

傾斜機能材料からなる中空半球の熱応力緩和*

菅野良弘^{*1}, 小野寺正剛^{*2}

Reduction of Thermal Stress in a Functionally Graded Hollow Hemisphere

Yoshihiro SUGANO^{*3} and Masatake ONODERA^{*3}Iwate University, Dept. of Mechanical Engineering, Ueda 4-3-5, Morioka, Iwate, 020-8551 Japan

Analytical solutions are presented for a transient temperature field and the associated thermal stress field in a hollow hemisphere of functionally graded material (FGM) in the radial direction due to axisymmetric heatings on the inner and outer spherical surfaces. The temperature field in the FGM hollow hemisphere is obtained by solving the transient heat conduction problem in a multilayered hollow hemisphere by means of the introduction of Legendre transformation method and a new orthogonal relation of the eigenfunction with the discontinuous-weighting function for multilayer regions. The associated thermal stress problem is solved by the use of the thermoelastic displacement potential and Papkovitch-Neuber's stress functions.

Key Words: Nonhomogeneous Thermoelasticity, Thermal Stress Reduction, Analytical Solution, Functionally Graded Material, Nonhomogeneous Hollow Hemisphere

1. 緒言

スペースプレーンの軽量超耐熱構造材料として開発されてきた傾斜機能材料(FGM)は、開発の中心が熱応力緩和形からエネルギー変換形に移行しつつあるが⁽¹⁾、廃熱などの温度差を利用するエネルギー変換形においても熱応力緩和が重要な課題であることに変わりはない。傾斜機能材料に実際の熱的環境下で所要の熱応力緩和効果を発現させるためには、材料設計の段階においてあらかじめ想定される熱負荷を受け、任意の熱的・機械的不均質特性を持つ構造要素の非定常温度場と熱応力場を解析することが必須である。傾斜機能材料からなる構造要素の非定常熱応力解析は、解析解が平易な式で得られる平板⁽²⁾⁽³⁾から、特殊関数を含む円筒⁽⁴⁾、球⁽⁵⁾まで報告され、任意の不均質性を有する平板⁽³⁾、円筒⁽⁶⁾については、区分的線形不均質性を有する不均質熱伝導論、熱弾性論の立場からも解析されている。しかし、不均質中空半球の非定常温度場、熱応力場の解析は全く報告されていない。本研究で

は、スペースプレーンにおいて最も厳しい熱負荷を受けるノーズコーンに傾斜機能材料を使用する際の材料設計を想定し、内外半球面に温度分布を受け、任意の不均質性を有する不均質中空半球の非定常温度場、弾性熱応力場を解析する方法を提案する。非定常温度場は、逆変換が容易でないラプラス変換法を採用せず、Legendre変換後に複合領域における一種の積分変換法に相当する手法⁽⁷⁾を均質多層中空半球に拡張して解析する方法を示す。解析解を得る観点から、非定常温度場、熱応力場の解析において物性値の温度依存性は考慮しない。

2. 傾斜機能中空半球の非定常温度場の解析

傾斜機能材料からなる内外半径 a, b の不均質中空半球は、最初温度 $T_0 F(r)$ にあったとし、ある基準時刻から内外半球面において周囲媒体の温度 $\Theta_1(\mu)$ 、 $\Theta_2(\mu)$ により加熱され、また、半球の底面は断熱床にあるとする。ここでは図1の球座標系 (r, ϕ, θ) と変数変換 $\mu = \cos \theta$ を採用する。半径方向に任意の不均質性を有する中空半球の非定常温度場を半径方向に相異なる一定の熱特性を有する均質な n 層に分割し、多層均質中空半球として解析する。

* 原稿受付 1999年3月15日。

*1 正員, 岩手大学工学部(☎020-8551 盛岡市上田4-3-5)。

*2 学生員, 岩手大学大学院。

E-mail: sugano@iwate-u.ac.jp

第 i 層の温度, 熱伝導率を T_i , λ_i , 内側半径を r_i とすると, 第 i 層の温度場が満足すべき非定常熱伝導方程式, 内外境界条件式, および連続条件式は次のように表される.

$$\nabla^2 T_i = \frac{1}{\kappa_i} \frac{\partial T_i}{\partial t} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$\lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial r} - h_i(T_i - \Theta_i(\mu)) = 0 \quad (r=r_i) \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$\lambda_n \frac{\partial T_n}{\partial r} + h_n(T_n - \Theta_n(\mu)) = 0 \quad (r=r_{n+1}) \quad \dots\dots\dots(3)$$

$$\frac{\partial T_i}{\partial \mu} = 0 \quad (\mu=0) \quad \dots\dots\dots(4)$$

$$T_i = T_{i+1} \quad (r=r_{i+1}, i=1, 2, \dots, n-1) \quad \dots\dots\dots(5)$$

$$\lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial r} = \lambda_{i+1} \frac{\partial T_{i+1}}{\partial r} \quad (r=r_{i+1}, i=1, 2, \dots, n-1) \quad \dots\dots\dots(6)$$

ここで,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ (1-\mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} \right\} \quad \dots\dots\dots(7)$$

ただし, $\kappa_i = \lambda_i / \gamma_i c_i$ は第 i 層の温度伝導率, γ_i , c_i は密度および比熱, また h_1 , h_n は内外半球面の熱伝達率である. 以後も下添字 i により第 i 層の諸量を表す. なお, 不均質中空半球の初期条件は,

$$T = T_0 F(r), \quad t=0 \quad \dots\dots\dots(8)$$

式(1)~(8)で定式化される非定常熱伝導問題に対し, Legendre 変換とその逆変換を導入する.

$$\bar{T}_i(r, m, t) = \int_0^1 \sqrt{4m+1} P_{2m}(\mu) T_i(r, \mu, t) d\mu \quad \dots\dots\dots(9)$$

$$T_i(r, \mu, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{4m+1} P_{2m}(\mu) \bar{T}_i(r, m, t) \quad \dots\dots\dots(10)$$

ただし, $P_{2m}(\mu)$ は $2m$ 次の第一種 Legendre 関数である. Legendre 変換を施すことにより, 所要の非定常温度場を, 不均質性を有する半径方向の次元問題に変換でき, その解は次のように表せる.

$$\bar{T}_i(r, m, t) = A_{im} r^{2m} + B_{im} r^{-(2m+1)} + \sum_{p=1}^{\infty} A_{p} R_{imp}(r) e^{-\kappa_i \beta_{imp} t} \quad \dots\dots\dots(11)$$

ただし, 式(11)の第1, 2項の定常項は式(1)を Legendre 変換した式から容易に導出でき, 未知係数 A_{im} , B_{im} は式(2)~(6)から決定される. また, $R_{imp}(r)$ は次の固有値問題の解である.

$$\frac{d^2 R_{imp}(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR_{imp}(r)}{dr} + \left(\frac{\alpha_{mp}^2}{\kappa_i} - \frac{2m(2m+1)}{r^2} \right) R_{imp}(r) = 0 \quad \dots\dots\dots(12)$$

$$\lambda_i \frac{dR_{imp}(r)}{dr} - h_1 R_{imp}(r) = 0 \quad (r=r_i) \quad \dots\dots\dots(13)$$

$$\lambda_n \frac{dR_{nmp}(r)}{dr} + h_n R_{nmp}(r) = 0 \quad (r=r_{n+1}) \quad \dots\dots\dots(14)$$

$$R_{imp}(r) = R_{i+1mp}(r) \quad (r=r_{i+1}, i=1, 2, \dots, n-1) \quad \dots\dots\dots(15)$$

$$\lambda_i \frac{dR_{imp}(r)}{dr} = \lambda_{i+1} \frac{dR_{i+1mp}(r)}{dr} \quad (r=r_{i+1}, i=1, 2, \dots, n-1) \quad \dots\dots\dots(16)$$

ここで, α_{mp} は固有値であり, 式(12)の解 $R_{imp}(r)$ は次式のように得られる.

$$R_{imp}(r) = A_{1mp} \{ A_{imp}^* \phi_{imp}(r) + B_{imp}^* \psi_{imp}(r) \} \quad \dots\dots\dots(17)$$

ただし,

$$\phi_{imp}(r) = (\beta_{imp} r)^{-1/2} J_{2m+(1/2)}(\beta_{imp} r) \quad \dots\dots\dots(18)$$

$$\psi_{imp}(r) = (\beta_{imp} r)^{-1/2} Y_{2m+(1/2)}(\beta_{imp} r) \quad \dots\dots\dots(19)$$

$$\beta_{imp} = \alpha_{mp} / \sqrt{\kappa_i} \quad \dots\dots\dots(20)$$

$J_{2m+(1/2)}(\beta_{imp} r)$, $Y_{2m+(1/2)}(\beta_{imp} r)$ はそれぞれ $(2m+1/2)$ 次の第一種, 第二種 Bessel 関数である. 未知係数 A_{imp}^* , B_{imp}^* は式(13)~(16)により決定される.

固有値 α_{mp} は次の超越方程式の第 p 番目の正根であり, 式(11)は式(21)の無限個の正根について総和をとる.

$$G_{en} \cdot E_{en-1} \cdot E_{en-2} \cdots E_{e2} \cdot E_{e1} \cdot a_{e1} = 0 \quad \dots\dots\dots(21)$$

ここで,

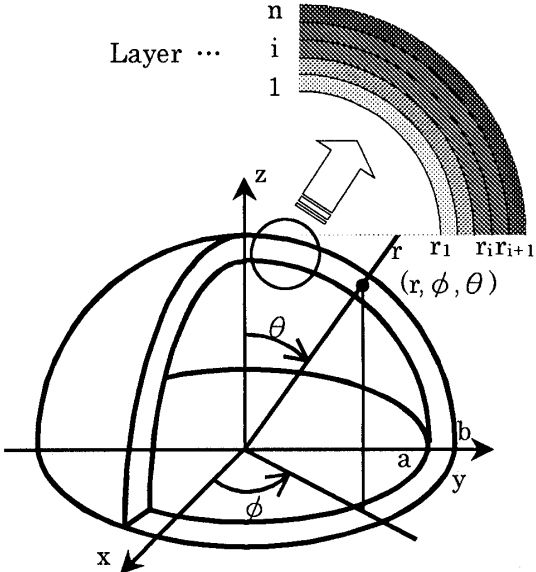


Fig. 1 Functionally graded hollow hemisphere model

$$\begin{aligned}
 a_{e1} &= \begin{bmatrix} A_{1mp} \\ B_{1mp} \end{bmatrix}, \quad G_{en} = [g_{1n} \ g_{2n}] \\
 g_{1n} &= \lambda_n \phi'_{nmp}(r_{n+1}) + h_n \phi_{nmp}(r_{n+1}) \\
 g_{2n} &= \lambda_n \psi'_{nmp}(r_{n+1}) + h_n \psi_{nmp}(r_{n+1}) \\
 E_{ei} &= \begin{bmatrix} e_{11i} & e_{12i} \\ e_{21i} & e_{22i} \end{bmatrix} \\
 e_{11i} &= \frac{\lambda_i}{\lambda_{i+1}} \phi'_{imp}(r_{i+1}) \psi_{i+1mp}(r_{i+1}) \\
 &\quad - \phi_{imp}(r_{i+1}) \psi'_{i+1mp}(r_{i+1}) \\
 e_{12i} &= \frac{\lambda_i}{\lambda_{i+1}} \psi_{i+1mp}(r_{i+1}) \phi'_{imp}(r_{i+1}) \\
 &\quad - \psi'_{i+1mp}(r_{i+1}) \phi_{imp}(r_{i+1}) \\
 e_{21i} &= \phi_{imp}(r_{i+1}) \phi'_{i+1mp}(r_{i+1}) \\
 &\quad - \frac{\lambda_i}{\lambda_{i+1}} \phi'_{imp}(r_{i+1}) \phi_{i+1mp}(r_{i+1}) \\
 e_{22i} &= \phi'_{i+1mp}(r_{i+1}) \psi_{imp}(r_{i+1}) \\
 &\quad - \frac{\lambda_i}{\lambda_{i+1}} \phi_{i+1mp}(r_{i+1}) \psi'_{imp}(r_{i+1}) \\
 \phi'_{imp}(r) &= \beta_{imp} \{ 2m(\beta_{imp}r)^{-3/2} J_{2m+(1/2)}(\beta_{imp}r) \\
 &\quad - (\beta_{imp}r)^{-1/2} J_{2m+(3/2)}(\beta_{imp}r) \} \\
 \psi'_{imp}(r) &= \beta_{imp} \{ 2m(\beta_{imp}r)^{-3/2} Y_{2m+(1/2)}(\beta_{imp}r) \\
 &\quad - (\beta_{imp}r)^{-1/2} Y_{2m+(3/2)}(\beta_{imp}r) \} \\
 &\dots\dots\dots (22)
 \end{aligned}$$

一般に、多層領域に対して、固有関数 $R_{imp}(r)$ は、単一領域の Sturm-Liouville 問題から導出される通常の重み関数に関して直交しないが、不連続重み関数 W_i を掛けることにより、一つの直交系 $G_{imp}(r)$ が構成できる。

$$G_{imp}(r) = W_i R_{imp}(r) \quad (i=1, 2, \dots, n) \dots\dots (23)$$

ここで、不連続重み関数 W_i は、

$$W_i = \sqrt{\frac{\lambda_i}{\kappa_i}} = \sqrt{\rho_i c_i} \dots\dots\dots (24)$$

多層領域において関数 $G_{imp}(r)$ は次式の直交関係を有している。

$$\int_{r_i}^{r_{i+1}} G_{imk}(r) G_{iml}(r) r^2 dr = \begin{cases} \text{const.} & (k=l) \\ 0 & (k \neq l) \end{cases} \dots\dots\dots (25)$$

次に、式(8)を Legendre 変換した初期条件関数 $\bar{f}(r)$ を n 個の部分関数の和と考える。

$$\bar{f}(r) = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i(r) \dots\dots\dots (26)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} \bar{F}_i(r) &= \bar{f}(r) && \textit{i} \textit{th} \textit{ layer} \\ \bar{F}_i(r) &= 0 && \textit{other layer} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27)$$

$$\bar{f}(r) = T_0 \int_0^1 \sqrt{4m+1} T(r, \mu, 0) P_{2m}(\mu) d\mu \dots\dots\dots (28)$$

個々の層の初期条件を次のように全領域 ($r_1 \leq r <$

r_{n+1}) にわたって展開する。

$$\bar{F}_i(r) = \sum_{p=1}^{\infty} C_{imp} G_{imp}(r) \dots\dots\dots (29)$$

展開係数 C_{imp} は $G_{imp}(r)$ の式(25)の n 層にわたる直交性から、式(27)を考慮することにより、

$$C_{imp} = \frac{W_i \int_{r_i}^{r_{i+1}} \bar{F}_i(r) R_{imp}(r) r^2 dr}{\sum_{i=1}^n W_i^2 \int_{r_i}^{r_{i+1}} R_{imp}^2(r) r^2 dr} \dots\dots\dots (30)$$

未知係数 A_p は式(11), (26), (27), (29)より次式のように得られる。

$$A_p = \sum_{i=1}^n W_i (C_{imp} - D_{imp}) \dots\dots\dots (31)$$

ただし、 D_{imp} は $A_{im} r^{2m} + B_{im} r^{-(2m+1)}$ を $G_{imp}(r)$ で展開したときの展開係数である。式(11)を式(10)により Legendre 逆変換して、所要の温度関数が次式のように得られる。

$$\begin{aligned}
 T_i(r, \mu, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ A_{im} r^{2m} + B_{im} r^{-(2m+1)} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{p=1}^{\infty} A_p R_{imp}(r) e^{-\kappa_i \beta_{imp} t} \right\} \sqrt{4m+1} P_{2m}(\mu) \\
 &\dots\dots\dots (32)
 \end{aligned}$$

3. 傾斜機能中空半球の非定常熱応力問題

中空半球の力学的境界条件として、内外半球面において外力の作用がなく、平面において半径方向の変位は自由、子午線方向の変位は拘束されているものとする。半径方向に任意の不均質性を持つ傾斜機能中空半球を、温度場の解析と同様に n 層の多層領域に分割し、非定常熱応力問題を熱弾性変位ポテンシャルと Papkovitch-Neuber の応力関数⁽⁶⁾を用いて解析する。このとき、第 i 層の変位場 \mathbf{u}_i は、

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}_i &= \mathbf{u}_i^{(T)} + \mathbf{u}_i^{(*)} \\
 &= \text{grad } \Phi_i + 4(1-\nu_i) \mathbf{B}_i - \text{grad}(\mathbf{B}_i \cdot \mathbf{r} + B_{0i}) \\
 &\dots\dots\dots (33)
 \end{aligned}$$

ただし、 ν_i , G_i , α_{Ti} はポアソン比、横弾性係数、線膨張係数である。また、 $\mathbf{u}_i^{(T)}$ は熱弾性変位ポテンシャル Φ_i による変位、 $\mathbf{u}_i^{(*)}$ は力学的境界条件を満足するために境界に負荷させる荷重、変位による純弾性問題の解であり、調和ベクトル \mathbf{B}_i と調和スカラ B_{0i} による変位である。軸対称問題ゆえ、ベクトル \mathbf{B}_i の $\mathbf{0}$ でない成分は B_{ri} と $B_{\theta i}$ である。まず、熱弾性変位ポテンシャル Φ_i と調和スカラ B_{0i} の満足すべき微分方程式は、

$$\nabla^2 \Phi_i = \frac{1+\nu_i}{1-\nu_i} \alpha_{Ti} (T_i - T_{\infty}) \dots\dots\dots (34)$$

$$\nabla^2 B_{0i} = 0 \dots\dots\dots (35)$$

ここで、 T_{∞} は初期温度であり $T_{\infty} = T_0 =$ 一定とする。

式(4), (32), (34), (35)から熱弾性変位ポテンシャル Φ_i , 調和スカラ B_{0i} は次式のように得られる.

$$\Phi_i = \frac{1+\nu_i}{1-\nu_i} \alpha_{Ti} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{4m+3} A_{im} r^{2m+2} - \frac{1}{4m-1} B_{im} r^{-(2m-1)} \right\} - \sum_{p=1}^{\infty} A_p e^{-\kappa_i \beta_{imp}^2 t} \beta_{imp}^{-2} R_{imp}(r) \right] P_{2m}(\mu) \quad (36)$$

$$B_{0i} = \frac{D_{2i0}}{r} + \sum_{m=1}^{\infty} \{ D_{1im} r^{2m} + D_{2im} r^{-(2m+1)} \} P_{2m}(\mu) \quad (37)$$

調和ベクトル \mathbf{B}_i の満足すべき微分方程式は次式で与えられる.

$$\text{grad div } \mathbf{B}_i - \text{rot rot } \mathbf{B}_i = \mathbf{0} \quad (38)$$

式(38)はベクトル \mathbf{B}_i の成分 $B_{ri}, B_{\theta i}$ についての連立微分方程式となり, 解くことが困難である. そこで, 次のように体積ひずみ e_{Bi} , 回転 ω_{Bi} を定義する.

$$e_{Bi} = \text{div } \mathbf{B}_i = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 B_{ri}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (B_{\theta i} \sin \theta) \quad (39)$$

$$\omega_{Bi} = \text{rot } \mathbf{B}_i = \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r B_{\theta i}) - \frac{\partial B_{ri}}{\partial \theta} \right\} e_{\phi} \quad (40)$$

このとき,

$$\text{grad } e_{Bi} - \text{rot } \omega_{Bi} = \mathbf{0} \quad (41)$$

式(41)より, e_{Bi}, ω_{Bi} のみを含む微分方程式を求めると,

$$\nabla^2 e_{Bi} = 0 \quad (42)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \omega_{Bi}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial (\omega_{Bi} \sin \theta)}{\partial \theta} \right\} = 0 \quad (43)$$

式(42), (43)の一般解 e_{Bi}, ω_{Bi} に対して, 式(39), (40)より特解 $B_{ri}, B_{\theta i}$ が得られる. この $B_{ri}, B_{\theta i}$ と Φ_i, B_{0i} を式(33)に代入すると変位成分が次式のように得られる.

$$u_{ri} = \frac{1+\nu_i}{1-\nu_i} \alpha_{Ti} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \left\{ \frac{2m+2}{4m+3} A_{im} r^{2m+1} + \frac{2m-1}{4m-1} B_{im} r^{-2m} \right\} - \sum_{p=1}^{\infty} A_p e^{-\beta_{imp}^2 t} \beta_{imp}^{-2} \{ A_{imp}^* \phi'_{imp}(r) + B_{imp}^* \psi'_{imp}(r) \} \right] P_{2m}(\mu) + \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{2m+1}{4m+3} E_{1i} C_{1im} r^{2m+1} + \frac{2m}{4m-1} E_{2i} C_{2im} r^{-2m} - 2m D_{1im} r^{2m-1} + (2m+1) D_{2im} r^{-(2m+2)} \right\} P_{2m}(\mu) \quad (44)$$

$$u_{\theta i} = \frac{1+\nu_i}{1-\nu_i} \alpha_{Ti} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{4m+3} A_{im} r^{2m+1} - \frac{1}{4m-1} B_{im} r^{-2m} \right\} - \sum_{p=1}^{\infty} A_p e^{-\kappa_i \beta_{imp}^2 t} \beta_{imp}^{-2} r^{-1} R_{imp}(r) \right] \frac{2m+1}{(1-\mu^2)^{1/2}} \{ P_{2m+1}(\mu) - \mu P_{2m}(\mu) \} - \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{4m+3} E_{3i} C_{1im} r^{2m+1} - \frac{1}{4m-1} E_{4i} C_{2im} r^{-2m} + D_{1im} r^{2m-1} + D_{2im} r^{-(2m+2)} \right\} \frac{(2m+1)}{(1-\mu^2)^{1/2}} \{ P_{2m+1}(\mu) - \mu P_{2m}(\mu) \} \quad (45)$$

ここで,

$$\left. \begin{aligned} E_{1i} &= 2 - 4\nu_i - 2m, & E_{2i} &= 3 - 4\nu_i + 2m \\ E_{3i} &= 5 - 4\nu_i + 2m, & E_{4i} &= 4 - 4\nu_i - 2m \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

最終的に熱応力成分は次式から得られる.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_{\theta\theta i}(r, \mu, t)}{2G_i} &= \left(\frac{u_{ri}^{(T)}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{\theta i}^{(T)}}{\partial \theta} - \nabla^2 \Phi_i \right) + \left(\frac{u_{ri}^{(*)}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{\theta i}^{(*)}}{\partial \theta} + \frac{\nu_i}{1-2\nu_i} e_i^{(*)} \right) \\ \frac{\sigma_{\phi\phi i}(r, \mu, t)}{2G_i} &= \left(\frac{u_{ri}^{(T)}}{r} + \frac{\cot \theta}{r} u_{\theta i}^{(T)} - \nabla^2 \Phi_i \right) + \left(\frac{u_{ri}^{(*)}}{r} + \frac{\cot \theta}{r} u_{\theta i}^{(*)} + \frac{\nu_i}{1-2\nu_i} e_i^{(*)} \right) \\ e_i^{(*)} &= \varepsilon_{rr i}^{(*)} + \varepsilon_{\theta\theta i}^{(*)} + \varepsilon_{\phi\phi i}^{(*)} = \frac{\partial u_{ri}^{(*)}}{\partial r} + \frac{2}{r} u_{ri}^{(*)} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{\theta i}^{(*)}}{\partial \theta} + \frac{\cot \theta}{r} u_{\theta i}^{(*)} \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

力学的境界条件式, 連続条件式は次式で表される.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr1} &= 0, \quad \sigma_{r\theta1} = 0 \quad (r = r_1) \\ \sigma_{rrn} &= 0, \quad \sigma_{r\theta n} = 0 \quad (r = r_{n+1}) \\ \sigma_{r\theta i} &= 0, \quad u_{\theta i} = 0 \quad (\mu = 0) \\ \sigma_{rri} &= \sigma_{rri+1}, \quad \sigma_{r\theta i} = \sigma_{r\theta i+1} \quad (r = r_{i+1}, i = 1, 2, \dots, n-1) \\ u_{ri} &= u_{ri+1}, \quad u_{\theta i} = u_{\theta i+1} \quad (r = r_{i+1}, i = 1, 2, \dots, n-1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (48)$$

$$\Theta_1(\mu) = 0, \quad \Theta_n(\mu) = T_b \mu \dots\dots\dots (49)$$

4. 数 値 計 算

SiC/Al 合金 FGM からなる中空半球について非定常温度場, 熱応力場の数値計算を行う. 構成材料の物性値を表 1 に示す^{(9)~(11)}. 均質材の弾性熱応力解析において, 熱応力に及ぼす物性値の温度依存性の影響が小さいことは知られている⁽¹²⁾. 傾斜機能材料のような不均質材料の弾性熱応力解析においては, その影響は必ずしも小さくはないが⁽¹³⁾, 解析解を導出する観点からここでは物性値の温度依存性は無視した. FGM の物性値は, 高温側(母相 SiC, 球状粒子 Al 合金), 低温側(母相 Al 合金, 球状粒子 SiC)とも母相に球状粒子が分散した場合の Mori-Tanaka の理論⁽¹⁴⁾ から, また中間相においてはこれにファジイ推論を併用して算出した⁽²⁾. まず, 子午線方向に非線形な温度分布を受けるノーズコーンの一例として, 内外半球面における周囲媒体の温度分布を示す関数 $\Theta_1(\mu)$, $\Theta_n(\mu)$ を, 解析の簡単のため次のように仮定した.

また, 次の無次元量を導入した.

$$\left. \begin{aligned} \bar{T} &= \frac{T}{T_b}, \quad \rho = \frac{r}{r_1}, \quad \bar{b} = \frac{b}{a}, \quad \tau = \frac{\kappa_1 t}{r_1^2} \\ H_1 &= \frac{h_1 r_1}{\lambda_1}, \quad H_n = \frac{h_n r_1}{\lambda_n} \\ \bar{\sigma}_{\theta\theta} &= \sigma_{\theta\theta} / \{ (1 + \nu_1) G_1 \alpha_{T1} T_b / (1 - \nu_1) \} \\ \bar{u}_r &= u_r / \{ (1 + \nu_1) \alpha_{T1} T_b / (1 - \nu_1) \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (50)$$

さらに, 数値計算諸元を次のように定めた.

$$\left. \begin{aligned} n &= 2, 10, 20, 50, \quad \bar{b} = 1.2 \\ H_1 &= 5, \quad H_n = \infty, \quad F(r) = 1, \quad \frac{T_0}{T_b} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (51)$$

傾斜組成分布としてべき乗形組成分布を採用し, セラミックの体積分率をセラミックリッチ, セラミックプアに分けて次式で定義し, $x=2$ を採用した.

$$\left. \begin{aligned} \xi_c &= 1 - \left(1 - \frac{r}{r_{n+1}} \right)^x \quad (\text{Ceramic rich}) \\ \xi_c &= \left(\frac{r}{r_{n+1}} \right)^x \quad (\text{Ceramic poor}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (52)$$

Table 1 Material properties of SiC and Al-Alloy

	SiC	Al-Alloy
Thermal Conductivity λ (W/m · K)	65	233
Young's Modulus E (GPa)	427	70
Coefficient of Linear Thermal Expansion α ($\times 10^{-6}/K$)	4.3	23.4
Density γ (kg/m ³)	3200	2700
Specific Heat c (kJ/kg · K)	0.674	0.963

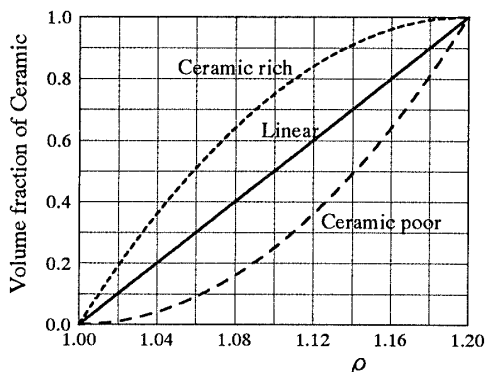


Fig. 2 Graded compositions of power type

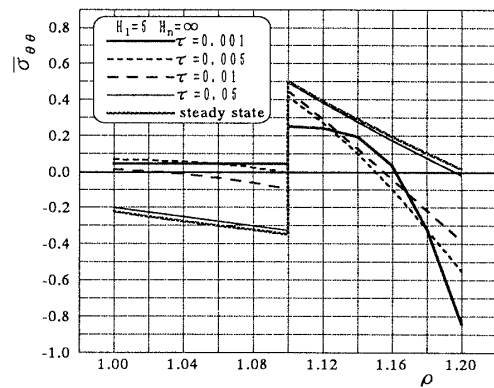


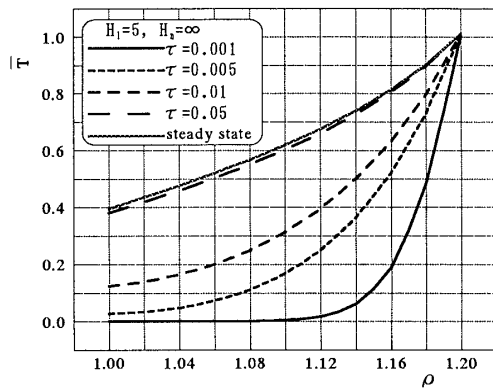
Fig. 3 Thermal stress distribution on $\theta=0^\circ$

示す。界面のSiC側(低線膨張係数側)において主に線膨張係数のミスマッチに起因する大きな引張熱応力が発生していることがわかる。

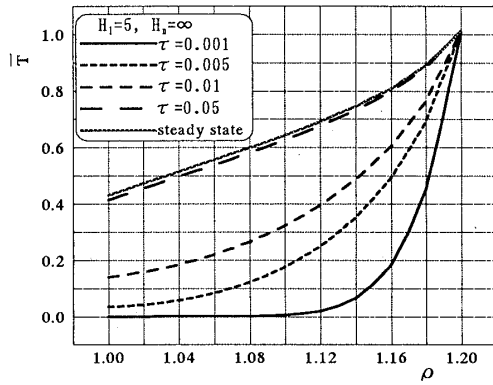
次に、図4(a)~(c)に、層数10の場合の $\theta=0^\circ$ における非定常温度分布を、また、図5(a)~(c)に子午線方向熱応力の時間変化を示す。まず、図4から、セラミックプア、線形、セラミックリッチとセラミックの体積分率が高くなるにつれて、SiC 100%近傍の温度は上昇し、温度こう配は小さくなり、一方Al合金100%側の温度は下がっており、当然ではあるが遮

熱効果が現れていることがわかる。

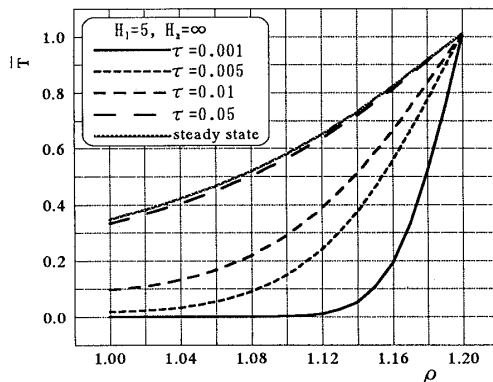
図3から定常状態において2層貼り合わせの中空半球の最大引張熱応力は約0.5であったが、図5(a)から線形分布で約10%、図5(c)からセラミックリッチで約54%緩和されている。しかもセラミックリッチの場合に最大引張熱応力が発生する位置は、セラミック100%の最外層ではなくAl合金が約36%含まれた $\rho=1.08$ である。一方、高温側で急激にセラミックの組成分布が変化するセラミックプアの傾斜を与えた場合は、2層貼り合わせの中空半球より70%以上大きな



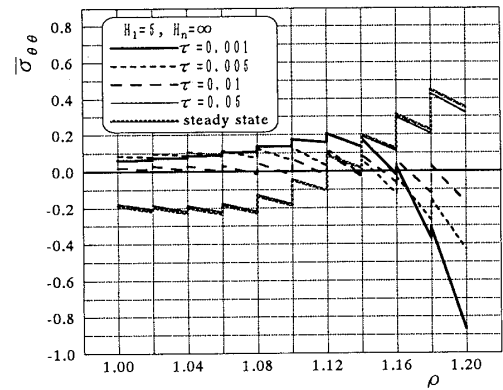
(a) Linear



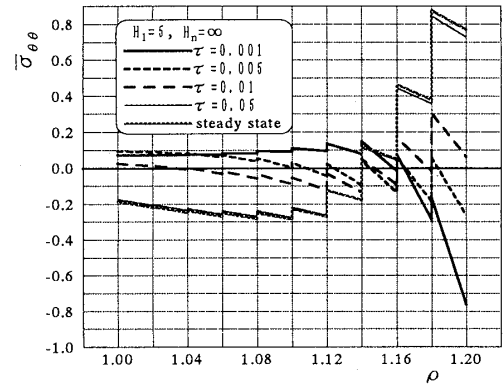
(b) Ceramic poor



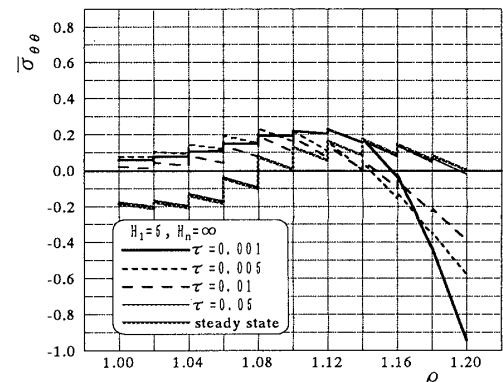
(c) Ceramic rich

Fig. 4 Temperature distribution on $\theta=0^\circ$ 

(a) Linear



(b) Ceramic poor



(c) Ceramic rich

Fig. 5 Thermal stress distribution on $\theta=0^\circ$

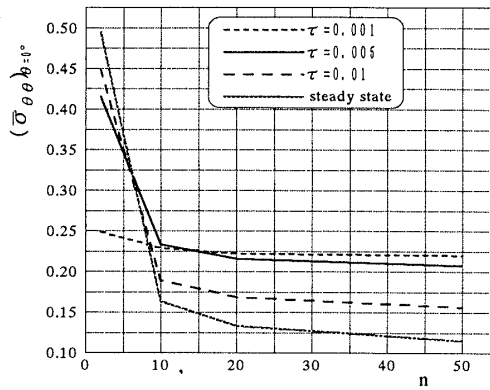


Fig. 6 Relation between maximum tensile thermal stress on $\theta=0^\circ$ and number of layers

引張熱応力が最外層のセラミック 100%層に発生している。

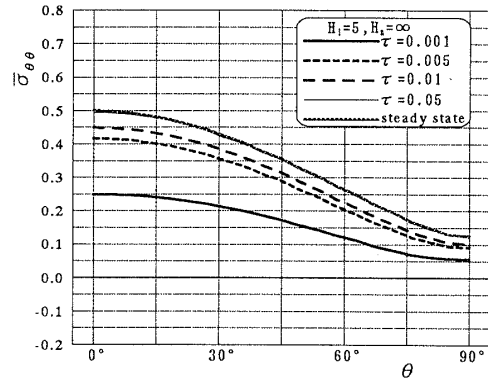
次に、図 6 に熱応力緩和に適したセラミックリッチな組成分布を持つ中空半球の層数を 10 層から 50 層まで増加させた場合の最大引張熱応力の変化を示す。2 層貼り合わせから 10 層へ層を増やし、より緩やかな階段状の組成変化を与えると、定常時の熱応力は 0.5 から約 0.165 まで約 65%緩和される。さらに層数を 40 層増やし 50 層としても 10%弱しか熱応力緩和効果は上がらない。合成上の困難さから、これまで実際の傾斜機能材料の多くは 6~10 層で合成されているが⁽¹⁵⁾⁽¹⁶⁾、傾斜化に 10 層が採用されてきたことは上記の結果から使用時の熱応力緩和の観点からも理にかなった選択であったと言える。

最後に、図 7(a), (b) に定常最大引張熱応力が発生する半径位置の子午線方向熱応力の子午線方向分布を、2 層貼り合わせの場合とセラミックリッチの場合について示す。子午線方向熱応力は加熱中心の $\theta=0^\circ$ から $\theta=90^\circ$ に向かって単調に減少しており、 $\theta=0^\circ$ の $\sigma_{\theta\theta}$ の半径方向の分布で熱応力緩和に適した組成設計をすれば十分であることがわかる。

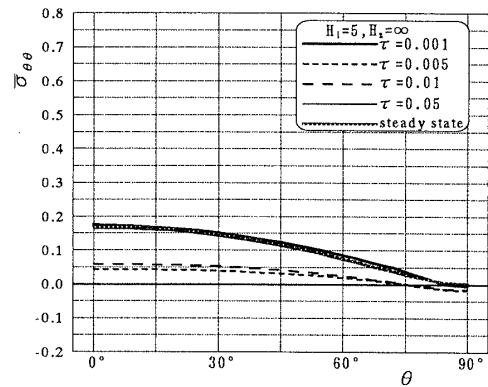
5. 結 言

任意の不均質性を有する FGM からなる中空半球を均質多層半球として非定常温度場と熱応力場を解析した。内外半球面に軸対称加熱を受ける場合の非定常熱伝導問題を、不均質平板に対する既報の手法⁽²⁾を拡張した球座標系の複合領域に対する一種の積分変換法で解析する手法を提案した。また、SiC/Al 合金 FGM からなる内外半径比 1.2 の中空半球について非定常温度場と熱応力場の数値計算を行い、以下の結論を得た。

(1) 2 層貼り合わせ材料からなる組成を傾斜化する



(a) 2 layers ($\rho=1.1$)



(b) Ceramic rich ($\rho=1.14$)

Fig. 7 Thermal stress distribution in meridian direction on the radial position of steady-state maximum tensile thermal stress

ることにより、つねに最大引張熱応力が緩和されるのではなく、セラミックリッチまたは線形の組成傾斜により中空半球の最大引張熱応力は緩和されるが、セラミックプアな組成傾斜により中空半球の最大引張熱応力は逆に増大する。

(2) 中空半球の組成分布を線形の傾斜組成からセラミックリッチな傾斜組成にすることにより、定常状態の最大引張熱応力が約 60%緩和され、最大引張熱応力の発生位置がセラミック 100%の最外層から領域の内部へ移る。また、遮熱性も改善される。

(3) 層数を 2 層から 50 層まで増加させた場合、10 層までは層数の増加とともに大きな熱応力緩和効果があったが、これ以上に層数を増やしても顕著な熱応力緩和効果が見られなかった。合成上の制約から実際に合成されてきた FGM の多くは 6~10 層であるが、本研究の結果から使用時の熱応力緩和効果の観点からも、FGM の層数を 10 層とすることは妥当な選択であると言える。

最後に、本研究の結果から、中空半球の材料を 2 層貼り合わせ材料からセラミックリッチな傾斜組成をも

つ相異なる均質 10 層からなる傾斜機能材料にすることにより, 大きな熱応力緩和が得られることがわかったが, 本研究の解析手法を解析エンジンとし, 同一層数のままで遺伝的アルゴリズムを併用して組成分布の最適化を行うことを今後の課題とする。

本研究は, 平成 9・10 年度文部省科学研究費補助金の助成を受けて行われた, ここに謝意を表する。

文 献

- (1) 平野徹, 日本機械学会第 73 期通常総会講演会資料集(V), (1996), 76-78.
- (2) 菅野良弘・森下博之・田中喜久昭, 機論, **59**-567, A (1993), 2666-2673.
- (3) 菅野良弘・佐藤恵一・須見尚文, 機論, **63**-606, A (1997), 378-384.
- (4) 須見尚文・門奈博・菅野良弘, 機論, **62**-597, A (1996), 1189-1196.
- (5) 大多尾義弘・谷川義信・中西庸介, 機論, **57**-539, A (1991), 1581-1587.
- (6) 菅野良弘・萩谷昌弘・須見尚文, 機論, No. 975-2 (1997-9), 11-12.
- (7) Vodicka, V., *Math. Nach.*, **14**-1 (1955), 47-51.
- (8) Takeuti, Y. (Hetnarski, R. B. 編), *Thermal Stress I*, (1986), 486, North-Holland.
- (9) 奥田博・平井敏雄・上垣外修己, 構造材料セラミックス, (1987), 32, オーム社.
- (10) 日本機械学会編, 金属材料の弾性係数, (1991), 162, 日本機械学会.
- (11) 日本熱物性学会編, 熱物性ハンドブック, (1990), 317, 養賢堂.
- (12) Sugano, Y., *Ing-Archiv*, **54**-3 (1984), 301-308.
- (13) 菅野良弘・片岡誠治・田中喜久昭, 機論, **59**-562, A (1993), 1505-1513.
- (14) Tanaka, K., Tanaka, Y., Watanabe, H., Poterasu, V. F. and Sugano, Y., *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **109**-3 (1993), 377-389.
- (15) 傾斜機能材料研究会編, 傾斜機能材料, (1993), 277, 294, 306, 工業調査会.
- (16) Kobayashi, H. (Shiota, I. and Miyamoto, Y. 編), *Functionally Graded Materials 1996*, (1997), 209, Elsevier, Amsterdam.