない。このため近似オフセット曲面間には隙間が生じる。図 2.7 の破線の楕円の部分は、隙間の例である。この図のように隙間が生じるので、文献 [12] の方法は、形状データの品質を低下させてしまう。Piegl[28] の方法で、 $G^1$  連続に接続する 2 枚のオフセット曲面を、それぞれ近似した場合、サンプル点数がオフセット曲面の形状に依存しているため、オフセット曲面間の共有境界上で、一般に、互いのサンプル点数は一致しない。すなわち共有境界上で境界曲線の形状が一致しない。このため、近似オフセット曲面間には隙間が生じる。従って文献 [28] の方法は、形状データの品質を低下させてしまう。

以上のように、2 枚の接続する元曲面に対し従来方法で近似オフセット曲面

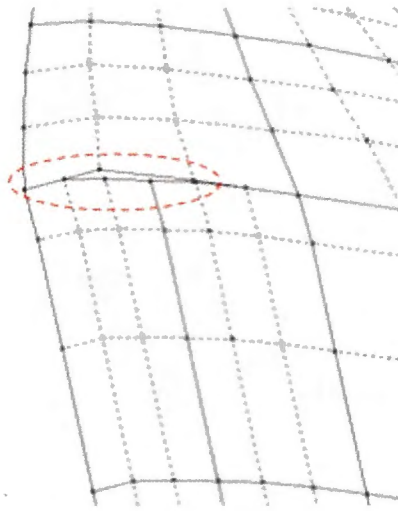


図 2.7: 近似曲面間の隙間.

を生成すると、第1章で述べた問題1と問題2によるモデルデータの品質低下を引き起こすことがある。これら2つの問題に対して具体的な課題を示すと次の2つが挙げられる。

**課題1** 微小要素の発生を抑制する近似オフセット曲面の生成

**課題2** 隙間なく滑らかに連結する近似オフセット曲面の生成

課題1は問題1に対する課題であり、課題2は問題2に対する課題である。本論文では、これら2つの課題をそれぞれ解決する手法を提案する。

## 2.4 まとめ

本章では、まず、3次元CADシステムにおける曲面表現、および、曲面間の接続について述べ、次に、オフセット曲面の数学上の定義と特徴、および、オフセット曲面を生成する従来技術について説明した。そして、曲面間の接続状態に応じて生じる、従来技術の問題点を明らかにし、本研究で解決すべき2つの課題を示した。2つの課題のうちの1つは、微小要素の発生を抑制する近似オフセット曲面の生成であり、この課題については、第3章で取り扱う。もう1つの課題は、隙間なく滑らかに連結する近似オフセット曲面の生成であり、この課題については、第4章で取り扱う。

## 第3章 微小要素による品質低下を 抑制する曲面オフセット処理

### 3.1 オフセット曲面の近似処理

2枚の元曲面が表側から見て凸状に折れて接続している場合、2.2節で述べたとおり、一般にオフセット曲面間には補間面が生成される。このとき元曲面間の折れ具合がわずかであると、オフセット曲面間の隙間も非常に小さくなるため、2.3節で述べたとおり補間面が微小要素となってしまうことがある。従来技術においても2.3節で述べたとおり、生成される近似オフセット曲面間には隙間が生じる。従って、従来の方法においても、元曲面間の折れ具合がわずかであると微小要素となる補間面が発生することがある。これに対し、本章では、微小要素の発生を抑制して近似オフセット曲面を生成する手法を提案する。本手法は、微小要素となる補間面が発生する状況において、近似オフセット曲面間を接続することで、微小要素となる補間面の発生を抑制する。本節では、微小要素の発生を抑制する近似オフセット曲面の生成に用いられる、1枚のオフセット曲面の近似手法について説明する。近似オフセット曲面間の接続手法については次節で説明する。

オフセット曲面を  $C^1$  連続な多項式で近似する従来技術には、2.2節で挙げた、Faroukiの方法[7]、Hoschekの方法[12]、そして、Pieglの方法[28]がある。このうち、Faroukiの方法とHoschekの方法は、生成されるパッチの誤差を評価しながらオフセット曲面領域を段階的に細かく区分し、各区分領域に対する近似精度を徐々に上げていく方式である。これにに対し、Pieglの方法は、最初に十分な近似精度でB-spline曲面によってオフセット曲面を近似した後、パッ

チの誤差を評価しながらノット除去を繰り返し、許容誤差を越えない範囲で近似精度を徐々に下げていく方式である。どちらの方式においても、分割が細かくなればなるほど生成される曲面のデータ量が増えるため、なるべくデータ量が少なくなるようにオフセット曲面を区分している。しかし後者の方式は、最終的なオフセット曲面の区分位置がオフセット曲面の形状に依存して最初に決められてしまうため、パッチの誤差を評価しながら最終的な区分位置を調整することができない。本研究では補間面が微小要素となる場合に近似オフセット曲面間を接続するため、近似オフセット曲面間を接続する際に接続部分の区分位置が一致するよう、2枚のオフセット曲面を近似する。そこで本研究では、最終的なオフセット曲面の区分位置を調整しやすくするため、前者の方式である近似精度を徐々に上げていく方式をとる。

文献[19]では、Hoschekの方法とFaroukiの方法、および、最小自乗法  $I$  (Least Squares  $I$  method) という方法が比較されている。文献[19]によると、与えられる許容誤差が同じであれば、近似オフセット曲面の制御点の数は、最小自乗法  $I$  の場合に最も少ないことが明らかにされている。この方法では、まず、元曲面である B-spline 曲面を複数の Bézier 曲面パッチに分解する(図 3.1 は例)。次に、各 Bézier 曲面パッチに対する近似オフセット曲面のパッチを求める。近似オフセット曲面のパッチを求めるときは、元の Bézier 曲面パッチ上に幾つかのサンプル点を求め、それらをオフセットした点を計算する。オフセットした点とは、元曲面のパラメータ空間上の点に対応したオフセット曲面上の点であり、式(2.36)により計算できる。そして、オフセットした点を用いた最小自乗法により、近似オフセット曲面のパッチを Bézier 曲面として求める。ただし、この方法の場合、隣り合う Bézier 曲面パッチ間は一般に  $C^1$  連続とはならない。そこで、本研究では、近似オフセット曲面のパッチを、最小自乗法に基づいて Bézier 曲面として求め、かつ、隣り合うパッチ間が  $C^1$  連続となるように近似オフセット曲面を生成する。

ここで、次節で説明する微小要素の抑制方法を実現するため、本研究においては、近似オフセット曲面を次の2つのステップに分けて生成する。

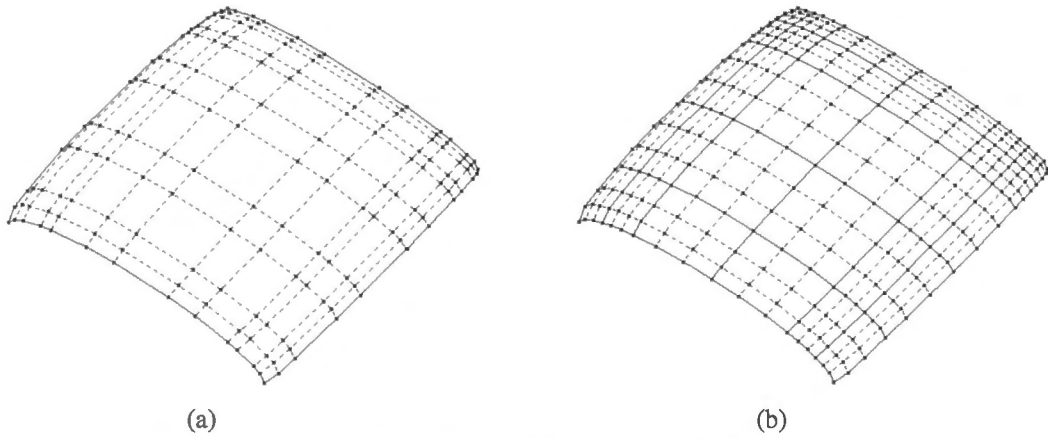


図 3.1: (a) 双 3 次 B-spline 曲面, (b) 分解後のパッチ.

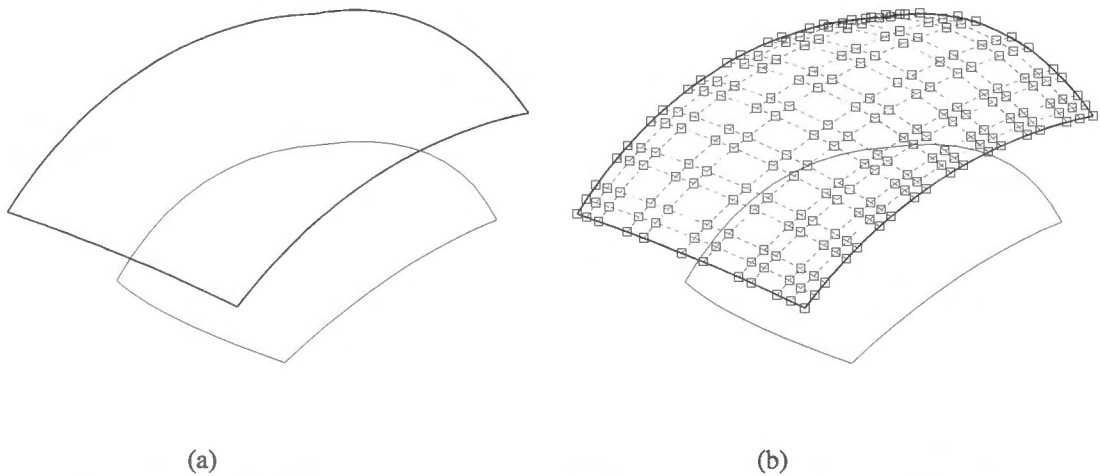


図 3.2: (a) 境界曲線をオフセットした曲線, (b) 近似オフセット曲面.

(ステップ 1)

元曲面の境界曲線をそれぞれオフセットした曲線を生成する (図 3.2(a)).

(ステップ 2)

(ステップ 1) で生成した曲線を境界として, 内部に近似オフセット曲面を生成する (図 3.2(b)).

(ステップ 1) における元曲面の境界曲線をオフセットした曲線とは, オフセット曲面の境界曲線のことである. しかし, オフセット曲面と同様に, オフセット曲面の境界曲線も表現式に無理式を含むため, 直線や円弧など解析的に表現

できる場合を除き、一般にオフセット曲面の境界曲線は多項式では表せない。このため、(ステップ1)ではオフセット曲面の境界曲線を近似した曲線を生成する。本研究では、オフセット曲面の境界曲線を近似した曲線を、**近似オフセット曲線**と呼ぶ。近似オフセット曲線は、次の手順により、複数の3次 Bézier 曲線セグメントで構成される区分 Bézier 曲線として生成する。このとき、近似誤差の許容値としては、理論上のオフセット曲線との距離の許容誤差を与える。

- (1) 元曲面の各境界曲線の両端点をオフセットした点を求め、それらの点を両端点とする1本の Bézier 曲線セグメントを生成する[12](具体的な計算は付録Aを参照)。このとき、両端点における接線ベクトルの向きは、元曲面の境界曲線における接線ベクトルの向きと一致させる。
- (2) 各 Bézier 曲線セグメントを4つに分割する地点をサンプル点とし、それらの点が、オフセット曲線上の点として許容誤差を満たしているかどうかを評価する。
- (3) (2)において、許容誤差を満たしていない点が存在する場合、その曲線セグメントに対応した元曲面の境界曲線の区間を2分割し、その分割した地点をオフセットした点を求める。そして、ここで求めた点と曲線セグメントの両端点から、新たに  $C^1$  連続な2本の Bézier 曲線セグメントを生成し、元の曲線セグメントと置き換える。このとき、ここで求めた点における接線ベクトルの向きは、元曲面の境界曲線における接線ベクトルの向きと一致させる。その後、(2)以降の手順を繰り返し、すべてのサンプル点が許容誤差を満たすようにする。

(ステップ2)における近似オフセット曲面は、次の手順により、複数の双3次 Bézier パッチからなる1枚の B-spline 曲面として生成する。このとき、(ステップ1)で生成した近似オフセット曲線を与え、また、近似誤差の許容値として、理論上のオフセット曲面との距離の許容誤差を与える。

- (1) 近似オフセット曲線の各 Bézier 曲線セグメントについて、それらの各端点に対応した元曲面上のパラメータ  $u, v$  の値を求める。そして、求めた

すべての値で  $u$  と  $v$  の組み合わせをつくり、各  $u, v$  の組み合わせに対応した元曲面上の点をオフセットした点を求める。

- (2) (1) で求めた点について、 $u$  の値が同じ点のグループ、また、 $v$  の値が同じ点のグループをそれぞれ形成する。そして、 $u, v$  の値が 0 または 1 だけで形成されたものを除き、つまり、近似オフセット曲線と重なるグループを除き、各グループごとに区分 Bézier 曲線を生成する。この区分 Bézier 曲線は、グループ内の各点をセグメントの端点としたものとする [12] (具体的な計算は付録 A を参照)。また、このとき、各点における接線ベクトルの向きは、元曲面における  $u$  または  $v$  方向の偏微分ベクトルの方向と一致させる。これにより、近似オフセット曲線で囲まれた内部はメッシュ状に分割されるが、このとき生成した曲線のことを、以後 **分割曲線** と呼ぶ (図 3.3(a))。

- (3) メッシュ状に分割された各領域ごとに、1 枚の Bézier パッチを生成する (図 3.3(b))。このとき、Bézier パッチの 4 本の境界曲線は既に与えられているので、4 つの内部制御点を求める。まず、領域を  $u$  方向と  $v$  方向にそれぞれ 4 分割し、それぞれの内分点に対応した元曲面上の位置の  $u$  と  $v$  の値を求める。そして、求めた  $u$  と  $v$  のすべての組み合わせによって元曲面上に 9 つの点を求め、それらの点をオフセットした点から最小自乗法を用いて内部制御点を求める [27] (具体的な計算は付録 B を参照)。

- (4) (3) で生成した各パッチについて、Becker の方法 [3] を利用し、隣合うものどうしの接続を  $C^1$  連続に調整する。図 3.4 は、2 つの分割曲線の交点  $O$  のまわりにある 4 枚のパッチ *Patch1*, *Patch2*, *Patch3*, *Patch4* を示したものである。これらのパッチどうしの接続を、次の手順で調整する。このとき、 $u$  方向において隣り合う 2 つのパッチ (*Patch2* と *Patch3*, および、*Patch1* と *Patch4*) の互いのパラメータ長の比を  $k_u$  とし、 $v$  方向において隣り合う 2 つのパッチ (*Patch2* と *Patch1*, および、*Patch3* と *Patch4*) の互いのパラメータ長の比を  $k_v$  とする。パッチのパラメータ長は、パッ

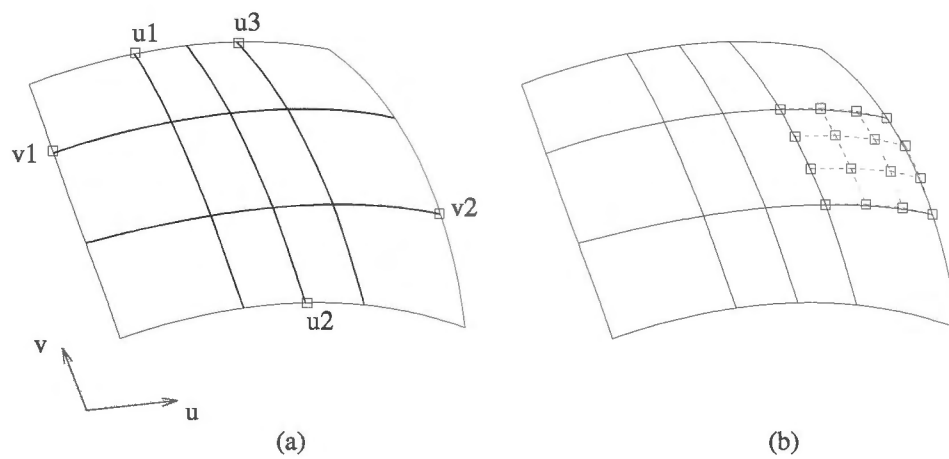


図 3.3: (a) 分割曲線, (b) Bézier パッチ.

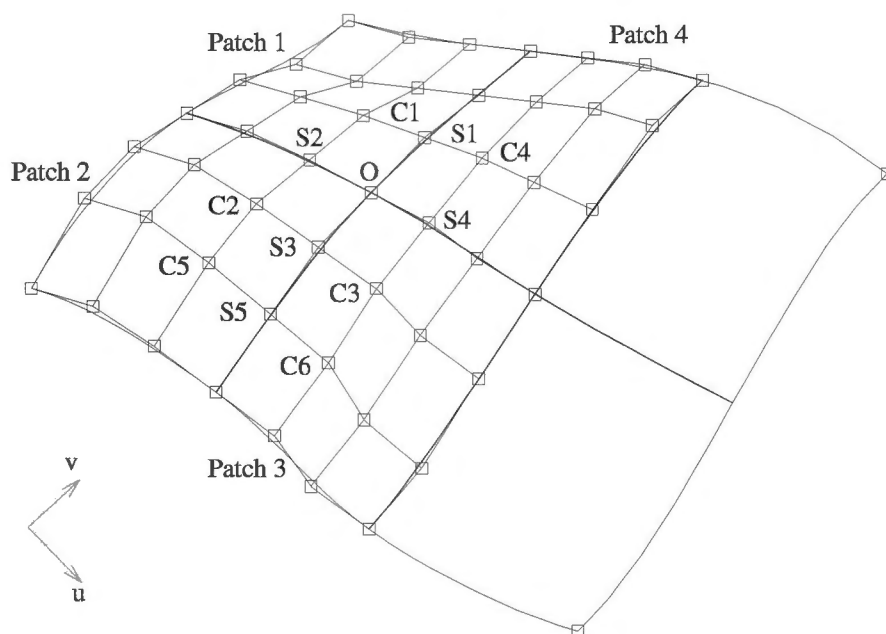


図 3.4: 2つの分割曲線の交点のまわりにある4枚のパッチ.

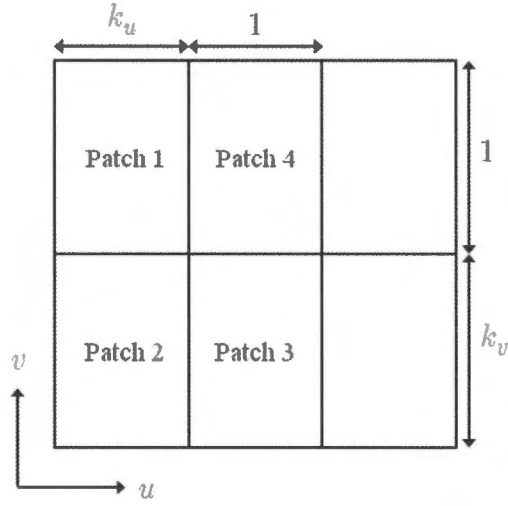


図 3.5: パラメータ長の比.

チの領域が対応する  $u$ ,  $v$  それぞれの方向の近似オフセット曲線のパラメータ区間である (図 3.5)。

- (a) 点  $\mathbf{O}$  において,  $u$  方向の分割曲線の曲線セグメントどうしを  $C^1$  連続に調整する. この調整は, 点  $\mathbf{O}$  の両隣りの制御点,  $\mathbf{S}_2$  と  $\mathbf{S}_4$  を移動させることにより行なう. それぞれの移動後の制御点を  $\mathbf{S}'_2$ ,  $\mathbf{S}'_4$  とすると, 式 (2.14) により, 次の関係が成り立つ.

$$\mathbf{S}'_2 \vec{\mathbf{O}} = k_u \vec{\mathbf{O}} \mathbf{S}'_4, \quad (3.1)$$

または,

$$\mathbf{S}'_2 = (1 + k_u) \mathbf{O} - k_u \mathbf{S}'_4. \quad (3.2)$$

ここで, さらに次の条件を加える.

$$|\mathbf{S}_2 - \mathbf{S}'_2|^2 + |\mathbf{S}_4 - \mathbf{S}'_4|^2 \rightarrow \text{minimum}. \quad (3.3)$$

つまり, 移動距離が最小となるよう  $\mathbf{S}_2$  と  $\mathbf{S}_4$  を移動させる (付録 C 参照). そして, 式 (3.2) を式 (3.3) に代入し, 代入後の式を  $\mathbf{S}'_4$  で微分すると, 次のとおり  $\mathbf{S}'_4$  を求めることができる.

$$\mathbf{S}'_4 = \frac{-k_u(1 + k_u)\mathbf{O} + k_u\mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_4}{1 + k_u^2}. \quad (3.4)$$

これにより、式 (3.2) から、 $\mathbf{S}'_2$  も求めることができる。

- (b) 点  $\mathbf{O}$  において、 $v$  方向の分割曲線の曲線セグメントどうしを  $C^1$  連続に調整する。この調整は、点  $\mathbf{O}$  の両隣りの制御点、 $\mathbf{S}_3$  と  $\mathbf{S}_1$  を、(a) と同様に移動させることにより行なう。
- (c) *Patch1*, *Patch2*, *Patch3*, *Patch4* が、点  $\mathbf{O}$  のまわりにおいて  $C^1$  連続となるよう、制御点、 $\mathbf{C}_1$ ,  $\mathbf{C}_2$ ,  $\mathbf{C}_3$ ,  $\mathbf{C}_4$  を移動させる。ここで、移動後の制御点をそれぞれ  $\mathbf{C}'_1$ ,  $\mathbf{C}'_2$ ,  $\mathbf{C}'_3$ ,  $\mathbf{C}'_4$  とすると、式 (2.21) により、次の関係が成り立つ。

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{C}'_1\mathbf{S}'_1} &= k_u \vec{\mathbf{S}'_1\mathbf{C}'_4}, \\ \vec{\mathbf{C}'_2\mathbf{S}'_3} &= k_u \vec{\mathbf{S}'_3\mathbf{C}'_3}, \\ \vec{\mathbf{C}'_1\mathbf{S}'_2} &= k_v \vec{\mathbf{S}'_2\mathbf{C}'_2}, \\ \vec{\mathbf{C}'_4\mathbf{S}'_4} &= k_v \vec{\mathbf{S}'_4\mathbf{C}'_3}.\end{aligned}\tag{3.5}$$

$\mathbf{C}'_1$ ,  $\mathbf{C}'_2$ ,  $\mathbf{C}'_3$ ,  $\mathbf{C}'_4$  は未知であり、パッチの境界上の制御点  $\mathbf{O}$ ,  $\mathbf{S}'_1$ ,  $\mathbf{S}'_2$ ,  $\mathbf{S}'_3$ ,  $\mathbf{S}'_4$  は既知である。式 (3.5) を整理すると、式 (3.6) が得られる。

$$[M] \begin{bmatrix} \mathbf{C}'_1 \\ \mathbf{C}'_2 \\ \mathbf{C}'_3 \\ \mathbf{C}'_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+k_u)\mathbf{S}'_1 \\ (1+k_v)\mathbf{S}'_2 \\ (1+k_u)\mathbf{S}'_3 \\ (1+k_v)\mathbf{S}'_4 \end{bmatrix},\tag{3.6}$$

ここで、

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & k_u \\ 1 & k_v & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k_u & 0 \\ 0 & 0 & k_v & 1 \end{bmatrix}.\tag{3.7}$$

$\det(M)$  は 0 となるので、解が一意に求まらない。そこで、さらに次の条件を加える。

$$\sum_{i=1}^4 \|\mathbf{C}_i - \mathbf{C}'_i\| \rightarrow \text{minimum}.\tag{3.8}$$

つまり、 $C_i$  と  $C'_i$  の距離が最小となるように制御点を移動させる (付録 C 参照). ここで、式 (3.6) より、 $C'_1$ ,  $C'_2$ ,  $C'_4$  は  $C'_3$  の関数として表現できるので、これらをそれぞれ  $C'_3$  で表し、式 (3.8) に代入する. そして、代入後の式を  $C'_3$  で微分すると、次のように  $C'_3$  を求めることができる.

$$\begin{aligned} A1 &= -k_u k_v ((1 + k_v)S'_2 - k_u(1 + k_v)S'_3 - C_1), \\ A2 &= k_v((1 + k_v)S'_4 - C_4) + C_3, \\ A3 &= k_u((1 + k_u)S'_3 - C_2), \\ B &= k_u^2 k_v^2 + k_u^2 + k_v^2 + 1, \\ C'_3 &= \frac{A1 + A2 + A3}{B}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

また、式 (3.6) より、 $C'_1$ ,  $C'_2$ ,  $C'_4$  についても、求めることができる.

(d)  $v$  方向の分割曲線を挟んだ 2 つのパッチ、*Patch1* と *Patch4*, または、*Patch2* と *Patch3* が、 $u$  方向の近似オフセット曲線と境界を接する場合、2 つのパッチの接続を  $C^1$  連続に調整する. この調整は、 $v$  方向の分割曲線の両隣りにある各パッチの内部制御点のうち、近似オフセット曲線の側にある各パッチの制御点を移動させることにより行なう. 例えば、*Patch2* と *Patch3* の連続性を調整する場合は、制御点  $S_5$  の両隣りの制御点、 $C_5$  と  $C_6$  を移動させる. このとき、制御点の移動は (a) と同様に行なう.

(e)  $u$  方向の分割曲線を挟んだ 2 つのパッチ、*Patch1* と *Patch2*, または、*Patch4* と *Patch3* が、 $v$  方向の近似オフセット曲線と境界を接する場合、2 つのパッチの接続を (d) と同様に  $C^1$  連続に調整する.

(a), (b), (c), (d), (e) を、すべての分割曲線の交点のまわりに適用する. ただし、分割曲線の交点が存在しない場合、つまり、分割曲線が  $u$  方向か  $v$  方向のどちらか一方にしか存在しない場合は、すべての分割曲線に対して (d) または (e) を当てはめる. これにより、(3) で生成した各パッチは、隣合うものどうしが  $C^1$  連続に接続される.

- (5) 各 Bézier パッチのパラメータ空間において,  $(1/3, 1/3)$ ,  $(1/3, 2/3)$ ,  $(2/3, 1/3)$ ,  $(2/3, 2/3)$  の 4 つのサンプル点を取り, それらの点がオフセット曲面上の点として, 指定される許容誤差 (例えば, 0.01 などの値) を満たすかどうかを評価する. ここで, 許容誤差とは, 理論上のオフセット値とのずれを意味している. 満たしていない場合, そのパッチの  $u$  区間と  $v$  区間のどちらか長い方の区間について, その区間を 2 分割する分割曲線を新たに加え, (3) の手順に戻る. そして, すべてのパッチが許容誤差を満たした時点で, それらのパッチを結合した 1 枚の  $C^1$  連続な B-spline 曲面を生成する (図 3.2(b)). なお, この曲面は全域が  $C^1$  連続であるので, 分割曲線に相当する制御点は, この曲面には含まれない.

## 3.2 オフセット曲面間の接続処理

2.3 節で述べた, 補間面が微小要素となる状況において, 微小要素の発生を抑制するため, 近似オフセット曲面どうしを接続する. 具体的には次の手順で, 近似オフセット曲面どうしを接続する.

- (1) 前節の (ステップ 1) をそれぞれの曲面に対して実行する.
- (2) 元曲面の共有境界曲線に対応した, 近似オフセット曲線の間に生成される補間面が, 微小要素となるかどうかを判断する. このとき, 双方の近似オフセット曲線をパラメータ区間において幾つかに等分割する地点を求め, 互いに対応する分割地点, および端点どうしをペアとする (図 3.6). そして, ペアとなった点どうしの距離を測定し, ある一定の閾値以下かどうかを調べる. 閾値以下のペアが存在すれば, 補間面が微小要素になると判断する. なお, この閾値のことを, 以後, **微小判定閾値**と呼ぶ.
- (3) (2) の結果, 補間面が微小要素になると判断された場合, 双方の近似オフセット曲線の間に, 新しく曲線を生成する. この曲線のことを, 以後, **中間曲線**と呼ぶ (図 3.7 (a)). そして, 中間曲線を元の近似オフセット曲

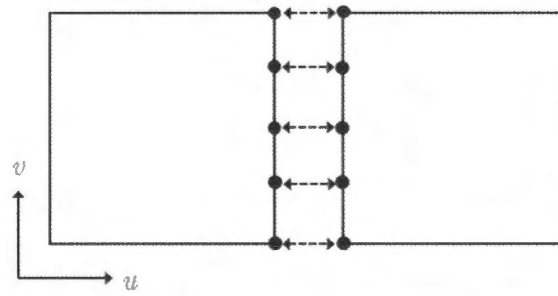


図 3.6: 分割地点のペアと端点のペア.

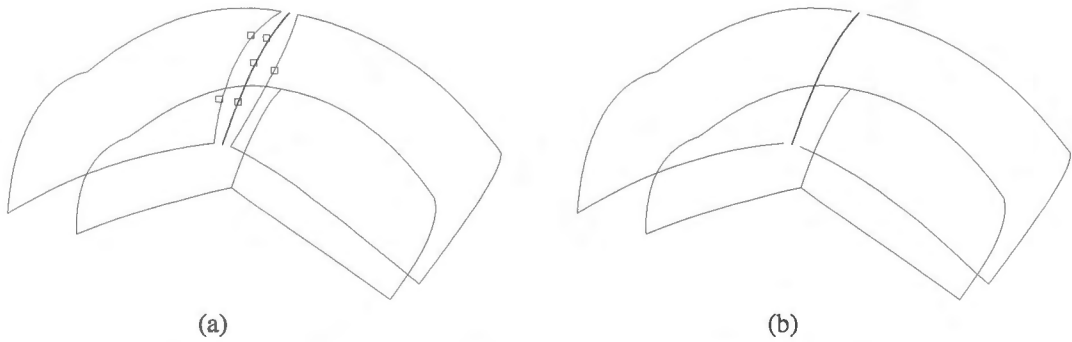


図 3.7: (a) 中間曲線, (b) 近似オフセット曲線の置き換え.

線と置き換え, 新しい近似オフセット曲線とする (図 3.7 (b)). このとき, 中間曲線は次の手順で生成する.

- (a) 双方の近似オフセット曲線を構成する各セグメントの端点について, 元曲面に対応したパラメータを求める.
- (b) 求めた各パラメータを, 双方の近似オフセット曲線に当てはめ, パラメータが対応する点どうしをペアとする.
- (c) 各ペアについて, ペアとなった点どうしの中間点をそれぞれ求める. そして, 求めた中間点をセグメントの端点とする  $C^1$  連続な区分 Bézier 曲線を生成する [12]. このとき, 各中間点における接線ベクトルの向きは, その中間点を求める元になった 2 つの点における, 双方の近似オフセット曲線上の接線ベクトルの向きを平均したものにする.

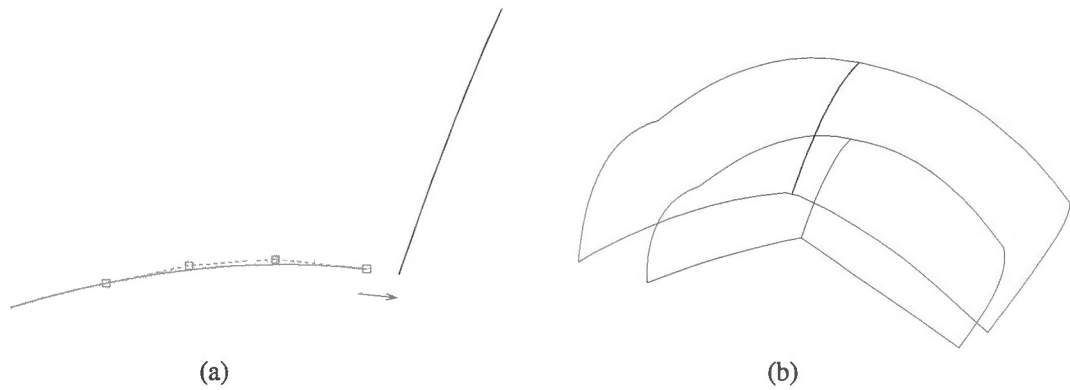


図 3.8: (a) 端点の移動 (太線は中間曲線), (b) 再構築された近似オフセット曲線.

(4) (3) の結果, 中間曲線と置き換えられた部分において, 近似オフセット曲線どうしの端点が離れてしまう (図 3.7 (b)). そこで, 中間曲線と接続するため, 置き換えられる前の近似オフセット曲線と接続していた, 既存の近似オフセット曲線を変形する. 変形は, 置き換えられる前の近似オフセット曲線と接続していた端点を, 中間曲線の端点の位置に移動させることにより行なう (図 3.8 (a)). このとき, この近似オフセット曲線の形状が大きく変わらないよう, 移動させる端点を制御点としてもつ Bézier 曲線セグメントだけを変形する. さらに, 移動させる端点における, Bézier 曲線セグメントの接線ベクトルの方向と大きさは固定したままとする. これにより, 互いに接続し合った近似オフセット曲線が再構築される (図 3.8 (b)).

(5) (3) および (4) により再構築された近似オフセット曲線を与え, 前節の (ステップ 2) をそれぞれの曲面について実行する. この結果, 2 枚の近似オフセット曲面は互いの境界曲線が一致するため, 微小要素となる補間面は生成されなくなる.

以上により, 2 枚の元曲面に対する近似オフセット曲面の生成において, 微小要素の発生を抑制することが可能となる.

3 枚以上の曲面を同時に処理する場合も, 2 枚の曲面の場合と同様に近似オフセット曲面を生成する. ただし, 手順の (3) において生成される複数の中間

曲線は、お互いに端点が離れた状態で生成される (図 3.9 (a), 図 3.10 (a)). そこで、手順の (4) に移る前に、これらの中間曲線を変形し、お互いの端点の位置を一致させる (図 3.9 (b), 図 3.10 (b)). ここで、一致させる端点は、元曲面の角の点が集まる 1 点 (図 3.9 (a) の O, 図 3.10 (a) の O) に対応した中間曲線の端点である。変形は、これらの端点を、それらの平均位置に移動させることにより行なう。このとき、中間曲線の形状が大きく変わらないよう、移動させる端点を制御点としてもつ Bézier 曲線セグメントだけを変形する。さらに、移動させる端点における、Bézier 曲線セグメントの接線ベクトルの方向と大きさは固定したままとする。これにより、3 枚以上の曲面の場合にも、微小要素の発生を抑制することが可能となる。

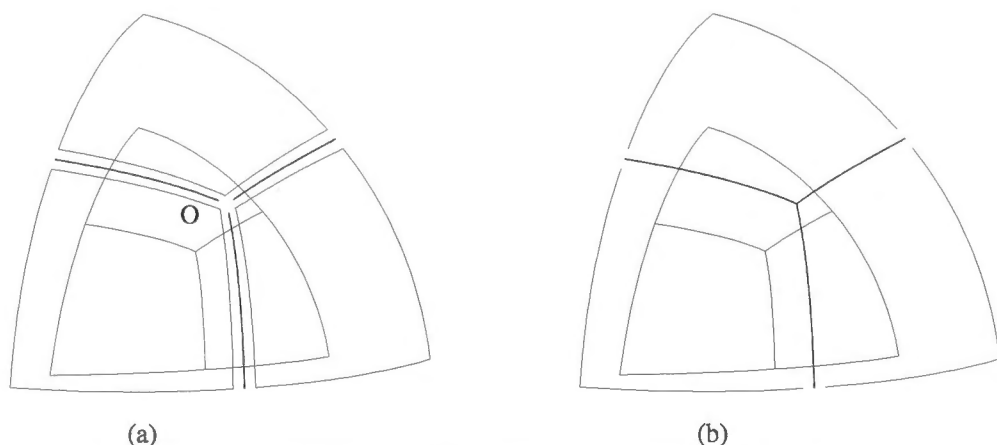


図 3.9: (a) 変形前の中間曲線, (b) 変形後の中間曲線.

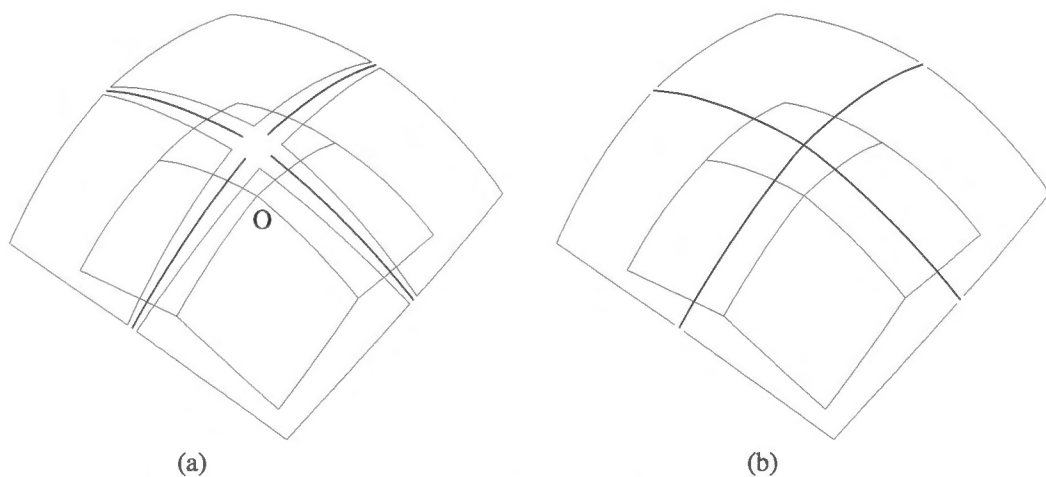
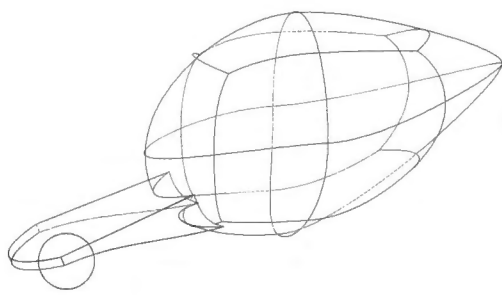


図 3.10: (a) 変形前の中間曲線, (b) 変形後の中間曲線.

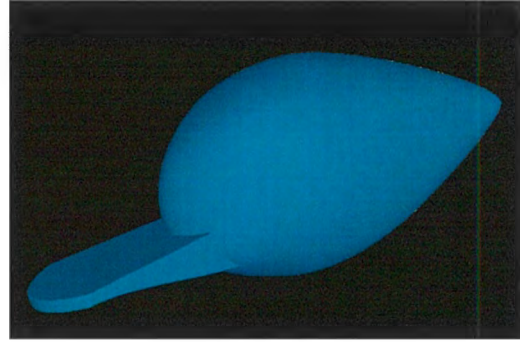
### 3.3 適用例

図3.11は、工業製品(釣り道具)の形状モデルである。図3.11(c)は、図3.11(a)の丸囲み部分を拡大したものである。この部分は角が丸められているが、曲面どうしの接続部分が、わずかに折れている(図3.11(c)のAの接続部分)。また、そのほかにも、わずかに折れて曲面どうしが接続されている箇所が存在する。この形状モデルに対して本手法を適用した結果を図3.12に示す。図3.12(a)は、微小判定閾値として $10^{-4}$ という値を選び、近似オフセット曲面を生成した結果である。ただし、図を見易くするため、生成した近似オフセット曲面は表示せず、補間面のみを表示している。太い実線として見える部分が補間面である。補間面は、それぞれ、近似オフセット曲面どうしの間に生じた細長い隙間に生成されたものであり、それぞれ、 $10^{-2}$ 以下の曲線を含んでいる。図3.12(b)は微小判定閾値を $10^{-1}$ とした場合である。この図では、生成した近似オフセット曲面をすべて表示している。この場合、図3.12(a)における補間面が、すべて微小要素になると判定される。このため中間曲線が作られるので、近似オフセット曲面間に隙間は発生せず、補間面は1つも生成されなかった。つまり、微小判定閾値の大きさを $10^{-4}$ から $10^{-1}$ に変えることによって、微小要素の発生が抑制されている。

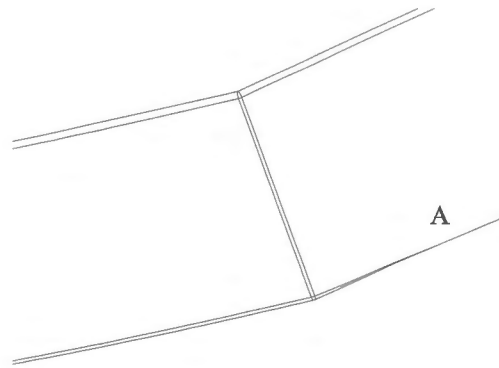
図3.13も工業製品(配管)のための形状モデルである。この形状モデルに対して、同様の比較を行った結果が図3.14である。図3.14(a)は、微小判定閾値を $10^{-4}$ とした場合であり、太い実線として見える部分が補間面である。それぞれ、 $10^{-2}$ 以下の曲線を含んでいる。なお、この図においても、見易さのため、近似オフセット曲面は表示していない。図3.14(b)は、微小判定閾値を $10^{-1}$ とした場合であり、生成した近似オフセット曲面をすべて表示している。図3.14(a)における補間面が、すべて微小要素になると判定される。このため中間曲線が作られるので、近似オフセット曲面間に隙間は発生せず、補間面は1つも生成されなかった。この形状モデルの場合も、微小判定閾値の大きさを $10^{-4}$ から $10^{-1}$ に変えることによって、微小要素の発生が抑制されている。



(a)

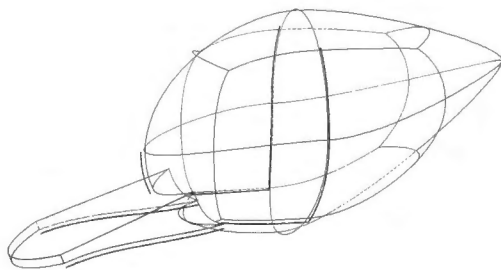


(b)

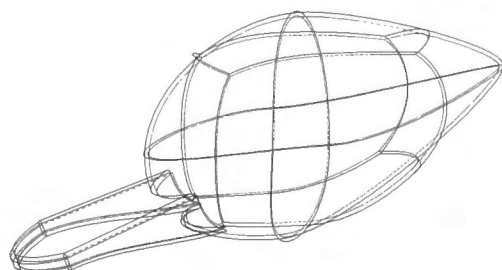


(c)

図 3.11: (a) ワイヤフレーム表示, (b) シェーディングイメージ, (c) 丸囲み部分の拡大図 (角に丸め処理が施されている).

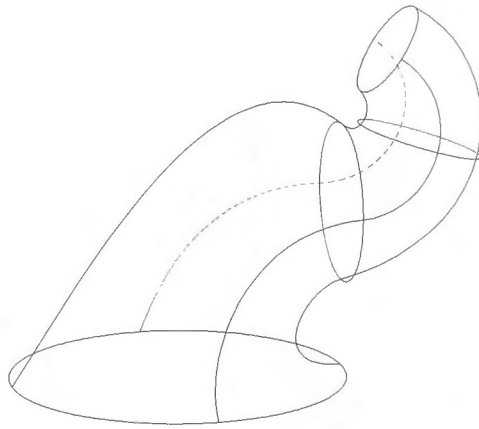


(a)

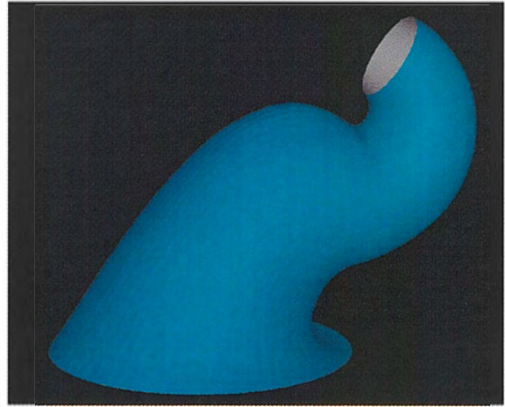


(b)

図 3.12: (a) 微小判定閾値が  $10^{-4}$  の場合, (b) 微小判定閾値が  $10^{-1}$  の場合.

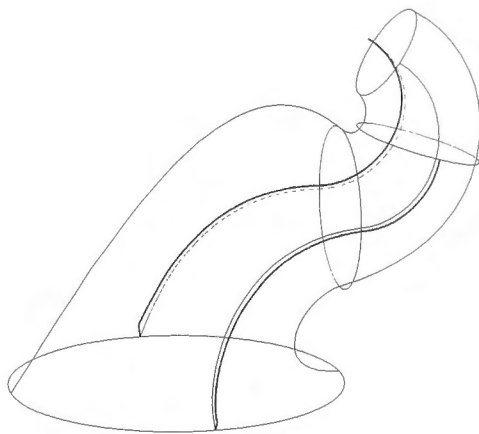


(a)

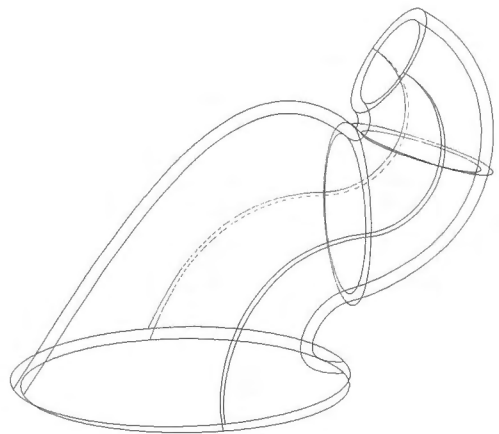


(b)

図 3.13: (a) ワイヤーフレーム表示, (b) シェーディングイメージ.



(a)



(b)

図 3.14: (a) 微小判定閾値が  $10^{-4}$  の場合, (b) 微小判定閾値が  $10^{-1}$  の場合.

### 3.4 まとめ

本章では、微小要素の発生を抑制する近似オフセット曲面の生成手法を提案した。本手法による近似オフセット曲面は、隣接するパッチ間の接続が  $C^1$  連続な双 3 次 B-spline 曲面である。各パッチの制御点は、最小自乗法に基づいて求めた。本手法の特徴は、2.3 節で述べた補間面が微小要素となる状況において、近似オフセット曲面どうしを接続したことである。具体的には、先ず元曲面の共有境界に対応した 2 本の近似オフセット曲線に対し、中間曲線を求めた。次に、中間曲線と元の近似オフセット曲線とを置き換え、近似オフセット曲線を再構築した。そして、再構築された近似オフセット曲線を境界曲線として、近似オフセット曲面を生成した。これにより、近似オフセット曲面どうしが接続されるため、微小要素となる補間面の発生が抑制された。従って、2.3 節で示した課題 1 が解決された。本手法の有効性は、本手法を幾つかの実用的な立体モデルに適用した結果、微小要素の発生が抑制されたことにより実証された。

## 第4章 隙間や折れによる品質低下を 抑制する曲面オフセット処理

### 4.1 オフセット曲面の近似処理

2枚の元曲面が滑らかに接続している場合、2.2節で述べたとおり、理論上のオフセット曲面どうしは滑らかに接続する。しかし、従来技術では2.3節で述べた隙間や折れが発生することがある。これに対し隙間や折れが発生しない、滑らかに接続する2枚の近似オフセット曲面を生成する手法を提案する。先ず本節において、隙間なく接続する2枚の近似オフセット曲面を生成する手法について説明する。そして、本節で生成された近似オフセット曲面間を、滑らかに接続する手法について次節で説明する。

2.2節で述べたとおりオフセット曲面は、曲面間の干渉計算やブレンディング曲面の計算など、一階微分方程式の数値計算に引き渡されることがある。従って、生成される近似オフセット曲面は少なくとも  $C^1$  連続である必要がある。このため、本手法においても  $C^1$  連続な近似オフセット曲面を生成する。 $C^1$  連続な近似オフセット曲面を生成する従来技術には、2.2節で述べた、Faroukiの方法 [7]、Hoschekの方法 [13]、Pieglの方法 [28] がある。どの方法も低次で扱いやすい曲面パッチでオフセット曲面を近似できる。ただし3.1節で述べたとおり、Pieglの方法は、最終的なオフセット曲面の区分位置が最初に決められてしまうため、パッチの誤差を評価しながら最終的な区分位置を調整することができない。本手法は、近似オフセット曲面間を接続するため、近似オフセット曲面間の接続部において、オフセット曲面の区分位置が一致するように2枚のオフセット曲面を近似する。そこで本手法では、3.1節と同様に、最終的なオ

オフセット曲面の区分位置を調整しやすいよう、オフセット曲面領域を段階的に細かく区分し、各区分領域に対する近似精度を徐々に上げていく方式をとる。また、3.1節で述べた理由と同様に、近似オフセット曲面のデータ量は最小自乗法に基づいた方法のほうが Farouki や Hoschek の方法よりも少ないという理由から、本手法においても、近似オフセット曲面のパッチを最小自乗法に基づいて求める。本節で説明する近似オフセット曲面の生成手法は、双3次 Bézier パッチの生成 (Step1)、パッチの誤差の測定と細分割 (Step2)、パッチ間の  $C^1$  接続 (Step3)、および、オフセット曲面間の共有境界上におけるパッチ間の1対1の接続 (Step4) の4つのステップで構成される。

Step1: 1枚のオフセット曲面を、1枚の双3次 Bézier パッチで近似する。このとき、Hoschek の方法 [12] と同じく、Bézier パッチの境界上の制御点と内部制御点とに分けて計算する。境界上の制御点は、オフセット曲面の各境界曲線を3次 Bézier 曲線で近似することにより求める。オフセット曲面の境界曲線を近似する3次 Bézier 曲線は、両端の位置と接線ベクトルの方向を理論上のオフセット曲面の境界曲線と一致させ、オフセット曲面の境界線上に発生させたサンプル点を用い、最小自乗法により計算する [12] (具体的な計算は付録 A を参照)。このとき、サンプル点は、オフセット曲面の境界曲線を適応的に近似した折れ線の角の位置に発生させる。すなわち、オフセット曲面の境界曲線のパラメータ区間を細分割した位置に求める (図 4.1(a) の黒い点は例)。先ず、オフセット曲面の境界曲線をパラメータ区間で4等分し、分割後の各曲線が直線とみなせるかどうかを評価する。このとき、曲線の両端点の接線ベクトルの角度が、許容誤差の範囲で0であれば直線とみなす。なお、この接線ベクトルの角度に対する許容誤差を、以後、**角度許容誤差**と呼ぶ。次に、直線とみなされなかった曲線について、その曲線のパラメータ区間を2等分し、分割後の各曲線について同様に直線とみなせるかどうかを評価する。この手続きを、細分割されたすべての曲線が直線とみなされるまで繰り返す。内部制御点は、オフセット曲面上に発生させたサンプル点を用い、最小自乗法によって計算する [27] (具体的な計算は付録 B を参照)。このとき、サンプル点は、4本の境界曲

線の計算に用いたすべてのサンプル点のパラメータ値に基づき、オフセット曲面の内部に発生させる。具体的には、4本の境界曲線の計算に用いたサンプル点から得られる、 $u$ と $v$ のすべての値における $uv$ 間のすべての組み合わせのうち、境界曲線上の組を除いて与えられる、オフセット曲面上のパラメータの位置にサンプル点を発生させる(図4.1(a)の白い点は例)。

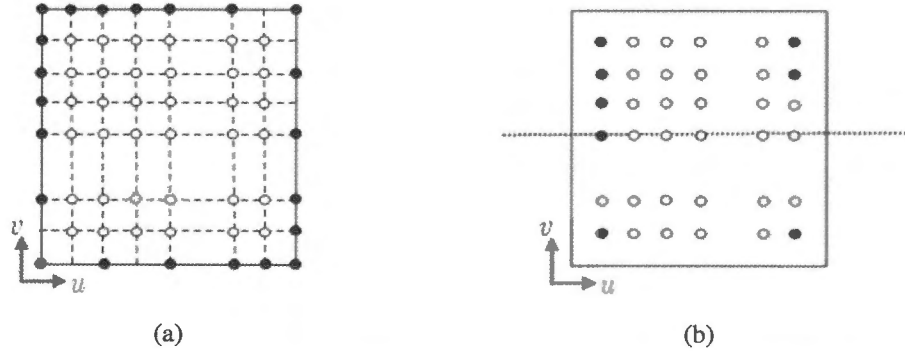


図 4.1: (a) オフセット曲面上のサンプル点, (b) パラメータ空間の分割.

Step2: 先ず, パッチの誤差を輪郭度公差の規格 [15] を参考にして測定する. この規格において公差域は, 理論上の曲面上に中心点を置き, 許容誤差を直径とした球による2つの包絡面の間と定義されている. しかし, 曲面上のすべての点について誤差を測定することは難しいため, 測定は離散的に行う. そこで, 理論上のオフセット曲面上の点と, その点における曲面の法線ベクトルに最も近い, パッチ上の点との距離を測定する. ここで, パッチの境界曲線とパッチの内部は別々に近似されているため, パッチの境界曲線とパッチ内部とを別々に測定する. パッチの境界曲線については, 理論上のオフセット曲面の境界曲線上の点と, その点における曲面の法線ベクトルに最も近い, パッチの境界曲線上の点との距離を測定する. 具体的には, パッチの境界曲線の近似計算に用いた各サンプル点について, そのサンプル点における曲面の法線ベクトルに最も近い点を, Newton法を用いてパッチの境界曲線上に求める. ここで, パッチの境界曲線を  $C(t)$  とし, サンプル点に対応した元曲面上の点を  $O$  とする.  $O$  における元曲面の単位法線ベクトルを  $N$  とすると,  $O$  を通る  $N$  方向の直線と

$\mathbf{C}(t)$  との距離の二乗ノルムは、式 (4.1) で表すことができる。

$$f(t) = |(\mathbf{C}(t) - \mathbf{O}) - \{(\mathbf{C}(t) - \mathbf{O}) \cdot \mathbf{N}\}\mathbf{N}|^2. \quad (4.1)$$

式 (4.1) を非線形探索における目的関数とすれば、式 (4.1) が最小となる  $\mathbf{C}(t)$  のパラメータ値をニュートン法により数値計算できる。つまり、サンプル点における曲面の法線ベクトルに、最も近い点を求めることができる。このとき、初期パラメータには、サンプル点における  $u$  と  $v$  のパラメータ値のうち、 $\mathbf{C}(t)$  が近似するパラメータ方向におけるパラメータ値を与える。また、反復計算のステップサイズは、式 (4.2) により与えられる。

$$\Delta t = -\frac{f(t)}{f'(t)}. \quad (4.2)$$

そして、求めた点とサンプル点との距離を測定し、与えられた許容誤差の範囲内かどうかを調べる。パッチ内部については、理論上のオフセット曲面上の点と、その点における曲面の法線ベクトルに最も近い、パッチ上の点との距離を測定する。具体的には、パッチ内部の近似計算に用いた各サンプル点について、そのサンプル点における曲面の法線ベクトルに最も近い点を、Newton 法を用いてパッチ上に求める。ここで、パッチを  $\mathbf{S}(u, v)$  とし、サンプル点に対応した元曲面上の点を  $\mathbf{O}$  とする。 $\mathbf{O}$  における元曲面の単位法線ベクトルを  $\mathbf{N}$  とすると、 $\mathbf{O}$  を通る  $\mathbf{N}$  方向の直線と  $\mathbf{S}(u, v)$  との距離の二乗ノルムは、式 (4.3) で表すことができる。

$$f(u, v) = |(\mathbf{S}(u, v) - \mathbf{O}) - \{(\mathbf{S}(u, v) - \mathbf{O}) \cdot \mathbf{N}\}\mathbf{N}|^2. \quad (4.3)$$

式 (4.3) を非線形探索における目的関数とすれば、式 (4.3) が最小となる  $\mathbf{S}(u, v)$  のパラメータは、ニュートン法により数値計算できる。つまり、サンプル点における曲面の法線ベクトルに、最も近い点を求めることができる。このとき、初期パラメータにはサンプル点のパラメータを与える。また、ニュートン法に

おける反復計算のステップサイズは，式 (4.4) により与えられる．

$$\begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{bmatrix} = \nabla^2 f(u, v)^{-1} \nabla f(u, v). \quad (4.4)$$

そして，求めた点とサンプル点との距離を測定し，与えられた許容誤差の範囲内かどうかを調べる．

次に，パッチの境界曲線上において，許容誤差を満たしていない測定点が存在した場合，パッチの  $u$  方向または  $v$  方向のパラメータ区間を 2 等分するように，オフセット曲面のパラメータ空間を細分割する．許容誤差を満たしていない測定点が  $u$  方向の境界曲線の場合は， $u$  方向のパラメータ区間を 2 等分し，そうでない場合は， $v$  方向のパラメータ区間を 2 等分する．この細分割の後，オフセット曲面のパラメータ空間における細分割された各領域に対し，Step1 の方法で双 3 次 Bézier パッチを生成する．そして，生成された各パッチに対し，Step2 を，すべてのパッチの境界曲線が許容誤差を満たすまで再帰的に繰り返す．次に，パッチ内部において，許容誤差を満たしていない測定点が存在した場合，パッチの  $u$  方向または  $v$  方向のパラメータ区間を 2 等分するように，オフセット曲面のパラメータ空間を細分割する． $u$  方向と  $v$  方向のどちらが 2 等分されるかは，許容誤差を満たしていない点の，パッチのパラメータ空間内での偏りに依存する．具体的には，パッチのパラメータ空間を  $u$  方向または  $v$  方向に 2 等分したとき，2 つの領域にそれぞれ存在する許容誤差を満たしていない点の数の差に依存する．すなわち， $v$  方向を 2 等分したときよりも， $u$  方向を 2 等分したときの 2 つの領域間における点の数の差のほうが大きければ， $u$  方向を 2 等分する．そうでない場合は， $v$  方向を 2 等分する．図 4.1(b) は，パッチ内部の測定における，パッチの 2 等分の例である．図 4.1(b) において，黒い点は許容誤差を満たしていない測定点であり，白い点は許容誤差を満たしている測定点である．また，図 4.1(b) における破線は，パッチを 2 等分する方向を表している．パッチ内部の測定においてパッチが 2 等分されることにより，パッチのパラメータ空間が，より精度の良い領域と，より精度の悪い領

域とに分けられる。このため、より精度の悪い領域は、さらに細分割される可能性が高いが、より精度の良い領域は、さらに細分割される可能性は低い。このため、どちらの領域も細分割される場合より、最終的にパッチの数を少なくすることが期待できる。この細分割の後、オフセット曲面のパラメータ空間内における細分割された各領域に対し、Step1の方法で双3次 Bézier パッチを生成する。そして、生成された各パッチに対し、Step2を、すべてのパッチが許容誤差を満たすまで再帰的に繰り返す。

Step3 : Step2において複数のパッチが生成された場合、オフセット曲面間の共有境界(以後、単に**共有境界**と呼ぶ)に沿ったパッチ間を除いて、隣接するパッチどうしが  $C^1$  連続になるように、Beckerの方法[3]を用いて制御点の位置を調整する。まず、 $u$ 方向または $v$ 方向に沿って接続している2本のパッチの境界曲線を、 $C^1$  連続に接続されるように調整する。ただし、共有境界上における、パッチの境界曲線は除く。このとき、調整する2本の曲線の接続点において、接線ベクトルの向きを固定しながら、接続点と隣り合う2つの制御点の位置を調整する(図4.2(a)の赤い点)。ここで、接続点を  $\mathbf{b}$ 、接続点と隣り合う制御点を  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{c}$  とし、調整後の制御点を  $\tilde{\mathbf{a}}$ 、 $\tilde{\mathbf{c}}$  とすると、式(2.14)を用いることで、式(4.5)による拘束が与えられる。

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{c}} - \mathbf{b} &= \mu(\mathbf{b} - \tilde{\mathbf{a}}), \\ \tilde{\mathbf{a}} - \mathbf{b} &= \lambda(\mathbf{a} - \mathbf{b}),\end{aligned}\tag{4.5}$$

ここで、 $\mu$  は境界曲線のパラメータ区間の比であり、 $\lambda$  は未知のスカラーである。式(4.5)により、 $\tilde{\mathbf{a}}$  と  $\tilde{\mathbf{c}}$  は、それぞれ  $\lambda$  の1次関数として表せる。そこで、調整による制御点の移動距離が小さくなるよう、最小自乗法を用い、 $\lambda$  を式(4.6)のとおり決定する(導出は付録Cを参照)。

$$\lambda = \frac{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 + \mu(\mathbf{a} - \mathbf{b})(\mathbf{b} - \mathbf{c})}{(1 + \mu^2)|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2}.\tag{4.6}$$

式(4.6)を式(4.5)に代入すると、 $\tilde{\mathbf{a}}$  と  $\tilde{\mathbf{c}}$  が得られる。次に、4枚のパッチの角が一致する点の周りにおいて、その点と隣り合う4つの内部制御点の位置を

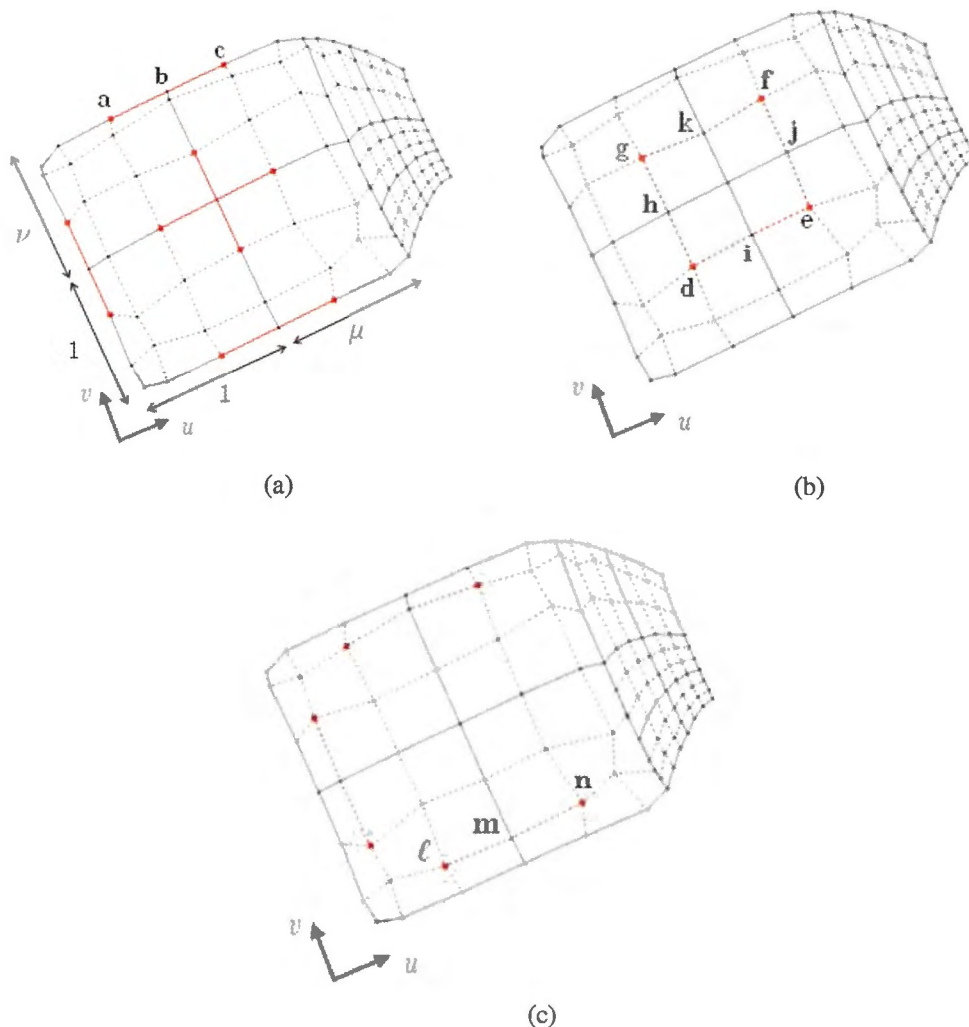


図 4.2: (a) 接続点の隣の 2 つの制御点, (b) パッチの角が一致する点のまわりの 4 つの内部制御点, (c) パッチの境界曲線を挟んだ 2 つの内部制御点.

調整する (図 4.2(b) の赤い点). これら 4 つの制御点を, オフセット曲面のパラメータ空間の原点に最も近い制御点から, 反時計回りに  $d, e, f, g$  で表し (図 4.2(b)), 調整後の各制御点を  $\tilde{d}, \tilde{e}, \tilde{f}, \tilde{g}$  で表す. また, 4 枚のパッチの角が一致する点と隣り合う, パッチの境界上の制御点を, オフセット曲面のパラメータ空間の  $v$  軸と最も近い制御点から, 反時計回りに  $h, i, j, k$  で表す (図 4.2(b)). このとき,  $\tilde{d}, \tilde{e}, \tilde{f}, \tilde{g}$  に対し, 式 (2.21) を用い, 式 (4.7) による  $C^1$  連

続の拘束を与える．

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{e}} - \mathbf{i} &= \mu(\mathbf{i} - \tilde{\mathbf{d}}), \\
\tilde{\mathbf{g}} - \mathbf{h} &= \nu(\mathbf{h} - \tilde{\mathbf{d}}), \\
\tilde{\mathbf{f}} - \mathbf{k} &= \mu(\mathbf{k} - \tilde{\mathbf{g}}), \\
\tilde{\mathbf{f}} - \mathbf{j} &= \nu(\mathbf{j} - \tilde{\mathbf{e}}),
\end{aligned} \tag{4.7}$$

ここで， $\mu$ は $u$ 方向におけるパッチ間のパラメータ区間の比であり， $\nu$ は $v$ 方向におけるパッチ間のパラメータ区間の比である．式(4.7)により，4つの式からなる連立方程式が得られるが，ランク落ちするため解不定となってしまう．一方，式(4.7)により， $\tilde{\mathbf{e}}$ ， $\tilde{\mathbf{f}}$ ， $\tilde{\mathbf{g}}$ は， $\tilde{\mathbf{d}}$ の1次関数で表せる．そこで，調整による制御点の移動距離が小さくなるよう，最小自乗法を用い， $\tilde{\mathbf{d}}$ を式(4.8)のとおり決定する(導出は付録Cを参照)．

$$\tilde{\mathbf{d}} = \frac{\begin{bmatrix} \mathbf{d} + \mu\{(1 + \mu)\mathbf{i} - \mathbf{e}\} + \nu\{(1 + \nu)\mathbf{h} - \mathbf{g}\} \\ + \mu\nu\{\mu(1 + \nu)\mathbf{h} - (1 + \mu)\mathbf{k} + \mathbf{f}\} \end{bmatrix}}{1 + \mu^2 + \nu^2 + \mu^2\nu^2}. \tag{4.8}$$

式(4.8)を式(4.7)に代入すると， $\tilde{\mathbf{e}}$ ， $\tilde{\mathbf{f}}$ ， $\tilde{\mathbf{g}}$ が得られる．次に，オフセット曲面の境界曲線に沿って隣接するパッチ間において，オフセット曲面の境界曲線上におけるパッチの角と隣り合う，2つの内部制御点を調整する．ただし，共有境界に沿ったパッチ間は除く(図4.2(c)の赤い点)．このとき，調整対象の2つの制御点に対し， $C^1$ 連続の拘束条件を与える．調整対象の2つの制御点を， $\ell$ と $\mathbf{n}$ で表し， $\ell$ および $\mathbf{n}$ と隣り合うパッチの境界上の制御点を $\mathbf{m}$ で表す(図4.2(c))．調整後の制御点を $\tilde{\ell}$ と $\tilde{\mathbf{n}}$ で表すと， $\tilde{\ell}$ と $\tilde{\mathbf{n}}$ に対し，式(4.9)による $C^1$ 連続の拘束が与えられる．

$$\tilde{\mathbf{n}} - \mathbf{m} = \mu(\mathbf{m} - \tilde{\ell}), \tag{4.9}$$

ここで， $\mu$ は $u$ 方向におけるパッチ間のパラメータ区間の比である．式(4.9)により， $\tilde{\ell}$ は $\tilde{\mathbf{n}}$ の1次関数で表せる．そこで，調整による制御点の移動距離が小さくなるよう，最小自乗法を用い， $\tilde{\ell}$ を式(4.10)のとおり決定する(導出は付録

Cを参照).

$$\tilde{\ell} = \frac{\ell + \mu\{(1 + \mu)\mathbf{m} - \mathbf{n}\}}{1 + \mu^2}. \quad (4.10)$$

式(4.10)を式(4.9)に代入すると、 $\tilde{\mathbf{n}}$ が得られる．最後に、Step2の方法で、各パッチの誤差を測定する．このとき、許容誤差を満たさないパッチがあれば、Step2の方法で、オフセット曲面のパラメータ空間の細分割と双3次Bézierパッチの生成を行い、Step3を繰り返す．

Step4：2枚のオフセット曲面に対して、それぞれStep1からStep3を実行した結果、共有境界を挟んでパッチが1対1に隣接しない場合、共有境界上のパラメータ区間の分割点が互いに一致するように、両側のオフセット曲面のパラメータ空間を細分割する(図4.3(a))．この結果、もし1対1に隣接するパッチの組が3つより少なかった場合、次節で説明する処理のため、共有境界のパラメータ区間を4等分するように、両側のオフセット曲面のパラメータ空間を細分割する(図4.3(b))．この後、Step1の方法で細分割された各領域を双3次Bézierパッチで近似し、Step3の方法でパッチ間を $C^1$ 連続に調整する．この結果、共有境界を挟んで1対1に隣接するパッチの組が4つ以上生成される．また、各パッチの組における隣接部の2つの境界曲線は、Step1とStep3で同じ入力と手続きで計算されるため、形状が一致する．

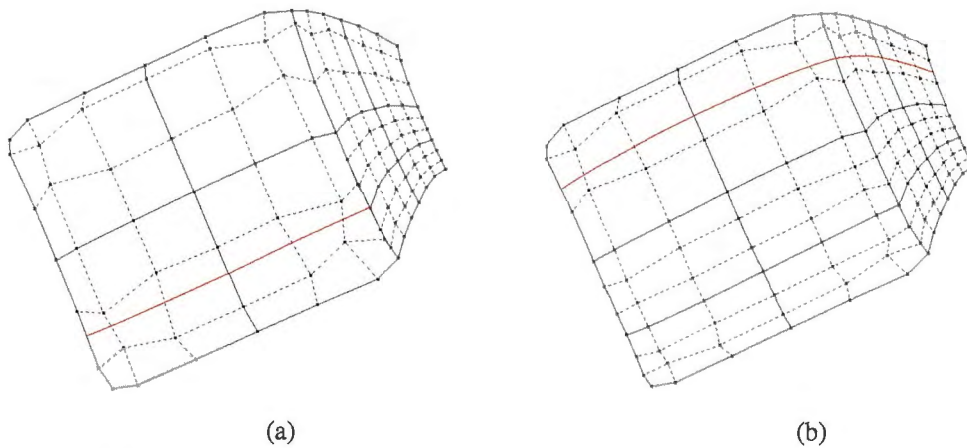


図 4.3: (a) パッチを 1 対 1 に対応させる細分割, (b) パッチの組を増やす細分割.

## 4.2 オフセット曲面の連続性の調整処理

### 4.2.1 調整対象と拘束条件

4.1 節の手法で生成した近似オフセット曲面間を、滑らかに接続する手法について説明する。本手法では、共有境界に隣接する各パッチの制御点の位置を調整することで、共有境界に沿って隣接するパッチ間を  $C^1$  連続に接続し、共有境界を挟んで隣接するパッチ間を  $G^1$  連続に接続する。これにより、滑らかに接続する 2 枚の  $C^1$  連続な近似オフセット曲面が生成される。本節では、調整対象の制御点、および、パッチ間の連続性の拘束条件を示す。具体的な調整手法は、次節で説明する。図 4.4 は、共有境界に沿ったパッチの制御点を表している。以下の説明は、図 4.4 を利用して行う。説明を簡単にするため、オフセット曲面どうしは、同じ  $v$  方向で接続しているものとし、共有境界に沿った  $n$  個のパッチの組に対し、 $v$  方向へ昇順に  $1, 2, \dots, n$  とインデックスを付ける。 $\mathbf{P}_j^k$  と  $\mathbf{Q}_j^k$  は、共有境界上の制御点と隣りあう制御点であり、 $\mathbf{R}_j^k$  は共有境界上の制御点である。ここで  $j$  は、各パッチのパラメータ空間において  $v$  方向へ昇順に割り当てられた、0 から 3 までのインデックスであり、 $k$  はパッチの組のインデックスである。 $\mathbf{R}_j^k$  は、各パッチの組における共通の制御点である。調整対象の制御点は、 $\mathbf{P}_j^k, \mathbf{Q}_j^k, \mathbf{R}_1^k, \mathbf{R}_2^k$  である。これに対し調整後の制御点を  $\tilde{\mathbf{P}}_j^k, \tilde{\mathbf{Q}}_j^k, \tilde{\mathbf{R}}_1^k, \tilde{\mathbf{R}}_2^k$  で表す。 $\mathbf{P}_3^k$  と  $\mathbf{P}_0^{k+1}, \mathbf{Q}_3^k$  と  $\mathbf{Q}_0^{k+1}, \mathbf{R}_3^k$  と  $\mathbf{R}_0^{k+1}$  は、それぞれ同一の制御点であり、調整後においても同一である。 $\mathbf{a}_j^k, \mathbf{b}_j^k, \mathbf{c}_\ell^k$  ( $\ell = 0, 1, 2$ ) は、 $\mathbf{R}_j^k$  と隣り合う制御点と  $\mathbf{R}_j^k$  との間を結ぶベクトルであり、 $\mathbf{a}_j^k = \mathbf{R}_j^k - \mathbf{P}_j^k, \mathbf{b}_j^k = \mathbf{Q}_j^k - \mathbf{R}_j^k, \mathbf{c}_\ell^k = \mathbf{R}_{\ell+1}^k - \mathbf{R}_\ell^k$  である。これに対し、制御点を調整した後の各ベクトルを  $\tilde{\mathbf{a}}_j^k, \tilde{\mathbf{b}}_j^k, \tilde{\mathbf{c}}_\ell^k$  ( $\ell = 0, 1, 2$ ) で表す。 $t_k$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) は、共有境界のパラメータ区間における、パッチの角の位置のパラメータ値である。

$C^1$  連続の拘束条件は、式 (2.21) を用いると、式 (4.11) のとおり与えること

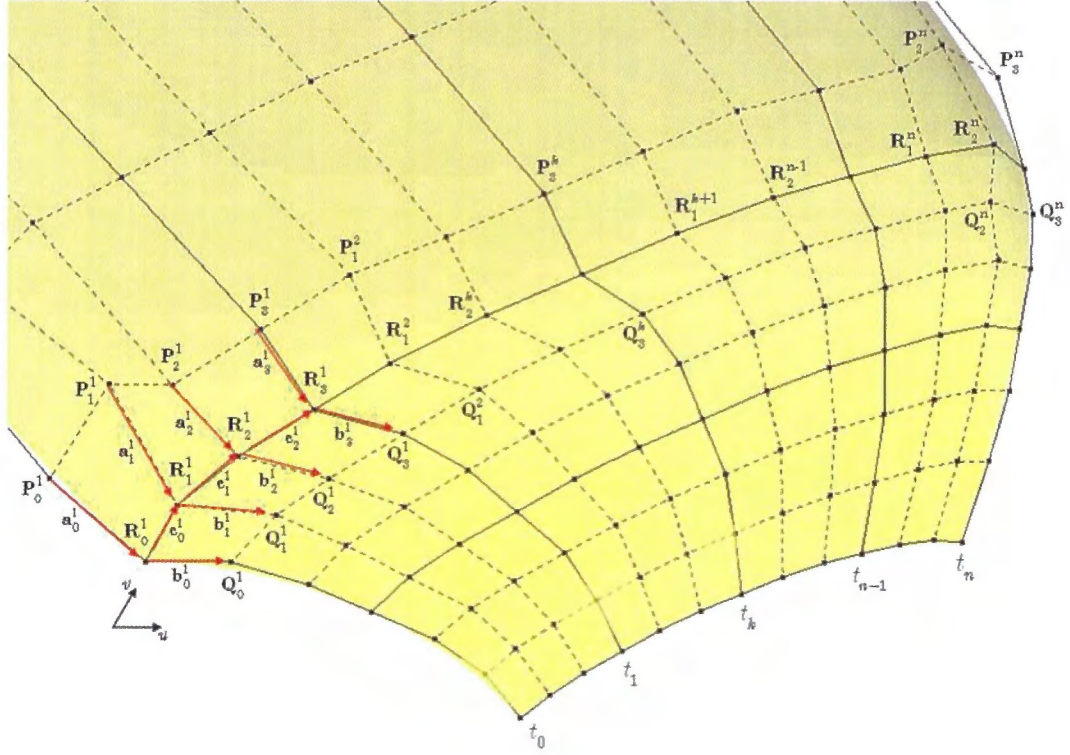


図 4.4: 共有境界に沿ったパッチ.

ができる [3].

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{P}}_1^{k+1} - \tilde{\mathbf{P}}_3^k &= \nu_k(\tilde{\mathbf{P}}_3^k - \tilde{\mathbf{P}}_2^k), \\
 \tilde{\mathbf{Q}}_1^{k+1} - \tilde{\mathbf{Q}}_3^k &= \nu_k(\tilde{\mathbf{Q}}_3^k - \tilde{\mathbf{Q}}_2^k), \\
 \tilde{\mathbf{R}}_1^{k+1} - \tilde{\mathbf{R}}_3^k &= \nu_k(\tilde{\mathbf{R}}_3^k - \tilde{\mathbf{R}}_2^k) \quad (k = 1, 2, \dots, n),
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

ここで,

$$\nu_k = \frac{t_{k+1} - t_k}{t_k - t_{k-1}}. \tag{4.12}$$

$G^1$  連続の拘束条件は, 式 (2.22) を用いると, 式 (4.13) のとおり与えることができる [5].

$$\begin{aligned}
 \alpha_k(v) \sum_{j=0}^3 B_j^3(v) \tilde{\mathbf{a}}_j^k + \beta_k(v) \sum_{j=0}^3 B_j^3(v) \tilde{\mathbf{b}}_j^k + \gamma_k(v) \sum_{j=0}^2 B_j^2(v) \tilde{\mathbf{c}}_j^k &= 0 \\
 (k = 1, 2, \dots, n),
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

ここで,  $\alpha_k(v)$ ,  $\beta_k(v)$ ,  $\gamma_k(v)$  は,  $v$  の任意の多項式である. 本手法では,  $G^1$  連続の拘束条件を, パラメータ  $v$  を含まない扱いやすい形式で与え直すため,

Peters の方法 [26] を参考に,  $\alpha_k(v)$ ,  $\beta_k(v)$ ,  $\gamma_k(v)$  を式 (4.14) のとおり定義する.

$$\begin{aligned}\alpha_k(v) &= (1-v)\alpha_k(0) + v\alpha_k(1), \\ \beta_k(v) &= (1-v) + v, \\ \gamma_k(v) &= (1-v)^2\gamma_k(0) + v^2\gamma_k(1).\end{aligned}\tag{4.14}$$

式 (4.13) に式 (4.14) を代入すると, 式 (4.13) は式 (4.15) のとおり表される.

$$\begin{aligned}& \alpha_k(0)(1-v) \sum_{j=0}^3 B_j^3(v) \tilde{\mathbf{a}}_j^k + \alpha_k(1)v \sum_{j=0}^3 B_j^3(v) \tilde{\mathbf{a}}_j^k + \\ & (1-v) \sum_{j=0}^3 B_j^3(v) \tilde{\mathbf{b}}_j^k + v \sum_{j=0}^3 B_j^3(v) \tilde{\mathbf{b}}_j^k + \\ & \gamma_k(0)(1-v)^2 \sum_{j=0}^2 B_j^2(v) \tilde{\mathbf{c}}_j^k + \gamma_k(1)v^2 \sum_{j=0}^2 B_j^2(v) \tilde{\mathbf{c}}_j^k = 0.\end{aligned}\tag{4.15}$$

式 (4.15) に Bézier 曲線の次数上げの関係 [6] を適用すると, 式 (4.15) を扱いやすい形式に変形できる. ここで, 次数上げの関係を説明するため, 式 (2.8) で定義される Bézier 曲線を, 式 (4.16) のとおり表す.

$$\mathbf{C}(t) = (1-t) \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \mathbf{P}_i + t \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \mathbf{P}_i.\tag{4.16}$$

式 (4.16) の右辺第 1 項のスカラ成分は, 式 (4.17) のように次数上げできる.

$$\begin{aligned}(1-t) \sum_{i=0}^n B_i^n(t) &= \sum_{i=0}^n \frac{n!}{(n-i)!i!} (1-t)^{n+1-i} t^i \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{n+1-i}{n+1} \cdot \frac{(n+1)!}{(n+1-i)!i!} (1-t)^{n+1-i} t^i \\ &= \sum_{i=0}^{n+1} \frac{n+1-i}{n+1} B_i^{n+1}(t).\end{aligned}\tag{4.17}$$

また, 式 (4.16) の右辺第 2 項のスカラ成分は, 式 (4.18) のように次数上げで

きる.

$$\begin{aligned}
t \sum_{i=0}^n B_i^n(t) &= \sum_{i=0}^n \frac{n!}{(n-i)!i!} (1-t)^{n-i} t^{i+1} \\
&= \sum_{i=0}^n \frac{i+1}{n+1} \cdot \frac{(n+1)!}{\{(n+1)-(i+1)\}!(i+1)!} (1-t)^{(n+1)-(i+1)} t^{i+1} \\
&= \sum_{i=-1}^n \frac{i+1}{n+1} B_{i+1}^{n+1}(t) \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} \frac{i}{n+1} B_i^{n+1}(t).
\end{aligned} \tag{4.18}$$

式(4.17)と式(4.18)を式(4.15)に代入すると, 式(4.15)は式(4.19)のとおり表せる.

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^4 B_j^4(v) \left\{ \alpha_k(0) \frac{4-j}{4} \tilde{\mathbf{a}}_j^k + \frac{4-j}{4} \tilde{\mathbf{b}}_j^k + \gamma_k(0) \frac{4-j}{4} \cdot \frac{3-j}{3} \tilde{\mathbf{c}}_j^k \right\} + \\
&\sum_{j=0}^4 B_j^4(v) \left\{ \alpha_k(1) \frac{j}{4} \tilde{\mathbf{a}}_{j-1}^k + \frac{j}{4} \tilde{\mathbf{b}}_{j-1}^k + \gamma_k(1) \frac{j}{4} \cdot \frac{j-1}{3} \tilde{\mathbf{c}}_{j-2}^k \right\} = 0,
\end{aligned} \tag{4.19}$$

ここで,

$$\tilde{\mathbf{a}}_4^k = \tilde{\mathbf{b}}_4^k = \tilde{\mathbf{c}}_3^k = \tilde{\mathbf{c}}_4^k = \tilde{\mathbf{a}}_{-1}^k = \tilde{\mathbf{b}}_{-1}^k = \tilde{\mathbf{c}}_{-2}^k = \tilde{\mathbf{c}}_{-1}^k = 0. \tag{4.20}$$

式(4.19)について, 分母の4を払って展開すると式(4.21)を得ることができる.

$$\begin{aligned}
&\alpha(0)\mathbf{B} \begin{bmatrix} 4\tilde{\mathbf{a}}_0^k \\ 3\tilde{\mathbf{a}}_1^k \\ 2\tilde{\mathbf{a}}_2^k \\ \mathbf{a}_3^k \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{B} \begin{bmatrix} 4\tilde{\mathbf{b}}_0^k \\ 3\tilde{\mathbf{b}}_1^k \\ 2\tilde{\mathbf{b}}_2^k \\ \tilde{\mathbf{b}}_3^k \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma(0)\mathbf{B} \begin{bmatrix} 4\tilde{\mathbf{c}}_0^k \\ 2\tilde{\mathbf{c}}_1^k \\ (2/3)\tilde{\mathbf{c}}_2^k \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \\
&\alpha(1)\mathbf{B} \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{\mathbf{a}}_0^k \\ 2\tilde{\mathbf{a}}_1^k \\ 3\tilde{\mathbf{a}}_2^k \\ 4\tilde{\mathbf{a}}_3^k \end{bmatrix} + \mathbf{B} \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{\mathbf{b}}_0^k \\ 2\tilde{\mathbf{b}}_1^k \\ 3\tilde{\mathbf{b}}_2^k \\ 4\tilde{\mathbf{b}}_3^k \end{bmatrix} + \gamma(1)\mathbf{B} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (2/3)\tilde{\mathbf{c}}_0^k \\ 2\tilde{\mathbf{c}}_1^k \\ 4\tilde{\mathbf{c}}_2^k \end{bmatrix} = 0,
\end{aligned} \tag{4.21}$$

ここで,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_0^4(v) & B_1^4(v) & B_2^4(v) & B_3^4(v) & B_4^4(v) \end{bmatrix}. \quad (4.22)$$

従って式(4.21)により,  $G^1$  連続の拘束条件は, パラメータ  $v$  を含まない扱いやすい形式として, 式(4.23)のとおり与え直すことができる

$$\begin{aligned} \alpha_k(0)\tilde{\mathbf{a}}_0^k + \tilde{\mathbf{b}}_0^k + \gamma_k(0)\tilde{\mathbf{c}}_0^k &= 0, \\ \alpha_k(0)\tilde{\mathbf{a}}_1^k + \tilde{\mathbf{b}}_1^k + \frac{1}{3}\{\alpha_k(1)\tilde{\mathbf{a}}_0^k + \tilde{\mathbf{b}}_0^k\} + \frac{2}{3}\gamma_k(0)\tilde{\mathbf{c}}_0^k &= 0, \\ \alpha_k(1)\tilde{\mathbf{a}}_1^k + \tilde{\mathbf{b}}_1^k + \alpha_k(0)\tilde{\mathbf{a}}_2^k + \tilde{\mathbf{b}}_2^k + \frac{1}{3}\{\gamma_k(0)\tilde{\mathbf{c}}_2^k + \gamma_k(1)\tilde{\mathbf{c}}_0^k\} &= 0, \\ \alpha_k(1)\tilde{\mathbf{a}}_2^k + \tilde{\mathbf{b}}_2^k + \frac{1}{3}\{\alpha_k(0)\tilde{\mathbf{a}}_3^k + \tilde{\mathbf{b}}_3^k\} + \frac{2}{3}\gamma_k(1)\tilde{\mathbf{c}}_1^k &= 0, \\ \alpha_k(1)\tilde{\mathbf{a}}_3^k + \tilde{\mathbf{b}}_3^k + \gamma_k(1)\tilde{\mathbf{c}}_2^k &= 0. \end{aligned} \quad (4.23)$$

式(4.23)の1番目の式は, 平面上の3つのベクトルの釣り合いの関係を表しているので, 3つのベクトル  $\alpha_k(0)\tilde{\mathbf{a}}_0^k$ ,  $\tilde{\mathbf{b}}_0^k$ ,  $\gamma_k(0)\tilde{\mathbf{c}}_0^k$  によって三角形を描くことができる(図4.5). このとき, 三角形の2辺の外積の大きさは, どの2辺の組

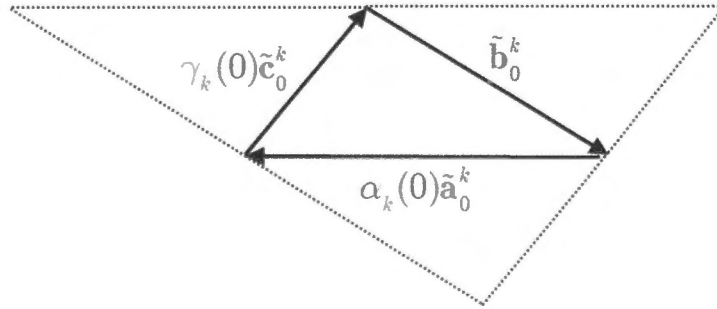


図 4.5: 3つのベクトルで描かれる三角形.

み合わせにおいても三角形の面積の2倍である(図4.5の補助線を参照). 従って, 式(4.24)の関係が成り立つ.

$$\alpha_k(0)\tilde{\mathbf{a}}_0^k \times \tilde{\mathbf{b}}_0^k + \tilde{\mathbf{b}}_0^k \times \gamma_k(0)\tilde{\mathbf{c}}_0^k = 2\{\gamma_k(0)\tilde{\mathbf{c}}_0^k \times \alpha_k(0)\tilde{\mathbf{a}}_0^k\}, \quad (4.24)$$

または,

$$\alpha_k(0)(\tilde{\mathbf{a}}_0^k \times \tilde{\mathbf{b}}_0^k) + \gamma_k(0)(\tilde{\mathbf{b}}_0^k \times \tilde{\mathbf{c}}_0^k) = 2\alpha_k(0)\gamma_k(0)(\tilde{\mathbf{c}}_0^k \times \tilde{\mathbf{a}}_0^k). \quad (4.25)$$

式(4.23)の5番目の式についても、式(4.24)と同様の関係が成り立つ。ゆえに、式(4.24)により、 $\alpha_k(0)$ ,  $\gamma_k(0)$ ,  $\alpha_k(1)$ ,  $\gamma_k(1)$  に対して式(4.26)の関係を与えることができる。

$$\begin{aligned}\alpha_k(0) &= \frac{(\tilde{\mathbf{b}}_0^k \times \tilde{\mathbf{c}}_0^k)(\tilde{\mathbf{c}}_0^k \times \tilde{\mathbf{a}}_0^k)}{|\tilde{\mathbf{c}}_0^k \times \tilde{\mathbf{a}}_0^k|^2}, & \gamma_k(0) &= \frac{(\tilde{\mathbf{a}}_0^k \times \tilde{\mathbf{b}}_0^k)(\tilde{\mathbf{c}}_0^k \times \tilde{\mathbf{a}}_0^k)}{|\tilde{\mathbf{c}}_0^k \times \tilde{\mathbf{a}}_0^k|^2}, \\ \alpha_k(1) &= \frac{(\tilde{\mathbf{b}}_3^k \times \tilde{\mathbf{c}}_2^k)(\tilde{\mathbf{c}}_2^k \times \tilde{\mathbf{a}}_3^k)}{|\tilde{\mathbf{c}}_2^k \times \tilde{\mathbf{a}}_3^k|^2}, & \gamma_k(1) &= \frac{(\tilde{\mathbf{a}}_3^k \times \tilde{\mathbf{b}}_3^k)(\tilde{\mathbf{c}}_2^k \times \tilde{\mathbf{a}}_3^k)}{|\tilde{\mathbf{c}}_2^k \times \tilde{\mathbf{a}}_3^k|^2}.\end{aligned}\tag{4.26}$$

ここで、式(4.11)と式(4.23)を同時に満たすため、式(4.27)による拘束を加える。

$$\begin{aligned}\alpha_k(0) &= \alpha_k(1) = \alpha \quad (k = 1, 2, \dots, n), \\ \gamma_k(1) &= \gamma_{k+1}(0) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n-1).\end{aligned}\tag{4.27}$$

式(4.27)の $\alpha$ は、一定のスカラーである。式(4.27)を式(4.23)に代入すると、 $k=1$ のとき、

$$\begin{aligned}\alpha \tilde{\mathbf{a}}_0^1 + \tilde{\mathbf{b}}_0^1 + \gamma_1(0) \tilde{\mathbf{c}}_0^1 &= 0, \\ \alpha \tilde{\mathbf{a}}_1^1 + \tilde{\mathbf{b}}_1^1 + \frac{1}{3}(\alpha \tilde{\mathbf{a}}_0^1 + \tilde{\mathbf{b}}_0^1) + \frac{2}{3}\gamma_1(0) \tilde{\mathbf{c}}_0^1 &= 0, \\ \alpha \tilde{\mathbf{a}}_1^1 + \tilde{\mathbf{b}}_1^1 + \frac{1}{3}\gamma_1(0) \tilde{\mathbf{c}}_2^1 &= 0, \\ \alpha \tilde{\mathbf{a}}_2^1 + \tilde{\mathbf{b}}_2^1 &= 0, \\ \alpha \tilde{\mathbf{a}}_3^1 + \tilde{\mathbf{b}}_3^1 &= 0,\end{aligned}\tag{4.28}$$

$k=n$ のとき、

$$\begin{aligned}\alpha \tilde{\mathbf{a}}_0^n + \tilde{\mathbf{b}}_0^n &= 0, \\ \alpha \tilde{\mathbf{a}}_1^n + \tilde{\mathbf{b}}_1^n &= 0, \\ \alpha \tilde{\mathbf{a}}_2^n + \tilde{\mathbf{b}}_2^n + \frac{1}{3}\gamma_n(1) \tilde{\mathbf{c}}_0^n &= 0, \\ \alpha \tilde{\mathbf{a}}_2^n + \tilde{\mathbf{b}}_2^n + \frac{1}{3}(\alpha \tilde{\mathbf{a}}_3^n + \tilde{\mathbf{b}}_3^n) + \frac{2}{3}\gamma_n(1) \tilde{\mathbf{c}}_1^n &= 0, \\ \alpha \tilde{\mathbf{a}}_3^n + \tilde{\mathbf{b}}_3^n + \gamma_n(1) \tilde{\mathbf{c}}_2^n &= 0,\end{aligned}\tag{4.29}$$

$k = 2, 3, \dots, n-1$  のとき,

$$\begin{aligned}
\alpha \tilde{\mathbf{a}}_0^k + \tilde{\mathbf{b}}_0^k &= 0, \\
\alpha \tilde{\mathbf{a}}_1^k + \tilde{\mathbf{b}}_1^k &= 0, \\
\alpha \tilde{\mathbf{a}}_1^k + \tilde{\mathbf{b}}_1^k + \alpha \tilde{\mathbf{a}}_2^k + \tilde{\mathbf{b}}_2^k &= 0, \\
\alpha \tilde{\mathbf{a}}_2^k + \tilde{\mathbf{b}}_2^k &= 0, \\
\alpha \tilde{\mathbf{a}}_3^k + \tilde{\mathbf{b}}_3^k &= 0.
\end{aligned} \tag{4.30}$$

つまり, 式 (4.27) の 1 番目の式により,  $\tilde{\mathbf{b}}_3^k$  の方向における  $\tilde{\mathbf{a}}_3^k$  と  $\tilde{\mathbf{b}}_3^k$  の大きさの比, および,  $\tilde{\mathbf{b}}_0^1$  の方向における  $\tilde{\mathbf{a}}_0^1$  と  $\tilde{\mathbf{b}}_0^1$  の大きさの比が  $\alpha$  に固定される.  $\alpha$  の値は, 共有境界の両端点における, 両側のオフセット曲面の偏微分ベクトルを用いて取り決める. ここで,  $\mathbf{a}_0^1, \mathbf{b}_0^1, \mathbf{c}_0^1, \mathbf{a}_1^n, \mathbf{b}_1^n, \mathbf{c}_1^n$  と, 始点位置と方向が同じオフセット曲面の偏微分ベクトルを, それぞれ  $\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0, \mathbf{c}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}_1$  とすると, オフセット曲面どうしは  $G^1$  連続なので, 式 (4.23) の 1 番目と 5 番目の式と同様に, 式 (4.31) による関係が与えられる.

$$\begin{aligned}
\alpha_0 \mathbf{a}_0 + \mathbf{b}_0 + \gamma_0 \mathbf{c}_0 &= 0, \\
\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1 + \gamma_1 \mathbf{c}_1 &= 0,
\end{aligned} \tag{4.31}$$

ここで,  $\alpha_0, \gamma_0, \alpha_1, \gamma_1$  は, 式 (4.26) により,  $\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0, \mathbf{c}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}_1$  を用いて計算できるスカラーである. 式 (4.31) において,  $\gamma_0 = \gamma_1 = 0$ , かつ,  $\alpha_0 = \alpha_1$  の場合, オフセット曲面間は  $C^1$  連続になる可能性がある. そこで, そのような場合に近似オフセット曲面間が  $C^1$  連続になるよう,  $\alpha$  を式 (4.32) で計算される値とする.

$$\alpha = \frac{1}{2}(\alpha_0 + \alpha_1). \tag{4.32}$$

また, 式 (4.27) の 2 番目の式により,  $\tilde{\mathbf{a}}_3^k$  と  $\tilde{\mathbf{b}}_3^k$  ( $k = 1, 2, \dots, n-1$ ) が同じ方向に拘束される. ここで,  $\tilde{\mathbf{a}}_3^k$  と  $\tilde{\mathbf{b}}_3^k$  を拘束する方向は, 式 (4.33) から得られる,  $\mathbf{a}_3^k$  と  $\mathbf{b}_3^k$  の中間方向とする.

$$\mathbf{V}_k = \frac{\mathbf{a}_3^k}{|\mathbf{a}_3^k|} + \frac{\mathbf{b}_3^k}{|\mathbf{b}_3^k|} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1). \tag{4.33}$$

## 4.2.2 調整処理

本節では、4.1節の手法で生成した2枚の近似オフセット曲面において、パッチの制御点の位置を調整することで、共有境界に沿って隣接するパッチ間を $C^1$ 連続に接続し、共有境界を挟んで隣接するパッチ間を $G^1$ 連続に接続する手法について説明する。調整対象の制御点と連続性の拘束条件は、4.2.1節に示したとおりである。まず、共有境界上の制御点 $\mathbf{R}_1^k, \mathbf{R}_2^k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) の位置を調整する(図4.6(a)の赤い点)。 $\tilde{\mathbf{R}}_1^1$ と $\tilde{\mathbf{R}}_2^1$ については、共有境界の端点における $v$ 方向の偏微分ベクトルの向きを変えないように、未知のスカラー $\lambda_v$ を用いて、式(4.34)による拘束を与える。

$$\tilde{\mathbf{R}}_1^1 - \mathbf{R}_0^1 = \lambda_v(\mathbf{R}_1^1 - \mathbf{R}_0^1). \quad (4.34)$$

$k = 1$ において、式(4.28)の2番目の式は、式(4.28)の1番目と3番目の式を用い、式(4.35)に変換できる。

$$\tilde{\mathbf{c}}_0^1 + \tilde{\mathbf{c}}_2^1 - \tilde{\mathbf{c}}_1^1 = 0. \quad (4.35)$$

$\tilde{\mathbf{c}}_0^1 = \tilde{\mathbf{R}}_1^1 - \mathbf{R}_0^1$ ,  $\tilde{\mathbf{c}}_1^1 = \tilde{\mathbf{R}}_2^1 - \tilde{\mathbf{R}}_1^1$ ,  $\tilde{\mathbf{c}}_2^1 = \mathbf{R}_3^1 - \tilde{\mathbf{R}}_2^1$ , であるので、式(4.35)より、 $\tilde{\mathbf{R}}_2^1$ は、式(4.36)のとおり $\tilde{\mathbf{R}}_1^1$ で表せる。

$$\tilde{\mathbf{R}}_2^1 = \mathbf{R}_1^1 + \frac{1}{3}(\mathbf{R}_3^1 - \mathbf{R}_0^1). \quad (4.36)$$

ゆえに、式(4.36)と式(4.34)により、 $\tilde{\mathbf{R}}_1^1$ と $\tilde{\mathbf{R}}_2^1$ は共に $\lambda_v$ の1次関数で表せる。そこで、調整による制御点の移動距離が小さくなるよう、最小自乗法を用い、 $\lambda_v$ を式(4.37)のとおり決定する(導出は付録Cを参照)。

$$\lambda_v = \frac{1}{2} - \frac{(\mathbf{R}_1^1 - \mathbf{R}_0^1)(\mathbf{R}_3^1 - 2\mathbf{R}_0^1 - 3\mathbf{R}_2^1)}{6|\mathbf{R}_1^1 - \mathbf{R}_0^1|^2}. \quad (4.37)$$

式(4.37)を式(4.34)に代入し、式(4.34)を式(4.36)に代入すると、 $\tilde{\mathbf{R}}_1^1, \tilde{\mathbf{R}}_2^1$ が得られる。また、式(4.36)を式(4.11)に代入すると、 $\tilde{\mathbf{R}}_1^2$ が得られる。同様の方法で $\tilde{\mathbf{R}}_1^n, \tilde{\mathbf{R}}_2^n, \tilde{\mathbf{R}}_2^{n-1}$ も得られる。 $\tilde{\mathbf{R}}_2^k, \tilde{\mathbf{R}}_1^{k+1}$  ( $k = 2, 3, \dots, n-2$ ) については、4.1節に示した方法で得られる。

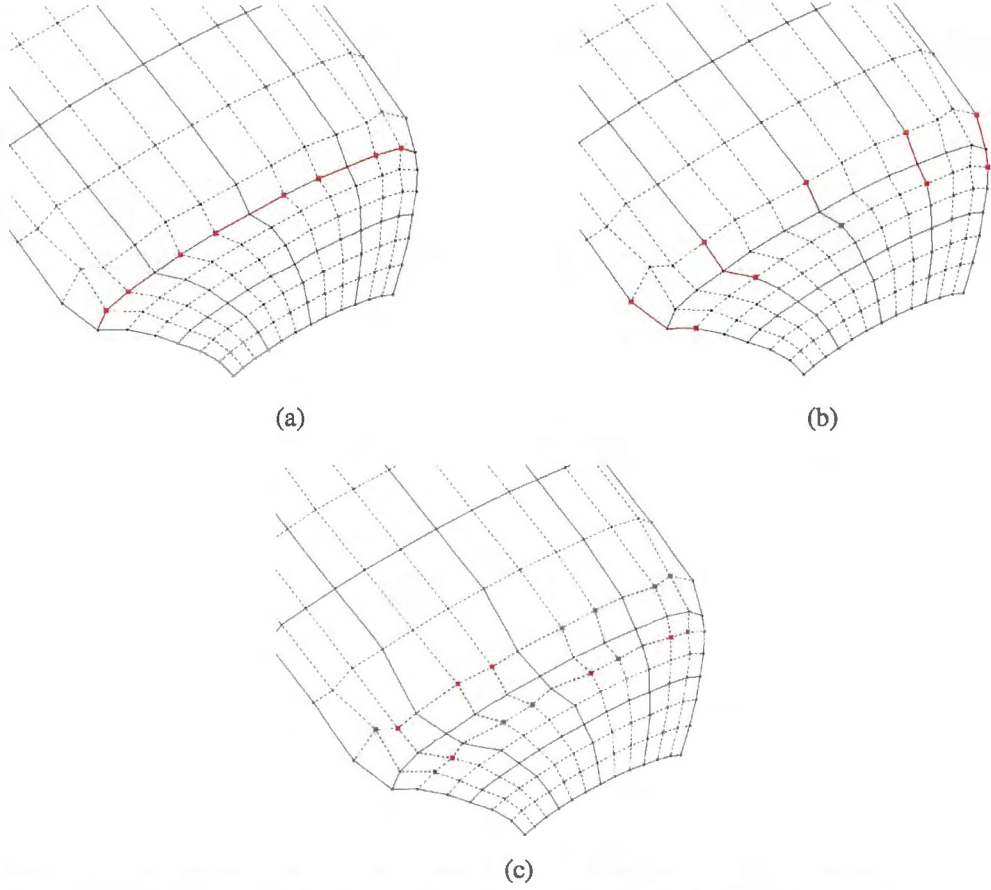


図 4.6: (a) 共有境界上の制御点, (b) 共有境界の隣の制御点, (c) 内部制御点.

次に, 共有境界上の制御点と隣り合う, 各パッチの  $u$  方向の境界上の制御点,  $\mathbf{P}_0^1, \mathbf{Q}_0^1, \mathbf{P}_3^k, \mathbf{Q}_3^k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) の位置を調整する (図 4.6(b) の赤い点).  $\tilde{\mathbf{P}}_0^1, \tilde{\mathbf{Q}}_0^1$  については, 共有境界の端点におけるパッチの  $u$  方向の偏微分ベクトルの向きを変えないように, 未知のスカラー  $\lambda_a, \lambda_b$  を用いて, 式 (4.38) による拘束を与える.

$$\tilde{\mathbf{a}}_0^1 = \lambda_a \mathbf{a}_0^1, \quad \tilde{\mathbf{b}}_0^1 = \lambda_b \mathbf{b}_0^1. \quad (4.38)$$

式 (4.27) の 1 番目の式と式 (4.38) を式 (4.26) の 1 番目の式に代入すると,  $\lambda_b$  は式 (4.39) のとおり表せる.

$$\lambda_b = \frac{\alpha}{\hat{\alpha}} \lambda_a, \quad (4.39)$$

ここで,

$$\hat{\alpha} = \frac{(\mathbf{b}_0^1 \times \tilde{\mathbf{c}}_0^1)(\tilde{\mathbf{c}}_0^1 \times \mathbf{a}_0^1)}{|(\tilde{\mathbf{c}}_0^1 \times \mathbf{a}_0^1)|^2}. \quad (4.40)$$

式(4.39)において  $\tilde{\mathbf{c}}_0^1$  は既知なので,  $\lambda_b$  は  $\lambda_a$  の 1 次関数である. また式(4.39)において,  $\tilde{\mathbf{a}}_0^1 = \mathbf{R}_0^1 - \tilde{\mathbf{P}}_0^1$ ,  $\tilde{\mathbf{b}}_0^1 = \tilde{\mathbf{Q}}_0^1 - \mathbf{R}_0^1$  なので, 式(4.39)と式(4.38)により,  $\tilde{\mathbf{P}}_0^1$  と  $\tilde{\mathbf{Q}}_0^1$  は, 共に  $\lambda_a$  の 1 次関数で表せる. そこで, 調整による制御点の移動距離が小さくなるよう, 最小自乗法を用いて  $\lambda_a$  を式(4.41)のとおり決定する(導出は付録 C を参照).

$$\lambda_a = \frac{\hat{\alpha}^2 |\mathbf{a}_0^1|^2 + \hat{\alpha} \alpha |\mathbf{b}_0^1|^2}{\hat{\alpha}^2 |\mathbf{a}_0^1|^2 + \alpha^2 |\mathbf{b}_0^1|^2}. \quad (4.41)$$

式(4.41)と式(4.39)を式(4.38)に代入すると,  $\tilde{\mathbf{P}}_0^1$  と  $\tilde{\mathbf{Q}}_0^1$  が得られる. 同様の方法で  $\tilde{\mathbf{P}}_3^n$  と  $\tilde{\mathbf{Q}}_3^n$  も得られる.  $\tilde{\mathbf{P}}_3^1$  と  $\tilde{\mathbf{Q}}_3^1$  については,  $\tilde{\mathbf{a}}_3^1$  と  $\tilde{\mathbf{b}}_3^1$  が式(4.33)の方向に拘束される. そこで, 未知のスカラー  $\lambda_u$  を用いて,  $\tilde{\mathbf{a}}_3^1$  に式(4.42)による拘束を与える.

$$\tilde{\mathbf{a}}_3^1 = \lambda_u \mathbf{V}_1. \quad (4.42)$$

$\tilde{\mathbf{b}}_3^1$  は, 式(4.28)の 5 番目の式により, 式(4.43)のとおり  $\tilde{\mathbf{a}}_3^1$  で表せる.

$$\tilde{\mathbf{b}}_3^1 = -\alpha \tilde{\mathbf{a}}_3^1. \quad (4.43)$$

ゆえに, 式(4.42)と式(4.43)より,  $\tilde{\mathbf{a}}_3^1$  と  $\tilde{\mathbf{b}}_3^1$  は共に  $\lambda_u$  の 1 次関数で表せる. そこで, 調整による制御点の移動距離が小さくなるよう, 最小自乗法を用いて  $\lambda_u$  を式(4.44)のとおり決定する(導出は付録 C を参照).

$$\lambda_u = \frac{\mathbf{V}_1 \mathbf{a}_3^1 - \alpha \mathbf{V}_1 \mathbf{b}_3^1}{(1 + \alpha^2) |\mathbf{V}_1|^2}. \quad (4.44)$$

$\tilde{\mathbf{a}}_3^1 = \mathbf{R}_3^1 - \tilde{\mathbf{P}}_3^1$ ,  $\tilde{\mathbf{b}}_3^1 = \tilde{\mathbf{Q}}_3^1 - \mathbf{R}_3^1$  であるので, 式(4.44), 式(4.42), 式(4.43)により,  $\tilde{\mathbf{P}}_3^1$  と  $\tilde{\mathbf{Q}}_3^1$  が得られる.  $\tilde{\mathbf{P}}_3^k$  と  $\tilde{\mathbf{Q}}_3^k$  ( $k = 2, 3, \dots, n-1$ ) についても, 同様の方法で得られる.

最後に, 残りの内部制御点,  $\mathbf{P}_1^k$ ,  $\mathbf{P}_2^k$ ,  $\mathbf{Q}_1^k$ ,  $\mathbf{Q}_2^k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) の位置を調整する(図 4.6(c) の赤い点).  $\tilde{\mathbf{P}}_1^1$  と  $\tilde{\mathbf{Q}}_1^1$  については,  $\tilde{\mathbf{a}}_0^1$ ,  $\tilde{\mathbf{b}}_0^1$ ,  $\tilde{\mathbf{c}}_0^1$  が既知なので, 式(4.26)により  $\gamma_1(0)$  は既知の値として計算できる. ゆえに,  $\tilde{\mathbf{a}}_1^1 = \tilde{\mathbf{R}}_1^1 - \tilde{\mathbf{P}}_1^1$ ,  $\tilde{\mathbf{b}}_1^1 = \tilde{\mathbf{Q}}_1^1 - \tilde{\mathbf{R}}_1^1$ ,  $\tilde{\mathbf{c}}_2^1 = \mathbf{R}_3^1 - \tilde{\mathbf{R}}_2^1$  であるので, 式(4.28)の 3 番目の式により,  $\tilde{\mathbf{Q}}_1^1$

は、式(4.45)のとおり  $\tilde{\mathbf{P}}_1^1$  の1次関数で表せる。

$$\tilde{\mathbf{Q}}_1^1 = \tilde{\mathbf{R}}_1^1 - \alpha(\tilde{\mathbf{R}}_1^1 - \tilde{\mathbf{P}}_1^1) - \frac{1}{3}\gamma_1(0)(\mathbf{R}_3^1 - \tilde{\mathbf{R}}_2^1). \quad (4.45)$$

そこで、調整による制御点の移動距離が小さくなるよう、最小自乗法を用い、 $\tilde{\mathbf{P}}_1^1$  を式(4.46)のとおり決定する(導出は付録Cを参照)。

$$\tilde{\mathbf{P}}_1^1 = \frac{\mathbf{P}_1^1 + \alpha\mathbf{Q}_1^1 + \alpha(\alpha - 1)\tilde{\mathbf{R}}_1^1 + \alpha\gamma_1(0)(\mathbf{R}_3^1 - \tilde{\mathbf{R}}_2^1)/3}{1 + \alpha^2}. \quad (4.46)$$

式(4.46)を式(4.45)に代入すると、 $\tilde{\mathbf{Q}}_1^1$  が得られる。同様の方法で  $\tilde{\mathbf{P}}_2^n$  と  $\tilde{\mathbf{Q}}_2^n$  も得られる。4枚のパッチの角が一致する点の周りに位置する、4つの内部制御点  $\tilde{\mathbf{P}}_2^1$ ,  $\tilde{\mathbf{Q}}_2^1$ ,  $\tilde{\mathbf{P}}_1^2$ ,  $\tilde{\mathbf{Q}}_1^2$  については、 $\tilde{\mathbf{R}}_1^2$ ,  $\tilde{\mathbf{R}}_2^1$ ,  $\tilde{\mathbf{P}}_3^1$ ,  $\tilde{\mathbf{Q}}_3^1$  が既知なので、式(4.28)の4番目の式と式(4.30)の2番目の式、および、式(4.11)の1番目と2番目の式から、式(4.47)による連立方程式が与えられる。

$$\begin{bmatrix} \alpha & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \nu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \nu_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_1^2 \\ \tilde{\mathbf{Q}}_1^2 \\ \tilde{\mathbf{P}}_2^1 \\ \tilde{\mathbf{Q}}_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\alpha - 1)\tilde{\mathbf{R}}_1^2 \\ (\nu_1 + 1)\tilde{\mathbf{P}}_3^1 \\ (\alpha - 1)\tilde{\mathbf{R}}_2^1 \\ (\nu_1 + 1)\tilde{\mathbf{Q}}_3^1 \end{bmatrix}. \quad (4.47)$$

しかし、式(4.47)の連立方程式は、ランク落ちするため解不定である。一方、式(4.47)より、 $\tilde{\mathbf{Q}}_2^1$ ,  $\tilde{\mathbf{P}}_1^2$ ,  $\tilde{\mathbf{Q}}_1^2$  は、 $\tilde{\mathbf{P}}_2^1$  の1次関数で表せる。そこで、調整による制御点の移動距離が小さくなるよう、最小自乗法を用い、 $\tilde{\mathbf{P}}_2^1$  を式(4.48)のとおり決定する(導出は付録Cを参照)。

$$\tilde{\mathbf{P}}_2^1 = \frac{\begin{Bmatrix} \mathbf{P}_2^1 + \alpha\mathbf{Q}_2^1 - \nu_1\tilde{\mathbf{P}}_1^2 - \alpha\nu_1\tilde{\mathbf{Q}}_1^2 + \\ \alpha(\alpha - 1)(\tilde{\mathbf{R}}_2^1 - \nu_1\mathbf{R}_1^2) + \nu_1(\nu_1 + 1)(1 + \alpha^2)\tilde{\mathbf{P}}_3^1 \end{Bmatrix}}{1 + \alpha^2 + \nu_1^2 + \alpha^2\nu_1^2}. \quad (4.48)$$

式(4.48)を式(4.47)に代入すると、 $\tilde{\mathbf{Q}}_2^1$ ,  $\tilde{\mathbf{P}}_1^2$ ,  $\tilde{\mathbf{Q}}_1^2$  が得られる。同様の方法で、他の4枚のパッチの角が一致する点の周りに位置する4つの内部制御点も得られる。

以上により、共有境界に沿って隣接するパッチ間が  $C^1$  連続に接続され、共有境界を挟んで隣接するパッチ間が  $G^1$  連続に接続される。このとき、4.1 節の Step2 の方法によって、共有境界に沿った各パッチの誤差を測定し、パッチが許容誤差を満たさなければ、オフセット曲面のパラメータ空間を細分割する。そして、4.1 節と本節で記述された方法により、すべてのパッチが許容誤差を満たすまでパッチの再構築を繰り返す。

### 4.3 適用例

図 4.7 は本手法を適用した例である。図 4.7(a) はボトル形状の立体モデルである。図 4.7(b) は図 4.7(a) における  $G^1$  連続に接続した 2 枚の双 3 次 Bézier 曲面である。図 4.7(b) の双 3 次 Bézier 曲面において、共有境界の両端点の距離は 80.0 である。図 4.7(c) は本手法を適用した結果である。図 4.7(c) において、オフセット距離は 5.0 であり、各パッチの境界曲線の許容誤差とパッチ内部の許容誤差はどちらも 0.1 である。また角度許容誤差は 1.0 度である。図 4.7(d) は図 4.7(c) を別の角度から見た図である。図 4.7(e) は図 4.7(c) における近似オフセット曲面を計算するために用いたサンプル点である。図 4.7(e) の青い点は各パッチの内部制御点の計算に用いた点であり、赤い点は各パッチの境界上の制御点の計算に用いた点である。図 4.7(f) は図 4.7(c) における近似オフセット曲面の制御点を表示した図であり、各近似オフセット曲面は双 3 次 B-spline 曲面である。図 4.7(g) は図 4.7(f) における B-spline 曲面の双 3 次 Bézier 曲面パッチを表示した図である。図 4.7(f) における B-spline 曲面はパッチ間が  $C^1$  連続なので、図 4.7(f) においてパッチ間の接続部における制御点は存在していない。図 4.7(h) は図 4.7(g) において近似オフセット曲面の法線ベクトルを境界曲線上に表示し、共有境界付近を拡大表示した図である。図 4.7(h) のとおり、共有境界に沿ってパッチが 1 対 1 に対応しており、共有境界上で互いの制御点が一致しているため、近似オフセット曲面間に隙間は生じていない。また、共有境界を挟んだパッチどうしは  $G^1$  連続であるため、近似曲面間に折れも生じていない。

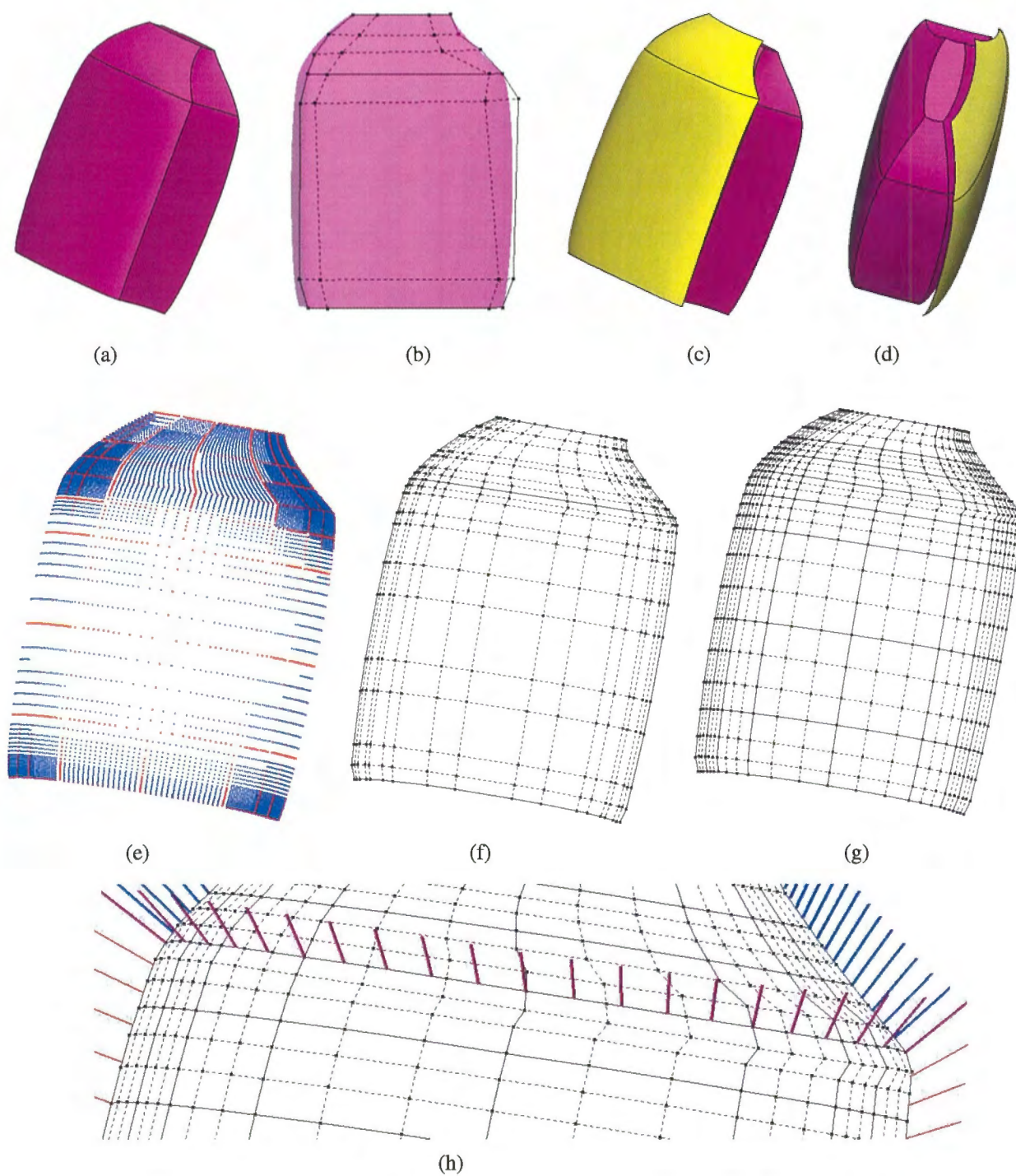


図 4.7: (a) ボトル形状, (b) 2 枚の元曲面, (c) 処理結果, (d)(c) の別視点, (e) サンプル点, (f) 制御点, (g) パッチ, (h)(g) の拡大図.

図 4.8 も本手法を適用した例である。図 4.8(a) はレバー形状の立体モデルである。図 4.8(b) は図 4.8(a) における  $G^1$  連続に接続した 2 枚の双 3 次 Bézier 曲面である。図 4.8(b) の双 3 次 Bézier 曲面において、共有境界の両端点の距離は約 63.3 である。図 4.8(c) は図 4.8(b) を別の角度から見た図である。図 4.8(d) は本手法を適用した結果である。図 4.8(d) において、オフセット距離は 5.0 であり、各パッチの境界曲線の許容誤差とパッチ内部の許容誤差はどちらも 0.1 である。また角度許容誤差は 1.0 度である。図 4.8(e) は図 4.8(d) における近似オフセット曲面を計算するために用いたサンプル点である。サンプル点の色の意味は、図 4.7 の場合と同じである。図 4.8(f) は図 4.8(d) における近似オフセット曲面の制御点を表示した図であり、各近似オフセット曲面は双 3 次 B-spline 曲面である。図 4.8(g) は図 4.8(f) における B-spline 曲面の双 3 次 Bézier 曲面パッチを表示した図である。図 4.8(f) における B-spline 曲面はパッチ間が  $C^1$  連続なので、図 4.8(f) においてパッチ間の接続部における制御点は存在していない。図 4.8(h) は図 4.8(g) において近似オフセット曲面の法線ベクトルを境界曲線上に表示し、共有境界付近を拡大表示した図である。図 4.8(h) のとおり、共有境界に沿ってパッチが 1 対 1 に対応しており、共有境界上で互いの制御点が一致しているため、近似オフセット曲面間に隙間は生じていない。また、共有境界を挟んだパッチどうしは、 $G^1$  連続であるため、近似曲面間に折れも生じていない。

本手法の処理時間は、Intel(R) Core(TM)2 Duo 2.2 GHz CPU および 2 GB RAM を搭載した P C において、図 4.7 の例の場合で約 4.0 秒、図 4.8 の例の場合で約 1.8 秒であった。図 4.7 と図 4.8 のどちらの例においても、図 4.7(e) および図 4.8(e) に示した多数のサンプル点の処理のために、やや遅く感じられるかもしれないが、本手法は、実用的な処理速度で動作する。

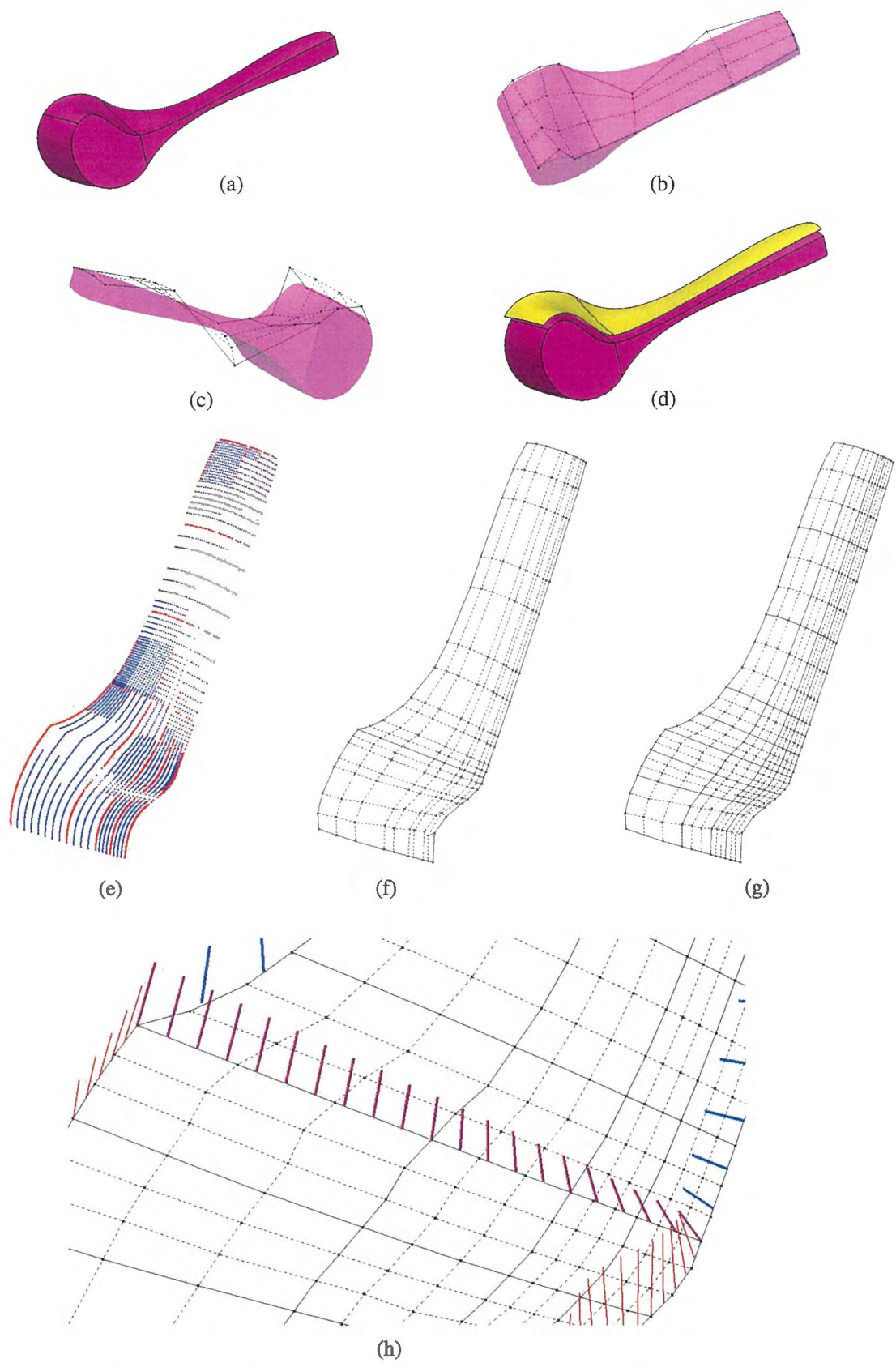


図 4.8: (a) レバー形状, (b) 2 枚の元曲面, (c)(b) の別視点, (d) 処理結果, (e) サンプル点, (f) 制御点, (g) パッチ, (h)(g) の拡大図.

## 4.4 まとめ

本章では、隙間や折れが発生しない、滑らかに接続する2枚の近似オフセット曲面を生成する手法を提案した。2枚の元曲面が滑らかに接続しているとき、理論上のオフセット曲面は滑らかに接続されるが、従来技術で近似オフセット曲面を生成すると、2.3節で述べた隙間や折れが発生することがある。本手法は、次の2つの工夫により、このような隙間や折れの発生を防いだ。(1) 共有境界を挟んでパッチが1対1に隣接するように、オフセット曲面のパラメータ空間を細分割し、かつ、1対1に隣接するパッチ間において、共有境界上における境界曲線形状を一致させた。(2) 共有境界を挟んで1対1に隣接する各パッチの制御点の位置を調整することで、共有境界に沿って隣接するパッチ間を $C^1$ 連続に接続し、共有境界を挟んで隣接するパッチ間を $G^1$ 連続に接続した。このとき、共有境界上における各パッチの角において、共有境界を横断する方向のパッチの偏微分ベクトルに2つの拘束を与えた。1つは、共有境界を挟んで隣接するパッチ間で、偏微分ベクトルの大きさの比を一定にする拘束であり、もう1つは、共有境界を挟んで隣接するパッチ間で、共有境界の両端点を除き、偏微分ベクトルの方向を同一にする拘束である。この2つの拘束により、共有境界に沿って隣接するパッチ間を $C^1$ 連続に接続し、共有境界を挟んで隣接するパッチ間を $G^1$ 連続に接続することが可能になった。従って、2.3節で示した、課題2が解決された。本手法の有効性は、本手法を幾つかの実用形状の立体モデルに適用した結果、滑らかに接続する2枚の $C^1$ 連続な近似オフセット曲面が生成されたことにより実証された。

## 第5章 結論

### 5.1 本研究の成果

ものづくり分野において製品の品質化・低コスト化・短納期化を図るため、3次元CADシステムを中核としたIT化が広く浸透している。3次元CADシステムは製品形状を立体モデルで設計するためのソフトウェアである。立体モデルは、部品の自動加工であるNC加工やコンピュータ・シミュレーションなどで活用される。本論文は、3次元CADシステムの機能の1つである曲面オフセット処理において、従来技術では避けられないモデルデータの品質低下を抑制する方法を提案した。曲面オフセット処理とは、立体の表面を表す曲面に対して、オフセット曲面を生成する処理である。通常、3次元CADシステムは立体の表面を複数の曲面を連結して表す。例えば立方体の表面は、6枚の正方形の平面によって表され、各平面は正方形領域の境界である直線上で他の平面と連結する。オフセット曲面とは、与えられた曲面上の任意の点に対して、曲面の法線ベクトル方向に一定距離だけ離れた曲面である。曲面オフセット処理は、製品外装など一定肉厚となる形状の設計や、NC加工における工具経路の計算などに利用される。オフセット曲面は数学理論上、一般に無理式で表される。これに対し3次元CADシステムは、一般に多項式で曲面をモデルデータ化する。従って3次元CADシステムは、一般に、オフセット曲面を理論式どおりにモデルデータ化できない。このため曲面オフセット処理では、オフセット曲面を多項式で表した曲面によって近似する方法が広く用いられている。ところが2枚の連結した曲面に対して曲面オフセット処理すると、従来のオフセット曲面近似方法では避けられない、モデルデータの品質低下が発生することがある。具体的には、次に挙げる2つの問題が生じることがある。

**問題 1** オフセット曲面間に微小要素が発生することがある

**問題 2** オフセット曲面間を滑らかに連結できないことがある

問題 1 における微小要素とは長さが非常に短い曲線、および、曲面の境界曲線間の距離が非常に近い細長い曲面である。微小要素は、表側から見て凸状に折れて連結した 2 枚の曲面に対し、曲面オフセット処理したときに発生することがある。2 枚の曲面が表側から見て凸状に折れて連結する場合、オフセット曲面は与えられた曲面の法線ベクトル方向に生成されるため、生成されるオフセット曲面間には隙間が生じる。従来の方法を用いてオフセット曲面を近似する場合も、生成される近似オフセット曲面間には隙間が生じる。一般に外装設計や NC 加工においてオフセット曲面間に隙間が生じる場合、隙間を補間する曲面を生成して隙間を塞ぐ必要がある。このとき 2 枚の曲面間の折れ具合がわずかであると、オフセット曲面間の隙間も非常に小さくなるため、補間曲面が微小要素となってしまうことがある。微小要素はシステムによっては小さすぎて扱えないため、微小要素を含むモデルデータをシステム間で受け渡すと失敗することがある。従って微小要素を含むモデルデータは低品質であり、微小要素を含むモデルデータは生成されないようにしなければならない。

問題 2 は、2 枚の滑らかに連結した曲面に対し、曲面オフセット処理したときに生じることがある。2 枚の曲面が滑らかに連結した状態とは、連結部の境界曲線の形状が曲面間で一致し、かつ、連結部の境界曲線に沿って両側の曲面の法線ベクトル方向が一致している状態である。2 枚の滑らかに連結した曲面に対するオフセット曲面間は、理論上滑らかに連結することが数学的に証明されている。しかし従来の方法を用いてオフセット曲面を近似すると、オフセット曲面間の連結部において、境界曲線形状や法線ベクトル方向がオフセット曲面の形状に依存して別々に計算されるため、近似曲面間が滑らかに連結されないことがある。具体的には、オフセット曲面間の連結部において、境界曲線形状が近似曲面間で一致せず、近似曲面間に隙間が生じることがある。また近似曲面間に隙間が生じなくても、近似曲面間の連結部において法線ベクトル

方向が近似曲面間で一致せず、2枚の近似曲面間が折れて連結されることがある。滑らかに連結されるべき曲面間に隙間や折れがあると、問題1と同様に、品質低下によるデータ交換の失敗を引き起こすことがある。本研究の目的は、上述した2つの問題をそれぞれ解決することである。これら2つの問題に対して具体的な課題を示すと次の2つが挙げられる。

#### **課題1 微小要素の発生を抑制する近似オフセット曲面の生成**

#### **課題2 隙間なく滑らかに連結する近似オフセット曲面の生成**

課題1を解決するため、本論文は、オフセット曲面の境界曲線を近似して曲線の枠を生成した後、生成した曲線枠を境界曲線として近似曲面を生成するという、2段階の処理に分かれるオフセット曲面近似手法を提案した。本手法はオフセット曲面間の隙間が非常に小さい場合、近似曲面間に隙間が生じないように、2つの曲線枠を生成する。従って補間曲面を生成する必要がなくなり、微小要素の発生が抑制される。具体的な手順としては、まず2枚のオフセット曲面の境界曲線をそれぞれ近似し、近似曲線による2つの曲線枠を生成する。次に、元の曲面間の連結部に対応した2本の近似曲線について、近似曲線間の距離が非常に近い部分が存在するかどうかを測定する。測定では、元の曲面間の連結部の曲線上に幾つかのサンプル点を求め、各サンプル点に対応する近似曲線上の点である2点間の距離を測定する。測定の結果、距離がある閾値以下となる非常に近い2点が存在した場合、オフセット曲面間に微小要素が発生すると判断する。微小要素が発生すると判断された場合、測定に用いた各2点の中間点を通る曲線を生成し、2本の近似曲線と置き換える。そして置き換え前の近似曲線と連結していた各近似曲線を、置き換え後の曲線と再び連結するように変形する。この変形処理により、中間点を通る曲線を共有した状態で、2つの曲線枠が再構築される。そして再構築された曲線枠を境界曲線とし、曲面領域内で微分連続な2枚の近似曲面を生成する。再構築された2つの曲線枠が1本の曲線を共有するため、2枚の近似曲面は隙間なく連結される。結果として、補間曲面を生成する必要がなくなり微小要素の発生が抑制される。

課題 2 を解決するため、本論文は、オフセット曲面間の連結部において境界曲線形状と法線ベクトル方向を、近似曲面間で拘束して計算するオフセット曲面近似手法を提案した。本手法は、課題 1 を解決する手法と同様に、近似曲面間に隙間が生じないように 2 つの曲線枠を生成し、生成した曲線枠を境界曲線とする近似曲面を生成する。そして、近似曲面間の連結部となる境界曲線上の各点において、両側の近似曲面の接平面を同一平面に拘束し、近似曲面の形状を修正する。結果として、隙間や折れのない滑らかに連結される 2 枚の近似曲面が生成される。具体的な手順としては、先ず問題 1 を解決する手法と同様に、2 枚のオフセット曲面の境界曲線をそれぞれ近似し、近似曲線による 2 つの曲線枠を生成する。各境界曲線の近似では、境界曲線の形状に応じて適応的にサンプル点を発生させ、サンプル点を補間するように近似曲線を生成する。このとき、オフセット曲面間の連結部における境界曲線については、2 つの曲線枠で 1 本の近似曲線を共有するようにする。次に、生成された 2 つの曲線枠をそれぞれ境界曲線として、曲面領域内で微分連続となる 2 枚の近似曲面を生成する。2 つの曲線枠は 1 本の近似曲線を共有しているので、生成される 2 枚の近似曲面間は隙間なく連結される。そして、近似曲面間の連結部となる境界曲線上の各点において、接平面が同一平面となるように両側の近似曲面の形状を修正する。このとき曲面領域内で微分連続な状態、および、近似曲面間で隙間なく連結した状態を維持しつつ、両側の近似曲面の形状を修正する。結果として、近似曲面間の連結部となる境界曲線上の各点において、両側の近似曲面の法線ベクトル方向が一致するため、2 枚の近似曲面間が滑らかに連結される。

以上 2 つの提案手法により、前述した 2 つの問題が解決される。どちらの手法においても生成される近似曲面は、曲面領域内で微分連続であるため、曲面式の微分計算を伴う処理に引き渡すことが可能である。本論文では、上述した 2 つの提案手法を幾つかの実用的な立体モデルに適用し、課題 1 と課題 2 がそれぞれ解決されることを実証した。

## 5.2 今後の課題

本論文では、2枚の連結した曲面に対する曲面オフセット処理において、(1) オフセット曲面間に微小要素が発生することによるモデルデータの品質低下、および、(2) オフセット曲面間を滑らかに連結できないことによるモデルデータの品質低下という2つの問題を解決した。さらに、(1)の問題を解決する提案手法では、3枚および4枚の連結した曲面に対しても、微小要素の発生を抑制できるように提案手法を拡張した。同様に、(2)の問題を解決する提案手法においても、3枚および4枚の連結した曲面に対し、オフセット曲面間を滑らかに連結できるように提案手法を拡張することが望まれる。

## 謝辞

本研究は、岩手大学大学院博士課程研究遂行協力員制度の支援を受けて実施されました。また本研究は、著者らが(株)リコーにおいてソリッドモデリングツールキット DESIGNBASE の開発業務にて実施した内容を含んでおります。

本研究を遂行し学位論文をまとめるにあたり、多大なるご支援ご指導ご尽力を頂きました。指導教官の今野晃市教授に心より感謝を申し上げます。また、終始温かい励ましやご指導を頂きました東京工芸大学工学部の徳山喜政教授に、心より御礼申し上げます。両教授は著者の(株)リコー入社時の大先輩であり、両教授からは本研究の根幹となる曲線曲面技術について懇切に御教示頂き、また、薫陶を賜りました。両教授へは重ねて御礼を申し上げます。

本論文の審査におきましては、審査委員の千葉則茂教授、藤本忠博准教授に、大変有益なアドバイス、また、的確なご指摘およびご指導を頂きました。深く感謝致します。本研究の国際会議での発表資料および論文の英訳にあたりましては、元(株)リコーの Phyllis Anwyl 氏に英文作成のご指導を頂きました。大変感謝致します。岩手大学大学院工学研究科へ著者が社会人入試を受ける際には、(株)リコーの今郷詔氏に推薦状を書いて頂きました。深く感謝致します。本研究を始める最初の動機付けは、著者が中央大学理工学部在学時に卒業研究として、ソリッドモデラーの機能開発に従事したことによります。卒業研究のご指導を頂いた中央大学理工学部の平岡弘之教授に心から感謝致します。

最後に、本研究の遂行にご協力を頂きました、岩手大学大学院工学研究科、今野研究室の学生の皆様および教職員の皆様、ならびに、(株)リコーにおける DESIGNBASE の研究開発に関わった皆様に、厚く御礼申し上げます。

## 参考文献

- [1] Barry, P.J.; Goldman, R.N: Recursive proof of Boehm's knot insertion technique, *Computer-Aided Design*, 20(4), 1988, 181-182.
- [2] Bastl, B.; Juttler, B.; Kosinka, J.; Lavicka, M.: Computing exact rational offsets of quadratic triangular Bézier surface patches, *Computer-Aided Design*, 40(2), 2008, 197-209.
- [3] Beeker, E.: Smoothing of shapes designed with free-form surfaces, *Computer-Aided Design*, 18(4), 1986, 224-232.
- [4] Coons, S.-A.: Surface patches and B-spline curves, in *Computer Aided Geometric Design* (Barnhill, R.-E. and Riesenfeld, R.-F. Eds.), Academic Press, New York, 1974.
- [5] Du, W.-H.; Schmitt, F.-J.-M.: On the G1 continuity of piecewise Bézier surfaces: a review with new results, *Computer-Aided Design*, 22(9), 1990, 556-573.
- [6] Farin, G.: *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design: A Practical Guide*, Academic Press, 1990.
- [7] Farouki, R.-T.: The approximation of non-degenerate offset surfaces, *Computer-Aided Geometric Design*, 3(1), 1986, 15-43.
- [8] Farouki, R.-T.; Sverrisson, R.: Approximation of rolling-ball blends for free-form parametric surfaces, *Computer-Aided Design*, 28(11), 1996, 871-878.

- [9] Forsyth, M.: Shelling and offsetting bodies, Proceedings of the third ACM symposium on Solid modeling and applications, 1995, 373-381.
- [10] Hermann, T.: On the smoothness of offset surfaces, Computer-Aided Geometric Design, 15(5), 1998, 529-533.
- [11] 穂坂 衛 著; 東 正毅・斉藤 剛・九志本琢也 訳: *CAD/CAM* における曲線曲面のモデリング, 東京電機大学出版局, 1996.
- [12] Hoschek, J.: Spline approximation of offset curves, Computer-Aided Geometric Design, 5(1), 1988, 33-40.
- [13] Hoschek, J.; Schneider, F.; Wassum, P.: Optimal approximate conversion of spline surfaces, Computer-Aided Geometric Design, 6(4), 1989, 293-306,
- [14] Hoschek, J.; Lasser, D.: *Fundamentals of Computer Aided Geometric Design*, AK Peters, Wellesley, MA (1993).
- [15] ISO 1660:1987 Technical drawings – Dimensioning and tolerancing of profiles, International Organization for Standardization, 1987.
- [16] ISO 10303-59:2008 Industrial automation systems and integration – Product data representation and exchange – Part 59: Integrated generic resource – Quality of product shape data, International Organization for Standardization, 2008.
- [17] Kikuchi, Y.; Hiraoka, H.; Otaka, A.; Tanaka, F.; Kobayashi, K.; Soma, A.: PDQ (Product Data Quality): Representation of Data Quality for Product Data and Specifically for Shape Data, Transactions of the ASME, 10(2), 2010, 021003(8 pages),
- [18] 小林 昭七: 曲線と曲面の微分幾何 (改訂版), 裳華房, 1995.

- [19] Kulczycka, M.-A.; Nachman, L.-J.: Qualitative and quantitative comparisons of B-spline offset surface approximation methods, *Computer-Aided Design*, 34(1), 2002, 19-26.
- [20] Lee, K.: *Principles of CAD/CAM/CAE Systems*, Addison-Wesley, 1999.
- [21] Mäntylä, M.: *An Introduction to Solid Modeling*, Computer Science Press, Maryland, 1988.
- [22] Martin, R.R.; Stephenson, P.C.: Sweeping of three-dimensional objects, *Computer-Aided Design*, 22(4), 1990, 223-234.
- [23] Maekawa, T.: An overview of offset curves and surfaces, *Computer-Aided Design*, 31(3), 1999, 165-173.
- [24] Patrikalakis, N.M.: Surface-to-surface intersections, *Computer Graphics and Applications*, IEEE, 13(1), 1993, 89-95.
- [25] Patrikalakis, N.M.; Maekawa, T.: *Shape Interrogation for Computer Aided Design and Manufacturing*, Springer-Verlag, Heidelberg, February 2002.
- [26] Peters, J.: Patching Catmull-Clark meshes, *ACM Computer Graphics SIGGRAPH*, 2000, 255-258.
- [27] Piegl, L.; Tiller, W.: *The NURBS Book*, Springer, New York, 1997.
- [28] Piegl, L.; Tiller, W.: Computing offsets of NURBS curves and surfaces, *Computer-Aided Design*, 31(2), 1999, 147-156.
- [29] Piegl, L.-A.; Rajab, K.; Smarodzinava, V.; Valavanis, K.-P.: Fault-tolerant Computing in a knowledge-guided NURBS Environment, *Computer-Aided Design & Applications*, 6(6), 2009, 809-823.
- [30] Pottmann, H.: Rational curves and surfaces with rational offsets, *Computer-Aided Geometric Design*, 12(2), 1995, 175-192.

- [31] Rajab, K.; Piegl, L.; Smarodzinava, V.: CAD model repair using knowledge-guided NURBS, *Engineering with Computers*, 29(4), 2013, 477-486.
- [32] Tiller, W.: Knot-removal algorithms for NURBS curves and surfaces, *Computer-Aided Design*, 24(8), 1992, 445-453.
- [33] Yang, J; Han, S.: Repairing CAD model errors based on the design history, *Computer-Aided Design*, 38(6), 2006, 627-640.

# 付録A 最小自乗法を用いた3次 Bézier曲線の生成

3次 Bézier 曲線は式 (A.1) で表される.

$$\mathbf{C}(t) = \sum_{i=0}^3 B_i^3(t) \mathbf{P}_i, \quad (\text{A.1})$$

式 (A.1) において, 両端点である  $\mathbf{P}_0$  と  $\mathbf{P}_3$  が既知であり,  $\mathbf{P}_1$  と  $\mathbf{P}_2$  が未知であるとする.  $\mathbf{P}_0$  と  $\mathbf{P}_3$  における接線ベクトルが, それぞれ  $\mathbf{V}_1$  と  $\mathbf{V}_2$  の方向に拘束されるとき,  $\mathbf{P}_1$  と  $\mathbf{P}_2$  は, 未知のスカラー  $\lambda_1$  と  $\lambda_2$  および式 (2.11) を用い, 式 (A.2) のとおり表すことができる.

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_0 + \lambda_1 \mathbf{V}_1, \quad \mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_3 + \lambda_2 \mathbf{V}_2. \quad (\text{A.2})$$

従って, 式 (A.2) を式 (A.1) に代入すると, 式 (A.1) は式 (A.3) で表せる.

$$\mathbf{C}(t) = (1-t)^3 \mathbf{P}_0 + 2t(1-t)^2 (\mathbf{P}_0 + \lambda_1 \mathbf{V}_1) + 2t^2(1-t) (\mathbf{P}_3 + \lambda_2 \mathbf{V}_2) + t^3 \mathbf{P}_3. \quad (\text{A.3})$$

ここで,  $m$  ( $m \geq 3$ ) 個のサンプル点を与えて, 生成する 3次 Bézier 曲線がサンプル点のなるべく近傍を通過するように,  $\mathbf{P}_1$  と  $\mathbf{P}_2$  を決定する. 各サンプル点のパラメータを  $t_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) とし, 各パラメータに対応したサンプル点を  $\mathbf{Q}_k$  とすると, 各サンプル点と 3次 Bézier 曲線との誤差は, 式 (A.4) のとおり表せる.

$$\mathbf{Q}_k - \mathbf{C}(t_k) = \mathbf{R}_k - \sum_{i=1}^2 B_i^3(t_k) \lambda_i \mathbf{V}_i, \quad (\text{A.4})$$

ここで,

$$\mathbf{R}_k = \mathbf{Q}_k - \sum_{i=0}^1 B_i^3(t_k) \mathbf{P}_0 - \sum_{i=2}^3 B_i^3(t_k) \mathbf{P}_3. \quad (\text{A.5})$$

式 (A.4) の値は，正負が不定である．そこで誤差を二乗ノルムで測り，曲線全体の誤差を測る指標として，式 (A.6) を与える．

$$\delta = \sum_{k=1}^m |\mathbf{Q}_k - \mathbf{C}(t_k)|^2. \quad (\text{A.6})$$

式 (A.4) は  $\lambda_1$  と  $\lambda_2$  による 1 次関数なので，式 (A.6) は，これら未知のスカラーによる 2 次関数である．従って，式 (A.6) を最小とする条件は，式 (A.7) によって与えることができる．

$$\frac{\partial \delta}{\partial \lambda_1} = 0, \quad \frac{\partial \delta}{\partial \lambda_2} = 0. \quad (\text{A.7})$$

式 (A.6) を式 (A.7) に代入すると，式 (A.8) による連立 1 次方程式が得られる．

$$\mathbf{B}^T \mathbf{B} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \mathbf{V}_1 & \mathbf{V}_1 \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{V}_2 \mathbf{V}_1 & \mathbf{V}_2 \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^m B_1^3(t_k) \mathbf{R}_k \mathbf{V}_1 \\ \sum_{k=1}^m B_2^3(t_k) \mathbf{R}_k \mathbf{V}_2 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.8})$$

ここで，

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_1^3(t_1) & B_2^3(t_1) \\ \vdots & \vdots \\ B_1^3(t_m) & B_2^3(t_m) \end{bmatrix}, \quad T \text{ は転置}. \quad (\text{A.9})$$

ゆえに，式 (A.8) を解いて， $\lambda_1$  と  $\lambda_2$  を式 (A.2) に代入すると， $\mathbf{P}_1$  と  $\mathbf{P}_2$  が決定できる．

# 付 録 B 最小自乗法を用いた双 3 次 Bézier 曲面の生成

双 3 次 Bézier 曲面は式 (B.1) で表される.

$$\mathbf{S}(u, v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 B_i^3(u) B_j^3(v) \mathbf{P}_{ij}, \quad (\text{B.1})$$

式 (B.1) において, 境界曲線上の制御点が既知であり, 内部制御点が未知であるとする. ここで,  $m$  ( $m \geq 5$ ) 個のサンプル点を与えて, 生成する双 3 次 Bézier 曲面がサンプル点のなるべく近傍を通過するように, 内部制御点を決定する. 各サンプル点のパラメータを  $(u_k, v_k)$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) とし, 各パラメータに対応したサンプル点を  $\mathbf{Q}_k$  とすると, 各サンプル点と双 3 次 Bézier 曲面との誤差は, 式 (B.2) のとおり表せる.

$$\mathbf{Q}_k - \mathbf{S}(u_k, v_k) = \mathbf{R}_k - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 B_i^3(u_k) B_j^3(v_k) \mathbf{P}_{ij}. \quad (\text{B.2})$$

ここで,

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_k = \mathbf{Q}_k & - \sum_{i=0}^2 B_i^3(u_k) B_0^3(v_k) \mathbf{P}_{i0} - \sum_{j=0}^2 B_3^3(u_k) B_j^3(v_k) \mathbf{P}_{0j} \\ & - \sum_{i=0}^3 B_i^3(u_k) B_3^3(v_k) \mathbf{P}_{i3} - \sum_{j=0}^3 B_0^3(u_k) B_j^3(v_k) \mathbf{P}_{3j}. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

式 (B.2) の誤差の値は, 正負が不定である. そこで誤差を二乗ノルムで測り, 曲面全体の誤差を測る指標として, 式 (B.4) を与える.

$$\delta = \sum_{k=1}^m |\mathbf{Q}_k - \mathbf{S}(u_k, v_k)|^2. \quad (\text{B.4})$$

式 (B.2) は, 未知のベクトル  $\mathbf{P}_{11}$ ,  $\mathbf{P}_{21}$ ,  $\mathbf{P}_{22}$ ,  $\mathbf{P}_{12}$  による 1 次関数なので, 式 (B.4) は, これら未知のベクトルによる 2 次関数である. 従って, 式 (B.4) を最

小とする条件は、式 (B.5) によって与えることができる.

$$\frac{\partial \delta}{\partial \mathbf{P}_{11}} = 0, \quad \frac{\partial \delta}{\partial \mathbf{P}_{21}} = 0, \quad \frac{\partial \delta}{\partial \mathbf{P}_{22}} = 0, \quad \frac{\partial \delta}{\partial \mathbf{P}_{12}} = 0. \quad (\text{B.5})$$

式 (B.4) を式 (B.5) に代入すると、式 (B.6) による連立 1 次方程式が得られる.

$$\mathbf{B}^T \mathbf{B} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} \\ \mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{P}_{21} \\ \mathbf{P}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^m B_1^3(u_k) B_1^3(v_k) \mathbf{R}_k \\ \sum_{k=1}^m B_1^3(u_k) B_2^3(v_k) \mathbf{R}_k \\ \sum_{k=1}^m B_2^3(u_k) B_1^3(v_k) \mathbf{R}_k \\ \sum_{k=1}^m B_2^3(u_k) B_2^3(v_k) \mathbf{R}_k \end{bmatrix}. \quad (\text{B.6})$$

ここで,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_1^3(u_1) B_1^3(v_1) & B_1^3(u_2) B_1^3(v_2) & \cdots & B_1^3(u_m) B_1^3(v_m) \\ B_1^3(u_1) B_2^3(v_1) & B_1^3(u_2) B_2^3(v_2) & \cdots & B_1^3(u_m) B_2^3(v_m) \\ B_2^3(u_1) B_1^3(v_1) & B_2^3(u_2) B_1^3(v_2) & \cdots & B_2^3(u_m) B_1^3(v_m) \\ B_2^3(u_1) B_2^3(v_1) & B_2^3(u_2) B_2^3(v_2) & \cdots & B_2^3(u_m) B_2^3(v_m) \end{bmatrix}^T, \quad T \text{ は転置.} \quad (\text{B.7})$$

ゆえに、式 (B.6) を解くと、 $\mathbf{P}_{11}$ ,  $\mathbf{P}_{21}$ ,  $\mathbf{P}_{22}$ ,  $\mathbf{P}_{12}$  が決定できる.

## 付 録 C 最小自乗法を用いた制御点 位置の調整

調整される制御点を  $\mathbf{P}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) とし, 互いに拘束関係にあるものとする. それらを調整した後の制御点を  $\tilde{\mathbf{P}}_i$  とすると, 調整による制御点の移動距離を小さくする条件は, 式 (C.1) のとおりと与えることができる.

$$\delta = \sum_{i=1}^n |\tilde{\mathbf{P}}_i - \mathbf{P}_i|^2 \rightarrow \min. \quad (\text{C.1})$$

ここで,  $\tilde{\mathbf{P}}_2, \tilde{\mathbf{P}}_3, \dots, \tilde{\mathbf{P}}_n$  が  $\tilde{\mathbf{P}}_1$  の 1 次関数で表せるならば,  $\delta$  は  $\tilde{\mathbf{P}}_1$  の 2 次関数である. ゆえに, 式 (C.2) による 1 次方程式を解けば, 式 (C.1) の条件を満たす  $\tilde{\mathbf{P}}_1$  が得られる.

$$\frac{d\delta}{d\tilde{\mathbf{P}}_1} = 0. \quad (\text{C.2})$$

また,  $\tilde{\mathbf{P}}_2, \tilde{\mathbf{P}}_3, \dots, \tilde{\mathbf{P}}_n$  が未知のスカラー  $\lambda$  の 1 次関数で表せるならば,  $\delta$  は  $\lambda$  の 2 次関数である. ゆえに, 式 (C.3) による 1 次方程式を解けば, 式 (C.1) の条件を満たす  $\lambda$  が得られる.

$$\frac{d\delta}{d\lambda} = 0. \quad (\text{C.3})$$

# 発表論文

## 学術論文

- [1] 佐藤直之, 徳山喜政, “微小要素の発生を抑制した複数面のオフセット処理”, 情報処理学会, Vol.44, No.9, pp.2374-2382, 2003.
- [2] N. Satoh, K. Matsuyama, K. Konno, Y. Tokuyama, “High-quality Approximation Technique for Two  $G^1$ -continuous Offset Surfaces”, Computer-Aided Design & Applications, Vol.11, No.1, pp.78-89, 2014.