

## 水平な等温加熱回転円板上の熱流動解析\*

廣瀬 宏一<sup>\*1</sup>, 横山 孝男<sup>\*2</sup>, 大内 雅樹<sup>\*1</sup>Numerical Study of Convective Heat Transfer  
on the Horizontal Isothermal Rotating Disk

Koichi HIROSE, Takao YOKOYAMA and Masaki OUCHI

A numerical analysis of the transient convective flow and heat transfer on a horizontal isothermal rotating disk is presented. Simulation is carried out by solving the axisymmetric Navier-Stokes equation adhering to the Boussinesq approximation coupled to the energy equation for three Rayleigh numbers  $Ra=8.4\times 10^3$ ,  $6.7\times 10^4$ , and  $5.4\times 10^5$ , and varying Reynolds number (up to  $1.03\times 10^4$ ) as parameters. This paper describes isotherms, flow patterns on the isothermal rotating disk, and velocity vectors at the  $r-z$  plane, as well as local heat transfer profile and the comparison of the average Nusselt numbers to Wagner's theoretical approximation. Numerical results demonstrate that the transient mixed convection flow and heat transfer take a minimum value by a certain Reynolds number at given  $Ra$ .

**Key Words:** Convective Heat Transfer, Axisymmetric Flow, Numerical Analysis, Isothermal Rotating Disk, Adapted Limit of Wagner's Approximation

## 1. 緒 言

加熱回転円板からの熱伝達に関する研究は、古くは回転円板に対する Kármán による境界層近似<sup>(1)</sup>を基礎として Wagner により等温加熱回転円板の平均熱伝達率が理論的に求められている<sup>(2)</sup>。また加熱回転円板からの物質伝達および熱伝達についてナフタリンを用いて Kreith ら<sup>(3)</sup>が、さらにタービュレンスプロモータを用いた回転円板の伝熱促進について島田ら<sup>(4)</sup>が実験的に研究を行い伝熱特性を調べている。しかしそれらはいずれも、境界層理論が成立するような領域での円板全体の平均熱伝達率に関するものが主である。こうした加熱回転円板上の熱流動は、円板の加熱による上昇流と回転に伴う下降流とが複合する複雑な流れになることから、加熱回転円板上の熱流動を解析した例は少ない<sup>(5)</sup>。加熱回転円板からの熱伝達問題は、高性能なモータのロータ部の冷却促進など、今日的な問題として再び現れてきている<sup>(6)(7)</sup>。こうした冷却促進のためにも加熱回転円板上の熱流動と熱伝達のメカニズムを解明することは重要である。

本報では加熱回転円板の熱伝達に関する基礎的な研究として、水平な等温加熱回転円板を取り上げ、レイノルズ数および回転によるレイノルズ数などをパラメータとして変化させて数値的に解析した。これにより加熱回転円板上の熱流動、さらに局所および平均熱伝達特性を明らかにし、有効な知見を得たのでそれを報告する。

## おもな記号

- $a$ : 温度伝導率
- $c_p$ : 比熱
- $D$ : 加熱回転円板の直径
- $g$ : 重力の加速度
- $Gr$ : グラスホフ数  $= g\beta(T_w - T_\infty)R^3/\nu^2$
- $h$ : 热伝達率
- $k$ : 热伝導率
- $Nu$ : ヌッセルト数  $= hR/k$
- $\overline{Nu}$ : 平均ヌッセルト数
- $Pr$ : プラントル数  $= \nu/a$
- $r$ : 半径方向座標
- $r_L$ : 半径方向計算領域
- $R$ : 加熱回転円板の半径

\* 1994年5月19日 第31回日本伝熱シンポジウムにおいて講演、原稿受付 1994年5月30日。

<sup>\*1</sup> 正員、岩手大学工学部 (〒020 盛岡市上田4-3-5)。

<sup>\*2</sup> 正員、山形大学工学部 (〒992 米沢市城南4-3-16)。

$Ra$	レーレー数	$= Pr \cdot Gr$
$Re$	レイノルズ数	$= R^2 \omega / \nu$
$n$	円板の回転数	
$t$	時間	
$T$	温度	
$u, v, w$	$r, \phi, z$ 方向速度	
$z$	高さ方向座標	
$z_L$	高さ方向計算領域	
$\beta$	体膨張係数	
$\rho$	密度	
$\nu$	動粘性係数	
$\phi$	周方向座標	
$\psi$	流線関数	
$\omega$	円板の回転角速度	
$\Omega$	$r-z$ 面における渦度	
添字		
+	無次元数	
$w$	加熱回転円板	
$\infty$	周囲(無限遠として)	

## 2. 解析

**2・1 理論解析** 図1に数値解析モデルおよび座標系を示した。図1に示すように座標系は回転する円板の中心を原点とする極座標系を用いた。物理的には静止した温度  $T_\infty$  の空气中に置かれた水平な断熱平板の一部に、加熱できる回転円板を組み込んだものに対応する。ある時刻  $t=0$ において、円板を一定温度条件で加熱し、さらに一定の角速度  $\omega$  で回転させるものとする。回転円板上には加熱による上昇流と回転による下降流が複合する流れが徐々に形成される。図1に示すように、流れにおいて速度分布などの物理量は、周方向ではどの位置でも同形であり、各物理量の  $\phi$  方向

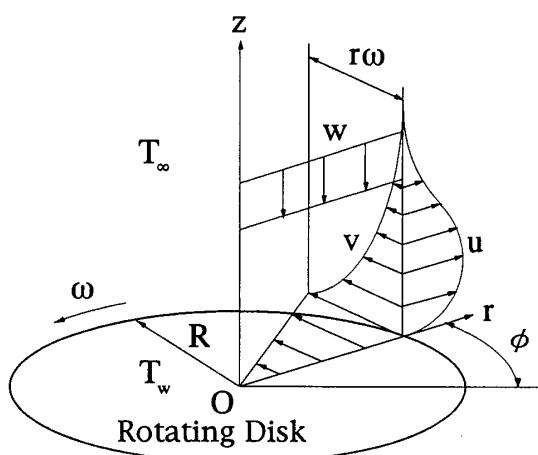


図1 数値解析モデルおよび座標系

での変化はないものとした。ただし、 $\phi$  方向での速度成分  $v$  は考慮している。

解析を進めるにあたり次の仮定を導入する。

- (1) 流れは層流である。
- (2)  $k, c_p$  および  $\nu$  などの物性値は一定とする。
- (3) Boussinesq 近似が成立する。

解析にあたり基礎式を以下に示す無次元数を用いて無次元化する。

$$\left. \begin{aligned} u^+ &= \frac{Ru}{a}, v^+ = \frac{Rv}{a}, w^+ = \frac{Rw}{a}, \\ r^+ &= \frac{r}{R}, z^+ = \frac{z}{R}, \Omega^+ = \frac{\Omega R^2}{\nu}, \\ t^+ &= \frac{at}{R^2}, T^+ = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}, \\ Re &= \frac{R^2 \omega}{\nu}, Pr = \frac{\nu}{a}, \\ Gr &= \frac{g \beta (T_w - T_\infty) R^3}{\nu^2}, \\ Ra &= Pr \cdot Gr \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(1)$$

図1に示したような極座標表示を用いれば、基礎式は上記仮定のもとで以下のように表せる。

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \Omega^+}{\partial t^+} + u^+ \left( \frac{\partial \Omega^+}{\partial r^+} - \frac{\Omega^+}{r^+} \right) \\ &+ w^+ \frac{\partial \Omega^+}{\partial z^+} - \frac{2v^+}{r^+} \frac{\partial v^+}{\partial z^+} \\ &= Pr \left( \frac{\partial^2 \Omega^+}{\partial r^{+2}} + \frac{1}{r^+} \frac{\partial \Omega^+}{\partial r^+} - \frac{\Omega^+}{r^{+2}} + \frac{\partial^2 \Omega^+}{\partial z^{+2}} \right) \\ &- Pr Ra \frac{\partial T^+}{\partial r^+} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial v^+}{\partial t^+} + u^+ \left( \frac{\partial v^+}{\partial r^+} + \frac{v^+}{r^+} \right) + w^+ \frac{\partial v^+}{\partial z^+} \\ &= Pr \left( \frac{\partial^2 v^+}{\partial r^{+2}} + \frac{1}{r^+} \frac{\partial v^+}{\partial r^+} - \frac{v^+}{r^{+2}} + \frac{\partial^2 v^+}{\partial z^{+2}} \right) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(3)$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial T^+}{\partial t^+} + u^+ \frac{\partial T^+}{\partial r^+} + w^+ \frac{\partial T^+}{\partial z^+} \\ &= \frac{\partial^2 T^+}{\partial r^{+2}} + \frac{1}{r^+} \frac{\partial T^+}{\partial r^+} + \frac{\partial^2 T^+}{\partial z^{+2}} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(4)$$

$$- r^+ \Omega^+ = \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial r^{+2}} - \frac{1}{r^+} \frac{\partial \psi^+}{\partial r^+} + \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial z^{+2}} \quad \dots\dots\dots(5)$$

上式中  $\psi^+, \Omega^+$  はそれぞれ流線関数および  $r-z$  面における渦度を表し、 $\psi^+$  は次のように定義する。

$$u^+ = -\frac{1}{r^+} \frac{\partial \psi^+}{\partial z^+}, w^+ = \frac{1}{r^+} \frac{\partial \psi^+}{\partial r^+} \quad \dots\dots\dots(6)$$

初期条件および境界条件は以下に示すとおりである。ここで空気の流入流出を伴う  $r^+ = r_L^+$  および  $z^+ = z_L^+$  における  $\Omega^+$  の値は渦度の定義式を用いて算出した。また  $r^+ = r_L^+$  および  $z^+ = z_L^+$  において、空気が流入する場合には  $T^+ = 0$  とし、流出する場合には、 $r^+ = r_L^+$  では  $\partial T^+ / \partial r^+ = 0$ ,  $z^+ = z_L^+$  では  $\partial T^+ / \partial z^+ = 0$  とした。

なお、空気の流入・流出は  $r^+ = r_L^+$  では円板面に平行に、 $z^+ = z_L^+$  では円板の中心軸に平行に行われるとして解析した。

$$t^+ = 0 : T^+ = \psi^+ = Q^+ = v^+ = 0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$r^+ = 0 : \frac{\partial T^+}{\partial r^+} = 0, \psi^+ = Q^+ = v^+ = 0$$

$$r^+ = r_L^+ : \frac{\partial \psi^+}{\partial r^+} = 0, \frac{\partial v^+}{\partial r^+} = 0$$

$$Q^+ = -\frac{1}{r^+} \left( \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial r^{+2}} - \frac{1}{r^+} \frac{\partial \psi^+}{\partial r^+} + \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial z^{+2}} \right) \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$z^+ = 0 : \psi^+ = 0, Q^+ = Q_w^+,$$

$$(0 \leq r^+ \leq 1), v^+ = \frac{R^2}{a} r^+ \omega, T^+ = 1$$

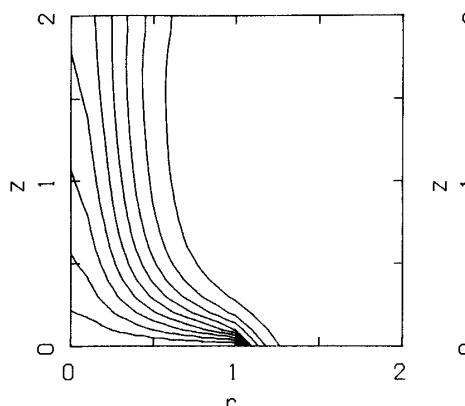
$$(1 < r^+ \leq r_L^+) v^+ = 0, \frac{\partial T^+}{\partial z^+} = 0$$

$$z^+ = z_L^+ : \frac{\partial \psi^+}{\partial z^+} = 0, v^+ = 0$$

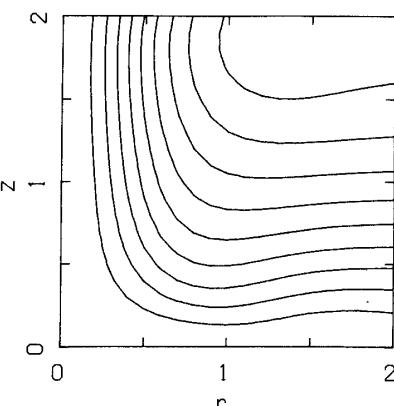
$$Q^+ = -\frac{1}{r^+} \left( \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial r^{+2}} - \frac{1}{r^+} \frac{\partial \psi^+}{\partial r^+} + \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial z^{+2}} \right)$$

.....(9)

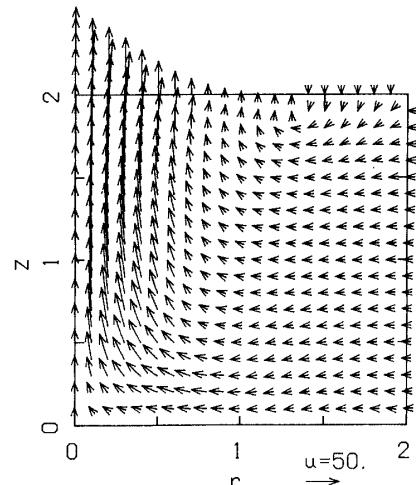
**2・2 数値解析** 解析にあたっては  $r_L^+$  および  $z_L^+$  は 1.0, 2.0, 3.0 などの値を用いて数値解析を行ってみたが、円板上の  $Nu$  数分布に大きな差はなかった。しかし、 $r_L^+ = z_L^+ = 1.0$  の場合には  $r_L^+ = z_L^+ = 2.0$  および 3.0 とした場合と、流れの発達過程において違いが現れる場合も見られたため、本解析においては、 $r_L^+ = z_L^+ = 2.0$  として解析を行った。数値解析は  $Pr = 0.71$  とし、円板の半径  $R$  を 0.02, 0.04 m および 0.08 m、温度差  $\Delta T = 10$  K とした。これはそれぞれ  $Ra = 8400, 67200$  および 537500 の場合に相当する。それぞれの場合について円板の回転数を  $Re$  数としては最大で 0~10311 の範囲で変化させて計算を行った。藤井らによる加熱平板の実験的研究<sup>(8)</sup> や伝熱工学資料<sup>(9)</sup> および小林らによる加熱のない回転円板の研究<sup>(10)</sup> から、解析に用



(a) 等温線 ( $\Delta T=0.1$ )

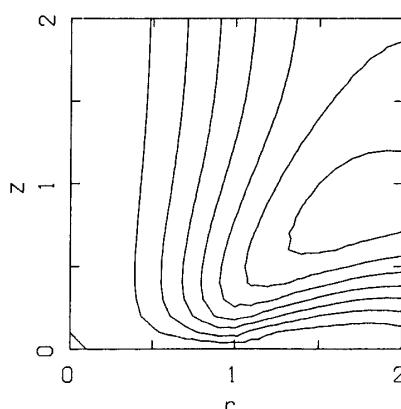


(b) 流線 ( $\Delta \psi=2$ )

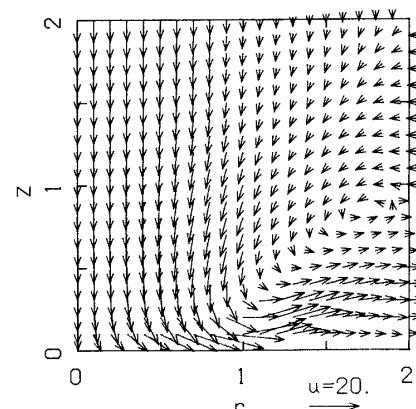


(c)  $r$ - $z$  面での速度ベクトル

図 2  $Ra=8400, Re=0$  ( $n=0$  rpm) の場合の数値解析結果



(a) 流線 ( $\Delta \psi=1$ )



(b)  $r$ - $z$  面での速度ベクトル

図 3  $Ra=0, Re=242$  ( $n=90$  rpm) の場合の数値解析結果

いた  $Ra$  数および  $Re$  数の範囲では流れは層流であると考えられる。

数値計算には差分法を、渦度の定義式には SOR 法を用いた。分割数は  $Ra$  数の小さい場合は半径および高さ方向とも 20 分割とし、 $\Delta t$  は 0.0002 とした。また  $Ra$  数の大きい場合は  $40 \times 40$  分割とし、計算精度の確認のため  $40 \times 60$ ,  $40 \times 80$  分割などを用いた。計算は非定常計算を行い、自然対流支配領域および回転による強制対流支配領域では  $Nu$  数分布が時間的に変化しなくなったところをもって安定したと判断した。共存対流領域では円板半径によっては、解が時間により振動するため、自然対流支配領域や強制対流支配領域において安定した解が得られた無次元時間における値で代表した。結果の整理に用いた無次元  $Nu$  数および平均  $Nu$  数は、それぞれ円板上での  $z$  方向の無次元温度こう配により、またそれを円板全面で積分し円板面積で除することにより求め、以下に示すように定義した（以後、+記号は省略する）。

$$\left. \begin{aligned} Nu &= \frac{hR}{k} = \frac{\partial T^+}{\partial z^+} \\ \overline{Nu} &= \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R \frac{\partial T^+}{\partial z^+} 2\pi r dr \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

### 3. 結果および考察

以下に数値解析を示すが、加熱回転円板上の熱流動の代表的なものとして、レーレー数  $Ra$  を 8 400 とし、円板の回転によるレイノルズ数  $Re$  をパラメータとして変化させた場合の解析結果を示した。計算はすべて  $Pr=0.71$  として行った。計算精度は空間では  $O(\Delta x^2)$  であるが対流項に風上差分(一次)を用いたため、最大

で  $O(\Delta x)$  の誤差は考慮する必要があると思われる。

まず典型的な場合の例として、円板を回転させずに加熱した場合と円板を加熱せずに回転させた場合の数値解析結果を図 2 および図 3 に示した。

図 2 (a)～(c) には  $Ra=8400$ ,  $Re=0$  ( $n=0$  rpm) の場合の等温線、流線および  $r-z$  面での速度ベクトルを示した。図 2 (b), (c) に示すように流れは上昇流のみとなり、それに伴い図 2 (a) に見られるように円板中央部付近の温度分布が上に凸の分布となっていることがわかる。また図 2 (c) から円板の中央部で上昇流の速度が大きくなることがわかる。

図 3 (a), (b) には  $Ra=0$  ( $\Delta T=0$ ),  $Re=242$  ( $n=90$  rpm) の場合の流線および  $r-z$  面での速度ベクトルを示した。図 3 (a) からわかるように、流れは円板の回転に伴う遠心力により誘起される下降流のみとなることがわかる。また図 3 (b) に示すように円板面に沿う流れは  $r_L$  まで及んでいることがわかる。

上述した円板の加熱による上昇流と回転による下降流とが複合する熱流動の代表的な場合として図 4 (a)～(c) には  $Ra=8400$ ,  $Re=242$  ( $n=90$  rpm) のときの、 $t=0.6$  における等温線、流線および  $r-z$  面での速度ベクトルを示した。図 4 (a) に示すように回転を与えることにより、等温線は円板中央部では上に凸であるが、 $r$  が増加するにつれて減少し、 $r=0.5$  付近で増加に転じ、円板外縁付近で極大となる複雑な分布となることがわかる。これは図 4 (b) からわかるように、円板上には回転に伴う渦が形成されるが、全体としては加熱による上昇流が支配的であり、二つの流れが円板上部で干渉しあうためであると思われる。図 4 (c) には円板上の複雑な流れが明確に示されている。

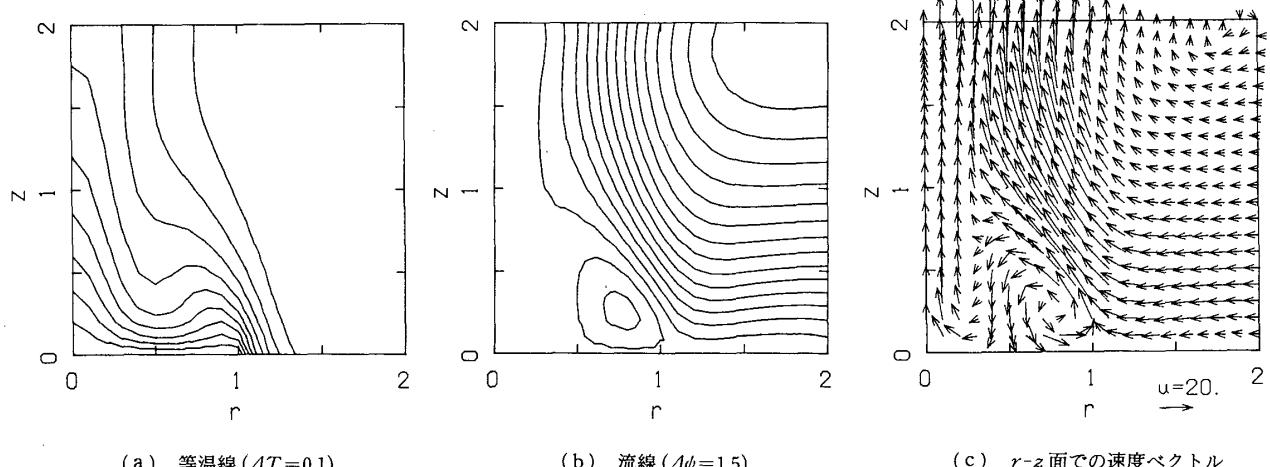


図 4  $Ra=8400$ ,  $Re=242$  ( $n=90$  rpm) の場合の数値解析結果

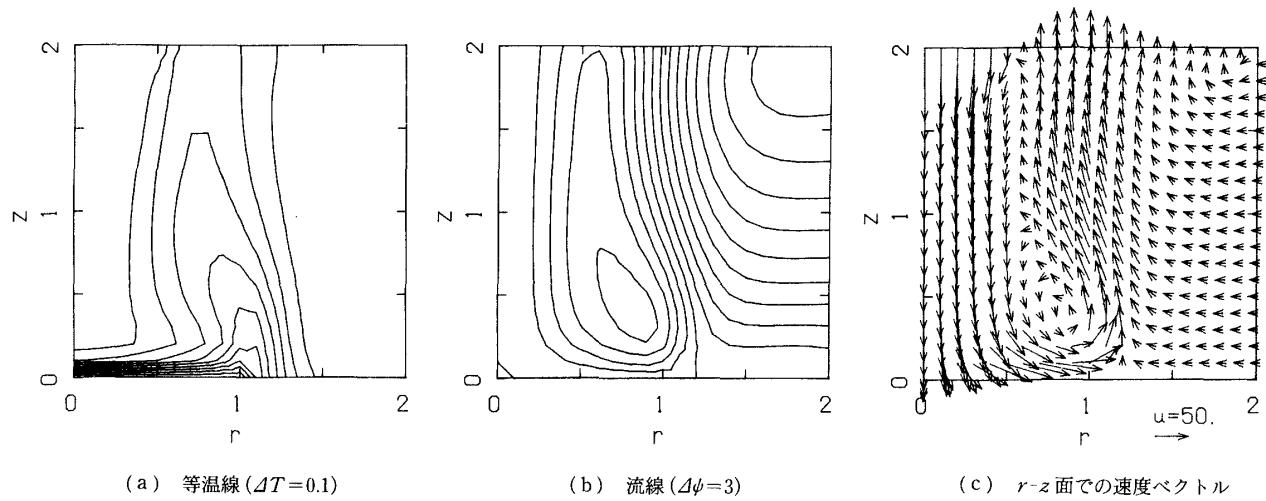
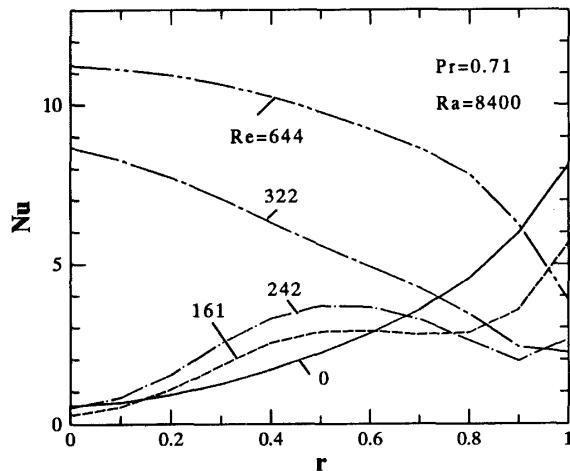
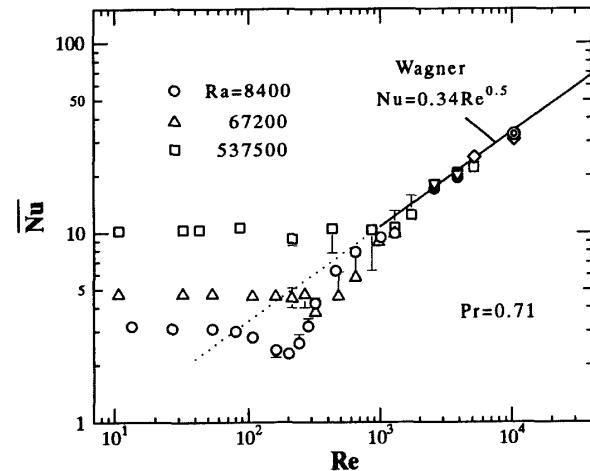
図 5  $Ra=8400, Re=644(n=240 \text{ rpm})$  の場合の数値解析結果図 6  $Re$  数の変化に伴う局所  $Nu$  数分布の変化  
( $Pr=0.71, Ra=8400$ )

図 5 (a)～(c)にはさらに回転数を上げた場合の代表的な流れとして、 $Ra=8400, Re=644(n=240 \text{ rpm})$ における等温線、流線および $r-z$ 面での速度ベクトルを示した。図 5 (a)からわかるように、 $Re$ 数が大きくなると円板上の温度分布は非常に密になり、円板外縁上部において急激な上に凸の分布となっている。これは円板の回転により円板外縁に吹き飛ばされた高温の気体が上昇に転じたためであると思われる。円板表面には、ほぼ同じ厚さの温度境界層ができていることがわかる。図 5 (b)には対応する流線を示したが、円板上部には回転に伴う大きな渦が形成され、下降流が主となり、加熱による上昇流は円板上には入り込めないことが知れる。このため円板上の熱伝達は回転による強制対流支配となっている。図 5 (c)の $r-z$ 面での速度ベクトルの図から流速は円板中央部で低く円板外縁に向かうにつれて増加する分布となっている。

図 7 平均  $Nu$  数分布(Wagner の理論解との比較)

ことが知れる。

図 6 には  $Ra=8400$  の場合の  $Re$  数をパラメータとして変化させたときの局所  $Nu$  数分布の変化を示した。縦軸は局所  $Nu$  数であり、横軸は円板上の無次元位置を示している。円板半径は 0.02 m の場合に対応している。 $Re=0(n=0 \text{ rpm})$  の場合は円板中央部で低く円板外縁に向かうにつれて単調に増加する分布となっている。 $Re$  数が増加するにつれて円板中央部の値が大きくなり外縁部に向かって単調に減少する分布となる。共存対流領域では解が振動し過渡的な特性を示す場合もあるが、二つの代表的な  $Nu$  数分布の特性を併せもつたような分布となり、全体的に値が低くなっていることが知れる。

図 7 には回転による  $Re$  数を横軸にとり、 $Ra$  数をパラメータとして  $Ra=8400, 67200$  および  $537500$  と変化させたときの、等温加熱した回転円板上面での平均  $Nu$  数分布の変化を示した。 $Ra=67200$  および

537 500 の共存対流領域において、解が時間的に振動しており不安定な様相が見られた。このため自然対流または強制対流支配領域において、安定した解が得られた無次元時間での平均  $Nu$  数を示し、その近傍で振動している解の振幅をエラーバーを用いて表現した。図 7 に示すように  $Ra$  数が小さい場合や自然対流支配領域および強制対流支配領域では解の顕著な振動は見られなかった。ここでは振動している解の振幅のみ示したが、これら振動している解の詳細な検討は今後の課題としたい。図 7 に示した直線は境界層近似を用いた Wagner の理論解<sup>(2)</sup>によるものである。点線はそれを延長してみたものである。 $Ra=8400$ (○印)および 67 200(△印)は分割数  $20 \times 20$  での結果であり 537 500(□印)は  $40 \times 40$  として計算を行ったものである。また図 7 の●印および▽印は、それぞれ  $Ra=8400$  および 67 200 で分割数を  $20 \times 20$  から  $40 \times 40$  とし、◇印は  $Ra=537500$  で分割数を  $40 \times 40$  から  $40 \times 60$  とし、◎印はさらに  $40 \times 80$  として計算を行った場合の結果を示している。図 7 から  $Re$  数が大きい領域では、分割数の増加により平均  $Nu$  数は Wagner の理論解にはほぼ一致していくことがわかる。これは  $Re$  数が大きくなるにつれて円板面へ向かう下降流が支配的となり、円板上の温度境界層が薄くなるため、それに対応した分割数の増加により、計算精度が向上したためと思われる。また、いずれの  $Ra$  数の場合も平均  $Nu$  数は  $Re$  数が大きくなるにつれて、Wagner の理論解に漸近し、 $Ra$  数の影響がなくなってくることが知れる。さらに図 7 から平均  $Nu$  数分布は  $Re$  数が小さくなるにつれて Wagner の理論解から大きく異なってくることが知れる。これは回転数の低下により強制対流支配から自然対流が共存する共存対流領域となり、境界層近似を用いた Wagner の理論解の適用が困難になったためと思われた。

また  $Re$  数が零に近づくにつれて平均  $Nu$  数は、それぞれ、ある一定値に近づくことが知れる。これは  $Re$  数が小さくなるにつれて、円板上の熱伝達において回転による下降流よりも、円板の加熱による上昇流が支配的になっていくことに対応していると思われる。

さらに図 7 から、 $Ra$  数により異なるが、 $Re$  数の小さい領域で平均  $Nu$  数分布には極小値が現れることがわかる。これは円板の加熱による上昇流と回転に伴う下降流という相反する流れが、熱伝達を妨げるためであり、 $Ra=8400$  では、おおよそ  $Re=200$  付近で極

小となっていることがわかる。これは、伝熱特性の面からは、ある  $Re$  数(回転数)の場合に放熱特性が最悪となることを意味しており、こうした  $Re$  数の比較的小さい領域での詳細な伝熱特性の解明が重要であると思われる。

#### 4. 結 言

等温加熱回転円板上の熱流動解析を行い、円板上の熱伝達特性について以下の知見を得た。

(1) 境界層近似を用いた Wagner による等温加熱回転円板上の平均  $Nu$  数算出式は強制対流支配領域では適用できるが、共存対流領域では適用が困難となる。

(2) 回転による  $Re$  数が小さく、円板の加熱による上昇流が支配的となる場合の平均  $Nu$  数は  $Re$  数が零に近づくにつれて、 $Ra$  数により異なるが、それもある値に漸近していくことが知れる。

(3) 回転による  $Re$  数の増加に伴い、円板上の局所  $Nu$  数の分布特性は大きく異なる。 $Re$  数が小さいときは円板の中心部で低く外縁に向かって単調に増加する分布となるが、 $Re$  数が大きくなると逆に中心部で高く外縁に向かって単調に減少する分布となる。中間の  $Re$  数では両者の特性を併せもつ分布特性を示し、全体的に  $Nu$  数は低くなる。

(4) 等温加熱回転円板上の平均  $Nu$  数には  $Ra$  数により異なるが、ある  $Re$  数のとき極小値が存在する。これはある回転数のとき放熱特性が最悪になることに対応しており、 $Re$  数の比較的小さい領域での詳細な伝熱特性の解明が重要であると思われる。

#### 文 献

- (1) Th. v. Kármán, Z. Angew. Math. Mech., 4-1(1921), 233.
- (2) Wagner, C., J. Appl. Phys., 19(1948), 837.
- (3) Kreith, F., Taylor, J. H. and Chong, J. P., Trans. ASME, J. Heat Transf., 81(1959), 95.
- (4) 島田・内藤・熊谷・武山, 機論, 53-487, B(1987), 984.
- (5) 廣瀬・横山・大内, 第31回日本伝熱シンポジウム講演論文集, (1994), 667.
- (6) 糸見・鈴木, 機論, 59-566, B(1993), 3220.
- (7) 横山・ほか5名, 第31回日本伝熱シンポジウム論演論文集, (1994), 664.
- (8) Fujii, T. and Imura, H., Int. J. Heat Mass Transf., 15 (1972), 755.
- (9) 日本機械学会編, 伝熱工学資料, 改訂第4版, (1986), 70.
- (10) 小林・小浜・高間館, 東北大学速研報告書, 53(1980), 1.