

## 数学における非C A I 的授業の実践的研究 (4)

—— 中学生のサイクロイド曲線・内サイクロイド曲線の教材 ——

佐 伯 卓 也\*

(1988年6月2日受理)

### 1 は し が き

本研究は筆者の一連のパソコンを用いた非C A I 的授業用の教材開発の研究、プレサービス教師教育の研究 (佐伯, 1987a, 1988; 佐伯他4名, 1988; 佐伯他3名, 1988) の中に位置付けられる。

現行の教育課程では、サイクロイドは高等学校数学の微分積分の微分法の応用の中の媒介変数で扱われている。それは、大体サイクロイドの方程式を出して、あと媒介変数の微分の例として取り扱われていることが多い。ましてや、内サイクロイドとか外サイクロイドについては触れていない。

この研究では対象が中学2年の生徒ということなので、サイクロイドの方程式は勿論未知、そこで用いる三角関数も未知ということで、高校教材の時の扱い方は不可能である。そこでそのような高校の伝統的な扱いから全く離れて、パソコングラフィックを生かして、中学生にも理解できる独自のサイクロイド等の教材開発を目標に掲げて研究を進めることにした。さて、サイクロイド等は現行の中学校数学の指導要領のどの内容にも関連付けが難しいので、発見学習の教材として、いろいろのグラフィックの画面から、何か規則性とか法則性が導かれればよい、という程度に止どめ、生徒には大阪大学の竹之内氏の唱える「後々の洞察のために」的な、いわば、生徒の将来の学習のための、一種の先行経験的な教材とする、ことにした。もう一つの留意点は、この教材の導入で、実際に輪を回してその上のある定点の軌跡を示すのだが、一般にパソコンでアニメを作ったのでは経験的に労多くて功なしで、もっとうまくかつ簡単にやれる方法としてのV T R教材を開発し授業に臨んで併用することにした。

### 2 教 材 開 発

#### (1) サイクロイド・内サイクロイド

サイクロイド (cycloid, 擺線) は第1図のように、座標をとり、動円の半径を $a$ 、円周上の定点を $P(x, y)$  とし、動円の回転角を $\theta$  とすると

\* 岩手大学教育学部



を原点とする座標をとる。動円の円周上の定点を  $P(x, y)$ ，動円の中心を点  $C$  とし固定円の半径を  $a$ ，動円の半径を  $b$  とすると，

$$x = OF = OE - DC \quad y = PF = CE - DP$$

である。円  $C$  が点  $O$  の周りを  $\theta$  だけ回転した時，同時に円  $C$  が自分自身の中心の周りを  $\phi$  だけ回転するとする。この時  $a\theta = b\phi$  であり， $\phi = (a/b)\theta$  となる。よって，内サイクロイド曲線の方程式は

$$x = (a - b) \cos \theta + b \cos [(a - b)/b] \theta$$

$$y = (a - b) \sin \theta - b \sin [(a - b)/b] \theta$$

で表される。

留意点として，特に  $a/b = p/q$  (既約分数，つまり有理数) ならば，動円は固定円を  $q$  回まわった元の位置に戻り，定点  $P$  の軌跡は閉曲線になる。さらに，内サイクロイドで動円の半径が固定円の半径の  $1/n$  になる時は， $n$  個の尖点ができる (これを  $n$ -cusped epicycloid という) ことが知られている。前にも触れたが，授業は一応発見学習とし，何か規則性のようなものに迫っていく，という形になる。この観点で教材を調べると，固定円の半径分の動円の半径が  $p/q$  になるとき，内サイクロイドは動円が固定円内を  $p$  回転すると完結し，尖点はちょうど  $q$  個になる，ことが分かる。これを到達の目標にすることにした。

これらの事実をもとに中学2年用の教材を開発するのだが，特に，次の特別な場合が重要な足掛かりとなると考えられる。

[1] 動円の半径が固定円の半径の  $1/2$  に等しい場合 このときは内サイクロイドは固定円の直径になり， $x = a \cos \theta$ ， $y = 0$  である。

[2] 動円の半径が固定円の半径の  $1/4$  に等しい場合 このときは内サイクロイドは星芒形になる。

すなわち， $x = a \cos^3 \theta$ ， $y = a \sin^3 \theta$  であるから， $\theta$  を消去すれば星芒形の方程式

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

を得ることはよく知られている。

以上の教材研究を経て次にパソコン教材 (PCM) とビデオ教材を開発することになる。

## (2) パソコン教材

まずPCMから示す。ここでパソコンプログラムの内容を簡単に示す。プログラムは学生が中心となり開発した。ただ要所要所の指導は佐伯があたった (例えば，メタゲーム対策とか，途中割り込みとか，パソコンの一次停止など)。また以下の記述で [ ] の中は行番号である。

[0010~1030] 初期設定

[1040~1390] デモンストラーション

[1400~1930] 半径30の円を転がす。回転角を  $6\pi$  まで一気に転がすと，数箇所黄色い点後で描かれる動円に消されるので，いくつか区切ってFOR~NEXTでPSETを取り直した。

[1940~2110] 半径30の円からできるサイクロイドの軌跡のみをステップを細かくして提示する。完結したら“サイクロイド”と表示する。

[2120~2410] 半径60の円を転がす。

- [2420~2590] 半径60の時のサイクロイドの軌跡のみをステップを細かくして提示する。完結したら“サイクロイド”と表示する。
- [2600~2890] サイクロイドの時のビデオの代わりのイメージ化。
- [2900~3300] 動円の半径を30とし、内サイクロイドを提示する。
- [3310~3710] 動円の半径を60とし、内サイクロイドを提示する。
- [3720~3990] 動円の半径を  $0 < r < 180$  で input すると、 $2\pi$  まで回転する。動円は描かず軌跡のみ描く。メタゲーム対策として [3890] で、 $0 < r < 180$  のところで範囲外の数字を入れると input 段階に戻るようになっている。
- [4000~4420] 動円の半径を  $0 < r < 180$  で input すると、 $179 \times 2\pi$  回転することにしてある。これは、この範囲の整数のうち最も多く回転を必要とする場合が179回転だからである。しかし実数であれば止まらずに run を続ける。そのため、ヘルプキー割り込みで教師が任意に画面表示を止めることが出来るようにしてある。
- [4430~4730] 終わりのデモンストレーション。

なお、上では触れなかったが、今回もプログラムの中では、随所に数多く

$A\$ = INKEY\$ : IF A\$ = " " THEN \dots$

が使っており、そこで入力待ちになるので、教師はそこで説明のための時間を得ることが出来るようにしてあることは、従前と同様である。

### (3) ビデオ教材

子ども達に、言葉だけで「サイクロイド」を説明したのでは理解されにくい。そのイメージもつかみにくいと考えた。実際に輪を廻して示す必要がある。ところで、ここですぐ頭に浮かぶのはコンピュータアニメであるが、アニメはプログラミングが手間がかかるし、出来上がった画面も動きがぎこちないことが多い。これでは生徒によいイメージを植え付けることは困難と考え、ビデオ教材によるアプローチとなった。佐伯研では、岩手大学に教育工学センターが設置された頃(1979年)から数年の間に学生を指導して多くのビデオ教材を作った経験があるので、それを生かすことにした。ただ今回は電子編集とかBGMを付けるというような手間のかかることは一切行わず、撮りっぱなしのままにした。内容は、大黒板(色はグリーン)の前でフープ(白色の新体操用のものを利用)の一部に赤いテープを巻き着けて固定点としたものを数回転させ、それをビデオ撮りした簡単なものである(これでも大学にあるものだから、一応教育工学センターのスタジオを使ってつくったが、実際はどこでも、誰にでもできる水準の内容である)。

## 3 授業設計

まず、学習指導案の概要を掲げる。佐伯のほか附属中学の教官の指導も受けて、学生が主として設計した。途中、パソコン化教材との調整の場面も少なからず存在した。授業は田畑真紀子が担当した。筆者の指導は3名の班のグループ毎の指導になっている。この指導例の班はたまたま女子学生だけの班であった。

日 時：昭和62年12月16日（水）16：30～17：20

クラス：岩手大学附属中学校2年選抜組（男子6名，女子4名，計10名）

授業者：田畑真紀子

共同研究者：佐々木寿子，谷地直子

1. 単元名：サイクロイド

2. 本時の指導

(1) ねらい・サイクロイドの概形を理解できる。

・定円と動円の半径と内サイクロイドを関連づけて考えることができる。

(2) 展開

段階	学習内容	学 習 活 動	指 導 上 の 留 意 点	時間	教 具
導 入	・課題提示	1. 本時の学習内容を把握する。 ・プログラムのタイトル部分をVTRで見る。	・本時の学習内容に対する課題を認識させる。	5分	ビデオテープ パソコン
展          開	・サイクロイド      ・内サイクロイド	2. サイクロイドを知る。 1) 動円の半径30のサイクロイド 2) サイクロイドの定義 3) 動円の半径60のサイクロイド 4) まとめ 3. 内サイクロイドを知る。 1) 動円の半径30の内サイクロイド 2) 内サイクロイドの定義 3) 動円の半径60の内サイクロイド 4) プリントNo.2の内サイクロイドから動円の半径を求める。  5) まとめ	・直径，円周，回転数（山の数）を認識する。 ・半径30のサイクロイドをもとに予想，発表させ認識させる。  ・円の中を転がすことを想像させる。 ・サイクロイドをもとに予想，発表させる。  ・パソコンキー操作の仕方を教える。 ・プリント配布。 ・生徒にキーを押させ，確認しながら進める。	35分	パソコン プリントNo.1      パソコン      プリントNo.2
終 結	・まとめ	4. 内サイクロイドの半径をランダムに選ぶ。	・動円の半径をどんな値にしても図が完結することを説明する。	10分	パソコン

この指導案からも分かるように，提示の一部をパソコンアニメの代わりにビデオ映像を利用している。これは，教材作成をする教師にとって，パソコンアニメ開発の煩わしさから解放してくれたし，画面を見る生徒側からも適確な画面を見ることができたようである。一般にビデオは普通パソコンアニメに比べ情報量が圧倒的に多いので生徒にはポイントを強調する画面の「省略の効果」を犠牲にするというデメリットがあると言われているが，ここでは映像が極めて単純な“フープを転がすという回転”のみであったので，そのデメリットは問題にならないと考えて設計した。

## 4 授業の実際

授業はビデオに収録した。後で、授業記録（プロトコール）を作成するするためである。まず、その記録の一部分を次に示しておく。

## 授業の実際（プロトコール）

時間	教師の行動(発言)	学習者の行動(発言)	備考
0分	・これから1時間よろしくお願いします。最初にデモンストレーションちょっとだけ見て下さい。(キー操作)	・サイクロイド	デモンストレーション 0010~1390
1分	・ここに書いてある通り、今日はサイクロイドというのをやります。で、サイクロイドというのは今ちょっとビデオで見ますからちょっとだけですから、いいですか？		
2分	・まず、円を転がします。こう直線上を滑らないように転がしたときに1点を決めておくんですけどもそこんところがどういふふうに動くかというのを…。		ビデオ
3分	・(ビデオ操作)動かないね。あっ、動いた。ここ見えるかな。印がついてあるところ、こういう定点が……。		
	・で、これをやるんですけど、こういうふうに円に定点を決めて、それを転がした時にその定点がどういふふうな曲線を描くか、なんとなくわかりましたか。どんなふうか分かる？じゃあ、やって見ます		
	・(キー操作)まず、『直線上ところがそう』でまずはその円を直線上を転がします。コロコロと……。 (プリント配布)書かなくていいから見てて下さい【1】からいくんですけど、いいですか？		サイクロイド (1) 1400~1930 プリントNo.1
(中		略)	
27分	・みんなやったね。じゃあ、みんなにこれで実際にやってもらいます(キー操作)。やり方を今から説明するので後ろの人見えるかな？いいですか？『円の半径はいくつ？』ってありますね。『r?』のピコピコって所にみんなの答えの数字をうちます。このリターンキー、この矢印の所をボンと押します。そうすると出ます。じゃあ、順番にY君から。		内サイクロイド(4) 3720~3990
28分	・モンチッチ君？じゃあ、1番は90ってなってるからやって見て下さい。	・モンチッチ！	
	・あっ、ずっと押してるとずっとつきますから……。	(キー操作)	
29分	・見えない？できた？1番は99だね。だからさ、本当は直線上にすると山になるんだけど、これをキューッととやっちゃうと直線になっちゃうのね。で、今は見えないけど本当はこれはこうきて、こう戻ってくるの。	(キー操作)	
30分	・わかるね？	・わかる。 ・わかんない。	

	<ul style="list-style-type: none"> <li>よく見ると……今、終わりました。ここに来たのね。</li> <li>そうすると、『クリカエシマス(1), ツギニイキマス(2)』ってありますね。繰り返したいよね。繰り返すっていうのもう1回同じことをやるから1にしてリターンキーを押します。そして2番の答えを入れて下さい。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>ここ押すの？ (キー操作)</li> <li>考えたの？</li> </ul>	
31分	<ul style="list-style-type: none"> <li>ん？ここ1になってるの。1, 2, 3, ……同じ数字だよ。</li> </ul>		
32分	<ul style="list-style-type: none"> <li>考えたの、じゃあ、2番の答えを入れて下さい。</li> <li>2番目、60さっきやったね。あっ、そうだね。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>60 (キー操作)</li> </ul>	
33分	<ul style="list-style-type: none"> <li>じれったいね。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>じれったいな。</li> <li>じれったい。</li> <li>一生懸命考えたのに…。</li> </ul>	
34分	<ul style="list-style-type: none"> <li>ここに帰ってくると終わりますね。リターンキーを押します。3番の答えを入れてね。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>緊張するなよ、これだけで。(笑い)</li> <li>練習してたんだよ、さっきから、こればかりやってる。</li> <li>違うよ。(キー操作)</li> </ul>	
(中略)			
44分	<ul style="list-style-type: none"> <li>じゃあ、代表的なので、72をやってみましょう。F君やって下さい。</li> <li>72です。</li> <li>時間がかかるね。さっきの倍かかるね。さっきのは動円が定円を1回転するだけだったけど、今度は2回転するから……。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>おー選ばれた。</li> <li>(キー操作)</li> </ul>	内サイクロイド(5) 4000~4420
45分	<ul style="list-style-type: none"> <li>ずっと最後の方を見ると <math>71/n</math> は71回転するから、すごい時間がかかるのね。</li> </ul>		パソコンはランしている。
46分	<ul style="list-style-type: none"> <li>えー、これができるのに30分かかるよ。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>やって見るか？</li> <li>えー</li> <li>やって見たい。</li> </ul>	
47分	<ul style="list-style-type: none"> <li>やって見たい？ちょっと具合が悪いなあ。</li> <li>もう少しですね。星に近い形ですね。……はい、これで終わりましたね。で、いろいろやりたいけど、時間もちょうど来たみたいだし、ここで終わりにしますね。</li> <li>で、最後。あとデモンストレーション。(キー操作) 作初と変わらないけど……。</li> </ul>		尖点5の星
48分	<ul style="list-style-type: none"> <li>これで、授業は一応、終わりです。</li> </ul>		デモンストレーション 4430~4730

次に、学習プリントについて記す。プリントはNo. 1, No. 2そして授業のまとめのところで配布したプリントの3種類である。これらのプリントはどれもパソコンのプリンタの打ち出した図を、切り貼りして作成してある。実際のプリントを示すことを省略して、ここではその概要を述べるに止どめる。

プリントNo. 1は、まず、「【1】直線上をころがそう。」であり、サイクロイド曲線の確認と転がるときの山の数は何によってきまるか、の確認であり、次には「【2】円の中をころがそう。」が続き、内サイクロイド曲線の確認と、定円の半径を $R$ 、動円の半径を $r$ とした時、 $R$ と $r$ の関係と山の数の確認の問いが続く。

プリントNo. 2は内サイクロイドの図17個で、 $R$ を一定とし $r$ をいろいろ変えたものを載せ、前半は内サイクロイドの形から $r$ を求める問題、後半は少し複雑な内サイクロイドの図(山の数が15以上)を載せてある。これらから、内サイクロイドの一般傾向が発見出来るようになっている。

まとめのプリントは内部の円が何回転かしないと曲線は閉じないような図の例を72種類を3枚のプリントで示した。この中には、教材作りをしていた学生にとっても予想外の図が多く含まれていて、興味深かった。

全体的に授業は予定通りに進み、ほぼ成功であった。特に、「まとめのプリント」を配布したとき、生徒から驚きの声があがり、大いに盛り上がった。何故なら、このプリントは、前にも触れたが、72種類のいろいろの例を載せてあったからである。なお、これらのプリントはパソコンのプリンタの打ち出しを利用しているのだが、そのままでは縦が0.8に縮小されるから、ここでは、プログラムを修正して縦長にしたあとプリントしていることを付け加えておく。

## 5 授業の評価

本研究の目標は、このようなふくらし教材を用いて、中学2年の生徒で、一体授業が成立するかどうかの確認、これを通してプレサービス教師教育がどのようになされたかの確認、にある。このような立場から授業評価の結果を簡単に記述する。

データ採取からの評価は(1)IWATによるSsの認知構造の変容、P—Pグラフのパターン(佐伯, 1981, 1982), (2)PCSD—S(中高生対象のパソコンに対する態度測定用SD用具)による変容(佐伯, 1985), の2つを利用した。

(1) IWAT——キーワードは①サイクロイド②内サイクロイド③定直線④定円⑤動円⑥円周上の定点⑦曲線⑧半径の割合、の8語である。授業目標(内容)の詳細から内容構造を定め(学生に決定させた)、IWAT用紙を作成、授業の前と後にテストを実施した。結果は内容構造と認知構造の距離は、 $d$ (意味度の距離、佐伯, 1982),  $D$ (距離行列の距離、佐伯, 1982)ともに事後が近くなっている。特に、 $D$ では事後になって近さが\* (やや近い) までになった。P—Pグラフの型はⅣに型(ややⅡ型近い)で、グラフパターンの上からは一応成功的であったと評価できる。しかし、変容係数は $\beta_1 = .32$ ,  $\beta_2 = .37$ とかなり低く、グラフパターンからの評価に反して、成功的ではない、ということになる。この不整合性の原因は、断言はできないが、授業の内容・教材に対する生徒の認識と授業の方法(PCTによる)、それに授業の直後にテストをしたという、テストの時期の問題の交互作用からきていると推察される



(今回の授業では、しばしば問題になる、キーワードとその内容構造・隣接箇所の選定と授業の進行との関係、つまり、授業の進行で授業が内容構造と遊離することがあるが、そのような遊離はおこらなかったように見える)がこれ以上はなんとも言えない。

(2) P C S D—S——本用具は佐伯が正規の手続きを踏み開発した、中高生用のパソコンに対する態度測定用のS Dバッテリーであり、7点尺度10項目から成る(佐伯, 1985)。分析は、S Dプロフィールだけにしたが、事前から事後にかけて、「とっつきやすい——とっつきにくい」尺度以外は、事後の方がスコアが上がっている。また、女子よりも男子が上がりかたが大きいいように見える。

以上から、総合的に判断して、一応授業が成立したということ、授業担当のプレサース教師も授業が計画通りにこなした、という意味で、一応成功的であったと判断したい。

## 6 考 察

本研究の目標は、一応、非C A I的授業の教材開発およびその授業研究ならびにそれを通してのプレサース教師教育の研究にある。その内容は、中学生用のパソコン化教材としてのふくらまし教材、サイクロイド曲線の教材開発とそれを利用した授業実践の研究と位置付けられる。教材開発という観点からは、ビデオ教材をも併せ用いたことは効果的と判断できる。取り扱った内容であるが、今回はサイクロイドと内サイクロイドに限ったが、一応最初の試行としてはやむを得ないことであると考えている。また、扱い方も、単にパラメータを動かしているようなグラフを書かせ、何かの法則性を導くことにのみ終始したが、もっとほかの扱いかた、例えば、自然現象からサイクロイドになるものを取り入れ、それがサイクロイドになることのシミュレーション的扱い方等、グラフィックの上からは外サイクロイドや各種のトロコイド等が残されている。これら残された問題は今後の課題となるものである。しかし今回の結果を総合的に判断すると、一応、次の2つの事項

- (1) パソコン化授業とビデオ教材との併用、
- (2) 中学生のためのサイクロイド曲線の教材開発、

の手掛かりを得たことが評価されるかも知れない。特に(2)については、参考にできるものは皆無に等しい。参考になるものと言えば、研究室にある過去のパソコンを利用したふくらまし教材の蓄積とか、関連する数学の専門書ぐらいであった。このような環境の中で、筆者の助言や附属中学の教官の指導があったとしても、サイクロイドの中学生用のパソコン化教材の開発に取り組んだ3人の女子学生達の独創性には全く目を見張るものがあると言えるかも知れない。

次に、プレサース教師教育の観点から見る。授業全体を通してであるが、授業の「流れ」は、授業者が一応教育実習後であったこともあって、わりあいスムーズに流れていたといえる。しかし、指導者から見たとき、ポイントの押さえ方に一抹の不安を感じる。また、最後のまとめのプリントの配布時であったが、あらかじめここで一つの「授業のやまば」を作る計画であった。しかし、実際は時間不足ということもあり、物足りない感じをぬぐいきれない。

次に、プレサース教師教育の観点からは、一応学生をしてパソコン化教材のほかにビデオ教材の開発の指導ができたことが今回の研究の新しいところであった。学生は、女子学生であっても、必要に迫られれば、教育で用いるパソコンソフトの開発や機器の取り扱い等も難無くこなしていけるだろうから、どしどし指導をすればよい、ということを示唆する結果になった

ようである。

(謝辞) 本研究の遂行にあたりご協力を賜った、岩手大学教育学部附属中学校副校長の渋谷次男、数学科の樋口賢一、工藤保、沢山和則の4先生と附属中学校の2年選抜組の生徒諸君、並びに、協同研究をして戴いた昭和62年度佐伯研究室配属の学生、佐々木寿子、田畑真紀子、谷地直子の3君に感謝の意を表する。

### 参 考 文 献

- 1) 佐伯卓也(1981)「言語連想テスト(I式)の処理——WAテストP—Pグラフ分析」, 日本教科教育学会誌, 6, 195~199.
- 2) 佐伯卓也(1982)「学習者の認知構造の測定と分析」, 日本教育工学雑誌, 7, 1~8.
- 3) 佐伯卓也(1985)「パーソナルコンピュータに対する態度を測定するSD尺度, PCSD—Sの開発」, 日本教科教育学会誌, 10, 73~78.
- 4) 佐伯卓也(1987a)「数学における非CAI的授業としての『パソコン化授業』について」, 日本科学教育学会研究会研究報告, 2, No. 1, 89~92.
- 5) 佐伯卓也(1987b)「数学における非CAI的授業としての『パソコン化授業』——1台の8ビットパソコンでも効果的な授業ができる」, マイコンリーダー, 12月号, 12~15.
- 6) 佐伯卓也(1988)「数学における非CAI的授業の研究——円錐の体積」, 岩手大学教育工学センター教育工学研究, 10, 1~8.
- 7) 佐伯卓也, 阿部ゆかり, 柿崎純子, 菊池美智子, 細越千春(1988)「数学における非CAI的授業の研究(2)——内・外接正多角形による $\pi$ への近似」, 東北数学教育学会年報, 19, 17~22.
- 8) 佐伯卓也, 千葉政弥, 田中 洋, 千葉 仁(1988)「数学における非CAI的授業の研究(3)——中学生対象の関数のグラフ」, 東北数学教育学会年報, 19, 23~28.
- 9) 佐々木寿子(1988)「パーソナルコンピュータによるふくらまし教材の発展とその実践研究——サイクロイドから内サイクロイドへの発展」, 昭和62年度岩手大学教育学部卒業論文
- 10) 田畑真紀子(1988)「パーソナルコンピュータによる数学教材開発とその実践的研究——サイクロイドから内サイクロイドへのアプローチ」, 昭和62年度岩手大学教育学部卒業論文
- 11) 谷地直子(1988)「パソコン化教材の開発とその授業の実践的研究——サイクロイドの概念把握および内サイクロイドへの発展」, 昭和62年度岩手大学教育学部卒業論文