

# LMI アプローチによる LPV リセットシステムの安定解析

## Stability analysis of LPV reset system via LMI approach

○横川 琳吾, 佐藤 淳

○Ringo Yokokawa, Atsushi Satoh

岩手大学

Iwate University

**キーワード:** LPV リセットシステム (LPV reset system), 線形行列不等式 (linear matrix inequality),  
リアプノフ関数 (lyapunov function), ポリトピック (polytopic)

**連絡先:** 〒 020-8551 岩手県盛岡市上田 4-3-5 岩手大学大学院 工学研究科 機械システム工学専攻  
佐藤 淳, Tel: 019-621-6404, E-mail: satsushi@iwate-u.ac.jp

## 1. 緒言

リセットシステムとは, リセット則を伴う連続時間システムであり, システムの状態量が特定の代数的条件を満たすときリセットが発生し, ジャンプと呼ばれる不連続な状態遷移が起こるシステムである.

リセットシステムは, Clegg が 1958 年に提案した Clegg integrator<sup>4)</sup> がはじまりとされている. Clegg integrator は, アナログ回路に修正を加えリセット動作を追加したものである.

近年ハイブリッドシステムの研究の発展に伴いリセットシステムが再び注目され, LMI アプローチによる安定解析の結果も示されている<sup>1)2)3)</sup>.

一方, 時変なパラメータや不確かさを持つ制御対象を, パラメータに依存する線形システムとしてモデル化したものを Linear Parameter Varying (LPV) システムと呼ぶ. LPV システムの利点は, 線形時不変システムで用いられるアプローチに近いやり方での解析が可能なことにある. また, LPV システムに基づくゲインスケジュー

ルド制御は, タワークレーンの制御や航空機の飛行制御系の設計などで利用されている.

そこで本研究では, リセット則を伴う LPV システムである LPV リセットシステムの漸近安定条件について考え, ポリトピックな変動に対する安定性の十分条件を LMI アプローチにより導出する. 以下では Nešić et al.<sup>3)</sup> により提案されたタイプのリアプノフ関数を LPV リセットシステムの場合に拡張したものを考え, 漸近安定条件を導出する. また, 次にポリトピックな変動を持つシステムについて, 共通 2 次リアプノフ関数を用いた十分条件を示す.

## 2. システムの状態空間表現

### 2.1 リセットシステム<sup>1)</sup>

リセットシステムの状態空間表現は次のように与えられる.

$$\dot{x} = Ax + Bu, \text{ if } x \in \mathcal{F} \quad (1a)$$

$$x^+ = A_r x \quad \text{if } x \in \mathcal{J} \quad (1b)$$

$$y = Cx \quad (1c)$$

状態ベクトル  $x$  はリセット時にジャンプしない状態量  $x_p$  とジャンプ可能な状態量  $x_r$  からなり,  $x = [x_p^T \ x_r^T]^T \in \mathbf{R}^n$  とする.  $x^+$  はリセット直後の状態量を表している.

リセットシステムは  $x \in \mathcal{F}$  のとき (1a) 式に従い状態は連続的な遷移をするが,  $x \in \mathcal{J}$  のときリセットが発生し, (1b) 式に従い不連続な状態遷移 (ジャンプ) をする.

領域  $\mathcal{F}$  を Flow set,  $\mathcal{J}$  を Jump set と呼ぶ.  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{J}$  は境界で重複し, 状態空間を 2 つの領域に区分するものとする.

以下では  $M$  を用いて次のように定義されるものについて考える.

$$\mathcal{F} := \{x^T M x \geq 0\} \quad (2a)$$

$$\mathcal{J} := \{x^T M x \leq 0\} \quad (2b)$$

また, ジャンプ行列  $A_r$  はリセット発生時の不連続な状態遷移を決める行列であり,  $x$  の定義より以下の構造を持つ.

$$A_r = \begin{bmatrix} I & 0 \\ R_1 & R_2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$R_1 \in \mathbf{R}^{n_p \times n_r}, R_2 \in \mathbf{R}^{n_r \times n_r}$$

## 2.2 Temporal regularization

リセットシステムには一般に有限時間にリセット回数が無限に発散する「ゼノ解」が存在する. ゼノ解では有限時刻 (ゼノ時刻と呼ぶ) においてリセット間隔が 0 に収束するため, ゼノ時刻以降の解が定義できないという困難がある. これは, システムの実装時において問題となるため, ゼノ解を排除することは重要である.

ゼノ解を排除する手法として *Temporal regularization* が提案されている<sup>2)</sup>. これは元のリセッ

トシステムに対し, ジャンプ後に一定の時間  $\rho$  が経過していなければ次のリセットが発生しないような付加的な条件を加える手続きである.

*Temporal regularization* を導入後, リセットシステム (1) 式は  $\tau$  を状態に持つタイマー要素を加えた以下ようになる.

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\tau} = 1 \\ \dot{x} = Ax + Bu \end{array} \right\} \text{ if } x \in \mathcal{F} \text{ or } \tau \leq \rho \quad (4a)$$

$$\left. \begin{array}{l} \tau^+ = 0 \\ x^+ = A_r x \end{array} \right\} \text{ if } x \in \mathcal{J} \text{ and } \tau \geq \rho \quad (4b)$$

ここで  $\rho > 0$  は最小リセット間隔である.

## 2.3 LPV システム<sup>7)</sup>

LPV システムの状態空間表現は次のように与えられる.

$$\begin{cases} \dot{x} = A(\theta)x + B_1(\theta)w + B_2(\theta)u \\ z = C_1(\theta)x + D_{11}(\theta)w + D_{12}(\theta)u \\ y = C_2(\theta)x + D_{21}(\theta)w + D_{22}(\theta)u \end{cases} \quad (5)$$

$$\theta(t) := (\theta_1(t), \dots, \theta_N(t))^T$$

パラメータ  $\theta$  とその変化率を  $\omega := \dot{\theta}$  と定義し, 以下のように仮定する.

### 仮定 1

パラメータ  $\theta_i$  の上界  $\bar{\theta}_i$  と下界  $\underline{\theta}_i$  が与えられているものとし,

$$\theta_i \in \{\underline{\theta}_i \leq \theta_i(t) \leq \bar{\theta}_i\}, \forall t \geq 0 \quad (6)$$

とする. パラメータの変化率  $\omega_i$  も同様に上界  $\bar{\omega}_i$  と下界  $\underline{\omega}_i$  が与えられ

$$\omega_i \in \{\underline{\omega}_i \leq \omega_i(t) \leq \bar{\omega}_i\}, \forall t \geq 0 \quad (7)$$

とする. ■

$\theta$  を内包するパラメータ集合を  $\Theta$ ,  $\omega$  を内包するパラメータ集合を  $\Omega$  とする. また  $\Theta$  の端点全ての集合を  $\Theta_V$  と表記する.

### 3. LPV リセットシステム

本研究では、LPV リセットシステムを次のように定義する。

#### 定義 1

*Temporal regularization* を導入した LPV リセットシステムの状態方程式は、次の状態空間表現で与えられる。

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\tau} = 1 \\ \dot{x} = A(\theta)x + B(\theta)u \end{array} \right\} \text{ if } x \in \mathcal{F}_\theta \text{ or } \tau \leq \rho \quad (8a)$$

$$\left. \begin{array}{l} \tau^+ = 0 \\ x^+ = A_r(\theta)x \end{array} \right\} \text{ if } x \in \mathcal{J}_\theta \text{ and } \tau \geq \rho \quad (8b)$$

$$\mathcal{F}_\theta := \{x^T M(\theta)x \geq 0\} \quad (9a)$$

$$\mathcal{J}_\theta := \{x^T M(\theta)x \leq 0\} \quad (9b)$$

ここで、 $M(\theta)$  は全ての  $\theta \in \Theta$  について *non-definite* な対称行列とする。また、 $A_r(\theta)$  は以下の構造を持つ。

$$A_r(\theta) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ R_1(\theta) & R_2(\theta) \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$R_1(\theta) \in \mathbf{R}^{n_r \times n_p}, \quad R_2(\theta) \in \mathbf{R}^{n_r \times n_r}. \quad \blacksquare$$

### 4. 安定条件

(8) 式のシステムについて、 $x$  の原点の漸近安定条件を考える。以下ではパラメータ  $\theta$  について次のように仮定する。

#### 仮定 2

$\theta$  は時間  $t$  に依存しないものとし、

$\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)^T$  とする。また、仮定 1 より、

$$\theta \in \{\underline{\theta}_i \leq \theta_i \leq \bar{\theta}_i\}, \quad i = 1, \dots, n \quad (11)$$

とし、 $\theta$  を内包するパラメータ集合を  $\Theta$ 、 $\Theta$  の端点全ての集合を  $\Theta_V$  とする。 ■

### 4.1 リアプノフ関数の満たすべき条件

Nešić et al.<sup>3)</sup> Assumption 1 において、*Temporal regularization* を伴うリセットシステムの  $\mathcal{L}_2$  安定解析に利用可能なリアプノフ関数の条件が提案されている。本研究では上記の結果を LPV リセットシステムの場合に対応させた条件を利用する。これは Assumption 1<sup>3)</sup> において  $d = y = 0$  とおいたものに相当する。

#### 補題 1

$\forall \theta \in \Theta$  について、(12) 式を満たす  $\lambda_i(\theta) > 0$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ ,  $\eta(\theta) \in (0, 1)$  が存在するならば、リアプノフ関数  $V(x, \theta) := x^T P(\theta)x$  が存在し、 $x$  の原点は漸近安定である。

$$\lambda_1(\theta)|x|^2 \leq V(x, \theta) \leq \lambda_2(\theta)|x|^2 \quad (12a)$$

$$\dot{V}(x, \theta) \leq \lambda_3(\theta)V(x, \theta), \quad \forall x, \quad (12b)$$

$$\dot{V}(x, \theta) \leq -\lambda_4(\theta)V(x, \theta), \quad \forall x \in \mathcal{F}_\theta, \quad (12c)$$

$$V(x^+, \theta) \leq \eta(\theta)V(x, \theta), \quad \forall x \in \mathcal{J}_\theta. \quad (12d)$$

■

### 4.2 自律系の安定条件

Satoh<sup>5)</sup>, lemma 1 を LPV リセットシステムに拡張した結果は次の通り。

#### 定理 1

(8) 式のシステム ( $u = 0$ ) について考える。

$\forall \theta \in \Theta$  について以下に示すパラメータ依存の LMI を満たす  $P(\theta) = P^T(\theta) > 0$ ,  $\tau_F(\theta) \geq 0$ ,  $\tau_R(\theta) \geq 0$  が存在するならば、(12) 式の条件を満たす 2 次リアプノフ関数  $V(x, \theta) := x^T P(\theta)x$  が存在し、 $x$  の原点は漸近安定である。

$$A^T(\theta)P(\theta) + P(\theta)A(\theta) + \tau_F(\theta)M(\theta) < 0 \quad (13)$$

$$A_r^T(\theta)P(\theta)A_r(\theta) - P(\theta) - \tau_R(\theta)M(\theta) < 0 \quad (14)$$

■

#### 証明 1

基本的には参考文献 (5) の Corollary 1 の説明と同様であり省略する。 ■

### 4.3 状態フィードバックによる閉ループ系の漸近安定条件

(8) 式のシステムに対し、状態フィードバック  $u = K(\theta)x$  を施した時の漸近安定条件について考える。この時、状態フィードバックによる閉ループ系の状態方程式は

$$\left. \begin{aligned} \dot{\tau} &= 1 \\ \dot{x} &= (A(\theta)x + B(\theta)K(\theta))x \end{aligned} \right\} \text{ if } x \in \mathcal{F}_\theta \text{ or } \tau \leq \rho \quad (15)$$

となり、以下の関係を満たす。

#### 系 1

(15) 式の閉ループ系について考える。  $\forall \theta \in \Theta$  について、以下に示すパラメータ依存の不等式を満たす  $P(\theta) = P^T(\theta) > 0$ ,  $\tau_F(\theta) \geq 0$ ,  $\tau_R(\theta) \geq 0$  が存在するならば、(12) 式の条件を満たす 2 次リアプノフ関数  $V(x, \theta) := x^T P(\theta)x$  が存在し、 $x$  の原点は漸近安定である。

$$\begin{aligned} & (A(\theta) + B(\theta)K(\theta))^T P(\theta) \\ & + P(\theta)(A(\theta) + B(\theta)K(\theta)) + \tau_F(\theta)M(\theta) < 0 \quad (16) \\ & A_r^T(\theta)P(\theta)A_r(\theta) - P(\theta) - \tau_R(\theta)M(\theta) < 0 \quad (17) \end{aligned}$$

#### 証明 2

定理 1 の証明の  $A(\theta)$  を  $A(\theta) + B(\theta)K(\theta)$  に置き換えたものと同じ。 ■

### 4.4 共通 2 次リアプノフ関数<sup>6)</sup>を用いた条件

定理 1 の条件は、 $\theta \in \Theta$  についての無限個の LMI となる。そこで、 $A(\theta)$ ,  $M(\theta)$ ,  $A_r(\theta)$  はポリティピックな構造を持つと仮定する。すなわち

$$\begin{aligned} A(\theta) &= \sum_{i=1}^n \alpha_i A(\theta_{vi}) \\ M(\theta) &= \sum_{i=1}^n \alpha_i M(\theta_{vi}) \\ A_r(\theta) &= \sum_{i=1}^n \alpha_i A_r(\theta_{vi}) \end{aligned} \quad (18)$$

かつ

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \geq 0. \quad (19)$$

ポリティピックシステムでは、 $\Theta_V$  内の有限個のパラメータについて LMI 条件の成立を判定することで、 $\theta \in \Theta$  についての成立をチェックすることができる。

共通なリアプノフ行列を用いた場合の漸近安定条件は次のとおりである。

#### 定理 2

$\forall \theta_{vi} \in \Theta_V$  について  $P = P^T > 0$ ,  $\tau_F \geq 0$ ,  $\tau_R \geq 0$  が存在するならば、2 次リアプノフ関数  $V(x) := x^T P x$  が存在し、 $x$  の原点は 2 次安定である。

$$A^T(\theta_{vi})P + PA(\theta_{vi}) + \tau_F M(\theta_{vi}) < 0 \quad (20)$$

$$A_r^T(\theta_{vi})P A_r(\theta_{vi}) - P(\theta_{vi}) - \tau_R M(\theta_{vi}) < 0 \quad (21)$$

■

#### 証明 3

(20) 式について、(20) 式が全ての端点システムについて成り立つと仮定すると、

$$\begin{aligned} & \alpha_1 (A^T(\theta_{v1})P + PA(\theta_{v1}) + \tau_F M(\theta_{v1})) \\ & + \alpha_2 (A^T(\theta_{v2})P + PA(\theta_{v2}) + \tau_F M(\theta_{v2})) + \dots \\ & \dots + \alpha_n (A^T(\theta_n)P + PA(\theta_n) + \tau_F M(\theta_n)) \\ & = \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i A(\theta_{vi}) \right)^T P + P \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i A(\theta_{vi}) \right) \\ & \quad + \tau_F \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i M(\theta_{vi}) \right) \\ & = A(\theta)P + PA(\theta) + \tau_F M(\theta) < 0, \quad \forall \theta \in \Theta \end{aligned}$$

よって、 $\forall \theta_{vi} \in \Theta_V$  において (20) 式を満たすとき  $\forall \theta \in \Theta$  を満足する。

(21) 式について *Schur Complement* を用いると、(21) 式に等価な以下の式を得る。

$$\begin{bmatrix} -P - \tau_R M(\theta_{vi}) & -A_r^T(\theta_{vi})P \\ -PA_r(\theta_{vi}) & -P \end{bmatrix} < 0 \quad (22)$$

(22) 式が全ての端点システムについて成立すると仮定すると,

$$\begin{aligned}
& \alpha_1 \begin{bmatrix} -P - \tau_R M(\theta_{v1}) & -A_r^T(\theta_{v1})P \\ -PA_r(\theta_{v1}) & -P \end{bmatrix} \\
& + \alpha_2 \begin{bmatrix} -P - \tau_R M(\theta_{v2}) & -A_r^T(\theta_{v2})P \\ -PA_r(\theta_{v2}) & -P \end{bmatrix} + \dots \\
& \dots + \alpha_n \begin{bmatrix} -P - \tau_R M(\theta_{vn}) & -A_r^T(\theta_{vn})P \\ -PA_r(\theta_{vn}) & -P \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} -\sum_{i=1}^n \alpha_i P - \tau_R \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i M(\theta_{vi}) \right) \\ -P \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i A_r(\theta_{vi}) \right) \\ -\left( \sum_{i=1}^n \alpha_i A_r(\theta_{vi}) \right)^T P \\ -\sum_{i=1}^n \alpha_i P \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} -P - \tau_R M(\theta) & -A_r^T(\theta)P \\ -PA(\theta) & -P \end{bmatrix} < 0, \\
& \quad \forall \theta \in \Theta \quad (23)
\end{aligned}$$

(23) 式に対し, *Schur Complement* を用いると,

$$A_r^T(\theta)PA_r(\theta) - P - \tau_R M(\theta) < 0, \forall \theta \in \Theta$$

となり,  $\forall \theta_{vi} \in \Theta_V$  において (21) 式を満たすとき,  $\forall \theta \in \Theta$  を満足する. ■

## 5. 安定解析の例

例として, パラメータ  $k$  を持つリセット積分器と, パラメータ  $\zeta$  を持つ 2 次のプラントからなるフィードバック系を考える.

パラメータ  $k, \zeta$  はそれぞれ上界, 下界を持つと仮定し, パラメータ集合  $\Theta$  を次のように仮定する.

$$k, \zeta \in \Theta, \Theta = \{\underline{k} \leq k \leq \bar{k}, \underline{\zeta} \leq \zeta \leq \bar{\zeta}\}$$

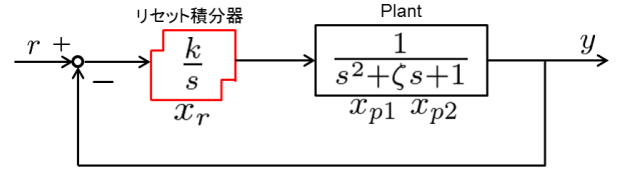


図1 リセット積分器とプラントからなる閉ループ系

また, 簡単のため  $A_r(\theta), \tau_F(\theta), \tau_R(\theta)$  はパラメータに依存しないものとする. このときシステムの状態方程式は以下の通りである.

$$\begin{cases} \dot{x} = A(k, \zeta)x, & \text{if } x \in \mathcal{F}_\theta \\ x^+ = A_r x, & \text{if } x \in \mathcal{F}_\theta \\ y = Cx \end{cases} \quad (24)$$

状態量  $x$  はリセット積分器の状態量  $x_r$  と, プラントの状態量  $x_{p1}, x_{p2}$  からなり,

$$x = \begin{bmatrix} x_r \\ x_{p1} \\ x_{p2} \end{bmatrix} \quad (25)$$

とおく

フローセット, ジャンプセットは (9) 式より,

$$\mathcal{F}_\theta = \{x^T M(k, \zeta)x \geq 0\} \quad (26a)$$

$$\mathcal{J}_\theta = \{x^T M(k, \zeta)x \leq 0\} \quad (26b)$$

とする.

### 5.1 基本システムが安定となるパラメータ集合 $S_b$

初めに基本システムが安定となるパラメータ集合について考える. 基本システムの  $r$  から  $y$  までの伝達関数  $G(s)$  は

$$G(s) = \frac{k}{s^3 + \zeta s + s + k} \quad (27)$$

である. (27) 式に対し, ラウスの安定判別法を用いると, 基本システムが安定であるための必要十分条件は  $\zeta > 0, k > 0, \zeta > k$  であり, 基本システムが安定となるパラメータ集合  $S_b$  は

$$S_b = \{\zeta > 0, k > 0, \zeta > k\} \quad (28)$$

となる.

## 5.2 状態空間実現

(27) 式を可観測正準形式で状態空間実現すると、次のようになる。

$$A(k, \zeta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -k \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\zeta \end{bmatrix}, \quad B(k) = \begin{bmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (29)$$

また  $A_r$  は次のものについて考える。

$$A_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (30)$$

上記のシステムについて、安定解析を行う。

## 5.3 リセット則の存在によるロバスト安定領域の拡大

パラメータの変化による 2 次リアプノフ関数の存在性について、定理 1 を用いて考える。 $\tau_F = 1.5$ ,  $\tau_R = 1.0$  について、(24) 式を満たすパラメータ  $(k, \zeta)$  の集合は図 2 の○印に示す領域となる。

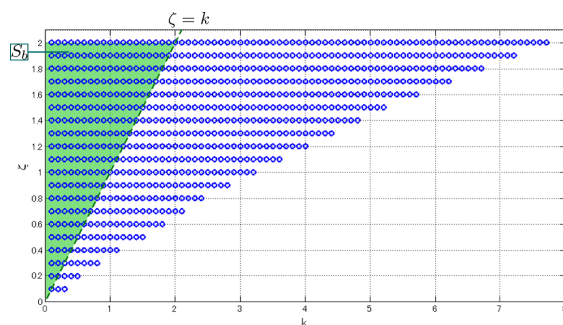


図2 パラメータ空間内における 2 次リアプノフ関数の存在範囲

$S_b$  と比較し、LPV リセットシステムの許容されるパラメータの変動が大きくなることを確認した。

## 6. 結言

本研究では、パラメータ変動を有するリセットシステムである LPV リセットシステムについて、LMI アプローチによる漸近安定条件を導出した。今後は定理 2 の保守性について検討するほか、パラメータが時変な場合の漸近安定条件を導出する。

## 参考文献

- 1) L. Zaccarian, D. Nešić, A. R. Teel, *First order reset erements and the Clegg integr revisited*, ACC2005, 563-568 (2005).
- 2) O. Beker, C.V. Hollot, Y. Chait, H. Han, *Fundamental properties of reset control systems*, Automatica, Vol. 40, 905-915 (2004).
- 3) D. Nešić, A. R. Teel, L. Zaccarian, *On necessarily and sufficient conditions for exponential and  $\mathcal{L}_2$  stability of planer reset systems*, ACC2008, 4140-4145 (2008).
- 4) J. C. Clegg, *A nonlinear integrator for servomechanisms*, Trans. of AIEE, 77(Part-II), 41-42 (1958).
- 5) A. Satoh, *Synthesis of Continuous-time Linear Reset Feedback System with  $\mathcal{L}_2$  Stability*, SICE Annual Conference 2010, 1100-1105 (2010).
- 6) 浅井徹, *LMI に基づく線形ロバスト制御系解析・設計, 計測と制御*, Vol. 42, No. 12, 1032-1038 (2003).
- 7) Y. Ebihara, T. Hagiwara, *A Dilated LMI Approach to Continuous-Time Gain-Scheduled Controller Synthesis with Parameter-Dependent Lyapunov Variables*, Trans. of SICE, Vol. 39, No. 8, 734-740 (2003).