論　文

有限群上の一様構造線形空間回路網のフーリエ解析

正　員　渡辺　孝志†

Fourier Analysis of Uniformly Structured Linear Spatial Networks over Finite Groups

Takashi WATANABE†, *Member*

あらまし　空間回路網は，同期方式並列処理系の一般的な記述モデルとして，セルオートマトンの自然な拡張モデルとなっている．その中で，有限群上に定義される一様構造性をもつ線形空間回路網は基本的な回路網であり，その状態遷移関数は合成積で特性化される．本論文では，係数体を複素数体に限らない有限非可換群上の一般的なフーリエ変換を用いて，一様構造線形空間回路網の遷移準同形性や並列分解性などの諸性質を検討する．これらの検討を通して，アーベル群上に定義される通常の合成積形式の線形システムと対比して，類似的な性質と特異的な性質の両面が明らかにされる．

キーワード　線形空間回路網，有限群，一様構造，遷移準同形，有限フーリエ変換

1. まえがき

従来，同期方式の並列処理系を記述するモデルとしては，セルオートマトンがよく知られている[1]．また，文字や図形などのパターン情報を高速に処理する並列処理回路モデルとして，五十嵐ら[2]のヒルベルト空間 $L_2[-l, l]$ 上の有界線形作用素を実現する線形空間回路網の研究がある．しかし，これらのモデルではその構造に強い制約があり，並列処理系の合成・解析問題を一般的に取り扱うには十分なモデルではなかった．渡辺ら[3]~[6]は，これらのモデルを包含する同期方式並列処理系の一般的な記述モデルとして，「空間回路網」を提案している．特に，結合構造が対称性をもつ一様構造線形空間回路網は基本的な回路網であり，その状態遷移関数は合成積で特性化される[4]．このことは，この種の回路網の検討にフーリエ解析的手法が適用可能なことを示唆している．

Barto[7]は，自然界の連続系を離散的に記述するモデルとしてセルオートマトンを位置づけ，有限アーベル群上の線形セルオートマトンの解析にフーリエ変換を利用している．また，Lechner[8]は論理関数の合成・解析にフーリエ変換を用いている．小川ら[9]の線形空間回路網の議論も，実区間 $[-l, l]$ 上の調和解析的研究と見ることができる．これらの研究は，いずれもアーベル群上のフーリエ解析的研究であり，線形システムの解析に非可換群上のフーリエ変換を利用した研究は，Karpovsky ら[10]など少数にとどまっている．

本論文では，係数体を一般的な分裂体とした有限非可換群上のフーリエ変換を用いて一様構造線形空間回路網の性質を検討し，線形空間回路網の遷移準同形性や並列分解性などの関係を明らかにする．これらの検討を通して，アーベル群上に定義される通常の合成積形式の線形システムと対比した形で，その類似的な性質と特異的な性質の両面が解明される．

2. 線形空間回路網の定義

線形空間回路網の定義を以下に与えるが，詳しくは文献(3)，(4)を参照されたい．

空間回路網(略して，単に回路網とも言う)は4項組 $N=(G, \{S_x\}_{x\in G}, \mathcal{S}, T)$ で定められる．ここで，G は座標空間，S_x は座標 $x\in G$ に置かれた素子の状態集合である．$\mathcal{S}$ は直積集合

$$\mathcal{S}_\pi=\prod_{x\in G} S_x \qquad (1)$$

の空でない部分集合であり，$\mathcal{S}$ の要素を回路網の状態

† 岩手大学工学部情報工学科，盛岡市
Faculty of Engineering, Iwate University, Morioka-shi, 020 Japan

(または様相)と言い，写像 $T:\mathcal{S}\to\mathcal{S}$ を回路網の状態遷移関数と言う．特に T が線形写像で与えられる場合，回路網 N は線形であると言う．

様相 $f\in\mathcal{S}$ が座標 $x\in G$ でとる素子の状態を $f(x)$ で表すとき，状態遷移関数 $T:\mathcal{S}\to\mathcal{S}$ に対して

$$T_xf=(Tf)(x)\quad(^\forall f\in\mathcal{S})\tag{2}$$

で定まる写像 $T_x:\mathcal{S}\to S_x$ を座標 x における T の局所関数と言う．このとき，T を $T=\prod_{x\in G}T_x$ で表し，T の並列表示と言う．これに合わせて，様相を $f=\prod_{x\in G}f(x)$ と表示する場合もある．

次に，個々の局所関数に影響を与える G 上の素子の座標範囲を考える．すなわち，任意の $f,g\in\mathcal{S}$ に対して

$$^\forall y\in D(f(y)=g(y))\Rightarrow T_xf=T_xg\tag{3}$$

が成り立つような集合 $D\subseteqq G$ の中で，包含関係で極小なものを局所関数 T_x の台と言う．一般に，台は一意に定まるとは限らない．

二つの空間回路網 $N=(G,\{S_x\}_{x\in G},\mathcal{S},T)$，$N'=(G',\{s_{x'}\}_{x\in G'},\mathcal{S}',T')$ において，写像 $\psi:\mathcal{S}\to\mathcal{S}'$ が存在して次の関係式

$$\psi(Tf)=T'(\psi(f))\quad(^\forall f\in\mathcal{S})\tag{4}$$

が成立するとき，ψ を N から N' への遷移準同形写像と言う．ψ が更に単射のとき，遷移同形写像と言う．

以下，本論文では議論を簡単にするため，回路網は $\mathcal{S}=\mathcal{S}_\pi$ の場合のみを取り扱う．

空間回路網 $N=(G,\{S_x\}_{x\in G},\mathcal{S}_\pi,T)$ において，集合族 $\{G^{(\lambda)}\mid\lambda\in\Lambda\}$ が G の直和分割を与える場合に，$[x]$ で $x\in G$ の属する類を表す．すなわち，

$$[x]=G^{(\lambda)}\Longleftrightarrow x\in G^{(\lambda)}\tag{5}$$

とする．このとき，すべての $x\in G$ に対して局所関数 T_x の台 D_x として $D_x\subseteqq[x]$ なるものが存在するならば，回路網 N は回路網族 $\{N^{(\lambda)}\mid\lambda\in\Lambda\}$ の並列積であると言い，$N=\prod_{\lambda\in\Lambda}N^{(\lambda)}$ で表す．但し，$N^{(\lambda)}=(G^{(\lambda)},\{S_x\}_{x\in G^{(\lambda)}},\mathcal{S}_\pi{}^{(\lambda)},T^{(\lambda)})$ では，$\mathcal{S}_\pi{}^{(\lambda)}=\prod_{x\in G(\lambda)}S_x$ とし，写像 $T^{(\lambda)}:\mathcal{S}_\pi{}^{(\lambda)}\to\mathcal{S}_\pi{}^{(\lambda)}$ は写像 $T:\mathcal{S}_\pi\to\mathcal{S}_\pi$ を $\mathcal{S}_\pi{}^{(\lambda)}$ に制限したものとして得られる．

回路網 $N=(G,\{S_x\}_{x\in G},\mathcal{S}_\pi,T)$ が等質であるとは，すべての座標 $x\in G$ に対して $S_x=S$ であることを言う．更に，G が群構造をもつならば，$y\in G$ に対して，

$$(\sigma_yf)(x)=f(xy)\quad(^\forall x\in G,\ ^\forall f\in\mathcal{S}_\pi)\tag{6}$$

で定まる写像 $\sigma_y:\mathcal{S}_\pi\to\mathcal{S}_\pi$ を右移動作用素と言う．左移動作用素 ${}_y\sigma$ は $({}_y\sigma f)(x)=f(yx)$ で定義する．

回路網 $N=(G,\{S_x\}_{x\in G},\mathcal{S}_\pi,T)$ は等質とし，G は群とする．すべての $x\in G$ に対して，局所関数 T_x が $T_x=T_e\circ\sigma_x$ と書けるとき，回路網 N は右一様構造であると言う．左一様構造は $T_x=T_e\circ{}_x\sigma$ で定義される．ここで，$\circ$ は写像の合成を，e は群 G の単位元を表す．

次の命題は，一様構造線形空間回路網の基本的な特性化を与える結果である．但し，集合 X から集合 Y への写像全体を $F(X,Y)$ で表す．

[命題 1][4]　線形空間回路網 $N=(G,\{S_x\}_{x\in G},\mathcal{S}_\pi,T)$ は等質とし，G を有限群，K を可換体，$S_x=K(^\forall x\in G)$ とする．このとき，$\mathcal{S}_\pi=F(G,K)$ であり，次の二つの条件は同値である．

(a)　回路網 N は右(左)一様構造である．

(b)　状態遷移関数 $T:\mathcal{S}_\pi\to\mathcal{S}_\pi$ は，関数 $t\in F(G,K)$ が存在して，任意の $f\in\mathcal{S}_\pi$ に対して

$$(Tf)(x)=(t*f)(x)=\sum_{y\in G}t(xy^{-1})f(y)\tag{7}$$

$$((Tf)(x)=(t\bar{*}f)(x)=\sum_{y\in G}t(y^{-1}x)f(y))\tag{7$'$}$$

なる合成積形式で与えられる．　□

一般に $t\bar{*}f=f*t$ である．以下，上記命題の関数 t も局所関数と呼ぶが，混乱はないであろう．

3. 有限非可換群上のフーリエ変換

本章では，有限フーリエ変換の一般化である，有限非可換群上のフーリエ変換の定義を述べる．係数体は複素数体に限らない一般的な体で考える．以下の議論の詳細は文献(11)を参照されたい．

G を有限群(一般に可換群とは限らない)とし，その位数を $|G|$ で表す．また，K を可換体とし，$GL(n,K)$ で体 K を成分とする n 次正則行列全体のなす一般線形群を表す．群としての準同形写像 $\alpha:G\to GL(n,K)$ を群 G の(行列)表現と言う．n を表現 α の次数と言い，$d(\alpha)$ で表す．

以下，本論文では断りのない限り，体 K は有限群 G の分裂体とし†，その標数は0または位数 $|G|$ の約数でない素数とする．このとき，$|G|$ は体 K の零元ではなく，その逆元 $|G|^{-1}$ が K 内に存在する．

分裂体の条件としては次が知られている．

[命題 2][11]　有限群 G の指数を m とし††，体 K の標数は0または $|G|$ の約数でない素数とする．このとき，

† 既約表現 α が体 K を任意の拡大体に係数拡大しても既約であるとき，α は絶対既約と言う．G の任意の既約表現が絶対既約となるとき，K を G の分裂体と言う．

†† 有限群 G の任意の元 x に対して $x^m=e$ となる最小の自然数を G の指数と言う．ここで，e は G の単位元である．

体 K が1の原始 m 乗根を含むならば，K は G の分裂体である． □

従って，複素数体 C や $|G|$ の約数でない標数をもつ代数的閉体は分裂体である．有限体については次が成立する．

[命題3] p を素数とする．ガロア体 $GF(p^r)$ は G の指数 m が p^r-1 の約数ならば，G の分裂体であり，その標数 p は $|G|$ の約数でない．

(証明) a, b を整数とするとき，$a|b$ で a が b を割り切ることを示す．$GF(p^r)$ の要素はすべて方程式 $x^q-x=x(x^{q-1}-1)=0$ の根である．但し，$q=p^r$ である．$GF(p^r)$ は原始 $q-1$ 乗根をもつ．また，$p|m$ とすれば，$m|(p^r-1)$ より，$p|(p^r-1)$ となって矛盾する．よって，p は m の約数でない．更に，コーシー (Cauchy) の定理[12]から，$|G|$ の素因数はすべて指数 m の素因数となるので，p は $|G|$ の約数ではない．従って，命題2から，$GF(p^r)$ は G の分裂体である． □

群 G の既約な表現の全体において，互いに同値な表現を一つの類にまとめ，各類からそれぞれ一つの表現を代表元に選んだ集合を G の双対対象 (dual object) と言い，$\hat{G}$ で表す．$\hat{G}$ の濃度 $|\hat{G}|$ は有限で，G の共役類の数に等しく，次の等式

$$\sum_{\alpha\in\hat{G}} d(\alpha)^2=|G| \qquad (8)$$

が成立する．

既約表現 $\alpha\in\hat{G}$ が元 $x\in G$ でとる行列 $\alpha(x)$ の (i,j) 成分を $\alpha_{ij}(x)$ で表す．

[命題4] (既約表現成分の直交関係)[11] 既約表現 $\alpha,\beta\in\hat{G}$ に対して，

$$\sum_{x\in G}\alpha_{ij}(x)\beta_{kl}(x^{-1}) =(|G|/d(\alpha))\delta(\alpha,\beta)\delta(i,l)\delta(j,k) \qquad (9)$$

が成立する．ここで，δ はクロネッカーのデルタであり，$1\leqq i,j\leqq d(\alpha)$, $1\leqq k,l\leqq d(\beta)$ である． □

既約表現 $\alpha\in\hat{G}$ に対して，

$$\chi_\alpha(x)=\mathrm{tr}(\alpha(x)) \qquad (10)$$

で定まる関数 $\chi_\alpha\in F(G,K)$ を既約指標と言う．ここで，tr は行列のトレースを表す．

[命題5] (既約指標の直交関係)[11] 既約表現 $\alpha,\beta\in\hat{G}$ に対して，次式が成立する．

$$\sum_{x\in G}\chi_\alpha(x)\chi_\beta(x^{-1})=\delta(\alpha,\beta)|G| \qquad (11)$$

$$\sum_{\alpha\in\hat{G}}\chi_\alpha(x)\chi_\alpha(y^{-1})=\delta(\bar{x},\bar{y})(|G|/|\bar{x}|) \qquad (12)$$

ここで，$\bar{x}$ は x を含む群 G の共役類を表す． □

[命題6] (有限フーリエ変換公式) 関数 $f\in F(G,K)$ に対して，

$$\hat{f}(\alpha)=\sum_{x\in G}f(x)\alpha^T(x^{-1}) \quad ({}^\forall\alpha\in\hat{G}) \qquad (13)$$

で定まる行列を値にとる $\hat{G}$ 上の関数 $\hat{f}$ を考える．このとき，次の反転公式が成立する．

$$f(x)=|G|^{-1}\sum_{\alpha\in\hat{G}}d(\alpha)\mathrm{tr}(\hat{f}(\alpha)\alpha^T(x)) \quad ({}^\forall x\in G) \qquad (14)$$

ここで，$\alpha^T(x)$ は行列 $\alpha(x)$ の転置を表す．

(証明) 行列のトレースの性質を用いて

$$\begin{aligned}
&|G|^{-1}\sum_{\alpha\in\hat{G}}d(\alpha)\mathrm{tr}(\hat{f}(\alpha)\alpha^T(x))\\
&=|G|^{-1}\sum_{\alpha\in\hat{G}}d(\alpha)\mathrm{tr}\Bigl(\sum_{y\in G}f(y)\alpha^T(y^{-1})\alpha^T(x)\Bigr)\\
&=|G|^{-1}\sum_{y\in G}f(y)\sum_{\alpha\in\hat{G}}d(\alpha)\mathrm{tr}(\alpha(y^{-1})\alpha(x))\\
&=|G|^{-1}\sum_{y\in G}f(yx)\sum_{\alpha\in\hat{G}}d(\alpha)\mathrm{tr}(\alpha(x^{-1})\alpha(y^{-1})\alpha(x))\\
&=|G|^{-1}\sum_{y\in G}f(yx)\sum_{\alpha\in\hat{G}}\chi_\alpha(e)\chi_\alpha(y^{-1})
\end{aligned}$$

となる．ここで，G の単位元 e の共役類が $\bar{e}=\{e\}$ となることと，式(12)を用いれば

$$=|G|^{-1}\sum_{y\in G}f(yx)(|G|/|\bar{e}|)\delta(\bar{e},\bar{y})=f(x)$$

を得る． □

式(13)で定まる写像 $\tau: f\to\hat{f}$ を有限フーリエ変換，式(14)の写像 $\tau^{-1}: \hat{f}\to f$ を有限フーリエ逆変換と言う．

式(14)の右辺を展開して，次式を得る．

$$f(x)=|G|^{-1}\sum_{\alpha\in\hat{G}}d(\alpha)\sum_{i,j=1}^{d(\alpha)}\hat{f}^{(i,j)}(\alpha)\alpha_{ij}(x) \qquad (15)$$

ここで，$\hat{f}^{(i,j)}(\alpha)$ は行列 $\hat{f}(\alpha)$ の (i,j) 成分である．

次の命題は容易に示せる．

[命題7] 関数 $f,g\in F(G,K)$ に対する合成積の有限フーリエ変換は

$$(f*g)\hat{}\,(\alpha)=\hat{f}(\alpha)\hat{g}(\alpha) \quad ({}^\forall\alpha\in\hat{G}) \qquad (16)$$

$$(f\bar{*}g)\hat{}\,(\alpha)=\hat{g}(\alpha)\hat{f}(\alpha) \quad ({}^\forall\alpha\in\hat{G}) \qquad (16)'$$

で与えられる． □

自然な方法で $F(G,K)$ は K 上の線形空間となり，合成積の定義された $F(G,K)$ は群環となる．また，体 K 上の n 次正方行列全体が作る行列環を $\mathrm{Mat}(n,K)$ で表し，関数 $\hat{f}$ と直積行列環 $\otimes_{\alpha\in\hat{G}}\mathrm{Mat}(d(\alpha),K)$ の要素とを同一視する．このとき，命題6と命題7から，有

限フーリエ変換 τ は群環 $F(G,K)$ から直積行列環 $\otimes_{\alpha\in\hat{G}}\mathrm{Mat}(d(\alpha),K)$ への K 上の多元環としての同形写像である．

群 G を非可換群とすることによって生ずるフーリエ変換の特異性は二つある．一つは，周波数領域に対応する双対対象 $\hat{G}$ が群構造をもたなくなることであり，他の一つは，合成積のフーリエ変換にスカラ積が対応せず，行列積が対応することである．

4. 線形空間回路網の遷移準同形性

ここでは，一様構造線形空間回路網の遷移準同形性の解析に前章の結果を用いる．

[命題8] 命題1の右(左)一様構造線形空間回路網 N において，有限フーリエ変換 τ は回路網 N から並列積回路網 $\prod_{\alpha\in\hat{G}} N^{(\alpha)}$ への遷移同形写像である．ここで，各 $N^{(\alpha)}$ は

$$N^{(\alpha)}=(\{\alpha\},\{S^{(\alpha)}\},S^{(\alpha)},T^{(\alpha)})$$
$$S^{(\alpha)}=\mathrm{Mat}(d(\alpha),K)$$
$$T^{(\alpha)}(f^{(\alpha)})=\hat{t}(\alpha)f^{(\alpha)} \quad ({}^{\forall}f^{(\alpha)}\in S^{(\alpha)})$$
$$(T^{(\alpha)}(f^{(\alpha)})=f^{(\alpha)}\hat{t}(\alpha) \quad ({}^{\forall}f^{(\alpha)}\in S^{(\alpha)}))$$

で定義される線形回路網である．

(証明) 右一様構造について示す．左一様構造についても同様である．命題1と命題7から，

$$(\tau(Tf))(\alpha)=(t*f)\hat{}(\alpha)=\hat{t}(\alpha)\hat{f}(\alpha)=T^{(\alpha)}(\hat{f}(\alpha))$$

となる．これに，並列積回路網における状態遷移関数が $\prod_{\alpha\in\hat{G}} T^{(\alpha)}$ と並列表示されることを用いると，

$$\tau(Tf)=\prod_{\alpha\in\hat{G}}(T^{(\alpha)}(\hat{f}(\alpha)))=\left(\prod_{\alpha\in\hat{G}}T^{(\alpha)}\right)(\hat{f})$$
$$=\left(\prod_{\alpha\in\hat{G}}T^{(\alpha)}\right)(\tau(f))$$

となって，τ は遷移準同形写像である．τ の単射性は明らか． □

G を有限群，$\Omega\subseteq\hat{G}$ とする．0_α で $d(\alpha)$ 次の零行列を表す．$h=\otimes_{\alpha\in\hat{G}}\mathrm{Mat}(d(\alpha),K)$ に対して，

$$h'(\alpha)=\begin{cases}h(\alpha) & (\alpha\in\Omega)\\ 0_\alpha & (\alpha\notin\Omega)\end{cases} \tag{17}$$

で定まる元 $h'\in\otimes_{\alpha\in\hat{G}}\mathrm{Mat}(d(\alpha),K)$ を対応させる写像を $\mathrm{Proj}[\Omega\mid\hat{G}]: h\to h'$ で表す．同じく，h に対して

$$h''(\alpha)=h(\alpha) \quad (\alpha\in\Omega) \tag{18}$$

で定まる元 $h''\in\otimes_{\alpha\in\Omega}\mathrm{Mat}(d(\alpha),K)$ を対応させる写像を $\mathrm{Res}[\Omega\mid\hat{G}]: h\to h''$ で表す．

[命題9] 命題1の一様構造線形空間回路網 N において，$\Omega\subseteq\hat{G}$ とする．このとき，写像 $\mathrm{Proj}[\Omega\mid\hat{G}]\circ\tau$ は回路網 N から並列積回路網 $\prod_{\alpha\in\hat{G}} N^{(\alpha)}$ への遷移準同形写像である．但し，$N^{(\alpha)}$ は命題8で与えられる線形回路網である．

(証明) 命題8の証明と同様に，$\alpha\in\Omega$ の場合は

$$((\mathrm{Proj}[\Omega\mid\hat{G}]\circ\tau)(Tf))(\alpha)$$
$$=(t*f)\hat{}(\alpha)=\hat{t}(\alpha)\hat{f}(\alpha)=T^{(\alpha)}(\hat{f}(\alpha))$$
$$=T^{(\alpha)}(((\mathrm{Proj}[\Omega\mid\hat{G}]\circ\tau)(f))(\alpha))$$

となる．$\alpha\notin\Omega$ の場合も

$$((\mathrm{Proj}[\Omega\mid\hat{G}]\circ\tau)(Tf))(\alpha)=0_\alpha$$
$$=T^{(\alpha)}(((\mathrm{Proj}[\Omega\mid\hat{G}]\circ\tau)(f))(\alpha))$$

となるので，並列表示として

$$(\mathrm{Proj}[\Omega\mid\hat{G}]\circ\tau)(Tf)$$
$$=\prod_{\alpha\in\hat{G}}(T^{(\alpha)}(((\mathrm{Proj}[\Omega\mid\hat{G}]\circ\tau)(f))(\alpha))$$
$$=\left(\prod_{\alpha\in\hat{G}}T^{(\alpha)}\right)((\mathrm{Proj}[\Omega\mid\hat{G}]\circ\tau)(f))$$

を得る． □

[系1] 命題9と同じ条件のもとで，写像 $\mathrm{Res}[\Omega\mid\hat{G}]\circ\tau$ は回路網 N から並列積回路網 $\prod_{\alpha\in\Omega} N^{(\alpha)}$ への遷移準同形写像である．

[命題10] 命題1の一様構造線形空間回路網 N において，$\Omega\subseteq\hat{G}$ とする．このとき，

$$\psi=\tau^{-1}\circ\mathrm{Proj}[\Omega\mid\hat{G}]\circ\tau \tag{19}$$
$$T'=\psi\circ T \tag{20}$$

とおけば，写像 ψ は回路網 N から線形回路網 $N'=(G,\{S_x\}_{x\in G},\mathcal{S}_\pi,T')$ への遷移準同形写像である．

(証明) 命題9の証明より，任意の $f\in\mathcal{S}_\pi$ に対して

$$\psi(Tf)=(\tau^{-1}\circ\mathrm{Proj}[\Omega\mid\hat{G}]\circ\tau\circ T)(f)$$
$$=\left(\tau^{-1}\circ\left(\prod_{\alpha\in\hat{G}}T^{(\alpha)}\right)\circ\mathrm{Proj}[\Omega\mid\hat{G}]\circ\tau\right)(f)$$
$$=\left(\tau^{-1}\circ\left(\prod_{\alpha\in\hat{G}}T^{(\alpha)}\right)\circ\mathrm{Proj}[\Omega\mid\hat{G}]\circ\tau\right.$$
$$\left.\circ\tau^{-1}\circ\mathrm{Proj}[\Omega\mid\hat{G}]\circ\tau\right)(f)$$
$$=(\tau^{-1}\circ\mathrm{Proj}[\Omega\mid\hat{G}]\circ\tau\circ T$$
$$\circ\tau^{-1}\circ\mathrm{Proj}[\Omega\mid\hat{G}]\circ\tau)(f)$$
$$=(\psi\circ T\circ\psi)(f)=T'(\psi f)$$

となって，ψ は遷移準同形写像である． □

以上の命題は，通常の線形フィルタの帯域制限に対応しており，回路網の遷移準同形性を保ちながら線形空間回路網を変更する手段を与えている．

5. 一様構造線形空間回路網のフーリエ解析

ここでは，有限フーリエ変換を用いて，一様構造線形空間回路網の性質をより詳細に検討する．以下，命題1の回路網を念頭に置いた場合，様相集合 $\mathcal{S}_\pi$ は $\mathcal{S}_\pi = F(G,K)$ であることに留意されたい．

次は明らかである．

[命題11] 任意の $f \in F(G,K)$ に対して

(i) $(\sigma_x f)\hat{}(\alpha) = \hat{f}(\alpha)\alpha^T(x) \quad (\alpha \in \hat{G})$ (21)

(ii) $({}_x\sigma f)\hat{}(\alpha) = \alpha^T(x)\hat{f}(\alpha) \quad (\alpha \in \hat{G})$ (22)

が成立する． □

これから，移動作用素に対して

$$((\sigma_x t) * f)\hat{}(\alpha) = \hat{t}(\alpha)\alpha^T(x)\hat{f}(\alpha) = (t * ({}_x\sigma f))\hat{}(\alpha) \quad (23)$$

となるので，命題1における局所関数 t の右移動は様相 f の左移動に等価であることがわかる．

群 G の元 y に対して

$$u_y(x) = \begin{cases} 1 & (x=y \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \quad (24)$$

で関数 $u_y \in F(G,K)$ を定める．明らかに，集合 $\{u_y \mid y \in G\}$ は線形空間 $F(G,K)$ の基底をなす．

[命題12] 次の関係が成立する．

(i) $u_x * u_y = u_{xy}$ (25)

(ii) $u_e * f = f * u_e = f \quad (\forall f \in F(G,K))$ (26)

(iii) $\hat{u}_e(\alpha) = I_\alpha$ (27)

(iv) $\hat{u}_x(\alpha) = \alpha^T(x^{-1})$ (28)

(v) $\hat{\chi}_\beta(\alpha) = \delta(\alpha,\beta)(|G|/d(\alpha))I_\alpha$ (29)

(vi) $(\beta_{ij})\hat{}(\alpha) = \delta(\alpha,\beta)(|G|/d(\alpha))E_\alpha{}^{(i,j)}$ (30)

但し，I_α は $d(\alpha)$ 次の単位行列を，$E_\alpha{}^{(i,j)}$ は (i,j) 成分が1でその他の成分が0となる $d(\alpha)$ 次の正方行列（すなわち，行列単位）を表す．

(証明) (i)〜(iv)は明らか．(v)を示す．

$$\hat{\chi}_\beta(\alpha) = \sum_{x \in G} \chi_\beta(x)\alpha^T(x^{-1})$$

$$= \sum_{x \in G}\left(\sum_i \beta_{ii}(x)\right)\alpha^T(x^{-1})$$

命題4を用いて

$$= \delta(\alpha,\beta)(|G|/d(\alpha))I_\alpha$$

を得る．(vi)も同様に，命題4を用いて

$$(\beta_{ij})\hat{}(\alpha) = \sum_{x \in G} \beta_{ij}(x)\alpha^T(x^{-1})$$

$$= (\delta(\alpha,\beta)(|G|/d(\alpha))E_\alpha{}^{(i,j)}$$

を得る． □

式(25)から，対応：$x \to u_x$ で群 G は群環 $F(G,K)$ に自然に埋め込まれ，式(26)から，u_e が群環 $F(G,K)$ の単位元であることがわかる．u_e は単位インパルス関数に対応する．$t * u_e$ が命題1の右一様構造線形回路網 N の単位インパルス応答であり，式(27)を用いれば

$$(Tu_e)\hat{}(\alpha) = (t * u_e)\hat{}(\alpha) = \hat{t}(\alpha)$$

となって，単位インパルス応答のフーリエ変換が一様構造線形回路網 N のシステム関数 $\hat{t}$ を与える．また，式(29)から，既約指標 χ_β は直積行列環 $\otimes_{\alpha\in\hat{G}}\mathrm{Mat}(d(\alpha),K)$ の単位元 $I = \prod_{\alpha\in\hat{G}} I_\alpha$ を成分 β に射影したところの $\mathrm{Proj}[\{\beta\} \mid \hat{G}]I$ に定数倍を除いて対応することがわかる．更に，式(30)は式(15)におけるフーリエ展開基底 $\{\alpha_{ij}\}$ の直積行列環 $\otimes_{\alpha\in\hat{G}}\mathrm{Mat}(d(\alpha),K)$ における意味付けを与える．

[命題13] 次の関係が成立する．

(i) $u_e(x) = \sum_{\alpha\in\hat{G}} (d(\alpha)/|G|)\chi_\alpha(x)$ (31)

(ii) $u_y(x) = \sum_{\alpha\in\hat{G}} (d(\alpha)/|G|)\chi_\alpha(xy^{-1})$ (32)

(iii) $\alpha_{ij} * \beta_{kl} = \delta(\alpha,\beta)\delta(j,k)(|G|/d(\alpha))\alpha_{il}$ (33)

(iv) $\chi_\alpha * \chi_\beta = \delta(\alpha,\beta)(|G|/d(\alpha))\chi_\alpha$ (34)

(証明) (i)を示す．式(31)の右辺の有限フーリエ変換は，式(27)と(29)を用いて

$$\left(\sum_{\alpha\in\hat{G}} (d(\alpha)/|G|)\chi_\alpha\right)\hat{}(\beta)$$

$$= \sum_{\alpha\in\hat{G}} (d(\alpha)/|G|)\hat{\chi}_\alpha(\beta)$$

$$= I_\beta = \hat{u}_e(\beta)$$

を得る．有限フーリエ変換の全単射性から式(31)が成立する．(ii)は，(i)と $u_y(x) = u_e(xy^{-1})$ から明らか．(iii)は，命題4を用いて，

$$(\alpha_{ij} * \beta_{kl})(x)$$

$$= \sum_{y\in G} \alpha_{ij}(xy^{-1})\beta_{kl}(y)$$

$$= \sum_{y\in G}\sum_{p=1}^{d(\alpha)} \alpha_{ip}(x)\alpha_{pj}(y^{-1})\beta_{kl}(y)$$

$$= \delta(\alpha,\beta)\delta(j,k)(|G|/d(\alpha))\alpha_{il}(x)$$

を得る．(iv)は(iii)から直ちに求まる． □

$\alpha \neq \beta$ のとき，式(33)，(34)は群環 $F(G,K)$ の零因子の例を与えている．

関数 $f \in F(G,K)$ は，群 G の共役類において一定値をとるとき，類関数と言う．トレースの性質から，既約指標は類関数である．

[命題14] 命題1の局所関数 $t \in F(G,K)$ に対する次の4条件は，互いに同等である．

（i） t は類関数である．

（ii） $t(xy)=t(yx)$ （$^\forall x, y\in G$）

（iii） $t*f=f*t$ （$^\forall f\in F(G,K)$）

（iv） t は既約指標によって，

$$t=\sum_{\alpha\in\hat{G}} a_\alpha \chi_\alpha$$

と展開される．但し，$a_\alpha\in K$ である．

（証明） （i），（ii），（iii）の同等性は明らか．既約指標は類関数であるから，（iv）⇒（i）が成立する．類関数全体は線形空間 $F(G,K)$ の部分線形空間をなすが，その次元は共役類の個数に等しく，その次元は $|\hat{G}|$ に等しい．命題5から，集合 $\{\chi_\alpha \mid \alpha\in\hat{G}\}$ は類関数の作る部分線形空間の基底をなすので，これから（i）⇒（iv）が示された． □

上記命題の（iii）から，類関数の全体が群環 $F(G,K)$ の中心をなすことがわかる．G が有限アーベル群であれば，$\hat{G}$ は G と同形な群構造（指標群）をもち，$|\hat{G}|=|G|$ が成立して，既約指標の全体 $\{\chi_\alpha \mid \alpha\in\hat{G}\}$ が $F(G,K)$ の基底をなす．

命題14の（iv）と式(29)から，非可換群では局所関数 t が類関数の場合，その機能は比較的単純である．そこで，可換性が成立するような，もう少し広い局所関数の族を次に示そう．そのためには，様相集合を制限する必要がある．今，$\{\alpha_{ii} \mid 1\leq i\leq d(\alpha),\ \alpha\in\hat{G}\}$ で張られる $F(G,K)$ の部分空間を $D(G,K)$ で表す．

［命題15］ 命題1の局所関数 $t\in F(G,K)$ に対する次の条件は同等である．

（i） $t\in D(G,K)$

（ii） $t*f=f*t$ （$^\forall f\in D(G,K)$）

（証明） 式(33)から $\alpha_{ii}*\beta_{jj}=\beta_{jj}*\alpha_{ii}$ が成立するので，（i）⇒（ii）は明らか．逆を示す．式(15)より，

$$t=|G|^{-1}\sum_{\beta\in\hat{G}} d(\beta)\sum_{i,j}\hat{t}^{(i,j)}(\beta)\beta_{ij}$$

と展開できる．従って，式(33)より

$$t*\alpha_{kk}=|G|^{-1}\sum_{\beta\in\hat{G}} d(\beta)\sum_{i,j}\hat{t}^{(i,j)}(\beta)\beta_{ij}*\alpha_{kk}$$

$$=\sum_i \hat{t}^{(i,k)}(\alpha)\alpha_{ik}$$

を得る．同様に，

$$\alpha_{kk}*t=\sum_i \hat{t}^{(k,i)}(\alpha)\alpha_{ki}$$

である．$t*\alpha_{kk}=\alpha_{kk}*t$ が成立するので，$i\neq k$ ならば $\hat{t}^{(i,k)}=0$ となる．これは，$t\in D(G,K)$ を意味する． □

式(33)から，$\alpha_{ii}*\beta_{jj}\in D(G,K)$ が成立し，$D(G,K)$ は群環 $F(G,K)$ の部分環（すなわち，可換子環）をなすことがわかる．

最後に，G が n 個の有限群 $\{G_i\}$ の直積群として，$G=G_1\otimes\cdots\otimes G_n$ で与えられる場合を考えよう．このとき，G の既約表現 α と既約指標 χ_α は

$$\alpha(x)=\bigotimes_{k=1}^{n}\alpha_k(x_k) \tag{35}$$

$$\chi_\alpha(x)=\prod_{k=1}^{n}\chi_{\alpha k}(x_k) \tag{36}$$

で与えられる．但し，$x=(x_1,\cdots,x_n)\in G$，$x_k\in G_k$，$\alpha_k\in\hat{G}_k$ であり，式(35)の $\otimes$ は行列のクロネッカー積を表す．また，$|G|=\prod_k |G_k|$，$|\hat{G}|=\prod_k|\hat{G}_k|$ である．よって，$\hat{G}$ の元を $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ で表すと，関数 $f\in F(G,K)$ の有限フーリエ変換は

$$\hat{f}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$$
$$=\sum_{x1\in G1}\cdots\sum_{xn\in Gn} f(x_1,\cdots,x_n)\bigotimes_{k=1}^{n}\alpha_k{}^T(x_k{}^{-1}) \tag{37}$$

で与えられる．一方，式(35)から，行列 $\alpha(x)$ の (i,j) 成分 $\alpha_{ij}(x)$ は $i=(i_1,\cdots,i_n)$，$j=(j_1,\cdots,j_n)$ $(1\leq i_k,\ j_k\leq d(\alpha_k))$ に対して，

$$\alpha_{ij}(x)=\prod_{k=1}^{n}\alpha_k{}^{(ik,jk)}(x_k) \tag{38}$$

と表される．ここで，$\alpha_k{}^{(ik,jk)}(x_k)$ は行列 $\alpha_k(x_k)$ の (i_k,j_k) 成分である．また，$d(\alpha)=\prod_k d(\alpha_k)$ となるので，この場合の反転公式はこれらを式(15)に代入して得られる．従って，行列の次数は大きくなるが，直積群上の一様構造線形空間回路網についても同様な解析が可能である．

6. むすび

本論文では，有限非可換群上に定義された一様構造線形空間回路網の性質を有限フーリエ変換を用いて検討し，線形空間回路網の遷移準同形性や並列分解性などの関係を明らかにした．解析に用いた有限フーリエ変換は，係数体を複素数体に限らない有限非可換群上の一般的なフーリエ変換である．その結果，アーベル群上に定義される通常の合成積形式の線形システムと対比した形で，類似的な性質と特異的な性質とが明確化された．しかしながら，非可換群であるという制約は理論展開をかなり難しくしているのも事実である．G が有限アーベル群であれば，G は巡回群の直和に同形で，双対集合 $\hat{G}$ も G と同形な群構造をもつという著

しい性質が成立するのに対して，非可換群では成立しないからである．従って，今後は既約表現が決定されている対称群や交代群などに G を特殊化して，更に深い検討を加えていくことが課題である．

文　献

(1) Aladyev V.: "Survey of research in the theory of homogeneous structures and their applications", Math. Biosci., **22**, pp. 121-154 (1974).

(2) 五十嵐彰，小川英光，飯島泰蔵："線形空間回路網理論の位相解析的基礎づけ"，信学論(C)，**53-C**, 6, pp. 393-401 (1970-06).

(3) 渡辺孝志，野口正一："空間回路網の基礎理論—モデル化と位相的特性化—"，信学論(D)，**62-D**, 4, pp. 251-258 (1979-04).

(4) 渡辺孝志，野口正一："一様構造線形空間回路網の代数特性化"，信学論(D)，**62-D**, 4, pp. 243-250 (1979-04).

(5) 渡辺孝志，野口正一："オートマトンと空間回路網の一様分解について"，信学論(D)，**63-D**, 3, pp. 209-216 (1980-03).

(6) 渡辺孝志："空間回路網族の写像空間的性質"，信学論(D-I)，**J75-D-I**, 3, pp. 196-198 (1992-03).

(7) Barto A. G.: "Gellular automata as models of natural systems", Doctoral Dissertation, Comput. Sci., Michigan University (1975).

(8) Lechner R. Y.: "Harmonic analysis of switching functions", Recent Developments in Switching Theory, ed. Mahkopadhyay A., Academic Press (1971).

(9) 小川英光，五十嵐彰，飯島泰蔵："Dyadic 表現による線形空間回路網理論の展開"，信学論(C)，**54-C**, 1, pp. 58-65 (1971-01).

(10) Karpovsky M. G. and Trachtenberg E. A.: "Some optimization problems for convolution systems over finite groups", Inform. and Cont. 34, pp. 227-247 (1977).

(11) Dornhoff L.: "Group representation theory Part A", Marcel Dekker (1971).

(12) 鈴木通夫："群論(上)"，岩波書店 (1977).

(平成 4 年 1 月 24 日受付，5 月 22 日再受付)

渡辺　孝志

昭 44 東北大・工・通信卒．昭 46 同大大学院修士課程了．昭 47(株)日立製作所入社．昭 55 同大大学院博士課程了．工博．同年岩手大・工・情報助手．現在，同助教授．この間，パターンの学習認識，集積回路の CAD システム，セル構造オートマトン，画像処理の研究に従事．情報処理学会，計測自動制御学会，日本リモートセンシング学会各会員．