

## 木質材料の応力と変形解析

辻野哲司\*

(1981年6月7日受理)

### 目 次

第1章 緒 論	79
第2章 既往の研究	80
2.1 集成梁について	80
2.2 深い木材梁の横倒れ座屈について	80
2.3 合板箱型梁について	81
2.4 合板パネルについて	81
第3章 集成梁の曲げ剛性	82
3.1 解析方法	82
3.1.1 剛性方程式	82
3.2 実験的検討	86
3.2.1 実験方法	86
3.2.2 結果と考察	87
3.3 本解析法の適用性について	90
第4章 深い木材梁の横倒れ座屈	90
4.1 解析方法	90
4.1.1 横倒れ座屈特有方程式	90
4.1.2 $G_0K_0$ および $I\omega$ について	96
4.2 実験結果 (山本) による検証	97
4.3 横断面設計の限界条件について	98
4.4 本解析法の適用性について	99
第5章 合板箱型梁の剛性と耐力	100
5.1 解析方法	100
5.1.1 剛性方程式	100
(シャウェブを持つ梁と考えた場合)	
5.1.2 剛性方程式	102
(膜要素と棒要素から成る構造物と考えた場合)	
5.2 実験的検討	103

\* 岩手大学教育学部

5.2.1 実験方法	103
5.2.2 結果と考察	104
5.3 本解析法の適用性について	107

第六章以後の構成は下記の通りである。

## 第6章 合板パネルの曲げ剛性解析

### 6.1 解析方法

#### 6.1.1 剛性方程式

### 6.2 実験的検討

#### 6.2.1 実験方法

##### 6.2.1.1 無開口パネル

##### 6.2.1.2 開口部を有するパネル

#### 6.2.2 結果と考察

### 6.3 本解析法の適用性について

## 第7章 総合考察

## 第8章 摘要

謝 辞

文 献

## 第1章 緒 論

木材資源の有効利用が強く叫ばれている今日、その利用技術面での適切な改良、ならびに、開発が極めて重要な課題となって来た。特に我国において、木質系住宅に使用される木材は年々増大、しかもその多くを外材輸入に依存しつつあることも今日の社会問題として注目されている。したがって木材資源の利用面における節約が急務であり、この方向は今後変更されることはないと思われる。この場合、単純な材料節約は構造物の耐力機能に危険をもたらすことも考えられるために、何としても充分合理性のある設計手法が確立されなければならない。しかも、これまでに行なわれてきた技術研究のあり方は、専ら木材の直交異方性材料としての特徴を考慮した言わば蔽密解を志向するものであった。それだけに条件のかなりな単純化と、類型化を計った上での弾性論的取扱いが主流となっていたといえる。ところで、現在 鋼構造分野で開発の盛んな有限要素法は近似解法ではあるが、木材のような直交異方性材料においてその木取り条件、座標のとり方によっては殆んど解の得られないようなものに対しても、その手法の持っている特性から充分な適用性があると考えられる。しかも同型の構造部材に対しては、作成した汎用プログラムにより、きわめて容易に数値解が精度よく得られる。

鋼構造では平板、殻、3次元連続体、梁・柱・薄板により構成された複雑な立体構造物の静変形、熱変形の諸問題、振動、座屈などの安定問題、あるいは弾塑性、クリープのような材料非線形問題や大たわみのような幾可学的非線形問題の解析に到るまでの研究開発が進んでいる<sup>124)</sup>。

一方、木構造では有限要素法による既往の研究はそれ程多いとはいえ、この分野へのすみやかな普及、浸透が行われれば部材の性能評価、設計資料の蓄積が容易になると思われる。この観点に立って、本研究では、木構造耐力部材の代表的3種のものについて、本手法を適用し、汎用プログラムを作成するとともに数値解析的立場からいくつか考察を行ったものである。

本論文はそれらを取りまとめたもので、その内容は以下の如くである。

まず、第2章で本論文に関する既往の研究を紹介し、第3章では接着剤ならびに接着技術の進歩とともに発達し欧米では建築、橋、造船、車両など非常に広範囲に渡り用いられている集成梁の曲げ剛性問題を取扱った。言うまでもなく集成梁は断面、材長を自由に拡大しようという高い利点を持つが、同時に材料節約の見地に立てば材せいを高く、材幅をできるだけせまくとり、同等材積で数倍の剛性効果を期待したい願望がある。ところが、幅に比して材せいをあまり増大せしめると、横座屈現象が現われてその弾性的安定性を損う結果を招くおそれがある。そこで第4章では深い木材梁の横安定問題について検討した。

次に、比強度が優れており、寸度安定性および性能評価が高いなど多くの特性を持つ合板箱型梁の曲げ剛性ならびに耐力を第5章で、又最近の木質系工業化住宅において用途の増大している工場生産方式による接着合板パネルの曲げ剛性問題を第6章で検討した。

次いで、第7章では総合考察を、第8章では本研究の摘要を記述した。

## 第2章 既往の研究

### 2.1 集成梁について

1900年代初期、ドイツで始めて製作された集成梁は接着剤ならびに接着技術の進歩とともにその持っている多くの利点、例えば小断面から要求される寸法形状のものが得られ、かつ製品は割れ、狂いの無い高性能材であること等により、用途も建築はもとより、橋、造船、車両等非常に広範囲に渡っている。この傾向は今後ますます増加するものと思われ、又集成梁のより合理的な設計のために、いままで数多くの研究がなされている。近年においても例えば曲げ強さに及ぼすラミナの節<sup>1)</sup>、積層数<sup>2)</sup>および配置<sup>3), 4), 5)</sup>の影響、一部ラミナの補強効果等<sup>6), 7), 8)</sup>について、又連続梁を含め長大スパン梁の研究<sup>9), 10), 11)</sup>が主として実験的側面からなされている。

一方、理論的には曲げ剛性に関して高見<sup>12)</sup>、Norris<sup>13)</sup>らの微分方程式による法、Foshi<sup>14)~19)</sup>らのポイントマッチング法、沢田<sup>20)</sup>、Krajcinovic<sup>21)</sup>らによるひずみエネルギー法がそれぞれよい結果を得ている。又曲げ耐力に関しては森<sup>22), 23)</sup>、沢田<sup>24)</sup>らがラミナの塑性変形まで考慮した詳細な研究を行っている。

ところで、これまでの研究はラミナを通直材として取扱った場合であるが、実際にはそのような部材は少なく、縦継ぎされたラミナ<sup>25)</sup>が主である。したがって集成梁においては、材せい方向はもとより、スパン方向もヤング係数等の材質特性が場所、場所によって異なるわけであり、従来の研究では、ここまで解析することは非常に困難である。

一方、有限要素法はこのような場合にも容易に適応でき、いままでにいくつかの研究が報告されている。

Gopu<sup>26)</sup>らはダブルテーパー彎曲集成梁を四辺形要素で分割し応力、ひずみ分布が実測値および厳密解<sup>14)</sup>とよく一致すること又、Krueger<sup>27)~29)</sup>らは引張り側ラミナを異種材料で補強した集成梁を三角形要素でモデル化し、Zinkiewicz<sup>30)</sup>による繰返し法を適用して、塑性域の進展状況および曲げ強さについて検討している。

ところで、ラミナの配置は中立軸に対称に高グレードのものを外層に、低グレードのそれを内層に置くのが通常である<sup>41)</sup>。

しかしながらラミナをランダムに配置した場合、あるいは内層ラミナのグレードがどんどん低下していった場合、集成梁の曲げ剛性がどのような影響を受けるのかは興味ある問題であり又、設計上1つの資料として意義あるものと考えられる。そこで第3章では、集成梁の剛性方程式を求めると同様、これらの点を主たる研究対象とした。

ここで有限要素法を集成梁に適用するにあたり、せん断応力による付加たわみも<sup>20), 31), 62)~64)</sup>考慮するためには前述の三角形、四辺形要素等の膜要素<sup>30), 32)~35)</sup>あるいは応力を仮定するハイブリッド法<sup>30)</sup>を用いることが考えられるがこれらの場合、厳密解に近づくには分割数を多くする必要があり手間、計算時間の増につながる。そこで本研究では、極めて粗い要素分割でも厳密解によく収束する4節点た要素<sup>37), 38)</sup>を用いてm層集成梁の剛性方程式を求めた。さらに、実験も行い実測値と比較検討してその適用性を確認した。

### 2.2 深い木材梁の横倒れ座屈について

より軽量かつ経済的な梁を要求する場合、梁せいを高く、幅を薄くするいわゆる深い梁にす

る工法がある。しかしながら、そのような梁は横安定性が低く横倒れ座屈を起こし易くなり、横座屈荷重が設計上非常に重要なものとなる。

梁の横安定問題について鋼構造に関する研究は数多くある（例えば文献42）～46）が、木構造に関するものは少ないようである。Zahn<sup>47）～49）</sup>らは屋根および床構造における梁の横安定問題を取扱い、予測値が実測値とよく一致することを報告している。

又、AITC<sup>50）</sup>およびNFRA<sup>51）</sup>は Madsen<sup>52）</sup>らの理論的、実験的研究をもとに横倒れ座屈に対する合理的設計のための Slenderness factor, Size factor を規定している。さらに Fowler<sup>53）</sup>は NFRA の設計規準に基づいて、いくつかの設計資料を提出し、山本<sup>54）</sup>らは横倒れ座屈の難易度を判定する一種の細長比を定義している。

しかしながらこれまでの研究では、横断面の設計限界条件については検討しておらず、又、木構造におけるこの種の問題を有限要素法で解析した場合も無いようである。そこで第4章では、深い木材梁の横倒れ座屈に関する特有方程式を川井<sup>55）</sup>と同様の手法で求め、その妥当性を確認した後、前記設計限界条件について考察を行った。

### 2.3 合板箱型梁について

フランジに小断面の木材又は集成梁を、ウェブに構造用合板を用いる合板箱型梁はその構造上の特性から比強度（強度/重量）が優れていること、寸度安定性および性能評価が高いなど多くの利点を持ち、欧米では事務所、商業ビル、教会、体育館などの骨組構造あるいは床、屋根のけた等に利用しており、研究も古くから行われている。

まずたわみについてであるが、この種の梁のたわみも曲げ応力によるもの他に、せん断付加たわみも考慮しなければならず沢田<sup>65）</sup>、宮島<sup>66）</sup>、高見<sup>67）、68）</sup>、後藤<sup>69）、70）</sup>、Booth<sup>71）</sup>、Stieda<sup>72）</sup>らはひずみエネルギー法により、又、Diets<sup>73）</sup>は複雑な計算によらず簡単な図式を用いて求めている。

一方Lewis<sup>73）～77）</sup>、March<sup>78）</sup>、その他<sup>79）～82）</sup>はウェブの座屈挙動、座屈安定性を高めるためのスチフナ間隔および耐力等について検討している。さらにこのような研究をもとに、箱型梁構成部材の応力等級区分、製造、設計方法の仕様書<sup>41）、83）～86）</sup>も用意されており、最近では平嶋<sup>87）</sup>が詳細な実験データをもとに、我国の構造用合板の許容応力度がウェブに対し妥当であると報告している。

ここで、有限要素法は合板箱型梁の解析にも大きく役立つと考えられるが、いままであまり行われていないようである。

僅かに Stieda<sup>88）</sup>が捩れ問題に必要な Saint-Venantの捩り剛性<sup>57）、89）</sup>を、断面形状をいろいろ変えて求めているに過ぎず捩り解析まで行っていない。さらにこれまでの研究は一様断面を有するものに対してであり、構造条件ないしは使用条件などによっては、断面が一様でない変断面箱型梁も考えられる。

そこで第5章では、等断面および変断面合板箱型梁の曲げに関する剛性方程式をそれぞれ Martin<sup>90）</sup>の手法および膜要素<sup>30）、32）</sup>と棒要素<sup>33）、91）</sup>でモデル化することにより求めた。次にその実用性を実験により確認した後、両面テーパ箱型梁の曲げ剛性におよぼすウェブの表繊維方向の効果、ならびに実験的側面から等断面、片面テーパ箱型梁の曲げ強さについて検討を行った。

### 2.4 合板パネルについて

最近の木質系工業化住宅において合板パネルの用途は増加している。この種のパネルは十分に管理された工場生産方式による接着パネルと現場作業方式による釘着パネルに分かれ、それ

らの合理的設計と性能評価のためいくつかの解析方法がいままでに報告されている。まず接着パネルについて、パネルは用途により種々の荷重が作用するが、中でも基本的な性能である曲げ問題を取上げた場合 Newlin<sup>93)</sup> はリブの Basic spacing を基礎とする設計法を、Foshi<sup>94)</sup> はリブに梁理論を、面材に直交異方性平板理論を適用し、得られた連立方程式を陽な形に解く法を提案している。

また Ammana<sup>95), 96)</sup>, Kenmochi<sup>97)</sup>, 平嶋<sup>98)</sup>, Möhler<sup>99)</sup> らは面材部におけるシャラッグ<sup>100), 101)</sup> を考慮して有効幅を決定し、梁理論を適用してそれぞれ良い結果を得ている。

一方、釘着パネルを始めとして重ね梁、床組、屋根構造等これら一連の釘着工法は製作された構造部材が粘りを持つことおよび現場作業方式という大きい利点があり、近年この種の研究が沢田<sup>102)~107)</sup>, Wilkinson<sup>108), 109)</sup> らにより精力的に行われている。

さてこの釘着工法において、構造部材が直交異方性材料というだけでなく、材質特性が厳密には個々異なること、又層間迂りなどにより負荷時に構造物は複雑な挙動を示す。そこで1971年、コロラド州立大学ではGoodmanを中心として、より正確で合理的な解析および設計法を開発すべく研究組織が設立された。手法は有限要素法であり、釘着床組構造をT型梁要素でモデル化し、剛性方程式を求めその実用性を確認している<sup>110), 111)</sup>。さらに迂り係数、けたのヤング係数を種々変え床挙動に及ぼす影響も検討している<sup>112), 113)</sup>。

一方Polensekは釘着耐力壁を長方形板曲げ要素とI型梁-柱要素でモデル化し、横荷重の他に軸方向荷重も同時に作用する場合を取扱っており、解析手法の適用性を確認した<sup>114)</sup>後、耐力壁の合理的設計法<sup>115)~117)</sup>について報告している。

このように Goodman, Polensek らの有限要素法による一連の研究は高く評価できるものであるが、釘着工法に主体をおいたものであり、迂りが零の場合は取扱っていない。

又これまでの研究が開口部の無い場合を対象にしていることも合わせ、第6章では開口部を有する場合も含めて、接着パネルの曲げ剛性問題を取扱った。

パネルのモデル化にあたっては、面材を長方形板曲げ要素で、栈木を4節点けた要素で分割し剛性方程式を求めた。実測値と比較検討しその適用性を確認した後、面材、栈木のヤング係数および栈木の高さが変わった場合、又横栈、縦栈の数が増加した場合等、曲げ剛性にどのような影響を与えるのかを検討した。

### 第3章 集成梁の曲げ剛性

#### 3.1 解析方法

##### 3.1.1 剛性方程式

集成梁の剛性方程式を求めるにあたり、ここで用いた4節点けた要素は三本木<sup>97)</sup>がMelosh<sup>99)</sup>らによる2節点けた要素から誘導したものであり、せん断応力による付加たわみも考慮し、かつ中立軸に非対称な断面を持つ梁の曲げ問題に有効な要素である。図3.1はこの要素を用いた梁せい一定の $m$ 層集成梁要素を示す。

変形は図3.2に示すような8つの変形モー

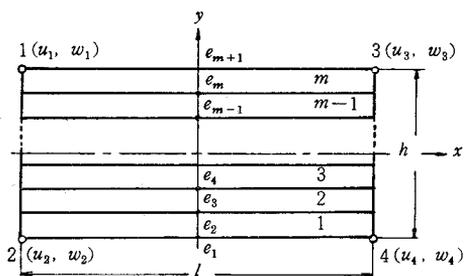


図3.1 集成梁要素

$m$ : 積層数  
 $l$ : 梁要素長さ  
 $h$ : 梁せい

ドを仮定する。すなわち (a), (b) は剛体としての図心の移動, (c) は図心のまわりの回転, (d), (e) は一様引張りによる変形, (f), (g) は純曲げによる変形, (h) はせん断変形である。

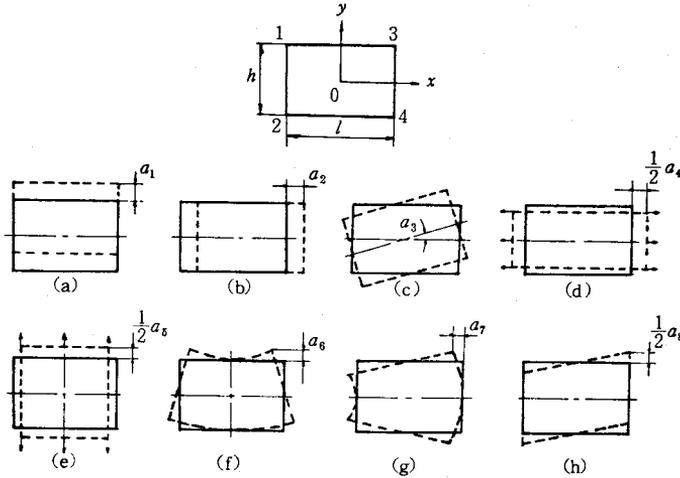


図 3.2 変形モード

各節点変位を回転変位も含めてすべて  $x, y$  方向の変位に換算し, パラメータ  $a_1 \sim a_8$  であらわすと

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ u_3 \\ w_3 \\ u_4 \\ w_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -h/2 & -1/2 & \mu_{yx}l/2h & 2h/l & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -l/2 & -\mu_{xy}h/2l & 1/2 & 1 & -2l/h & -1/2 \\ 0 & 1 & h/2 & -1/2 & \mu_{yx}l/2h & -2h/l & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -l/2 & \mu_{xy}h/2l & -1/2 & 1 & 2l/h & -1/2 \\ 0 & 1 & -h/2 & 1/2 & -\mu_{yx}l/2h & -2h/l & -1 & 0 \\ 1 & 0 & l/2 & -\mu_{xy}h/2l & 1/2 & 1 & 2l/h & 1/2 \\ 0 & 1 & h/2 & 1/2 & -\mu_{yx}l/2h & 2h/l & -1 & 0 \\ 1 & 0 & l/2 & \mu_{xy}h/2l & -1/2 & 1 & -2l/h & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

あるいは

$$\{\delta\} = [\varphi] \{a\} \quad (3.2)$$

同様に要素内のひずみ分布も, 次のように求めることができる。

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{l} & \frac{-\mu_{yx}}{h} & \frac{-8y}{l^2} & \frac{-8\mu_{yx}x}{h^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-\mu_{xy}}{l} & \frac{1}{h} & \frac{8\mu_{xy}y}{l^2} & \frac{8x}{h^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

あるいは

$$\{\varepsilon\} = [W] \{a\} \quad (3.4)$$

また要素内のひずみエネルギーは

$$U = \frac{1}{2} \iiint \{\delta\}^T [\varphi^{-1}]^T [W]^T [D] [W] [\varphi^{-1}] \{\delta\} dx dy dz \quad (3.5)$$

ただし  $[D]$  は応力-ひずみマトリックスを示す。

(3.2), (3.4) 式を (3.5) 式に代入し Castigliano の定理を適用すれば, 要素の剛性方程式は次のように得られる。

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ X_3 \\ Y_3 \\ X_4 \\ Y_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} & k_{17} & k_{18} \\ & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} & k_{27} & k_{28} \\ & & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} & k_{37} & k_{38} \\ & & & k_{44} & k_{45} & k_{46} & k_{47} & k_{48} \\ & & & & k_{55} & k_{56} & k_{57} & k_{58} \\ & & & & & k_{66} & k_{67} & k_{68} \\ & & & & & & k_{77} & k_{78} \\ & & & & & & & k_{88} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ u_3 \\ w_3 \\ u_4 \\ w_4 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

sym.

ここで  $\{X_1, Y_1, \dots, X_4, Y_4\}^T$ ,  $\{u_1, w_1, \dots, u_4, w_4\}^T$  はそれぞれ節点力ベクトル, 節点変位ベクトルであり

$$k_{11} = bl \sum_{i=1}^m \left[ \frac{d_{i11} - 2pd_{i12} + p^2 d_{i22}}{3h^2 l^2} (e_{i+1}^3 - e_i^3) + \frac{d_{i11} - pd_{i12}}{2hl^2} (e_{i+1}^2 - e_i^2) + \left( \frac{d_{i11}}{4l^2} + \frac{d_{i66}}{4h^2} \right) (e_{i+1} - e_i) \right]$$

$$k_{12} = \frac{b}{4h} \sum_{i=1}^m \left[ \frac{-d_{i12} + pd_{i22}}{h} (e_{i+1}^2 - e_i^2) - (d_{i12} + d_{i66})(e_{i+1} - e_i) \right]$$

$$k_{13} = bl \sum_{i=1}^m \left[ \frac{-d_{i11} + 2pd_{i12} - p^2 d_{i22}}{3h^2 l^2} (e_{i+1}^3 - e_i^3) + \left( \frac{d_{i11}}{4l^2} - \frac{d_{i66}}{4h^2} \right) (e_{i+1} - e_i) \right]$$

$$k_{14} = \frac{b}{4h} \sum_{i=1}^m \left[ \frac{d_{i12} - pd_{i22}}{h} (e_{i+1}^2 - e_i^2) + (d_{i12} - d_{i66})(e_{i+1} - e_i) \right]$$

$$k_{15} = bl \sum_{i=1}^m \left[ \frac{-d_{i11} + 2pd_{i12} - p^2 d_{i22}}{3h^2 l^2} (e_{i+1}^3 - e_i^3) + \frac{-d_{i11} + pd_{i12}}{2hl^2} (e_{i+1}^2 - e_i^2) + \left( \frac{-d_{i11}}{4l^2} + \frac{d_{i66}}{4h^2} \right) (e_{i+1} - e_i) \right]$$

$$k_{16} = -k_{14}$$

$$k_{17} = bl \sum_{i=1}^m \left[ \frac{d_{i11} - 2pd_{i12} + p^2 d_{i22}}{3h^2 l^2} (e_{i+1}^3 - e_i^3) - \left( \frac{d_{i11}}{4l^2} + \frac{d_{i66}}{4h^2} \right) (e_{i+1} - e_i) \right]$$

$$k_{18} = -k_{12}$$

$$k_{22} = \frac{bl}{4} \sum_{i=1}^m \left( \frac{q^2 d_{i11} - 2qd_{i12} + 4d_{i22}}{3h^2} + \frac{d_{i66}}{l^2} \right) (e_{i+1} - e_i)$$

$$k_{23} = \frac{b}{4h} \sum_{i=1}^m \left[ \frac{d_{i12} - pd_{i22}}{h} (e_{i+1}^2 - e_i^2) - (d_{i12} - d_{i66}) (e_{i+1} - e_i) \right]$$

$$k_{24} = \frac{bl}{4} \sum_{i=1}^m \left( \frac{-q^2 d_{i11} + 2qd_{i12} - 4d_{i22}}{3h^2} + \frac{d_{i66}}{l^2} \right) (e_{i+1} - e_i)$$

$$k_{25} = k_{14}$$

$$k_{26} = \frac{bl}{4} \sum_{i=1}^m \left( \frac{-q^2 d_{i11} + 2qd_{i12} + 2d_{i22}}{3h^2} - \frac{d_{i66}}{l^2} \right) (e_{i+1} - e_i)$$

$$k_{27} = \frac{b}{4h} \sum_{i=1}^m \left[ \frac{-d_{i12} + pd_{i22}}{h} (e_{i+1}^2 - e_i^2) + (d_{i12} + d_{i66}) (e_{i+1} - e_i) \right]$$

$$k_{28} = \frac{bl}{4} \sum_{i=1}^m \left( \frac{q^2 d_{i11} - 2qd_{i12} - 2d_{i22}}{3h^2} - \frac{d_{i66}}{l^2} \right) (e_{i+1} - e_i)$$

$$k_{33} = bl \sum_{i=1}^m \left[ \frac{d_{i11} - 2pd_{i12} + p^2 d_{i22}}{3h^2 l^2} (e_{i+1}^3 - e_i^3) + \frac{-d_{i11} + pd_{i12}}{2hl^2} (e_{i+1}^2 - e_i^2) \right. \\ \left. + \left( \frac{d_{i11}}{4l^2} + \frac{d_{i66}}{4h^2} \right) (e_{i+1} - e_i) \right]$$

$$k_{34} = k_{27}$$

$$k_{35} = k_{17}$$

$$k_{36} = \frac{b}{4h} \sum_{i=1}^m \left[ \frac{d_{i12} - pd_{i22}}{h} (e_{i+1}^2 - e_i^2) - (d_{i12} + d_{i66}) (e_{i+1} - e_i) \right]$$

$$k_{37} = bl \sum_{i=1}^m \left[ \frac{-d_{i11} + 2pd_{i12} - p^2 d_{i22}}{3h^2 l^2} (e_{i+1}^3 - e_i^3) + \frac{d_{i11} - pd_{i12}}{2hl^2} (e_{i+1}^2 - e_i^2) \right. \\ \left. - \left( \frac{d_{i11}}{4l^2} - \frac{d_{i66}}{4h^2} \right) (e_{i+1} - e_i) \right]$$

$$k_{38} = \frac{b}{4h} \sum_{i=1}^m \left[ \frac{-d_{i12} + pd_{i22}}{h} (e_{i+1}^2 - e_i^2) + (d_{i12} - d_{i66}) (e_{i+1} - e_i) \right]$$

$$k_{44} = k_{22}, \quad k_{45} = k_{12}, \quad k_{46} = k_{28}, \quad k_{47} = k_{23}, \quad k_{48} = k_{26}$$

$$k_{55} = k_{11}, \quad k_{56} = k_{18}, \quad k_{57} = k_{13}, \quad k_{58} = k_{16}, \quad k_{66} = k_{22}$$

$$k_{67} = k_{38}, \quad k_{68} = k_{24}, \quad k_{77} = k_{33}, \quad k_{78} = k_{36}, \quad k_{88} = k_{66}$$

となる。

ただし、

$b$  : 梁幅,  $h$  : 梁せい

$p, q$  : それぞれ  $\mu_{xy}, \mu_{yx}$

$d_{i11}, d_{i22}, d_{i12}, d_{i66}$  :  $i$  層ラミナにおける応力-ひずみ関係式の成分

3.2 実験的検討

3.2.1 実験方法

集成梁に用いたラミナは岩手県産スギ、アカマツと米国産スプリースの挽板であり、これらを充分天然乾燥させ含水率を10~14%とした。次に手押および自動カンナ盤で厚さ20mm, 幅80mm, 長さ1150mmのラミナに仕上げ, 曲げヤング係数  $E_x(E_L)$  を測定後, 樹種に無関係にラミナを分類して, 集成梁製造の際の組み合わせを決定した。集成梁は7層通直材とし, その寸法, ラミナの配置を図3.3に。又, 各ラミナの樹種, 曲げヤング係数を表3.1に示す。

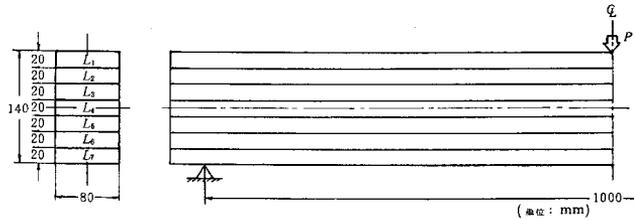


図3.3 実験に用いた集成梁におけるラミナの配置と試験方法

$L_1, L_2, \dots, L_7$ : 表3.1におけるラミナの樹種および軸方向曲げヤング係数

表3.1 ラミナのヤング係数

梁No.	ラミナ記号	樹種	L方向に直角な方向	軸方向(L)ヤング係数 $E_L$	梁No.	ラミナ記号	樹種	L方向に直角な方向	軸方向(L)ヤング係数 $E_L$
1	L <sub>1</sub>	Ma	T	1076.0	4	L <sub>1</sub>	Sp	T	1186.8
	L <sub>2</sub>	Sp	T	1052.9		L <sub>2</sub>	Ma	T	719.4
	L <sub>3</sub>	Sp	T	1039.1		L <sub>3</sub>	Su	R	510.9
	L <sub>4</sub>	Sp	T	938.2		L <sub>4</sub>	Sp	T	1292.7
	L <sub>5</sub>	Sp	T	1048.7		L <sub>5</sub>	Ma	R	519.2
	L <sub>6</sub>	Ma	T	1051.0		L <sub>6</sub>	Su	R	712.2
	L <sub>7</sub>	Sp	T	1088.3		L <sub>7</sub>	Sp	T	1251.7
2	L <sub>1</sub>	Ma	T	1108.0	5	L <sub>1</sub>	Ma	R	537.2
	L <sub>2</sub>	Ma	R	916.8		L <sub>2</sub>	Su	R	544.9
	L <sub>3</sub>	Su	R	684.9		L <sub>3</sub>	Su	R	602.9
	L <sub>4</sub>	Su	R	493.3		L <sub>4</sub>	Ma	T	606.6
	L <sub>5</sub>	Ma	R	699.5		L <sub>5</sub>	Su	R	652.8
	L <sub>6</sub>	Sp	T	888.1		L <sub>6</sub>	Su	R	664.0
	L <sub>7</sub>	Ma	R	1151.0		L <sub>7</sub>	Su	R	673.5
3	L <sub>1</sub>	Su	R	744.0	ヤング係数: kg/mm <sup>2</sup> Ma: アカマツ Su: スギ Sp: スプリース				
	L <sub>2</sub>	Su	R	769.5					
	L <sub>3</sub>	Su	R	784.9					
	L <sub>4</sub>	Ma	R	814.4					
	L <sub>5</sub>	Su	R	786.3					
	L <sub>6</sub>	Su	R	763.1					
	L <sub>7</sub>	Ma	R	760.7					

接着剤はレゾルソノール樹脂を用い、 $3g/100cm^2$ を標準として塗布し、25cm間隔にクランプジグを取りつけ圧縮した。このようにして製造した5本の試験片において、スパン $L=1000mm$ とし両端単純支持の境界条件のもとで中央集中荷重を加えた。たわみはスパン中央で $1/100mm$ ダイヤルゲージを用い測定した。

(3.6)式によるたわみの計算には、軸方向ヤング係数 $E_L$ の他に軸方向に直角方向のヤング係数 $E_R$ 又は $E_T$ 、せん断弾性係数 $G_{LR}$ 又は $G_{LT}$ 、ポアソン比 $\mu_{LR}$ 、又は $\mu_{LT}$ が必要である。しかしながら $E_L$ 以外は直接測定したのではなく次のように推定した<sup>40)</sup>。

$$E_R=0.079E_L, E_T=0.045E_L, G_{LR}=0.069E_L$$

$$G_{LT}=0.055E_L, \mu_{LR}=0.4, \mu_{LT}=0.5$$

### 3.2.2 結果と考察

表3.2はスパン中央のたわみについて、実測値と計算値を示すものである。

実験に用いた集成梁は表3.1に示すようにラミナの樹種および弾性定数がかかなり異なるものを用いた場合(梁No. 2, 4)、あるいはラミナを通常の方法とは違った配置にした場合(梁No. 3, 4, 5)であるが、計算値は実測値と比較的よく一致している。

又本実験で用いた集成梁のように、梁せいとスパンとの比 $h/L$ が0.14であれば、せん断応力

表3.2 スパン中央におけるたわみの計算値と実測値

梁 No.	測定点	$\delta_T$ mm/500kg	$\delta_E$ mm/500kg	$\frac{\delta_E}{\delta_T}$	$\delta_s$ mm/500kg
1	A	1.06	1.22	1.15	0.79
	B	0.74	0.78	1.05	
2	A	1.05	1.02	0.97	0.84
	B	0.77	0.75	0.97	
3	A	1.22	1.26	1.03	1.02
	B	0.99	1.06	1.07	
4	A	1.09	1.32	1.21	0.85
	B	0.78	0.87	1.12	
5	A	1.59	1.47	0.92	1.33
	B	1.25	1.15	0.92	

$\delta_T$ : (3.6)式による計算値

$\delta_s$ : 梁理論による計算値

$\delta_E$ : 実測値

A: スパン中央上部ラミナにおける点

B: スパン中央下部ラミナにおける点

によるたわみも考慮しなければならぬ<sup>20)</sup>。しかし、本解析法では梁を2次元平面問題として取扱っているため、そのような必要なしにたわみが得られる。なお、 $\delta_s$ は梁理論による中立軸のたわみである。

ここで、圧縮側(A点)と引張り側(B点)でたわみが異なっていることに注意すべきである。そこで両点のたわみをそれぞれ $\delta_A, \delta_B$ として、 $\delta_B/\delta_A$ と $h/L$ との関係を調べたのが図

3.4である。計算には表3.1の梁No. 1, 2, 4および表3.3の梁No. 6を用いた。いま便宜上  $h/L = \lambda$  とおくと、 $\lambda > 0.06$  では  $\delta_A$  と  $\delta_B$  が異なり、この傾向は  $\lambda$  の増加につれ大きくなる。さらに  $\lambda$  がこの範囲ではせん断付加たわみも考慮しなければならない。したがって、せん断応力によるたわみも考慮しなければならない梁では、梁の top 側と bottom 側ではたわみが異なるように思われる。

次に弾性定数の異なるラミナを用いて集成梁を製造する場合は、中立軸に対称に高グレードラミナを外層に、低グレ

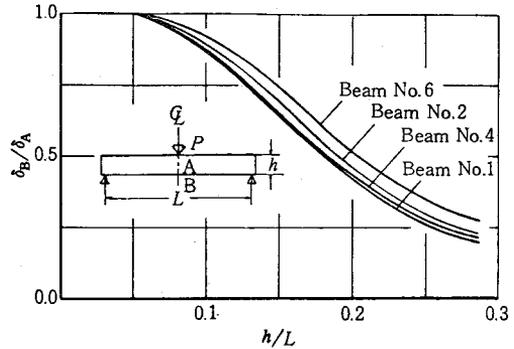


図 3.4  $\delta_B/\delta_A$  と  $h/L$  との関係

$\delta_A$ : スパン中央上部ラミナにおけるたわみ  
 $\delta_B$ : スパン中央下部ラミナにおけるたわみ  
 $h$ : 梁せい,  $L$ : スパン

表 3.3 集成梁モデルにおけるラミナの曲げヤング係数

梁 No.	$L_1$	$L_2$	$L_3$	$L_4$	$L_5$	$L_6$	$L_7$	$cv$ (%)
6	1200	1200	1200	1200	1200	1200	1200	0.0
7	1200	1176	1152	1128	1152	1176	1200	2.12
8	1200	1140	1080	1020	1080	1140	1200	5.51
9	1200	1120	1040	960	1040	1120	1200	7.51
10	1200	1100	1000	900	1000	1100	1200	9.61
11	1200	1080	960	840	960	1080	1200	11.82
12	1200	1050	900	750	900	1050	1200	15.34
13	1200	1020	840	660	840	1020	1200	19.14
14	1200	990	780	570	780	990	1200	23.26
15	1200	960	720	480	720	960	1200	27.74
16	1200	900	600	480	600	900	1200	32.17

$cv$ : 変動係数

(単位:  $\text{kg}/\text{mm}^2$ )

ードのそれを内層に配置するのが通常である<sup>4)</sup>。そこで内層ラミナのヤング係数変化が曲げ剛性にどのような影響を与えるかを調べるため表3.3のような集成梁モデルを考えた。ここに  $cv$  はラミナのヤング係数のばらつきを示す変動係数である。同一ヤング係数のラミナから成る梁 No. 6 を基準にして、梁 No. 7, 8, ……16の曲げ剛性とNo. 6のそれとの比  $k_0$  対  $cv$  との関係を示したのが図3.5の実線である。当然ながら  $cv$  が大きくなるにつれ剛性は低下するが、この傾向は  $h/L$  が大きくなるにつれ増加する。

一方通常とは異なったラミナの配置が、曲げ剛性にどのような影響を与えるかも興味ある問題であり、図3.6に示すような12とおりのラミナ配置の型を考えた。なお  $L_1, L_2, L_3, L_4$  はラミナの曲げヤング係数を示し、それらの値には表3.3の梁No. 8のものを用いた。

図3.7はラミナの配置が  $O, P, \dots Z$  型の梁の曲げ剛性と通常の配置  $N$  型のそれとの比  $k_1$  対  $h/L$  との関係を示す。これより中立軸に対称に、低グレードラミナを外層に高グレードラ

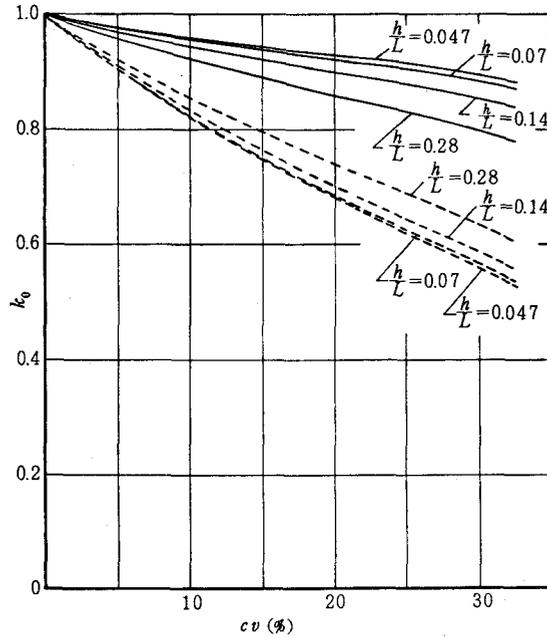


図 3.5  $k_0$ と $cv$ との関係

$k_0$ : 梁No.7, 8, ……16の曲げ剛性 (ただし, 同一ヤング係数のラミナから成る梁No.6を基準にしている)

$cv$ : 変動係数

実線: ラミナの配置が通常の場合(図3.6のN型)

点線: ラミナの配置がN型と全く逆な場合(図3.6のZ型)

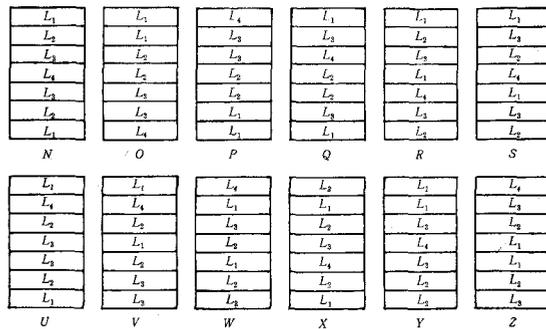


図 3.6 ラミナ配置の型

$L_1, L_2, L_3, L_4$ : ラミナの曲げヤング係数

$L_1=1200\text{kg/mm}^2, L_2=1140\text{kg/mm}^2$

$L_3=1080\text{kg/mm}^2, L_4=1020\text{kg/mm}^2$

ミナを内層に配置したZ型が最も剛性低下をもたらしている。すなわちヤング係数の異なるラミナをランダムに配置しても、Z型で計算を行っておけば設計上安全である。

そこで表3.3の梁No.7, 8, ……16においてラミナの配置をすべてZ型にし、それらの曲げ剛性とNo.6のそれとの比 $k_0$ 対 $cv$ との関係を示したのが図3.5の点線である。この場合

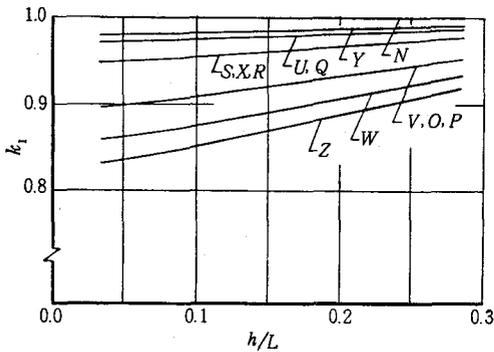


図 3.7  $k_1$  と  $h/L$  との関係

$k_1$ : ラミナ配置の型 O, P, …… Z の曲げ剛性  
(ただし、通常配置 N 型を基準にしている)

11.5% の場合は N 型で 5%, Z 型で 20% の剛性低下となり、ラミナが通常配置と異なれば注意を要する。

### 3.3 本解析法の適用性について

中立軸に対し非対称な断面を有する  $m$  層集成梁の曲げ剛性解析にあたり、8 つの変形モードを仮定した 4 節点けた要素を用いて剛性方程式を求めた。

計算による弾性たわみは実測値と比較的よく一致し本解析法の適用性を確認した。さらに、ラミナのヤング係数変化、および配置の変化が曲げ剛性にどのような影響を与えるかを検討した。ここで梁のせいを  $h$ 、スパンを  $L$ 、ラミナのヤング係数のばらつきを示す変動係数を  $cv$  とする。

ラミナを通常配置 (これを N 型とする) にした場合、曲げ剛性は  $cv$  が大きくなるにつれ低下するが、この傾向は  $h/L$  が増すにつれ大きくなる。

一方、ラミナの配置に関しては高グレードラミナを内層に、外層になるに従い低グレードのものを配置 (これを Z 型とする) したすなわち N 型と全く逆な場合が最も剛性低下をもたらす。したがって、ヤング係数の異なるラミナをランダムに配置しても、Z 型で計算を行っていれば設計上安全である。なお、この配置の場合も  $cv$  が大きくなるにつれ剛性は低下するが、この傾向は  $h/L$  の減少にともない大きくなる。

## 第 4 章 深い木材梁の横倒れ座屈

### 4.1 解析方法

#### 4.1.1 横倒れ座屈特有方程式

梁の弾性座屈変形を支配する仮想仕事方程式は次式で与えられる<sup>55)</sup>。

$$\delta U_e + \delta W^{(0)} = 0 \quad (4.1)$$

ここに  $\delta U_e$  はひずみエネルギー  $U_e$  の変分を、 $\delta W^{(0)}$  は初期応力のポテンシャル  $W^{(0)}$  の変分をあらわす。

初めに、ここで取扱う梁は 2 軸対称断面梁とし、その断面は変形後も変わらない ( $\epsilon_x = \epsilon_y =$

も、ラミナのヤング係数のばらつきを示す変動係数  $cv$  が大きくなるにつれ剛性は低下するが、この傾向は N 型と逆に梁せいとスパンとの比の減少にともない大きくなる。又、同図から次のような考察もできる。いま同一ヤング係数ラミナから成る集成梁を基準に、剛性の低下割合を 5% まで認めるものとして、 $h/L = 0.07$  の場合、N 型で  $cv = 11.5\%$  まで Z 型で  $cv = 2.6\%$  まで許される。

すなわち  $cv \leq 2.6\%$  であれば、ランダムにラミナを配置しても最大 5% の剛性低下をもたらすに過ぎない。しかし  $cv =$

$\gamma_{xy} = 0$ ) とする。この仮定のもとに梁の変位関数は図心  $O$  の変位成分  $u(z)$ ,  $v(z)$ ,  $w(z)$ ,  $\theta(z)$  を用いて (図 4.1 参照) 次のようにあらわされる<sup>55)~57)</sup>。

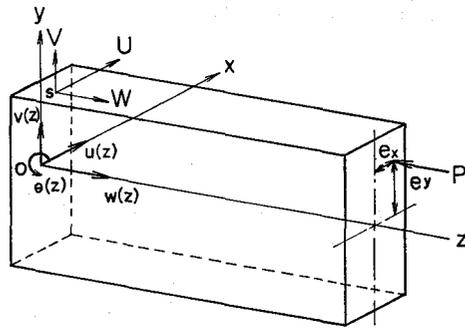


図 4.1 梁の座標および変位成分

$$\left. \begin{aligned} U &= u(z) - y\theta(z) \\ V &= v(z) + x\theta(z) \\ W &= w(z) - xu'(z) - yv'(z) + \theta'(z)\omega(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

ここに、 $U, V, W$  は梁の断面、任意の点  $S(x, y, z)$  における変位であり、 $\omega(x, y)$  は規準化された梁の Saint-Venant のゆがみ関係である。(4.2) 式からひずみ成分を求めると

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_z &= \frac{\partial W}{\partial z} = w'(z) - xu''(z) - yv''(z) + \theta''(z)\omega(x, y) \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} = \theta'(z) \left( \frac{\partial \omega(x, y)}{\partial x} - y \right) \\ \gamma_{zy} &= \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} = \theta'(z) \left( \frac{\partial \omega(x, y)}{\partial y} + x \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

よって梁の有するひずみエネルギーは

$$\begin{aligned} U_e &= \frac{1}{2} \iiint (\sigma_z \epsilon_z + \tau_{zx} \gamma_{zx} + \tau_{zy} \gamma_{zy}) \, dx dy dz \\ &= \frac{1}{2} \iiint \left[ E_z \{ w'(z) - xu''(z) - yv''(z) + \theta''(z)\omega(x, y) \}^2 \right. \\ &\quad \left. + G_{zx} \theta'(z)^2 \left\{ \left( \frac{\partial \omega(x, y)}{\partial x} - y \right)^2 + \beta \left( \frac{\partial \omega(x, y)}{\partial y} + x \right)^2 \right\} \right] dx dy dz \end{aligned} \quad (4.4)$$

ここに  $\beta = G_{zy}/G_{zx}$

ここで梁は 2 軸対称断面梁であることおよび  $\omega(x, y)$  が規準化されていることを利用すれば (4.4) 式は次のようになる。

$$\begin{aligned} U_e &= \frac{1}{2} \int_0^l [ E_z \{ A w'(z)^2 + I_{xx} u''(z)^2 + I_{yy} v''(z)^2 + I_\omega \theta''(z)^2 \\ &\quad - 2I_{\omega x} u''(z) \theta''(z) - 2I_{\omega y} v''(z) \theta''(z) \} + G_0 K_0 \theta'(z)^2 ] dz \end{aligned} \quad (4.5)$$

ここに

$$\begin{aligned} A &= \iint dx dy, \quad I_{xx} = \iint x^2 dx dy, \quad I_{yy} = \iint y^2 dx dy \\ I_\omega &= \iint \omega(x, y)^2 dx dy, \quad I_{\omega x} = \iint x \omega(x, y) dx dy, \quad I_{\omega y} = \iint y \omega(x, y) dx dy \end{aligned}$$

$$G_0K_0 = G_{zx} \iint \left\{ \left( \frac{\partial \omega(x, y)}{\partial x} - y \right)^2 + \beta \left( \frac{\partial \omega(x, y)}{\partial y} + x \right)^2 \right\} dx dy \quad (4.5a)$$

したがって  $U_e$  の変分  $\delta U_e$  は

$$\begin{aligned} \delta U_e = & \int_0^l E_z \{ A w'(z) \delta w'(z) + I_{xx} u''(z) \delta u''(z) + I_{yy} v''(z) \delta v''(z) \\ & + I_{\omega} \theta''(z) \delta \theta''(z) - I_{\omega x} \{ \theta''(z) \delta u''(z) + u''(z) \delta \theta''(z) \} \\ & - I_{\omega y} \{ \theta''(z) \delta v''(z) + v''(z) \delta \theta''(z) \} + G_0 K_0 \theta'(z) \delta \theta'(z) \} dz \end{aligned} \quad (4.6)$$

となる。

しかしながら(4.6)式の右辺すべてを考慮した座屈解析はきわめて複雑となり実用的でない。そこで高次の微量量である第5, 6項を省略し<sup>58)</sup>, かつ第1項が梁の軸方向一様伸縮の, 第2, 第3項がそれぞれ  $y$  軸,  $x$  軸まわりにおける曲げ問題の, 又第4, 7項が Saint-Venant の捩り問題のひずみエネルギーを与えることを考えれば,  $\delta U_e$  は次のようにあらわせる。

$$\begin{aligned} \delta U_e = & \int_0^l \{ E_{zz} A w'(z) \delta w'(z) + E_{zz} u''(z) \delta u''(z) \\ & + E_{zy} v''(z) \delta v''(z) + E_{zz} I_{\omega} \theta''(z) \delta \theta''(z) + G_0 K_0 \theta'(z) \delta \theta'(z) \} dz \end{aligned} \quad (4.7)$$

次に断面力(外力)として偏心軸力  $P$  と曲げモーメント  $M_x$ ,  $M_y$  およびせん断力  $V_x$ ,  $V_y$  を考える。

一方, 初期応力のポテンシャル  $W^{(0)}$  は次のようにあらわされる<sup>55)</sup>。

$$W^{(0)} = \iiint (\sigma_z^{(0)} \varepsilon_z^* + \tau_{zx}^{(0)} \gamma_{zx}^* + \tau_{zy}^{(0)} \gamma_{zy}^*) dx dy dz \quad (4.8)$$

ここに  $\varepsilon_z^*$ ,  $\gamma_{zx}^*$ ,  $\gamma_{zy}^*$  はひずみの非線形形部分であり, 実用的見地から  $\partial W / \partial z$  に関する項を省略して

$$\begin{aligned} \varepsilon_z^* &= \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right\} = \frac{1}{2} \{ \{ u'(z) - y \theta'(z) \}^2 + \{ v'(z) + x \theta'(z) \}^2 \} \\ \gamma_{zx}^* &= \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial z} = \theta(z) \{ v'(z) + x \theta'(z) \} \\ \gamma_{zy}^* &= \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial z} = -\theta(z) \{ u'(z) - y \theta'(z) \} \end{aligned}$$

したがって  $W^{(0)}$  は

$$\begin{aligned} W^{(0)} = & \frac{1}{2} \iiint \sigma_z^{(0)} \{ \{ u'(z) - y \theta'(z) \}^2 + \{ v'(z) + x \theta'(z) \}^2 \} dx dy dz \\ & + \iiint \{ \tau_{zx}^{(0)} \{ v'(z) + x \theta'(z) \} \theta(z) - \tau_{zy}^{(0)} \{ u'(z) - y \theta'(z) \} \theta(z) \} dx dy dz \\ = & \frac{1}{2} \iiint \{ \sigma_z^{(0)} \{ u'(z)^2 + v'(z)^2 \} + 2 \sigma_z^{(0)} x v'(z) \theta'(z) \\ & - 2 \sigma_z^{(0)} y u'(z) \theta'(z) + \sigma_z^{(0)} x^2 \theta'(z)^2 + \sigma_z^{(0)} y^2 \theta'(z)^2 \} dx dy dz \\ & + \iiint \{ \tau_{zx}^{(0)} v'(z) \theta(z) + \tau_{zx}^{(0)} x \theta(z) \theta'(z) - \tau_{zy}^{(0)} u'(z) \theta(z) \\ & + \tau_{zy}^{(0)} y \theta(z) \theta'(z) \} dx dy dz \end{aligned} \quad (4.9)$$

となる。

また、初期応力は次式で与えられる。

$$\sigma_z^{(0)} = E_z \varepsilon_z^{(0)}, \quad \tau_{zx}^{(0)} = G_{zx} \gamma_{zx}^{(0)}, \quad \tau_{zy}^{(0)} = G_{zy} \gamma_{zy}^{(0)} \quad (4.10)$$

ここに  $\varepsilon_z^{(0)}$ ,  $\gamma_{zx}^{(0)}$ ,  $\gamma_{zy}^{(0)}$  は、梁の座屈前変形における仮想仕事方程式を満足する変位成分  $u^{(0)}$ ,  $v^{(0)}$ ,  $w^{(0)}$ ,  $\theta^{(0)}$  から (4.2) 式を用いて定義されるひずみである。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_z^{(0)} &= \frac{\partial W}{\partial z} = w^{(0)'} - xu^{(0)''} - yv^{(0)''} \\ \gamma_{zx}^{(0)} &= \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} = -y\theta^{(0)'} \\ \gamma_{zy}^{(0)} &= \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} = x\theta^{(0)'} \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

ただし、外力として振りモーメントは考えていないので (4.2) 式における変位関数  $W(x, y, z)$  の右辺、第4項を省略している。

(4.11) 式を (4.10) 式に代入し、各初期応力の積分を行うと次のようになる<sup>55), 59)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} \iint \sigma_z^{(0)} dx dy &= E_{zz} A w^{(0)'} = P \\ \iint \sigma_z^{(0)} x dx dy &= -E_{zx} I_{xx} u^{(0)''} = -M_Y \\ \iint \sigma_z^{(0)} y dx dy &= -E_{zy} I_{yy} v^{(0)''} = -M_X \\ \iint \sigma_z^{(0)} x^2 dx dy &= \frac{P}{A} I_{xx} - \frac{M_Y}{I_{xx}} I_{30} + \frac{M_X}{I_{yy}} I_{21} \\ \iint \sigma_z^{(0)} y^2 dx dy &= \frac{P}{A} I_{yy} - \frac{M_Y}{I_{xx}} I_{12} - \frac{M_X}{I_{yy}} I_{03} \\ \iint \tau_{zx}^{(0)} dx dy &= V_x \\ \iint \tau_{zy}^{(0)} dx dy &= V_y \\ \iint \tau_{zx}^{(0)} x dx dy &= 0 \\ \iint \tau_{zy}^{(0)} y dx dy &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

ここに  $M_X$ ,  $M_Y$  は合曲げモーメントであり、軸力の偏心量を  $e_x$ ,  $e_y$  (図4.1参照) とすれば

$$\left. \begin{aligned} M_X &= M_x - P e_y \\ M_Y &= M_y + P e_x \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

となる。

なお  $I_{30}$ ,  $I_{21}$  などは  $I_{mn} = \iint x^m y^n dx dy$  で定義される。よって (4.12) 式を (4.9) 式に代入すれば  $W^{(0)}$  は次のように陽な形であらわされる。

$$\begin{aligned} W^{(0)} &= \int_0^l \left[ \frac{1}{2} P \{ u'(z)^2 + v'(z)^2 + r_0^2 \theta'(z)^2 \} - M_Y v'(z) \theta'(z) \right. \\ &\quad \left. - M_X u'(z) \theta'(z) + V_x v'(z) \theta(z) - V_y u'(z) \theta(z) \right] dz \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\text{ここに } r_0^2 = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{A}$$

さらに変分  $\delta W^{(0)}$  を求めると

$$\begin{aligned} \delta W^{(0)} = & \int_0^l \{ P \{ u'(z) \delta u'(z) + v'(z) \delta v'(z) + r_0^2 \theta'(z) \delta \theta'(z) \} \\ & - M_Y \{ \theta'(z) \delta v'(z) + v'(z) \delta \theta'(z) \} - M_X \{ \theta'(z) \delta u'(z) + u'(z) \delta \theta'(z) \} \\ & + V_x \{ \theta(z) \delta v'(z) + v'(z) \delta \theta(z) \} - V_y \{ \theta(z) \delta u'(z) + u'(z) \delta \theta(z) \} \} dz \quad (4.15) \end{aligned}$$

したがって、梁の弾性座屈を支配する仮想仕事方程式は (4.1), (4.6), (4.15) 式より次のようにあらわせる。

$$\begin{aligned} & \int_0^l \{ E_{zx} u''(z) \delta u''(z) + E_{zy} v''(z) \delta v''(z) + E_{zz} A w'(z) \delta w'(z) \\ & + E_{zz} I_0 \theta''(z) \delta \theta''(z) + G_0 K_0 \theta'(z) \delta \theta'(z) \} dz \\ & + \int_0^l \{ P \{ u'(z) \delta u'(z) + v'(z) \delta v'(z) + r_0^2 \theta'(z) \delta \theta'(z) \} \\ & - M_Y \{ \theta'(z) \delta v'(z) + v'(z) \delta \theta'(z) \} - M_X \{ \theta'(z) \delta u'(z) + u'(z) \delta \theta'(z) \} \\ & + V_x \{ \theta(z) \delta v'(z) + v'(z) \delta \theta(z) \} - V_y \{ \theta(z) \delta u'(z) + u'(z) \delta \theta(z) \} \} dz = 0 \quad (4.16) \end{aligned}$$

そこで、本章における横倒れ座屈の場合は、次のような仮想仕事方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & \int_0^l \{ E_{zx} u''(z) \delta u''(z) + E_{zz} I_0 \theta''(z) \delta \theta''(z) + G_0 K_0 \theta'(z) \delta \theta'(z) \} dz \\ & - \int_0^l \{ M_X \{ \theta'(z) \delta u'(z) + u'(z) \delta \theta'(z) \} + V_y \{ \theta(z) \delta u'(z) + u'(z) \delta \theta(z) \} \} dz = 0 \quad (4.17) \end{aligned}$$

ただし、 $M_X = M_x$  となるので以後は  $M_x$  と記述する。

ここで (4.17) 式を満足する梁要素の変位関数として、次のような  $z$  に関するべき級数をとる。

$$\left. \begin{aligned} u(z) &= [H][A^{-1}]\{u\} \\ \theta(z) &= [H][A^{-1}]\{\theta\} \end{aligned} \right\} \quad (4.18)$$

ここに

$$[H] = [1 \quad z \quad z^2 \quad z^3]$$

$$[A^{-1}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{l^2} & -\frac{2}{l} & \frac{3}{l^2} & -\frac{1}{l} \\ \frac{2}{l^2} & \frac{1}{l^2} & -\frac{2}{l^3} & \frac{1}{l^2} \end{pmatrix}$$

$$\{u\} = \{u_1 \quad u_1' \quad u_2 \quad u_2'\}^T$$

$$\{\theta\} = \{\theta_1 \quad \theta_1' \quad \theta_2 \quad \theta_2'\}^T$$

$l$  : 梁要素の長さ,

添字 1, 2 : 要素の左端, 右端を示す。

ところで、(4.17) 式の最初の積分項すなわちひずみエネルギーの変分  $\delta U_e$  より得られる剛

性マトリックス  $[k]$  は

$$[k] = \begin{pmatrix} [k_u] & 0 \\ 0 & [k_\theta] \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

ここに、 $[k_u]$  は  $y$  軸まわりの曲げに関する剛性マトリックス、 $[k_\theta]$  は  $z$  軸まわりの振りに関する剛性マトリックスであり、それぞれ次のようにあらわされる。

$$[k_u] = \begin{pmatrix} \frac{12E_{zz}I_{xx}}{l^3} & & & & \text{sym.} \\ \frac{6E_{zz}I_{xx}}{l^2} & \frac{4E_{zz}I_{xx}}{l} & & & \\ -\frac{12E_{zz}I_{xx}}{l^3} & -\frac{6E_{zz}I_{xx}}{l^2} & \frac{12E_{zz}I_{xx}}{l^3} & & \\ \frac{6E_{zz}I_{xx}}{l^2} & \frac{2E_{zz}I_{xx}}{l} & -\frac{6E_{zz}I_{xx}}{l^2} & \frac{4E_{zz}I_{xx}}{l} & \end{pmatrix}$$

$$[k_\theta] = \begin{pmatrix} \left(\frac{12E_{zz}I_\omega}{l^3} + \frac{6G_0K_0}{5l}\right) & & & & \text{sym.} \\ \left(\frac{6E_{zz}I_\omega}{l^2} + \frac{G_0K_0}{10}\right) & \left(\frac{4E_{zz}I_\omega}{l} + \frac{2G_0K_0l}{15}\right) & & & \\ -\left(\frac{12E_{zz}I_\omega}{l^3} + \frac{6G_0K_0}{5l}\right) & -\left(\frac{6E_{zz}I_\omega}{l^2} - \frac{G_0K_0}{10}\right) & \left(\frac{12E_{zz}I_\omega}{l^3} - \frac{6G_0K_0}{5l}\right) & & \\ \left(\frac{6E_{zz}I_\omega}{l^2} - \frac{G_0K_0}{10}\right) & \left(\frac{2E_{zz}I_\omega}{l} - \frac{G_0K_0l}{30}\right) & -\left(\frac{6E_{zz}I_\omega}{l^2} - \frac{G_0K_0}{10}\right) & \left(\frac{4E_{zz}I_\omega}{l} - \frac{2G_0K_0l}{15}\right) & \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

次に、同じく (4.17) 式における初期応力のポテンシャルの変分に (4.18) 式を代入すると

$$\begin{aligned} \delta W^{(0)} = & -\int_0^l (\{\delta u\}^T [A^{-1}]^T [H']^T M_x [H'] [A^{-1}] \{\theta\} \\ & + \{\delta \theta\}^T [A^{-1}]^T [H']^T M_x [H'] [A^{-1}] \{u\} \\ & + \{\delta u\}^T [A^{-1}]^T [H']^T V_y [H] [A^{-1}] \{\theta\} \\ & + \{\delta \theta\}^T [A^{-1}]^T [H] V_y [H'] [A^{-1}] \{u\}) dz \end{aligned} \quad (4.21)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} [k_G^{Mx}] &= \int_0^l [A^{-1}]^T [H']^T M_x [H'] [A^{-1}] dz \\ [k_G^{Vy}] &= \int_0^l [A^{-1}]^T [H] V_y [H'] [A^{-1}] dz \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

とすれば

$$\begin{aligned} \delta W^{(0)} = & -(\{\delta u\}^T [k_G^{Mx}] \{\theta\} + \{\delta \theta\}^T [k_G^{Mx}] \{u\} \\ & + \{\delta u\}^T [k_G^{Vy}] \{\theta\} + \{\delta \theta\}^T [k_G^{Vy}] \{u\}) \end{aligned} \quad (4.23)$$

となる。

そこで、(4.23) 式に Castigliano の定理を適用して

$$\left. \begin{aligned} \{f_u\} &= \frac{\partial W^{(0)}}{\partial \{u\}} = -([k_G^{Mx}] + [k_G^{Vy}]^T) \{\theta\} \\ \{f_\theta\} &= \frac{\partial W^{(0)}}{\partial \{\theta\}} = -([k_G^{Mx}] + [k_G^{Vy}]) \{u\} \end{aligned} \right\} \quad (4.24)$$

したがって、初期応力マトリックス  $[k_G]$  は次式で与えられる。

$$[k_G] = \begin{pmatrix} 0 & -[k_G^{Mx}] - [k_G^{Vy}]^T \\ -[k_G^{Mx}] - [k_G^{Vy}] & 0 \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

よって、(4.19) 式の剛性マトリックスと (4.25) 式の初期応力マトリックスを加え合わせ、さらに梁全体について合成すると、次のような木材梁の横倒れ座屈特有方程式が得られる。

$$\begin{vmatrix} [K_u] & -[K_G^{Mx}] - [K_G^{Vy}]^T \\ -[K_G^{Mx}] - [K_G^{Vy}] & [K_\theta] \end{vmatrix} = 0 \quad (4.26)$$

ここで、 $[K_u] = \sum_e [k_u]$ 、 $[K_\theta] = \sum_e [k_\theta]$ 、 $[K_G^{Mx}] = \sum_e [k_G^{Mx}]$ 、 $[K_G^{Vy}] = \sum_e [k_G^{Vy}]$  であり、 $\sum_e$  は各梁要素の総和を示す。

ここにおいて問題は (4.26) 式における最小固有値を求めることにより解決する。

#### 4.1.2 $G_0K_0$ および $I_w$ について

(4.20) 式におけるねじり剛性  $G_0K_0$  とゆがみ関数  $\omega(x, y)$  に関する断面 2 次モーメント  $I_w$  について、ある限られたいくつかの断面においては解析解が得られているが<sup>126), 127)</sup>、その他については求められていない。

そこで、川井らは<sup>60), 61)</sup> それらの問題を解決する方法として、有限要素法による定式化を行っているが、ここではさらに直交異方性材料および集成梁のような断面にも適用できるようにこの定式化の拡大を試みた。

解析にあたり、断面を図 4.2 に示すような三角柱要素の集合体にモデル化する。

いま、軸方向の変位関数として (4.27) 式を用いれば

$$w_i(x, y) = e_0 + e_1x + e_2y \quad (4.27)$$

$G_0K_0$ 、 $I_w$  は次のようにあらわされる (詳細は巻末の付録 1. を参照)。

$$\left. \begin{aligned} G_0K_0 &= [K_{\alpha\alpha}] - [K_{\alpha\omega}] [K_{\omega\omega}^{-1}] [K_{\omega\alpha}] \\ I_w &= [K_{\omega\alpha}]^T [K_{\omega\omega}^{-1}]^T [K_{I\omega}] [K_{\omega\omega}^{-1}] [K_{\omega\alpha}] \end{aligned} \right\} \quad (4.28)$$

ここに  $[K_{\omega\omega}] = \sum_e [k_{\omega\omega}]$ 、 $[K_{\omega\alpha}] = \sum_e [k_{\omega\alpha}]$ 、 $[K_{\alpha\omega}] = \sum_e [k_{\alpha\omega}]$ 、 $[K_{\alpha\alpha}] = \sum_e [k_{\alpha\alpha}]$  であり  $[k_{\omega\omega}]$ 、 $[k_{\omega\alpha}]$ 、 $[k_{\alpha\omega}]$ 、 $[k_{\alpha\alpha}]$  はそれぞれ次のようにあらわされる。

なお  $\sum_e$  は各三角柱要素の総和を示す。

$$[k_{\omega\omega}] = G_{zxe} \begin{pmatrix} \frac{\beta x_{kj}^2 + y_{jk}^2}{4 \Delta} & \frac{\beta x_{ik}x_{kj} + y_{jk}y_{ki}}{4 \Delta} & \frac{\beta x_{kj}x_{ji} + y_{ij}y_{jk}}{4 \Delta} \\ & \frac{\beta x_{ik}^2 + y_{ki}^2}{4 \Delta} & \frac{\beta x_{ik}x_{ji} + y_{ij}y_{ki}}{4 \Delta} \\ \text{sym.} & & \frac{\beta x_{ji}^2 + y_{ij}^2}{4 \Delta} \end{pmatrix}$$

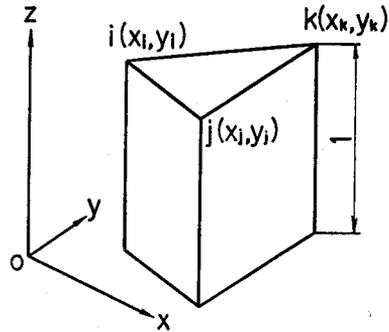


図 4.2 三角柱要素

$$\begin{aligned}
 [k_{aa}] &= \frac{G_{zxe}}{2} [\beta x_G x_{kj} - y_G y_{jk}, \beta x_G x_{ik} - y_G y_{ki}, \beta x_G x_{ji} - y_G y_{ij}] \\
 [k_{aa}] &= \Delta G_{zxe} [(\beta(x_i G^2 + x_j G^2 + x_k G^2) + y_i G^2 + y_j G^2 + y_k G^2) / 12 + \beta x_G^2 + y_G^2] \\
 [k_{aa}] &= [k_{aa}]^T
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

ここに

$$x_{mn} = x_m - x_n, \quad y_{mn} = y_m - y_n, \quad x_{nG} = x_n - x_G, \quad y_{nG} = y_n - y_G$$

$$x_G = \frac{x_i + x_j + x_k}{3}, \quad y_G = \frac{y_i + y_j + y_k}{3}$$

$$\Delta = \frac{x_j y_k - x_k y_j + x_k y_i - x_i y_k + x_i y_j - x_j y_i}{2}$$

$$\beta = G_{zye} / G_{zxe}$$

$G_{zye}, G_{zxe}$  : 要素 $e$ におけるせん断弾性係数

#### 4.2 実験結果(山本)による検証

山本<sup>54)</sup>らは自由端面中心に集中荷重を受ける長方形断面片持梁の横倒れ座屈について詳細な実験を行い、鋼構造の梁の設計に用いられる計算式が木材梁にも適用できることを報告している。

表4.1はその時実験に用いた梁の寸法、弾性定数等である。本解析法の妥当性を確認するため、山本らによる実測値と本計算値を示したのが表4.2である。

両者は比較的良好に一致していることから(4.26)式により、深い木材梁の横座屈荷重を予

表4.1 試験梁の寸法および弾性定数

梁の 名称	幅 b (mm)	せい h (mm)	スパン L (mm)	M. O. E. E (kg/mm <sup>2</sup> )	M. O. R. G (kg/mm <sup>2</sup> )	G <sub>0</sub> K <sub>0</sub> (kg. mm <sup>2</sup> )	I <sub>w</sub> (mm <sup>6</sup> )
K-1	7.70	15.50	300	1465	85	1.167 × 10 <sup>5</sup>	5.431 × 10 <sup>3</sup>
K-2	7.70	15.50	500	1465	85	1.167 × 10 <sup>5</sup>	5.431 × 10 <sup>3</sup>
K-3	14.95	30.05	1200	800	104	2.025 × 10 <sup>6</sup>	2.890 × 10 <sup>5</sup>
K-4	14.95	30.25	1200	1075	103	2.024 × 10 <sup>6</sup>	2.979 × 10 <sup>5</sup>
K-5	7.70	19.60	500	1075	100	1.883 × 10 <sup>5</sup>	1.471 × 10 <sup>4</sup>
K-6	7.70	15.50	1000	1465	97	1.332 × 10 <sup>5</sup>	5.431 × 10 <sup>3</sup>
K-7	7.70	19.60	1000	1070	100	1.883 × 10 <sup>5</sup>	1.471 × 10 <sup>4</sup>
K-8	7.70	25.10	1000	1490	85	2.191 × 10 <sup>5</sup>	3.736 × 10 <sup>4</sup>
K-9	7.70	30.40	1000	895	76	2.478 × 10 <sup>5</sup>	7.304 × 10 <sup>4</sup>
K-10	7.60	50.30	1000	955	92	5.308 × 10 <sup>5</sup>	3.643 × 10 <sup>5</sup>
K-11	7.65	70.15	1000	1140	109	9.703 × 10 <sup>5</sup>	1.046 × 10 <sup>6</sup>
K-12	7.70	110.00	1000	1020	100	1.691 × 10 <sup>6</sup>	4.217 × 10 <sup>6</sup>
A-1	10.00	24.00	1000	610	86	4.265 × 10 <sup>5</sup>	5.565 × 10 <sup>4</sup>
A-2	12.40	52.60	1000	775	97	2.320 × 10 <sup>6</sup>	1.625 × 10 <sup>6</sup>
A-3	9.40	105.10	1000	845	88	2.323 × 10 <sup>6</sup>	6.617 × 10 <sup>6</sup>
B-1	11.80	39.00	700	1135	104	1.504 × 10 <sup>6</sup>	5.085 × 10 <sup>5</sup>
B-2	11.80	39.00	1100	1135	104	1.504 × 10 <sup>6</sup>	5.085 × 10 <sup>5</sup>
B-3	10.60	79.50	1100	1225	110	2.800 × 10 <sup>6</sup>	3.970 × 10 <sup>6</sup>

G<sub>0</sub>K<sub>0</sub> および I<sub>w</sub> の計算には、要素数120および節点数77を使用した。

表4.2 横座屈荷重

梁の 名称	$P_{EXP}$ (kg)	$P_{ORT}$ (kg)	$P_{CRF}$ (kg)	$\frac{P_{EXP}}{P_{CRF}}$	$\frac{P_{ORT}}{P_{CRF}}$
K-1	11.91	15.30	15.04	0.79	1.02
K-2	5.15	5.45	5.31	0.97	1.03
K-3	8.65	11.02	10.57	0.82	1.04
K-4	11.05	13.07	12.31	0.90	1.06
K-5	5.95	6.84	6.50	0.92	1.05
K-6	1.10	1.36	1.40	0.79	0.97
K-7	1.49	1.71	1.60	0.93	1.07
K-8	2.70	2.45	2.33	1.16	1.05
K-9	2.00	2.21	2.12	0.94	1.04
K-10	3.90	4.17	4.10	0.95	1.02
K-11	7.00	7.08	7.37	0.95	0.96
K-12	11.00	10.19	12.03	0.91	0.85
A-1	3.25	3.14	2.98	1.09	1.05
A-2	16.50	16.88	16.39	1.01	1.03
A-3	16.80	15.06	16.86	0.99	0.89
B-1	25.00	27.26	26.30	0.95	1.04
B-2	11.50	11.04	10.45	1.10	1.06
B-3	19.50	17.94	18.73	1.04	0.96

$P_{EXP}$ : 実測値,  $P_{ORT}$ : 計算値,  $P_{CRF}$ : (4.26)式による計算値。

測し得ることがわかった。

#### 4.3 横断面設計の限界条件について

深い梁を設計する場合、横座屈に対し安全であるためには横座屈荷重が最大許容荷重より大きくなくてはならない。

そこで、この条件を満足するような矩形断面木材梁の断面寸法とスパンとの関係を検討してみた。

ただし、本研究では最大許容荷重を制限たわみから得られる荷重すなわちスパンの1/300のたわみから求められる荷重と定義した<sup>41)</sup>。

なお、たわみについてはせん断応力によるものも考慮しなくてはならないので、これに充分適応できる4節点けた要素<sup>37), 38)</sup>を用いた。

図4.3は中央集中荷重を受ける両端固定梁において、 $P_{cr}/P_{300}$ と $h/b$ の関係を示す。ここに $P_{cr}$ : 横座屈荷重,  $P_{300}$ : 最大許容荷重,  $h$ : 梁せい,  $b$ : 梁幅,  $L$ : スパンである。図において、 $P_{cr}/P_{300} \geq 1$ であれば横座屈に対し安全である。

一方、実際の構造物では集中荷重よりも等分布荷重を受ける場合が多い。

そこで、近似的に等分布荷重とみなし得る5等分4点荷重<sup>129)</sup>を受ける両端固定梁について示したのが図4.4である。

以上、横断面設計の限界条件に関する図を作成したが、ここで注意を要することがある。本解析法では荷重は断面の中立軸に作用するものとしている。しかしながら実際の構造物では荷重は梁の上面に作用し、又梁には捩れや元わん曲等があり、座屈荷重値はここで得られたもの

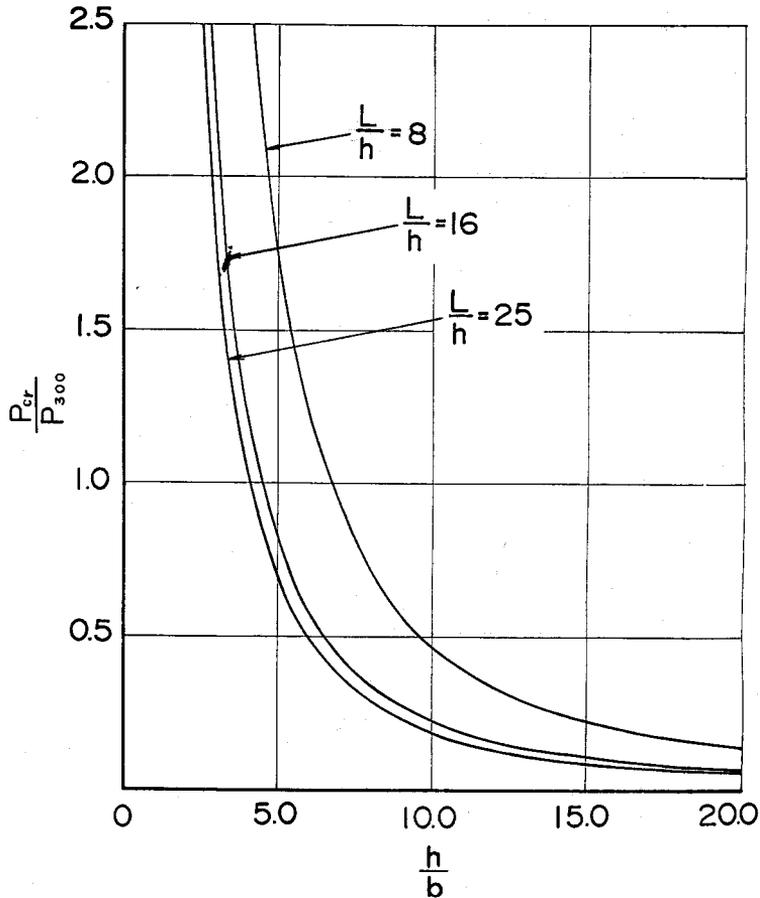


図 4.3  $P_{cr}/P_{300}$  と  $h/b$  との関係。

荷重条件：中央集中荷重  
境界条件：両端固定

より低くなることが考えられる。なおこれらの点については今後の検討課題としたい。

#### 4.4 本解析法の適用性について

梁の弾性座屈解析を有限要素法で行うにあたり、すでに川井<sup>55)</sup>は鋼構造における座屈特有方程式を陽な形で誘導し、大変よい結果を得ている。

そこで、本研究では川井の手法を木材梁に適用して横倒れ座屈に関する特有方程式を求めたものである。

得られた座屈荷重値は山本<sup>54)</sup>らによる実測値と比較的によく一致し、本解析法の適用性を確認した。

さらに、長方形断面木材梁の横安定性について断面寸法とスパンとの関係を示す図を作成し設計における1つの資料を提供した。

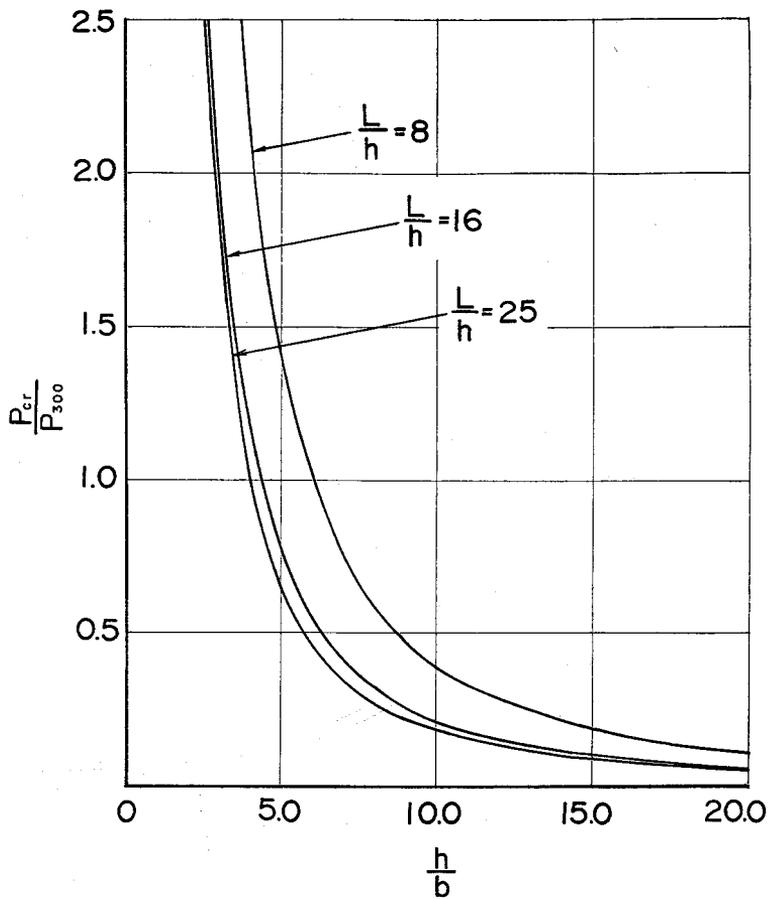


図 4.4  $P_{cr}/P_{300}$  と  $h/b$  との関係.

荷重条件：5等分4点荷重  
境界条件：両端固定

## 第5章 合板箱型梁の剛性と耐力

### 5.1 解析方法

#### 5.1.1 剛性方程式 (シアウェブを持つ梁と考えた場合)

Martin<sup>90)</sup>はI型断面梁について、その剛性マトリックスを求めているが、同様の手法で箱型梁の剛性方程式を求める。

図5.1(a)はフランジとウェブで構成された梁要素を示す。ただし、梁せいは一定でx軸に関し対称な場合である。

フランジは軸力 $P$ を、ウェブはせん断応力 $\tau$ を受けるものとし節点力、節点変位を同図(b)のように定義すれば次の関係式を得る。

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= X_1' = -P + \frac{ql}{2} \\ Y_1 &= Y_1' = -\frac{qh}{2} \\ X_2 &= X_2' = P + \frac{ql}{2} \\ Y_2 &= Y_2' = \frac{qh}{2} \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

(5.1) 式を変形すると

$$\begin{Bmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{2l}{h} \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{Bmatrix} \quad (5.2)$$

この状態で、図5.1の要素が右端で固定された片持梁と仮定する。

梁は  $x$  軸に関して対称であるから、ひずみエネルギーは上フランジとウェブの半分を考えて次のようにあらわされる。

$$U = \frac{P^2 l}{2A_f E_f} + \frac{q^2 h l}{4G_w t} \quad (5.3)$$

ここに

$A_f$  : フランジの断面積

$E_f$  : フランジのヤング係数

$G_w$  : ウェブのせん断弾性係数

$t$  : ウェブの厚さ

(5.1) 式より  $P, q$  を節点力であらわし  
(5.3) 式に代入すれば

$$U = \frac{1}{2A_f E_f} \left( X_1 + \frac{l}{h} Y_1 \right)^2 + \frac{Y_1^2 l}{G_w A_w} \quad (5.4)$$

ここに  $A_w = ht$

(5.4) 式に Castigliano の定理を適用すれば、節点変位は次のように得られる。

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{l}{A_f E_f} X_1 + \frac{l^2}{A_f E_f h} Y_1 \\ v_1 &= \frac{l^2}{A_f E_f h} X_1 + \frac{l^3}{A_f E_f h^2} Y_1 + \frac{2l}{G_w A_w} Y_1 \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

(5.5) 式を節点力に関して解けば

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A_f E_f}{l} + \frac{G_w A_w l}{2h^2} & -\frac{G_w A_w}{2h} \\ -\frac{G_w A_w}{2h} & \frac{G_w A_w}{2l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix} \quad (5.6)$$

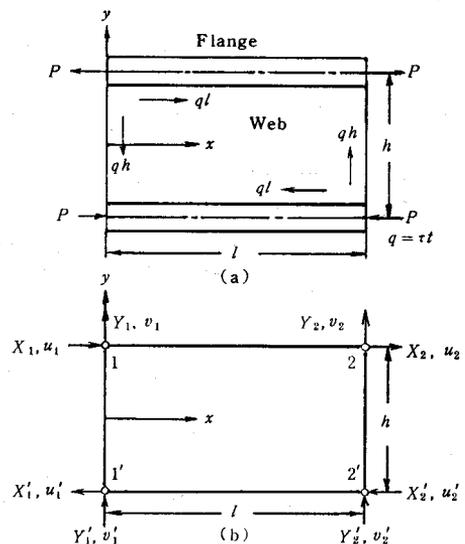


図5.1 フランジとウェブで構成された梁要素における節点力と節点変位

(5.6) 式を (5.2) 式に代入して

$$\begin{Bmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{A_f E_f}{l} + \frac{G_w A_w l}{2h^2} & -\frac{G_w A_w}{2h} \\ \frac{G_w A_w}{2h} & -\frac{A_w G_w}{2l} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix} \quad (5.7)$$

次に、同要素が左端で固定された片持梁と考え、同様の計算を行えば節点力  $X_2, Y_2$  の変位  $u_2, v_2$  に関する方程式が次のように得られる。

$$\begin{Bmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A_f E_f}{l} + \frac{G_w A_w l}{2h^2} & \frac{G_w A_w}{2h} \\ \frac{G_w A_w}{2h} & \frac{G_w A_w}{2l} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad (5.8)$$

(5.6), (5.7), (5.8) 式より要素の剛性方程式を求めると

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A_f E_f}{l} + \frac{G_w A_w l}{2h^2} & -\frac{G_w A_w}{2h} & -\frac{A_f E_f}{l} + \frac{G_w A_w l}{2h^2} & \frac{G_w A_w}{2h} \\ -\frac{G_w A_w}{2h} & \frac{G_w A_w}{2l} & -\frac{G_w A_w}{2h} & -\frac{G_w A_w}{2l} \\ -\frac{A_f E_f}{l} + \frac{G_w A_w l}{2h^2} & -\frac{G_w A_w}{2h} & \frac{A_f E_f}{l} + \frac{G_w A_w l}{2h^2} & \frac{G_w A_w}{2h} \\ \frac{G_w A_w}{2h} & -\frac{G_w A_w}{2l} & \frac{G_w A_w}{2h} & \frac{G_w A_w}{2l} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad (5.9)$$

(5.9) 式を、フランジの剛性マトリックスとウェブのそれとの連成と考え、さらに箱型梁のウェブが同一材料から成っているものとすれば、箱型梁の剛性方程式は次のように得られる。

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A_f E_f}{l} + \frac{G_w A_w l}{h^2} & -\frac{G_w A_w}{h} & -\frac{A_f E_f}{l} + \frac{G_w A_w l}{h^2} & \frac{G_w A_w}{h} \\ -\frac{G_w A_w}{h} & \frac{G_w A_w}{l} & -\frac{G_w A_w}{h} & -\frac{G_w A_w}{l} \\ -\frac{A_f E_f}{l} + \frac{G_w A_w l}{h^2} & -\frac{G_w A_w}{h} & \frac{A_f E_f}{l} + \frac{G_w A_w l}{h^2} & \frac{G_w A_w}{h} \\ \frac{G_w A_w}{h} & -\frac{G_w A_w}{l} & \frac{G_w A_w}{h} & \frac{G_w A_w}{l} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad (5.10)$$

### 5.1.2 剛性方程式 (膜要素と棒要素から成る構造物と考えた場合)

フランジ, ウェブの受ける力は 5.1.1 節と同様に考え, フランジを棒要素<sup>33), 91)</sup>で, ウェブを三角形要素<sup>30), 32)</sup>で分割した。

すなわち, 用いた棒要素の変位関数は

$$u = a_0 + a_1 x \quad (5.11)$$

又, 三角形要素の変位関数は

$$\left. \begin{aligned} u &= b_0 + b_1x + b_2y \\ v &= b_3 + b_4x + b_5y \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

である。

棒要素の剛性マトリックス $[k_p]$ と、三角形要素のそれ $[k_t]$ を重ね合わせると箱型梁の要素剛性マトリックスが得られ、剛性方程式は次のようになる。

$$\{f\} = [k] \{u\} \quad (5.13)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} \{f\} &= \{X_i, Y_i, X_j, Y_j, X_k, Y_k\}^T \\ \{u\} &= \{u_i, v_i, u_j, v_j, u_k, v_k\}^T \end{aligned} \right\} \quad (5.14)$$

であり、 $X_i, Y_i, \dots, Y_k$ は三角形要素各頂点 $i, j, k$ における $x$ 方向、 $y$ 方向の節点力を、 $u_i, v_i, \dots, v_k$ は同じく $x$ 方向、 $y$ 方向の節点変位を示す。

ここで、棒要素の剛性マトリックス $[k_p]$ を座標変換することにより、変断面箱型梁の解析にも適用できる。

なお、 $[k_p]$ と $[k_t]$ の誘導については Zienkiewicz,<sup>80),85)</sup>その他の著書<sup>83),88),90),91)</sup>に記述されているので省略した。

## 5.2 実験的検討

### 5.2.1 実験方法

試験体は等断面および単テーパ箱型梁とし、その形状を図5.2に、構成部材の寸法、弾性定数をそれぞれ表5.1、表5.2に示す。

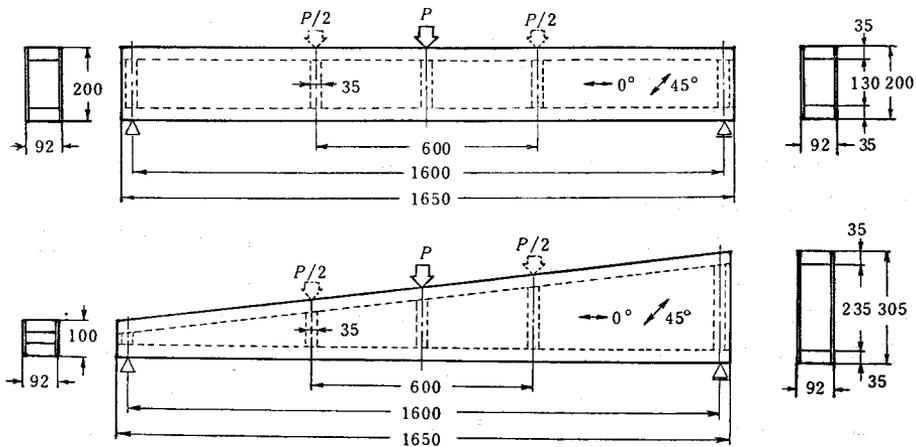


図5.2 試験体の形状および寸法

(単位: mm)

表5.1 箱型梁構成部材の寸法

箱型梁の形状	ウェブ合板の表繊維方向 $\theta$	梁の幅 $B(\text{mm})$	フランジ幅 $b(\text{mm})$	フランジ高さ $h_f(\text{mm})$	ウェブ厚さ $t(\text{mm})$
等断面箱型梁	0°	92.0	76.4	35.0	7.8
	45°	92.6	77.0	35.0	7.8
単テーパー箱型梁	0°	94.0	78.4	35.0	7.8
	45°	93.9	78.3	35.0	7.8

なお、両箱型梁におけるウェブの面積は等しくしてある。

フランジにはエゾマツによる4層集成梁を用いており、そのせん断弾性係数  $G_f$  は測定したのではなく、 $G_f = E_f/20$ より概略的に求めたものである<sup>40)</sup>。

ウェブにはカプール 5ply 7.5mm厚構造用合板を用いた。

$E_{w-0^\circ}$  は構造用合板表繊維方向引張りヤング係数であるが使用材料そのものの値ではなく、

表5.2 箱型梁構成部材の弾性定数

箱型梁の形状	ウ ェ ブ				フ ラ ン ジ			ス チ フ ナ		
	ウェブ合板の表繊維方向 $\theta$	比 重 $r_w$	ヤング係数 $E_w$ ( $10^8\text{kg/cm}^2$ )	せん断弾性係数 $G_w$ ( $10^8\text{kg/cm}^2$ )	比 重 $r_f$	ヤング係数 $E_f$ ( $10^8\text{kg/cm}^2$ )		せん断弾性係数 $G_f$ ( $10^8\text{kg/cm}^2$ )	比 重 $r_s$	ヤング係数 $E_s$ ( $10^8\text{kg/cm}^2$ )
						Top	Bottom			
等断面箱型梁	0°	0.77	94.6	6.53	0.45	131.3	132.0	6.6	0.45	125.2
	45°	0.76	23.1	32.0	0.44	125.3	130.3	6.4	0.44	128.0
単テーパー箱型梁	0°	0.77	94.6	6.53	0.39	104.3	106.2	5.3	0.43	119.9
	45°	0.74	23.1	32.0	0.39	99.6	102.2	5.1	0.46	143.3

ウェブ：5ply7.5mm厚カプール構造用合板

フランジ、スチフナ：エゾマツ4層集成材

残材について測定した曲げヤング係数から、合板の構成比と  $E_L = 30 E_T$  の関係から得られたものである。又  $E_{w-45^\circ}$ 、 $G_{w-45^\circ}$  はポアソン比を0.2として座標変換式より求めた<sup>40)</sup>。

なお、ウェブとフランジの接着であるが1つはウェブ合板の表繊維方向がスパン方向と一致するよう、もう1つは45°になるよう行った。

接着方法は尿素樹脂接着剤（プライアミン J-402、硬化剤として塩安 0.6%添加）をフランジの両面に1接着層あたり3g/100cm<sup>2</sup>塗布し、1本/4cmの割合で長さ24mmの釘を用いて圧縮した。

荷重方法はスパンを160cmとし、中央集中荷重および3分点2点荷重で行った。

たわみはスパン中央で、1/100mmダイヤルゲージを用いて測定した。

なお荷重点、支点にはフランジと同材のスチフナを入れウェブの座屈防止に使用した。

### 5.2.2 結果と考察

曲げ剛性試験結果を表5.3に示す。

表 5.3 曲げ剛性試験結果

箱型梁の形状	荷重方法	ウェブ合板の表繊維方向 $\theta$	梁中央のたわみ ( $10^{-2}\text{mm}/100\text{kg}$ )				$\frac{\delta_e}{\delta_A}$	$\frac{\delta_e}{\delta_B}$	$\frac{\delta_s}{\delta_A}$	$\frac{\delta_s}{\delta_B}$
			$\delta_A$	$\delta_B$	$\delta_S$	$\delta_e$				
等断面箱型梁	中央集中荷重	0°	42.6	40.3	36.4	38.9	0.91	0.97	0.85	0.90
		45°	24.2	23.5	24.4	24.1	0.99	1.03	1.01	1.04
	3分点2点荷重	0°	30.2	28.3	25.6	30.6	1.01	1.08	0.85	0.90
		45°	18.8	18.1	18.5	18.4	0.98	1.02	0.98	1.02
単テーパ-箱型梁	中央集中荷重	0°	—	43.7	—	40.1	—	0.92	—	—
		45°	—	28.4	—	29.9	—	1.05	—	—
	3分点2点荷重	0°	—	32.1	—	30.0	—	0.93	—	—
		45°	—	22.8	—	24.3	—	1.07	—	—

$\delta_A$ : (5.10)式による計算値  
 $\delta_B$ : (5.13)式による計算値  
 $\delta_S$ : 沢田の式による計算値  
 $\delta_e$ : 実測値

$\delta_S$ は等断面箱型梁において沢田<sup>65)</sup>により誘導された式を用いて得た厳密解である。

梁中央のたわみは実測値あるいは厳密解と比較的によく一致しており（単テーパ-箱型梁については（5.13）式と実測値の比較のみ）本解析法の実用性を確認した。

そこで、次に両面テーパ-箱型梁について数値解析的立場から検討を行った。

計算に用いた梁の形状、寸法を図 5.3 に示す。

なお、ウェブの面積は図 5.2 における等断面のそれと等しく、フランジ、ウェブ、スチフナの寸法、弾性定数は表 5.1、表 5.2 における等断面箱型梁、 $\theta = 0^\circ$  のものを用いた。

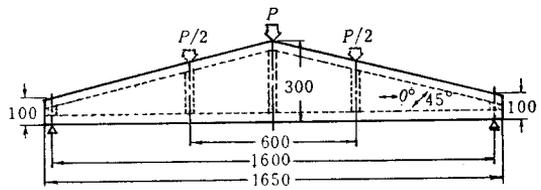


図 5.3 両面テーパ-箱型梁の形状および寸法  
 梁幅：92mm

表 5.4 両面テーパ-箱型梁におけるたわみの計算値

箱型梁の形状	荷重方法	ウェブ合板の表繊維方向 $\theta$	梁中央のたわみ ( $10^{-2}\text{mm}/100\text{kg}$ ) $\delta_{DT}$	$\frac{\delta_{DT}}{\delta_{B-45}}$
両面テーパ-箱型梁	中央集中荷重	0°	20.2	0.878
		45°	14.8	0.643
	3分点2点荷重	0°	16.9	0.949
		45°	12.9	0.725
	等分布荷重	0°	13.5	0.981
		45°	10.1	0.739

$\delta_{B-45}$ : 等断面箱型梁においてウェブに用いた合板の表繊維方向がスパン方向に対し45° ( $\theta = 45^\circ$ ) の場合のたわみ。

表5.4は梁中央のたわみ $\delta_{DT}$ を示す。

ここに、 $\delta_{B-45^\circ}$ は等断面箱型梁において、ウェブに用いた合板の表繊維方向が、スパン方向に対し $45^\circ$ の場合のたわみ((5.13)式で計算)である。

$\delta_{DT}$ と $\delta_{B-45^\circ}$ の比をもって剛性の増加割合を検討する。

これより、両面テーパ箱型梁では $\theta=0^\circ$ (ウェブ合板の表繊維方向がスパン方向と一致)で数%から10%前後、又 $\theta=45^\circ$ で30~40%、等断面箱型梁( $\theta=45^\circ$ )に比べ剛性の増がみられる。すなわち、上記の点および美的観点からも、今後両面テーパ箱型梁の使用を大いに期待したいところである。

図5.4は繰返し荷重をかけ破壊に至るまでの荷重-たわみ曲線を示す。

ただし、荷重は中央集中荷重である。

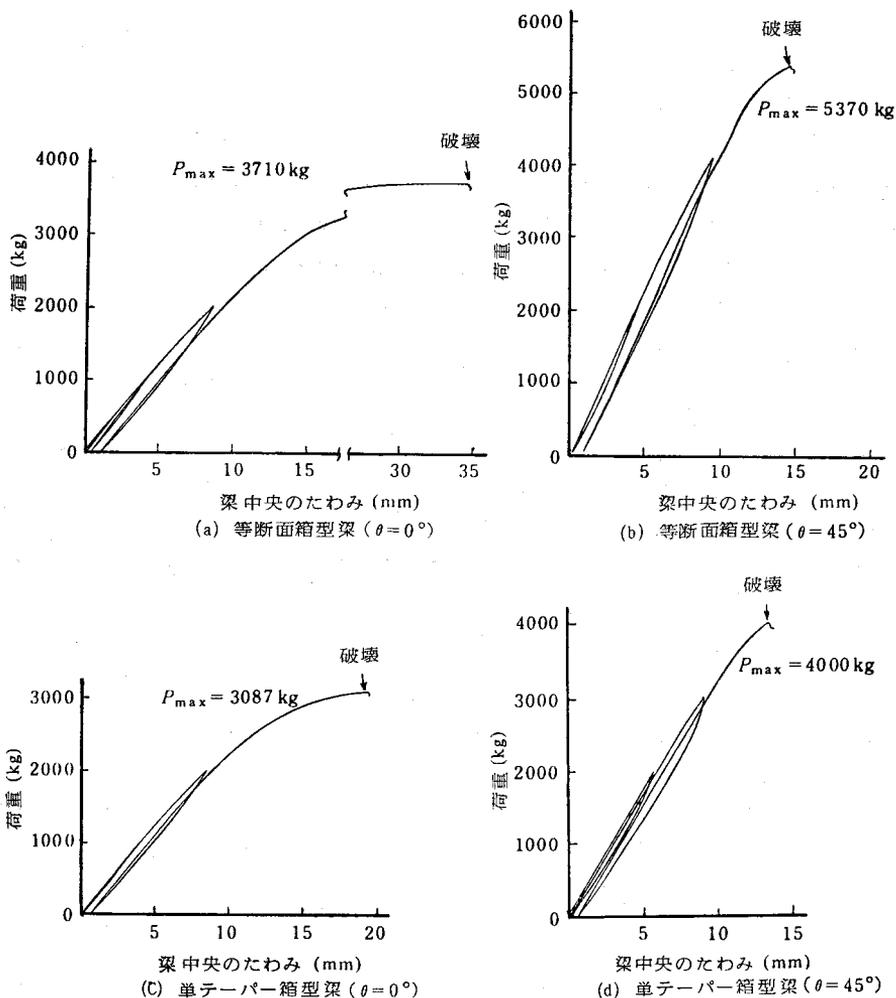


図5.4 荷重-たわみ曲線

荷重：中央集中荷重

表 5.5 は破壊試験結果を示したものである。

ウェブ合板の表繊維方向がスパン方向に一致している ( $\theta = 0^\circ$ ) 場合と  $\theta = 45^\circ$  の場合では異った荷重-たわみ曲線を描き、又最大荷重  $P_{max}$  は等断面・ $\theta = 45^\circ$  の箱型梁が最高で 5370kg であった。

表 5.5 曲げ破壊試験結果

箱型梁の形状	ウェブ合板の表繊維方向 $\theta$	最大荷重 $P_{max}$ (kg)	最大曲げモーメント $M_{max}$ (t.m)	曲げ強さ $\sigma^b$ (kg/cm <sup>2</sup> )	破壊状態
等断面箱型梁	0°	3710	1.484	373	ウェブ合板のせん断破壊およびローリングシア
	45°	5370	2.148	536	下部フランジ材の引張り破壊
単テーパ-箱型梁	0°	3087	1.235	305	ウェブ合板のせん断破壊およびローリングシアを伴う接着層せん断
	45°	4000	1.600	394	下部フランジ材の引張り破壊

荷重：中央集中荷重  
スパン：1600mm

この場合、下部フランジが引張り破壊を起こし、ウェブの合板がバットジョイントされているスパン中央で折れた。したがって、引張り側フランジに高グレードのものを用いるか、もしくはウェブに一枚ものの合板を用いれば、さらに耐力を増したものと思われる。

ウェブ合板の表繊維方向がスパン方向に一致している ( $\theta = 0^\circ$ ) 場合は、 $\theta = 45^\circ$  のものに比べて等断面、単テーパ-とも剛性の低下と同時に耐力も落ちており、従来の研究結果<sup>66)</sup>を再確認した。

### 5.3 本解析法の適用性について

フランジは軸力を、ウェブはせん断力を受けるものとして、1つはシアウェブを持つ梁と考えた場合、もう1つは膜要素と棒要素から成る構造物と考えた場合、これら2つのケースについて箱型梁の剛性方程式を求めた。

この仮定によれば、フランジは軸方向の伸び縮みしかできないから、梁は曲率を生ずることなく変形しなくてはならない。

それゆえ実際の変形様式と異なるわけであるが、計算によるたわみは実測値あるいは厳密解と比較的よく一致しており本解析法の適用性を確認した。

さらに、数値解析の立場から両面テーパ-箱型梁について検討したところ、剛性の大きい  $\theta = 45^\circ$  の等断面箱型梁よりも顕著な剛性増を示した。したがって、上記の点および美的観点からも今後この種の箱型梁が大いに使用されることを期待したい。

又、耐力についての実験的検討では等断面、単テーパ-箱型梁とも、合板の表繊維方向がスパン方向に  $45^\circ$  の場合が  $0^\circ$  のものに比べ剛性、耐力の増加をもたらす、従来の研究結果を再確認した。