

## 直交異方性板の曲げに関するパーソナルコンピュータ教材 (第1報)

—— 剛性マトリックスについて ——

辻野 哲 司\*・谷 藤 仁\*・吉 村 康 介\*\*

(1996年12月6日受理)

Tetsuji TSUJINO\*, Hitoshi TANIFUJI\* and Kousuke YOSHIMURA\*\*

Personal Computer Material for Bending of Orthotropic Rectangular Plates I.  
Stiffness matrix on bending of orthotropic rectangular plates.

### 1. 緒 言

建築, 土木分野において, 合板又は木材は部材として多く用いられている。これら部材は直交異方性材料と看做され, 剛性, 強さは, その繊維方向とスパン方向とのなす角度に大きく依存する。従って, この種の材料が曲げを受ける矩形板として有効に利用されるには, それらの曲げ挙動に関する解析が必要であり, これまでに多くの研究 (例えば文献<sup>1)~7)</sup>) がなされている。

一方, 学校教育においても, 木材, 又は合板は実習用板材として, 広く用いられており, これら材料の異方性を子供達に理解させることは意義あると思われる。

それ故, 本研究では, この種の材料の曲げ剛性に関してではあるが, 視覚的に理解し得るパーソナルコンピュータ教材の作成を目的とした。

ここにおいて, まず, 直交異方性板の曲げ問題解析に関するプログラムを確立しておかなければならない。これには, 任意の形状, 荷重条件, 境界条件に容易に対応し得る有限要素法が適当と考えられるが, これまでに発表されているものは, 弾性軸が座標軸に一致している場合に限られている<sup>6,7)</sup>。しかしながら, 教材としては両者が傾きを持っている場合の挙動も不可欠であることから, 第1段階として, 弾性軸が座標軸に対し, 任意の角度を持つ場合の剛性マトリックスを陽な形で求めることを試みたので, ここに報告する次第である。

---

\* 岩手大学教育学部

\*\* 岐阜県恵那西中学校

## 2. 剛性マトリックス

使用する要素は、図. 1 に示すような長方形板曲げ要素とし、各節点における自由度は、 $z$ 軸方向変位 $w$ と、 $x$ 軸まわりの回転角 $\theta_x$ 、 $y$ 軸廻りの回転角 $\theta_y$ を与える。

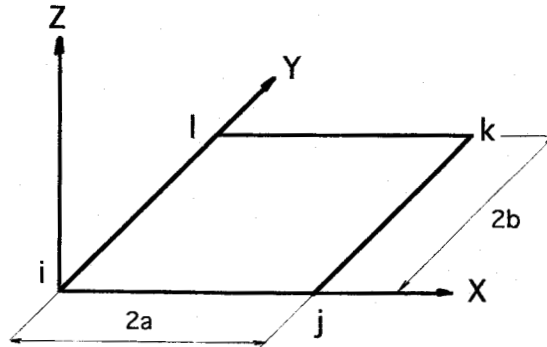


図1  $x, y$ 座標系における長方形板曲げ要素

従って要素は12の自由度を持ち、変位関数として、次のような多項式を選ぶことができる。

$$w(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3 \quad (1)$$

$$\text{又, } \theta_x = -\frac{\partial w}{\partial y}, \quad \theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad (2)$$

である。

ところで、(1)式から得られる剛性マトリックスは、陽な形とならない。そこで、図. 2 のように座標を無次元化して、

$$\xi = \frac{x}{2a}, \quad \eta = \frac{y}{2b} \quad (3)$$

を採用する。

そうすると、 $\xi - \eta$ 座標系では、変位関数 $w$ は次式で与えられる。

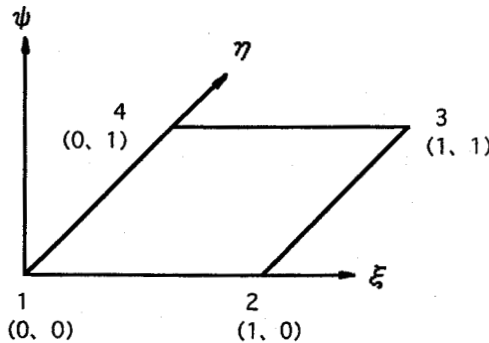


図2 無次元化した座標系における長方形板曲げ要素

$$w(\xi, \eta) = \phi^T \alpha \quad (4)$$

ここに

$$\phi^T = \begin{bmatrix} 1 & 2a\xi & 2b\eta & 4a^2\xi^2 & 4ab\xi\eta & 4b^2\eta^2 & 8a^3\xi^3 & 8a^2b\xi^2\eta \\ & 8ab^2\xi\eta^2 & 8b^3\eta^3 & 16a^3b\xi^3\eta & 16ab^3\xi\eta^3 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{2b} \frac{\partial w}{\partial \eta} = g^T \alpha \quad (7)$$

$$\theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1}{2a} \frac{\partial w}{\partial \xi} = -h^T \alpha \quad (8)$$

ここに

$$g^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 2a\xi & 4b\eta & 0 & 4a^2\xi^2 & 8ab\xi\eta & 12b^2\eta^2 & 8a^3\xi^3 & 24ab^2\xi\eta^2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$h^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 4a\xi & 2b\eta & 0 & 12a^2\xi^2 & 8ab\xi\eta & 4b^2\eta^2 & 0 & 24a^2b\xi^2\eta & 8b^3\eta^3 \end{bmatrix} \quad (10)$$

従って、(4)、(7)、(8)式に、図. 2 の節点 1 ~ 4 の座標を順次代入すると、節点変位ベクトル  $d$  は、次のように表すことができる。

$$d = A\alpha \quad (11)$$

ここに

$$d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix}, \quad d_i = \begin{bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix}_i, \quad i=1,2,3 \quad (12)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2a & 0 & 4a^2 & 0 & 0 & 8a^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2a & 0 & 0 & 4a^2 & 0 & 0 & 8a^3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -4a & 0 & 0 & -12a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2a & 2b & 4a^2 & 4ab & 4b^2 & 8a^3 & 8a^2b & 8ab^2 & 8b^3 & 16a^3b & 16ab^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2a & 4b & 0 & 4a^2 & 8ab & 12b^2 & 8a^3 & 24ab^2 \\ 0 & -1 & 0 & -4a & -2b & 0 & -12a^2 & -8ab & -4b^2 & 0 & -24a^2b & -8b^3 \\ 1 & 0 & 2b & 0 & 0 & 4b^2 & 0 & 0 & 0 & 8b^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4b & 0 & 0 & 0 & 12b^2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2b & 0 & 0 & 0 & -4b^2 & 0 & 0 & -8b^3 \end{bmatrix} \quad (13)$$

ここで、Aの逆マトリックスを

$$B=A^{-1} \quad (14)$$

とおけば、(4)式の変位関数wは、節点変位ベクトルdによって、

$$w=\phi^T B d \quad (15)$$

と表される。

ここに、

$$B = \frac{1}{8a^3b^3} \begin{pmatrix} 8a^3b^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8a^3b^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8a^3b^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6ab^3 & 0 & 8a^2b^3 & 6ab^3 & 0 & 4a^2b^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2a^2b^2 & -4a^2b^3 & 4a^3b^2 & 2a^2b^2 & 4a^2b^3 & 0 & -2a^2b^2 & 0 & 0 & 2a^2b^2 & 0 & -4a^3b^2 \\ -6a^3b & -8a^3b^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6a^3b & -4a^3b^2 & 0 \\ 2b^3 & 0 & -2ab^3 & -2b^3 & 0 & -2ab^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3ab^2 & 0 & -4a^2b^2 & -3ab^2 & 0 & -2a^2b^2 & 3ab^2 & 0 & 2a^2b^2 & -3ab^2 & 0 & 4a^2b^2 \\ 3a^2b & 4a^2b^2 & 0 & -3a^2b & -4a^2b^2 & 0 & 3a^2b & -2a^2b^2 & 0 & -3a^2b & 2a^2b^2 & 0 \\ 2a^3 & 2a^3b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2a^3 & 2a^3b & 0 \\ -b^2 & 0 & ab^2 & b^2 & 0 & ab^2 & -b^2 & 0 & -ab^2 & b^2 & 0 & -ab^2 \\ -a^2 & -a^2b & 0 & a^2 & a^2b & 0 & -a^2 & a^2b & 0 & a^2 & -a^2b & 0 \end{pmatrix} \quad (16)$$

次に、節点変位d対応する節点力fは、仮想仕事の原理、又は歪エネルギー法により求めることができるが、本報告では後者で行うことにする。

ここで、直交異方性板の応力-歪関係式<sup>8)</sup>は、

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{16} \\ & d_{22} & d_{26} \\ syw. & & d_{66} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (17)$$

ここに、

$$\begin{aligned} d_{11} &= r^4 c_{11} + 2r^2 s^2 c_{12} + s^4 c_{22} + 4r^2 s^2 c_{66} \\ d_{12} &= r^2 s^2 c_{11} + (r^4 + s^4) c_{12} + r^2 s^2 c_{22} - 4r^2 s^2 c_{66} \\ d_{16} &= -r^3 s c_{11} + (r^3 s - sr^3) c_{12} + rs^3 c_{22} + 2(r^3 s - rs^3) c_{66} \\ d_{22} &= s^4 c_{11} + 2r^2 s^2 c_{12} + r^4 c_{22} + 4r^2 s^2 c_{66} \\ d_{26} &= -rs^3 c_{11} + (rs^3 - r^3 s) c_{12} + r^3 s c_{22} + 2(rs^3 - r^3 s) c_{66} \\ d_{66} &= r^2 s^2 c_{11} - 2r^2 s^2 c_{12} + r^2 s^2 c_{22} + (r^2 - s^2)^2 c_{66} \\ c_{11} &= \frac{E_1}{v}, \quad c_{12} = \frac{\mu_{12} E_2}{V}, \quad c_{22} = \frac{E_2}{V} \\ c_{66} &= G_{12}, \quad v = \frac{E_1 - \mu_{12}^2 E_2}{E_1}, \quad r = \cos \beta, \quad s = \sin \beta \end{aligned} \quad (18)$$

$E_1$ ：直交異方性板の繊維方向ヤング係数、 $E_2$ ：同繊維直角方向ヤング係数、 $\mu_{12}$ ：同ポアソン比、 $G_{12}$ ：同剪断弾性係数、 $\beta$ ：材料の繊維方向とスパン方向のなす角度である。今、板が曲げを受けた場合、その内部に貯えられた歪エネルギーUは、 $x, y$ 座標系において、

次式で与えられる。

$$U = \frac{1}{2} \iiint (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) \, dx dy dz \quad (19)$$

(19)式に(17)式を代入すると

$$U = \frac{1}{2} \iiint (d_{11} \epsilon_x^2 + d_{22} \epsilon_y^2 + 2d_{12} \epsilon_x \epsilon_y + d_{66} \gamma_{xy}^2 + 2d_{16} \epsilon_x \gamma_{xy} + 2d_{26} \epsilon_y \gamma_{xy}) \, dx dy dz \quad (20)$$

一方、歪は

$$\epsilon_x = -Z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \epsilon_y = -Z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \gamma_{xy} = -2Z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (21)$$

で与えられるから、(21)式を(20)式に代入して、

$$U = \frac{t^3}{24} \iint \left[ d_{11} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + d_{22} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2d_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 4d_{66} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + 4d_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + 4d_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] dx dy \quad (22)$$

を得る。

ところで、

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{1}{4a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{4b^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{1}{4ab} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \quad (23)$$

であるので、これを用いて、(22)式のUを $\xi - \eta$ 座標系に変換する。即ち、(23)式を(22)式に代入して、

$$U = \frac{t^3}{24} \int_0^1 \int_0^1 \left( \frac{bd_{11}}{4a^3} A_\xi^2 + \frac{ad_{22}}{4b^3} A_\eta^2 + \frac{d_{12}}{2ab} A_\xi A_\eta + \frac{d_{66}}{ab} A_{\xi\eta}^2 + \frac{d_{16}}{a^2} A_\xi A_{\xi\eta} + \frac{d_{26}}{b^2} A_\eta A_{\xi\eta} \right) d\xi d\eta \quad (24)$$

ここに、

$$A_\xi = \frac{\partial w^2}{\partial \xi^2}, \quad A_\eta = \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}, \quad A_{\xi\eta} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \quad (25)$$

以上で、歪エネルギーが求まったので、次に(20)式で与えられるカスチリアーノの定理を適用して、要素剛性マトリックスの各成分を求める。

$$k_{i,j} = \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \frac{\partial U}{\partial q_j} \right) \quad (26)$$

$$q_i, q_j (i=1, 2, \dots, 12, j=1, 2, \dots, 12)$$

ところで、

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial q_i} = \frac{t^3}{24} \int_0^1 \int_0^1 & \left\{ \frac{bd_{11}}{4a^3} 2A_\xi \frac{\partial A_\xi}{\partial q_i} + \frac{ad_{22}}{4b^3} 2A_\eta \frac{\partial A_\eta}{\partial q_i} \right. \\ & + \frac{d_{12}}{2ab} \left( \frac{\partial A_\xi}{\partial q_i} A_\eta + A_\xi \frac{\partial A_\eta}{\partial q_i} \right) + \frac{d_{66}}{ab} 2A_{\xi\eta} \frac{\partial A_{\xi\eta}}{\partial q_i} \\ & \left. + \frac{d_{16}}{a^2} \left( \frac{\partial A_\xi}{\partial q_i} A_{\xi\eta} + A_\xi \frac{\partial A_{\xi\eta}}{\partial q_i} \right) + \frac{d_{26}}{b^2} \left( \frac{\partial A_\eta}{\partial q_i} A_{\xi\eta} + A_\eta \frac{\partial A_{\xi\eta}}{\partial q_i} \right) \right\} d\xi d\eta \end{aligned} \quad (27)$$

であるから、(26)式は次のようになる。

$$k_{i,j} = \frac{t^3}{24} \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \frac{bd_{11}}{2a^3} \left( \frac{\partial A_\xi}{\partial q_i} \frac{\partial A_\xi}{\partial q_j} + A_\xi \frac{\partial^2 A_\xi}{\partial q_i \partial q_j} \right) \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{ad_{22}}{2b^3} \left( \frac{\partial A_\gamma}{\partial q_i} \frac{\partial A_\gamma}{\partial q_i} + A_\gamma \frac{\partial^2 A_\gamma}{\partial q_i \partial q_i} \right) \\
& + \frac{d_{12}}{2ab} \left( \frac{\partial^2 A_\varepsilon}{\partial q_i \partial q_j} A_\gamma + \frac{\partial A_\varepsilon}{\partial q_i} \frac{\partial A_\gamma}{\partial q_j} + \frac{\partial A_\varepsilon}{\partial q_i} \frac{\partial A_\gamma}{\partial q_j} + A_\varepsilon \frac{\partial^2 A_\gamma}{\partial q_i \partial q_j} \right) \\
& + \frac{2d_{66}}{ab} \left( \frac{\partial A_{\varepsilon\gamma}}{\partial q_i} \frac{\partial A_{\varepsilon\gamma}}{\partial q_j} + A_{\varepsilon\gamma} \frac{\partial^2 A_{\varepsilon\gamma}}{\partial q_i \partial q_j} \right) \\
& + \frac{d_{16}}{a^2} \left( \frac{\partial^2 A_\varepsilon}{\partial q_i \partial q_i} A_{\varepsilon\gamma} + \frac{\partial A_\varepsilon}{\partial q_i} \frac{\partial A_{\varepsilon\gamma}}{\partial q_i} + \frac{\partial A_\varepsilon}{\partial q_i} \frac{\partial A_{\varepsilon\gamma}}{\partial q_i} + A_\varepsilon \frac{\partial^2 A_{\varepsilon\gamma}}{\partial q_i \partial q_i} \right) \\
& + \frac{d_{26}}{b^2} \left( \frac{\partial^2 A_\gamma}{\partial q_i \partial q_i} A_{\varepsilon\gamma} + \frac{\partial A_\gamma}{\partial q_i} \frac{\partial A_{\varepsilon\gamma}}{\partial q_i} + \frac{\partial A_\gamma}{\partial q_i} \frac{\partial A_{\varepsilon\gamma}}{\partial q_i} + A_\gamma \frac{\partial^2 A_{\varepsilon\gamma}}{\partial q_i \partial q_i} \right) d\xi d\eta \quad (28)
\end{aligned}$$

さらに,

$A_\varepsilon, A_\gamma, A_{\varepsilon\gamma}$ は $q_i, q_j$ の1次結合であるから,

$$\frac{\partial^2 A_\varepsilon}{\partial q_i \partial q_i} = 0, \quad \frac{\partial^2 A_\gamma}{\partial q_i \partial q_i} = 0, \quad \frac{\partial^2 A_{\varepsilon\gamma}}{\partial q_i \partial q_i} = 0 \quad (29)$$

従って, (28)式は次のようになる。

$$\begin{aligned}
k_{1,j} = \frac{t^3}{24} \iint_{0^1}^1 & \left\{ \frac{b_{11}}{2a^3} \frac{\partial A_\varepsilon}{\partial q_i} \frac{\partial A_\varepsilon}{\partial q_i} + \frac{ad_{22}}{2b^3} \frac{\partial A_\gamma}{\partial q_i} \frac{\partial A_\gamma}{\partial q_i} \right. \\
& + \frac{2d_{66}}{ab} \frac{\partial A_{\varepsilon\gamma}}{\partial q_i} \frac{\partial A_{\varepsilon\gamma}}{\partial q_j} + \frac{d_{12}}{2ab} \left( \frac{\partial A_\varepsilon}{\partial q_i} \frac{\partial A_\gamma}{\partial q_i} + \frac{\partial A_\varepsilon}{\partial q_i} \frac{\partial A_\gamma}{\partial q_j} \right) \\
& + \frac{d_{16}}{a^2} \left( \frac{\partial A_\varepsilon}{\partial q_i} \frac{\partial A_{\varepsilon\gamma}}{\partial q_i} + \frac{\partial A_\varepsilon}{\partial q_i} \frac{\partial A_{\varepsilon\gamma}}{\partial q_i} \right) \\
& \left. + \frac{d_{26}}{b^2} \left( \frac{\partial A_\gamma}{\partial q_i} \frac{\partial A_{\varepsilon\gamma}}{\partial q_i} + \frac{\partial A_\gamma}{\partial q_i} \frac{\partial A_{\varepsilon\gamma}}{\partial q_i} \right) \right\} d\xi d\eta \quad (30)
\end{aligned}$$

また,  $A_\varepsilon, A_\gamma, A_{\varepsilon\gamma}$ は(15), (25)から

$$\begin{aligned}
A_\varepsilon = & (-6+12\xi+6\eta-12\xi\eta)w_1 + (6-12\xi-6\eta+12\xi\eta)w_2 \\
& + (6\eta-12\xi\eta)w_3 + (-6\eta+12\xi\eta)w_4 \\
& + (8a-12a\xi-8a\eta+12a\xi\eta)\theta_{\mu 1} + (4a-12a\xi-4a\eta+12a\xi\eta)\theta_{\nu 2} \\
& + (4a\eta-12a\xi\eta)\theta_{\nu 3} + (8a\eta-12a\xi\eta)\theta_{\nu 4} \quad (31)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_\gamma = & (-6+6\xi+12\eta-12\xi\eta)w_1 + (-6\xi+12\xi\eta)w_2 + (6\eta-12\xi\eta)w_3 \\
& + (6-6\xi-12\eta+12\xi\eta)w_4 + (-8b+8b\xi+12b\eta-12b\xi\eta)\theta_{x 1} \\
& + (-8b\xi+12b\xi\eta)\theta_{x 2} + (-4b\xi+12b\xi\eta)\theta_{x 3} + (-4b+4b\xi+12b\eta-12b\xi\eta)\theta_{x 4} \quad (32)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{\varepsilon\gamma} = & (-1+6\xi+6\eta-6\xi^2-6\eta^2)w_1 + (-1-6\xi-6\eta+6\xi^2+6\eta^2)w_2 \\
& + (-1+6\xi+6\eta-6\xi^2-6\eta^2)w_3 + (-1-6\xi-6\eta+6\xi^2+6\eta^2)w_4 \\
& + (-2b+8b\eta-6b\eta^2)\theta_{x 1} + (2b-8b\eta+6b\eta^2)\theta_{x 2} + (-4b\eta+6b\eta^2)\theta_{x 3} \\
& + (4b\eta-6b\eta^2)\theta_{x 4} + (2a-8a\xi+6a\xi^2)\theta_{\mu 1} + (-4a\xi+6a\xi^2)\theta_{\nu 2} \\
& + (4a\xi-6a\xi^2)\theta_{\nu 3} + (-2a+8a\xi-6a\xi^2)\theta_{\nu 4} \quad (33)
\end{aligned}$$

よって, (30)~(33)式から要素剛性マトリックスの成分は, 次のように得られる。

$$\begin{aligned}
k_{1,1} &= \frac{t^3}{24} \left( \frac{2bd_{11}}{a^3} + \frac{2ad_{22}}{b^3} + \frac{14d_{66}}{5ab} + \frac{d_{12}}{ab} \right) \\
k_{1,2} = k_{2,1} &= \frac{t^3}{24} \left( \frac{2ad_{22}}{b^2} + \frac{2d_{66}}{5a} + \frac{d_{12}}{a} \right) \\
k_{1,3} = k_{3,1} &= \frac{t^3}{24} \left( -\frac{2bd_{11}}{a^2} - \frac{2d_{66}}{5b} - \frac{d_{12}}{b} \right)
\end{aligned}$$

$$k_{1.4} = k_{4.1} = \frac{t^3}{24} \left( -\frac{2bd_{11}}{a^3} + \frac{ad_{22}}{b^3} - \frac{14d_{66}}{5ab} - \frac{d_{12}}{ab} \right)$$

$$k_{1.5} = k_{5.1} = \frac{t^3}{24} \left( \frac{ad_{22}}{b^2} - \frac{2d_{66}}{5a} - \frac{d_{12}}{a} - \frac{2d_{26}}{b} \right)$$

$$k_{1.6} = k_{6.1} = \frac{t^3}{24} \left( -\frac{2bd_{11}}{a^2} - \frac{2d_{66}}{5b} \right)$$

$$k_{1.7} = k_{7.1} = \frac{t^3}{24} \left( -\frac{bd_{11}}{a^3} - \frac{ad_{22}}{b^3} + \frac{14d_{66}}{5ab} + \frac{d_{12}}{ab} \right)$$

$$k_{1.8} = k_{8.1} = \frac{t^3}{24} \left( \frac{ad_{22}}{b^2} - \frac{2d_{66}}{5a} + \frac{2d_{26}}{b} \right)$$

$$k_{1.9} = k_{9.1} = \frac{t^3}{24} \left( -\frac{bd_{11}}{a^2} + \frac{2d_{66}}{5b} - \frac{2d_{16}}{a} \right)$$

$$k_{1.10} = k_{10.1} = \frac{t^3}{24} \left( \frac{bd_{11}}{a^3} - \frac{2ad_{22}}{b^3} - \frac{14d_{66}}{5ab} - \frac{d_{12}}{ab} \right)$$

$$k_{1.11} = k_{11.1} = \frac{t^3}{24} \left( \frac{2ad_{22}}{b^2} + \frac{2d_{66}}{5a} \right)$$

$$k_{1.12} = k_{12.1} = \frac{t^3}{24} \left( -\frac{bd_{11}}{a^2} + \frac{2d_{66}}{5b} + \frac{d_{12}}{b} + \frac{2d_{16}}{a} \right)$$

$$k_{2.2} = \frac{t^3}{24} \left( \frac{8ad_{22}}{3b} + \frac{16bd_{66}}{15a} + 2d_{26} \right)$$

$$k_{2.3} = k_{3.2} = \frac{t^3}{24} \left( -2d_{12} - \frac{bd_{16}}{3a} - \frac{ad_{26}}{3b} \right)$$

$$k_{2.4} = k_{4.2} = \frac{t^3}{24} \left( \frac{ad_{22}}{b^2} - \frac{2d_{66}}{5a} - \frac{d_{12}}{a} + \frac{2d_{26}}{b} \right)$$

$$k_{2.5} = k_{5.2} = \frac{t^3}{24} \left( \frac{4ad_{22}}{3b} - \frac{16bd_{66}}{15a} \right)$$

$$k_{2.6} = k_{6.2} = \frac{t^3}{24} \left( \frac{bd_{16}}{3a} + \frac{ad_{26}}{3b} \right)$$

$$k_{2.7} = k_{7.2} = \frac{t^3}{24} \left( -\frac{ad_{22}}{b^2} + \frac{2d_{66}}{5a} - \frac{2d_{26}}{b} \right)$$

$$k_{2.8} = k_{8.2} = \frac{t^3}{24} \left( \frac{2ad_{22}}{3b} + \frac{4bd_{66}}{15a} + 2d_{26} \right)$$

$$k_{2.9} = k_{9.2} = \frac{t^3}{24} \left( -\frac{bd_{16}}{3a} - \frac{ad_{26}}{3b} \right)$$

$$k_{2.10} = k_{10.2} = \frac{t^3}{24} \left( -\frac{2ad_{22}}{b^2} - \frac{2d_{66}}{5a} \right)$$

$$k_{2.11} = k_{11.2} = \frac{t^3}{24} \left( \frac{4ad_{22}}{3b} - \frac{4bd_{66}}{15a} \right)$$

$$k_{2.12} = k_{12.2} = \frac{t^3}{24} \left( \frac{bd_{16}}{3a} + \frac{ad_{26}}{3b} \right)$$

$$k_{3.3} = \frac{t^3}{24} \left( \frac{8bd_{11}}{3a} + \frac{16ad_{66}}{15b} + 2d_{16} \right)$$

$$k_{3.4} = k_{4.3} = \frac{t^3}{24} \left( \frac{2bd_{11}}{a^2} + \frac{2d_{66}}{5b} \right)$$

$$k_{3.5} = k_{5.3} = \frac{t^3}{24} \left( \frac{bd_{16}}{3a} + \frac{ad_{26}}{3b} \right)$$

$$k_{3.6} = k_{6.3} = \frac{t^3}{24} \left( \frac{4bd_{11}}{3a} - \frac{4ad_{66}}{15b} \right)$$

$$k_{3.7} = k_{7.3} = \frac{t^3}{24} \left( \frac{bd_{11}}{a^2} - \frac{2d_{66}}{5b} + \frac{2d_{16}}{a} \right)$$

$$k_{3.8} = k_{8.3} = \frac{t^3}{24} \left( -\frac{bd_{16}}{3a} - \frac{ad_{26}}{3b} \right)$$

$$k_{3.9} = k_{9.3} = \frac{t^3}{24} \left( \frac{2bd_{11}}{3a} + \frac{4ad_{66}}{15b} + 2d_{16} \right)$$

(34)

$$k_{3,10} = k_{10,3} = \frac{t^3}{24} \left( -\frac{bd_{11}}{a^2} + \frac{2d_{66}}{5b} + \frac{d_{12}}{b} - \frac{2d_{16}}{a} \right)$$

$$k_{3,11} = k_{11,3} = \frac{t^3}{24} \left( \frac{bd_{16}}{3a} + \frac{ad_{26}}{3b} \right)$$

$$k_{3,12} = k_{12,3} = \frac{t^3}{24} \left( \frac{4bd_{11}}{3a} - \frac{16ad_{66}}{15b} \right)$$

$$k_{4,4} = \frac{t^3}{24} \left( \frac{2bd_{11}}{a^3} + \frac{2ad_{22}}{b^3} + \frac{14d_{66}}{5ab} + \frac{d_{12}}{ab} \right)$$

$$k_{4,5} = k_{5,4} = \frac{t^3}{24} \left( \frac{2ad_{22}}{b^2} + \frac{2d_{66}}{5a} + \frac{d_{12}}{a} \right)$$

$$k_{4,6} = k_{6,4} = \frac{t^3}{24} \left( \frac{2bd_{11}}{a^2} + \frac{2d_{66}}{5b} + \frac{d_{12}}{b} \right)$$

$$k_{4,7} = k_{7,4} = \frac{t^3}{24} \left( \frac{bd_{11}}{a^3} - \frac{2ad_{22}}{b^3} - \frac{14d_{66}}{5ab} - \frac{d_{12}}{ab} \right)$$

$$k_{4,8} = k_{8,4} = \frac{t^3}{24} \left( \frac{2ad_{22}}{b^2} + \frac{2d_{66}}{5a} \right)$$

$$k_{4,9} = k_{9,4} = \frac{t^3}{24} \left( \frac{bd_{11}}{a^2} - \frac{2d_{66}}{5b} - \frac{d_{12}}{b} + \frac{2d_{16}}{a} \right)$$

$$k_{4,10} = k_{10,4} = \frac{t^3}{24} \left( -\frac{bd_{11}}{a^3} - \frac{ad_{22}}{b^3} + \frac{14d_{66}}{5ab} + \frac{d_{12}}{ab} \right)$$

$$k_{4,11} = k_{11,4} = \frac{t^3}{24} \left( \frac{ad_{22}}{b^2} - \frac{2d_{66}}{5a} - \frac{2d_{26}}{b} \right)$$

$$k_{4,12} = k_{12,4} = \frac{t^3}{24} \left( \frac{bd_{11}}{a^2} - \frac{2d_{66}}{5b} - \frac{2d_{16}}{a} \right)$$

$$k_{5,5} = \frac{t^3}{24} \left( \frac{8ad_{22}}{3b} + \frac{16bd_{66}}{15a} - 2d_{26} \right)$$

$$k_{5,6} = k_{6,5} = \frac{t^3}{24} \left( 2d_{12} - \frac{bd_{16}}{3a} - \frac{ad_{26}}{3b} \right)$$

$$k_{5,7} = k_{7,5} = \frac{t^3}{24} \left( -\frac{2ad_{22}}{b^2} - \frac{2d_{66}}{5a} \right)$$

$$k_{5,8} = k_{8,5} = \frac{t^3}{24} \left( \frac{4ad_{22}}{3a} - \frac{4bd_{66}}{15a} \right)$$

$$k_{5,9} = k_{9,5} = \frac{t^3}{24} \left( \frac{bd_{16}}{3a} + \frac{ad_{26}}{3b} \right)$$

$$k_{5,10} = k_{10,5} = \frac{t^3}{24} \left( -\frac{ad_{22}}{b^2} + \frac{2d_{66}}{5a} + \frac{2d_{26}}{b} \right)$$

$$k_{5,11} = k_{11,5} = \frac{t^3}{24} \left( \frac{2ad_{22}}{3b} + \frac{4bd_{66}}{15a} - 2d_{26} \right)$$

$$k_{5,12} = k_{12,5} = \frac{t^3}{24} \left( -\frac{bd_{16}}{3a} - \frac{ad_{26}}{3b} \right)$$

$$k_{6,6} = \frac{t^3}{24} \left( \frac{8bd_{11}}{3a} + \frac{16ad_{66}}{15b} - 2d_{16} \right)$$

$$k_{6,7} = k_{7,6} = \frac{t^3}{24} \left( \frac{bd_{11}}{a^2} - \frac{2d_{66}}{5b} - \frac{d_{12}}{b} - \frac{2d_{16}}{a} \right)$$

$$k_{6,8} = k_{8,6} = \frac{t^3}{24} \left( \frac{bd_{16}}{3a} + \frac{ad_{26}}{3b} \right)$$

$$k_{6,9} = k_{9,6} = \frac{t^3}{24} \left( \frac{4bd_{11}}{3a} - \frac{16ad_{66}}{15b} \right)$$

$$k_{6,10} = k_{10,6} = \frac{t^3}{24} \left( -\frac{bd_{11}}{a^2} + \frac{2d_{66}}{5b} + \frac{2d_{16}}{a} \right)$$

$$k_{6,11} = k_{11,6} = \frac{t^3}{24} \left( -\frac{bd_{16}}{3a} - \frac{ad_{26}}{3b} \right)$$

$$k_{6,12} = k_{12,6} = \frac{t^3}{24} \left( \frac{2bd_{11}}{3a} + \frac{4ad_{66}}{15b} - 2d_{16} \right)$$



$$\begin{aligned}
k_{7,7} &= \frac{t^3}{24} \left( \frac{2bd_{11}}{a^3} + \frac{2ad_{22}}{b^2} + \frac{14d_{66}}{5ab} + \frac{d_{12}}{ab} \right) \\
k_{7,8} = k_{8,7} &= \frac{t^3}{24} \left( -\frac{2ad_{22}}{b^2} - \frac{2d_{66}}{5a} - \frac{d_{12}}{a} \right) \\
k_{7,9} = k_{9,7} &= \frac{t^3}{24} \left( \frac{2bd_{11}}{a^2} + \frac{2d_{66}}{5b} + \frac{d_{12}}{b} \right) \\
k_{7,10} = k_{10,7} &= \frac{t^3}{24} \left( -\frac{2bd_{11}}{a^3} + \frac{ad_{22}}{b^3} - \frac{14d_{66}}{5ab} - \frac{d_{12}}{ab} \right) \\
k_{7,11} = k_{11,7} &= \frac{t^3}{24} \left( -\frac{ad_{22}}{b^2} + \frac{2d_{66}}{5a} + \frac{d_{12}}{a} + \frac{2d_{26}}{b} \right) \\
k_{7,12} = k_{12,7} &= \frac{t^3}{24} \left( \frac{2bd_{11}}{a^2} + \frac{2d_{66}}{5b} \right) \\
k_{8,8} &= \frac{t^3}{24} \left( \frac{8ad_{22}}{3b} + \frac{16bd_{66}}{15a} + 2d_{26} \right) \\
k_{8,9} = k_{9,8} &= \frac{t^3}{24} \left( -2d_{12} - \frac{bd_{16}}{3a} - \frac{ad_{26}}{3b} \right) \\
k_{8,10} = k_{10,8} &= \frac{t^3}{24} \left( -\frac{ad_{22}}{b^2} + \frac{2d_{66}}{5a} + \frac{d_{12}}{a} - \frac{2d_{26}}{b} \right) \\
k_{8,11} = k_{11,8} &= \frac{t^3}{24} \left( \frac{4ad_{22}}{3b} - \frac{16bd_{66}}{15a} \right) \\
k_{8,12} = k_{12,8} &= \frac{t^3}{24} \left( \frac{bd_{16}}{3a} + \frac{ad_{26}}{3b} \right) \\
k_{9,9} &= \frac{t^3}{24} \left( \frac{8bd_{11}}{3a} + \frac{16ad_{66}}{15b} + 2d_{16} \right) \\
k_{9,10} = k_{10,9} &= \frac{t^3}{24} \left( -\frac{2bd_{11}}{a^2} - \frac{2d_{66}}{5b} \right) \\
k_{9,11} = k_{11,9} &= \frac{t^3}{24} \left( \frac{bd_{16}}{3a} + \frac{ad_{26}}{3b} \right) \\
k_{9,12} = k_{12,9} &= \frac{t^3}{24} \left( \frac{4bd_{11}}{3a} - \frac{4ad_{66}}{15b} \right) \\
k_{10,10} &= \frac{t^3}{24} \left( \frac{2bd_{11}}{a^3} + \frac{2ad_{22}}{b^3} + \frac{14d_{66}}{5ab} + \frac{d_{12}}{ab} \right) \\
k_{10,11} = k_{11,10} &= \frac{t^3}{24} \left( -\frac{2ad_{22}}{b^2} - \frac{2d_{66}}{5a} - \frac{d_{12}}{a} \right) \\
k_{10,12} = k_{12,10} &= \frac{t^3}{24} \left( -\frac{2bd_{11}}{a^2} - \frac{2d_{66}}{5a} - \frac{d_{12}}{b} \right) \\
k_{11,11} &= \frac{t^3}{24} \left( \frac{8ad_{22}}{3b} + \frac{16bd_{66}}{15a} - 2d_{26} \right) \\
k_{11,12} = k_{12,11} &= \frac{t^3}{24} \left( 2d_{12} - \frac{bd_{16}}{3a} - \frac{ad_{26}}{3b} \right) \\
k_{12,12} &= \frac{t^3}{24} \left( \frac{8bd_{11}}{3a} + \frac{16ad_{66}}{15b} - 2d_{16} \right)
\end{aligned}$$

### 3. 既往の研究結果による検証

平嶋<sup>3)</sup>は、直交異方性板の曲げ解析に当たり、微分方程式から得られた厳密解の検証に際して、図3に示すような合板の曲げ試験を行っている。そこで、本報告でも、平嶋の理論値・実測値と比較することにより、前章で求めた剛性マトリックスの妥当性を検討しようとするものである。

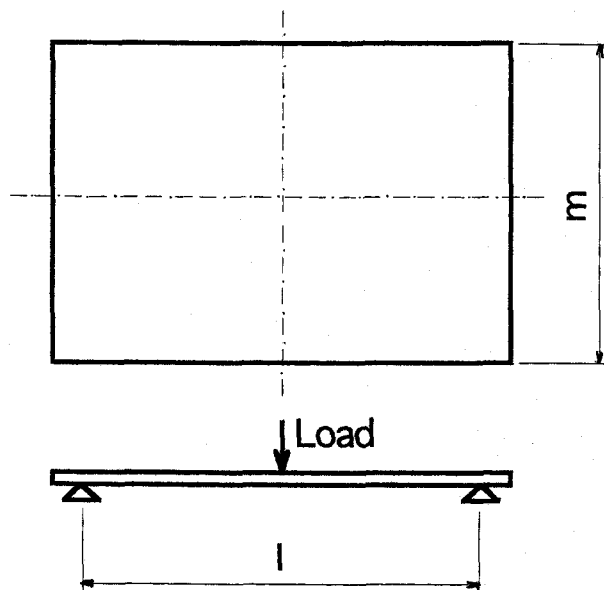


図 3. 合板の曲げ試験

荷重：中央集中荷重、境界条件：両端単純支持、他端自由

表. 1 は、平嶋が実験に用いた合板の弾性定数等を示したものである。なお、荷重は中央集中荷重とし、境界条件は両端単純支持・他端自由である。又、実験に当たり、合板の表繊維方向はスパン方向に一致している場合、及びそれに直交方向の 2 つの場合を取り扱っている。

表. 1 合板の材質特性

合板 記号	t (cm)	$\gamma$	$E_1$ (t/cm <sup>2</sup> )	$E_2$ (t/cm <sup>2</sup> )	$G_{12}$ (t/cm <sup>2</sup> )	$\mu_{12}$
PL60	0.625	0.569	126.6	21.6	5.49	0.0957
PL61	0.623	0.563	126.4	22.0	5.63	0.0615
PL62	0.620	0.570	132.3	21.1	5.81	0.0982
PL63	0.622	0.565	124.0	21.7	5.01	0.108
PL64	0.620	0.586	132.8	20.4	5.82	0.139
PL65	0.621	0.628	139.4	21.9	5.42	0.114
PL90	0.930	0.582	104.2	52.6	5.25	0.0499
PL91	0.939	0.586	98.5	45.0	4.80	0.0444
PL92	0.919	0.578	98.7	44.6	5.44	0.0710
PL93	0.923	0.576	99.9	41.0	5.36	0.0418
PL94	0.915	0.571	110.7	57.5	5.05	0.0506
PL95	0.895	0.512	96.6	42.1	4.40	0.0442

t：板厚， $\gamma$ ：比重

$E_1$ ：合板の表繊維方向ヤング係数， $E_2$ ：合板の表繊維に直角方向ヤング係数， $G_{12}$ ：せん断弾性係数， $\mu_{12}$ ：ポアソン比

表. 2 合板中央の撓み  $\delta$ 

$\beta$	合板 記号	l (cm)	m (cm)	$\frac{m}{l}$	$\frac{\delta e}{\delta f}$			$\frac{\delta t}{\delta f}$	
					$\delta e$	$\delta t$	$\delta f$	$\frac{\delta e}{\delta f}$	$\frac{\delta t}{\delta f}$
0°	PL60	40	44	1.1	21.9	21.4	21.8	1.00	0.98
	PL61	40	44	1.1	23.9	21.6	22.1	1.08	0.98
	PL62	80	40	0.5	107.5	111.0	112.1	0.96	0.99
	PL64	40	40	1.0	21.5	21.4	21.7	0.99	0.99
	PL90	80	44	0.55	36.8	36.6	36.8	1.0	0.99
	PL91	40	44	1.1	7.5	6.8	6.9	1.09	0.99
	PL92	40	40	1.0	7.1	7.3	7.3	0.97	1.0
	PL94	40	40	1.0	6.9	6.5	6.6	1.05	0.98
90°	PL60	40	44	1.1	69.4	73.5	74.0	0.94	0.99
	PL61	80	44	0.55	494.5	550.6	551.4	0.90	1.0
	PL63	40	40	1.0	81.6	80.5	80.7	1.01	1.0
	PL65	40	40	1.0	72.1	77.7	80.0	0.90	0.97
	PL90	40	44	1.1	14.1	10.1	10.2	1.38	0.99
	PL91	80	44	0.55	78.8	79.3	79.6	0.99	1.0
	PL93	80	40	0.5	99.0	99.9	100.0	0.99	1.0
	PL95	80	40	0.5	105.8	107.2	107.4	0.99	1.0

$\beta$ :合板の表繊維方向とスパン方向のなす角度

l, m:それぞれ合板の横・縦の長さ(図1参照)

$\delta_e$ :実測値<sup>3)</sup>,  $\delta_t$ :厳密解,  $\delta_f$ :本計算値

表. 2は, 板中央の撓みに関する平嶋の実測値, 厳密解と, 本計算値を示したものである。本計算値は実測値, 厳密解と比較的よく一致していることから, 本研究における剛性マトリックスは実用性あるものと思われる。

なお, 実測値との適合があまり良くないのがみられるが, これは平嶋も指摘しているように, 合板の中には, 反り又は振れを有しているものがあり, 理想的な単純支持条件になっていなかったためと思われる。

又, 本計算値は厳密解に比べ, 幾分安全側に得られたが, これは次の理由によるものと思われる。

- 1) 板のような連続体では, 元来無限の変位の自由度を持っているが, これを1節点3自由度の系に置き換えて解を得ているため, あくまでも近似解である。
- 2) 仮定した変位関数から, 要素の境界2節点を結ぶ縁に沿って, 変位の連続性は保障されるが, 勾配のそれは保障されない。それ故, 要素間の勾配の不一致が影響したものと思われる。

## 結 言

直交異方性板の曲げに関する本剛性マトリックスは、既往の研究結果による検証を通して、その実用性が確認され、本研究の第1段階は解決した。

## 文 献

- 1) 沢田 稔, 上田恒司: 北海道大学農学部演習林研究報告, 25(1), 61-85(1967).
- 2) March, H. w. : U.S. Forest Service FPL, No. 1507(1944).
- 3) 平嶋義彦: 木材学会誌, 14(6), 317-323(1968).
- 4) 増田 稔: 京都大学提出学位論文(1976).
- 5) 増田 稔, 佐々木 光, 満久崇磨: 木材研究, 47, 30-41(1969).
- 6) O. C. Zienkiewicz: "The Finite Element Method", chap. 10, McGRAW-HILL(1977).
- 7) 檜原二郎: " コンピュータによる構造工学講座", II-5-A, p58, 培風館(1972).
- 8) 中戸莞二編: " 新編木材工学", P151, 養賢堂(1985).