

静止流体中の回転球に沿う境界層の安定性*

谷口英夫*¹, 小林陵二*², 福西 祐*³

The Stability of Boundary Layer on a Rotating Sphere in Still Fluid

Hideo TANIGUCHI, Ryoji KOBAYASHI and Yu FUKUNISHI

Theoretical study of three-dimensional boundary layer transition on a sphere rotating in still fluid has been carried out by a linear stability analysis. It was determined from experimental results that the relative location of spiral vortices which appear in the transition region is fixed against the rotating sphere surface when the rotating effect is large. However as the rotating effect decreases, these vortices begin to move. So far, this phenomenon has not been explained theoretically. In this study, the boundary layer instability and the characteristics of spiral vortices are theoretically investigated by calculating the behavior of the small disturbances and the critical Reynolds number of the boundary layer on a rotating sphere using the linear stability theory.

Key Words: Boundary Layer, Turbulence, Transition, Three-Dimensional Flow, Rotating Sphere, Spiral Vortex, Linear Stability Theory

1. 結 言

回転軸対称物体における3次元境界層の挙動を把握することは、基礎研究の面ばかりでなく、ターボ機械の内部流動や飛行体の制御などに関連して重要なことであり、これまで円板、円すい体、球などといった単純形状に対して系統的研究が行われてきた⁽¹⁾。また特に、回転する球まわりの流れは気象学や地球物理学の分野においても関心が持たれている。

図1に示すような静止流体中で回転する球表面に沿う境界層の研究については、理論および実験的研究が様々な研究者によって行われてきた^{(1)~(4)}。これまでの実験的研究により、境界層の乱流遷移が他の回転軸対称物体(円板、円すい体)まわりの流れ場と同様、らせん渦の発生・成長・崩壊を経て乱流状態に遷移する事が明らかにされている^{(1)~(3)}。Kohama-Kobayashi⁽³⁾は、回転球における境界層乱流遷移とらせん渦の関係を実験的に調べ、臨界レイノルズ数、遷移レイノルズ数、らせん渦の個数および渦軸の方向を求めている。その結

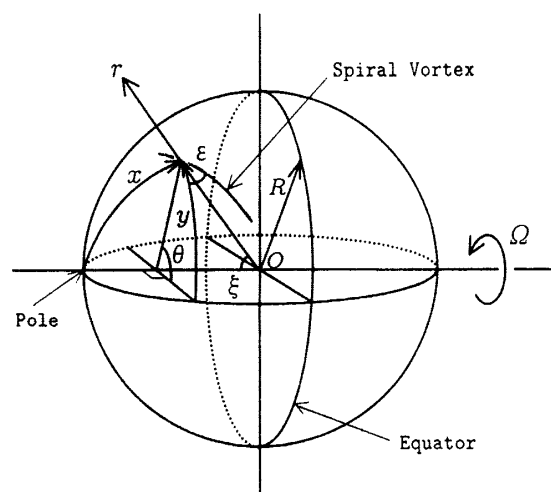


Fig. 1 Coordinate system for the sphere rotating in still fluid

果によると、遷移領域に発生するらせん渦の個数 n は、球の回転数 N の増加に伴って増加し、回転円板の場合の30個に近づき、またらせん渦の渦軸が円周となす角度 ϵ はらせん渦の発生位置(臨界点)付近で 14° であり、赤道に向かうにつれて $4^\circ \sim 8^\circ$ まで減少することが報告されている。Kobayashi-Arai⁽⁵⁾は、らせん渦の挙動に関する実験を行っており、らせん渦は、回転数 N が大

* 原稿受付 1996年8月19日。

*¹ 正員、岩手大学工学部 (☎020 盛岡市上田4-3-5)。*² 正員、石巻専修大学理工学部 (☎986 石巻市南境新水戸1)。*³ 正員、東北大学大学院工学研究科 (☎980-77 仙台市青葉区荒巻字青葉)。

きいときには回転する球表面に相対的に固定されているが、 N がある値以下になると球表面に対して相対的に遅れて回転することを報告している。しかし、このらせん渦の相対速度の変化がなぜ起こるかについてはまだ明かにされていない。回転球における理論的研究については、境界層方程式を数値解析して層流状態での速度分布等を求める段階で留まっており、遷移現象を扱った理論的研究は十分に行われていない。

本研究においては、静止流体中の回転球に沿う境界層の遷移現象を理論的に解明することを目的とし、層流境界層の線形安定性解析を行っている。この流れ場

には、粘性形不安定、遠心力不安定および横流れ不安定が複合して存在し、導かれる擾乱方程式もかなり複雑になる。しかし、その方程式において流線曲率に関する項を微小と考え省略すると、Orr-Sommerfeld 方程式に類似した擾乱方程式が得られる。本研究においては、この微小項を省略した擾乱方程式を用いて安定性解析を行い、臨界レイノルズ数およびらせん渦の特性を理論的に求める試みを行っている。また、本論文の最後に、全ての微小項も含んだ擾乱方程式を用いた場合の結果の一例を示している。

2. 擾乱方程式の導出

回転球に対する静止座標系を図1のように定める。速度成分に関しては、 (ξ, θ, r) 方向の成分を (u, v, w) と表す。用いる基礎方程式は、次の極座標系の非圧縮性非定常粘性流体の連続の式および運動方程式である。

$$\frac{1}{r \sin \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} (u \sin \xi) + \frac{1}{r \sin \xi} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 w) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{Du}{Dt} + \frac{uw - v^2 \cot \xi}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \xi} + \nu \left(\Delta u - \frac{u}{r^2 \sin^2 \xi} - \frac{2 \cos \xi}{r^2 \sin^2 \xi} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) \quad (2)$$

$$\frac{Dv}{Dt} + \frac{vw + uv \cot \xi}{r} = -\frac{1}{\rho r \sin \xi} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left(\Delta v - \frac{v}{r^2 \sin^2 \xi} + \frac{2 \cos \xi}{r^2 \sin^2 \xi} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2 \sin \xi} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \quad (3)$$

$$\frac{Dw}{Dt} - \frac{u^2 + v^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\Delta w - \frac{2w}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{2u \cot \xi}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin \xi} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \quad (4)$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{r} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{v}{r \sin \xi} \frac{\partial}{\partial \theta} + w \frac{\partial}{\partial r} \quad (5)$$

$$\Delta = \frac{1}{r^2 \sin \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\sin \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \xi} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) \quad (6)$$

いま、速度 (u, v, w) および圧力 p を層流境界層に対する値 $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{p})$ と擾乱成分 $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{p})$ に分け、

$$(u, v, w, p) = (\bar{u} + \tilde{u}, \bar{v} + \tilde{v}, \bar{w} + \tilde{w}, \bar{p} + \tilde{p}) \quad (7)$$

と置く。擾乱成分に関しては、実験結果⁽³⁾を考慮してらせん渦を想定し次のように定義する。

$$(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{p}) = (\tilde{u}(z), \tilde{v}(z), \tilde{w}(z), \tilde{p}(z)) e^{i(\hat{\alpha}x + \hat{\beta}y - \hat{\gamma}t)} = (\tilde{u}(z), \tilde{v}(z), \tilde{w}(z), \tilde{p}(z)) e^{i(\hat{\alpha}R\xi + n\theta - \hat{\gamma}t)} \quad (8)$$

$$z = r - R, \quad n = \hat{\beta}R \sin \xi, \quad \varepsilon = \tan^{-1}(\hat{\beta} \sin \xi / \hat{\alpha}) \quad (9)$$

ここで $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ は実数で、それぞれ x, y 方向の波数を表し、 n はらせん渦の個数、 ε はらせん渦の渦軸の角度を表す。また $\hat{\gamma}$ は複素角周波数で、その実部 $\hat{\gamma}_r$ から求まる $\hat{\gamma}_r / \sqrt{\hat{\alpha}^2 + \hat{\beta}^2}$ は擾乱の進行方向の位相速度を表し、虚部 $\hat{\gamma}_i$ は擾乱の時間増幅率を表す。

式(7)~(9)を式(1)~(4)に代入し、 $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{p}) \ll (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{p})$ として線形化を行い展開すると以下の一連の式を得る。

$$\frac{i\alpha R + \cot \xi}{r} \hat{u} + \frac{i\beta R}{r} \hat{v} + \frac{2}{r} \hat{w} + \frac{d\hat{w}}{dr} = 0 \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & \bar{w} \frac{d\hat{u}}{dr} + \left[i \left\{ (\hat{\alpha}\bar{u} + \hat{\beta}\bar{v}) \frac{R}{r} - \hat{\gamma} \right\} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} + \bar{w} \right) \right] \hat{u} - \frac{2\bar{v} \cot \xi}{r} \hat{v} + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \frac{\bar{u}}{r} \right) \hat{w} \\ &= -\frac{i\hat{\alpha}R\hat{p}}{r\rho} + \nu \left[\frac{d^2 \hat{u}}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\hat{u}}{dr} + \left\{ -(\hat{\alpha}^2 + \hat{\beta}^2) \frac{R^2}{r^2} + \frac{i\hat{\alpha}R \cot \xi}{r^2} - \frac{1}{r^2 \sin^2 \xi} \right\} \hat{u} - \frac{2i\hat{\beta}R \cot \xi}{r^2} \hat{v} + \frac{2i\alpha R}{r^2} \hat{w} \right] \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bar{w} \frac{d\hat{v}}{dr} + \left[i \left\{ (\hat{\alpha}\bar{u} + \hat{\beta}\bar{v}) \frac{R}{r} - \hat{\gamma} \right\} + \frac{1}{r} (\bar{u} \cot \xi + \bar{w}) \right] \hat{v} + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi} + \bar{v} \cot \xi \right) \frac{\hat{u}}{r} + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial r} + \frac{\bar{v}}{r} \right) \hat{w} \\ &= -\frac{i\hat{\beta}R\hat{p}}{r\rho} + \nu \left[\frac{d^2 \hat{v}}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\hat{v}}{dr} + \left\{ -(\hat{\alpha}^2 + \hat{\beta}^2) \frac{R^2}{r^2} + \frac{i\hat{\alpha}R \cot \xi}{r^2} - \frac{1}{r^2 \sin^2 \xi} \right\} \hat{v} + \frac{2i\hat{\beta}R \cot \xi}{r^2} \hat{u} + \frac{2i\beta R}{r^2} \hat{w} \right] \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bar{w} \frac{d\hat{w}}{dr} + \left[i \left\{ (\hat{\alpha}\bar{u} + \hat{\beta}\bar{v}) \frac{R}{r} - \hat{\gamma} \right\} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial r} \right] \hat{w} + \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi} - 2\bar{u} \right) \frac{\hat{u}}{r} - \frac{2\bar{v}}{r} \hat{v} \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial r} + \nu \left[\frac{d^2 \hat{w}}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\hat{w}}{dr} + \left\{ -(\hat{\alpha}^2 + \hat{\beta}^2) \frac{R^2}{r^2} + \frac{i\hat{\alpha}R \cot \xi}{r^2} - \frac{2}{r^2} \right\} \hat{w} - \frac{2(i\alpha R + \cot \xi)}{r^2} \hat{u} - \frac{2i\beta R}{r^2} \hat{v} \right] \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

次に、式(11)~(13)より圧力項を消去したのち各変数を以下のように無次元化し ($\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}$ の無次元変数を改めて u, v, w と定義する),

$$\begin{aligned} \xi &= x/R, \quad \theta = y/R, \quad \delta = \sqrt{\nu/\Omega}, \quad U_m = R\Omega, \\ \eta &= z/\delta, \quad U = \bar{u}/U_m, \quad V = \bar{v}/U_m, \quad W = \bar{w}/U_m, \\ u &= \hat{u}/U_m, \quad v = \hat{v}/U_m, \quad w = \hat{w}/U_m, \quad \dots\dots\dots (14) \\ \alpha &= \hat{\alpha}\delta, \quad \beta = \hat{\beta}\delta, \quad \gamma = \hat{\gamma}\delta/U_m, \\ Rc &= U_m\delta/\nu, \quad \delta' = \delta/R = 1/Rc, \quad l = 1/(1 + \delta'\eta) \end{aligned}$$

さらに、次の関係式

$$\frac{dw}{d\eta} = -l\{(i\alpha + \delta' \cot \xi)u + i\beta v + 2\delta'w\} \dots\dots\dots (15)$$

$$\zeta = l\{(i\alpha + \delta' \cot \xi)v - i\beta u\} \dots\dots\dots (16)$$

を用いて整理すると連立擾乱方程式が得られる(付録参照 式(A-1)および(A-2))。ここで、 ζ は擾乱渦度の垂直方向成分を表す変数である。

擾乱方程式(A-1)および(A-2)において、流線曲率 δ' に関する項を微小と考え省略すると、次の方程式に帰着する(ここで、 W は層流境界層の計算において δ' のオーダーであるから同様に省略されている)。

$$\begin{aligned} & \frac{d^4 w}{d\eta^4} - 2(\alpha^2 + \beta^2) \frac{d^2 w}{d\eta^2} + (\alpha^2 + \beta^2)^2 w \\ &= iRe \left[\{(\alpha U + \beta V) - \gamma\} \left\{ \frac{d^2 w}{d\eta^2} - (\alpha^2 + \beta^2)w \right\} \right. \\ & \quad \left. - \left(\alpha \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + \beta \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} \right) w \right] \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \zeta}{d\eta^2} - (\alpha^2 + \beta^2)^2 \zeta \\ &= iRe \left[\{(\alpha U + \beta V) - \gamma\} \zeta + \left(\alpha \frac{\partial V}{\partial \eta} - \beta \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) w \right] \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

この方程式を用いた場合、式(17)から固有関数として $w(\eta)$ 、それを式(18)に代入して固有関数 $\zeta(\eta)$ が求まり、同時に固有値として $(Re, \alpha, \beta, \gamma)$ が定まる。

この δ' 以下のオーダーが省略された擾乱方程式(17)は、境界層外縁において、次の一般解を持つという利点がある。

$$w(\eta) = C_1 e^{-a_1 \eta} + C_2 e^{-a_2 \eta} \dots\dots\dots (19)$$

$$a_1 = (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}, \quad a_2 = (\alpha^2 + \beta^2 - i\gamma Re)^{1/2} \dots (20)$$

ここで、 a_1 および a_2 は、実部が正であるものとする。

微小項も含めた完全な擾乱方程式に対して、境界層外縁において一般解を求めることは困難である。したがって、数値計算により解を求めることになるが、擾乱方程式(A-1)および(A-2)を計算するためには本来無限遠方において適用すべき境界条件を強制的にある有限位置において適用させる必要がある。しかし、この操作によって、算出される固有値に誤差が生ずる事が一般に知られている⁽⁶⁾。この誤差を小さくするには、外部境界条件の適用位置を壁面から十分遠い位置に設定しなくてはならないが、それは計算量の増大をもたらす。そこで、本研究においては、境界層外縁において解析解が存在する擾乱方程式(17)を用いて安定性解析を行っている。また、本論文の最後には、この擾乱方程式(17)の結果と、微小項も含めた完全な擾乱方程式(A-1)および(A-2)から得られた結果の一例との比較を行っている。

固有値の算出には、一般的に用いられるシューティング法⁽⁷⁾を用いた。また、数値積分に際し解の振動を抑えるために Gram-Schmidt の直交化法を利用している。回転球に沿う層流境界層の速度成分およびその微分項は、Banks⁽⁴⁾と同様な級数展開法を用いて算出した。

3. 数値計算結果

図2にはらせん渦の角度 $\epsilon = 14^\circ$ の場合における中立安定曲線を各位置 ξ に対して示している。このらせん渦の角度 $\epsilon = 14^\circ$ は、実験において観測されているらせん渦の発生位置(臨界点付近)における角度である。図中のらせん渦の個数 n および回転レイノルズ数 $Re_r (= R^2\Omega/\nu)$ は、式(14)中の無次元変数より次のように表される。

$$Re_r = Re^2, \quad n = \alpha R c \tan \epsilon \dots\dots\dots (21)$$

本論文に示す計算結果はすべて、この関係を用いて表している。図2より、下流方向に進むに従い中立曲線がレイノルズ数の低いほうへ、かつ、らせん渦の個数の減少する方向へ移動することが分かる。

図3には位置 $\xi = 60^\circ$ における中立安定曲線をらせん渦の角度 ϵ を変化させた場合に対して示している。図3を見るとらせん渦の角度 ϵ が増すにつれて中立曲線がらせん渦の個数の大きい方に、かつ、高レイノルズ数の方へ移動していることが分かる。すなわち、らせん渦の角度 ϵ が大きい方がより安定であることを示している。

図4にはらせん渦の角度 $\epsilon = 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ$ および 20° について計算より得られた各位置における臨界レイノルズ数 $[Re_r]_{crit}$ と過去の実験結果⁽²⁾⁽³⁾との比較を示している。図より本計算から得られた臨界レイノルズ数はらせん渦の角度 ϵ が大きいほど Kohama-Kobayashi⁽³⁾の実験結果に近づく傾向があるが、一般的には計算値のほうが小さい値を示している。

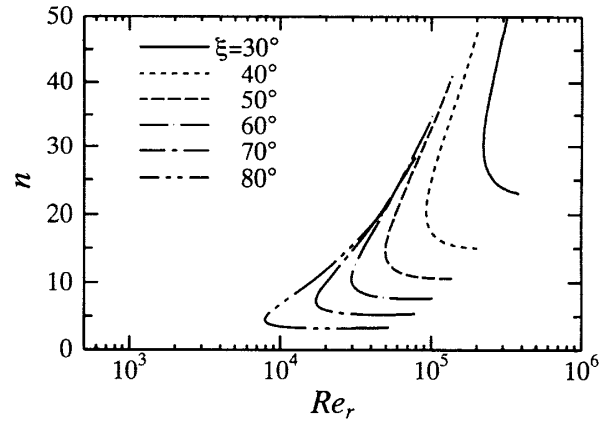


Fig. 2 Neutral stability curves ($\epsilon = 14^\circ$)

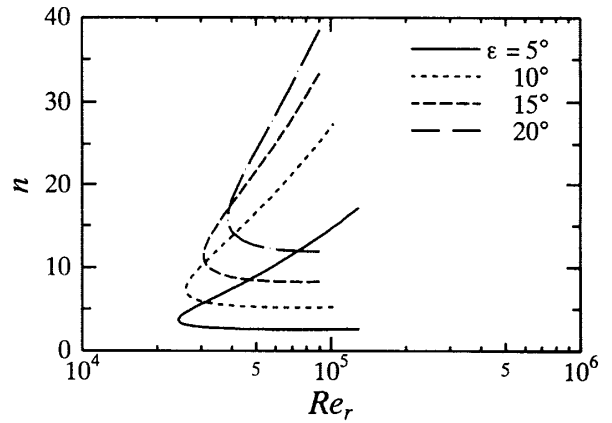


Fig. 3 Neutral stability curves ($\xi = 60^\circ$)

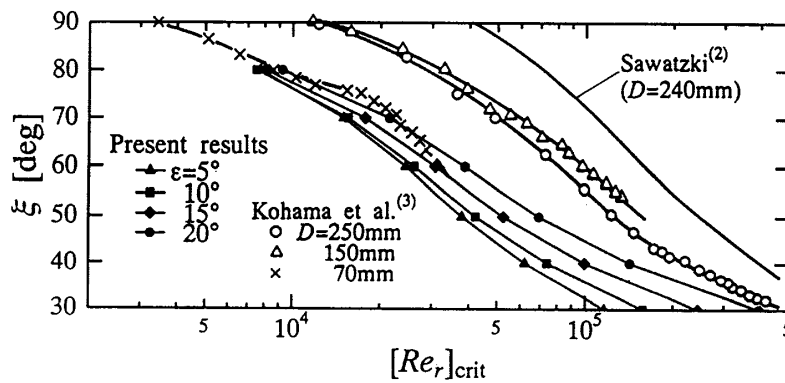


Fig. 4 Critical Reynolds numbers at various ξ locations compared with the experimental data⁽²⁾⁽³⁾

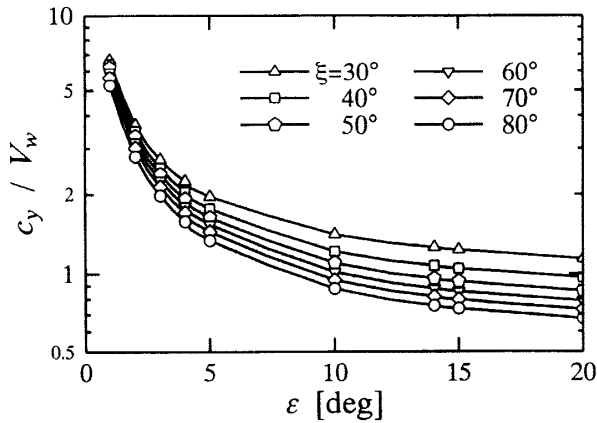


Fig. 5 The relative rotating velocity ratio at critical points

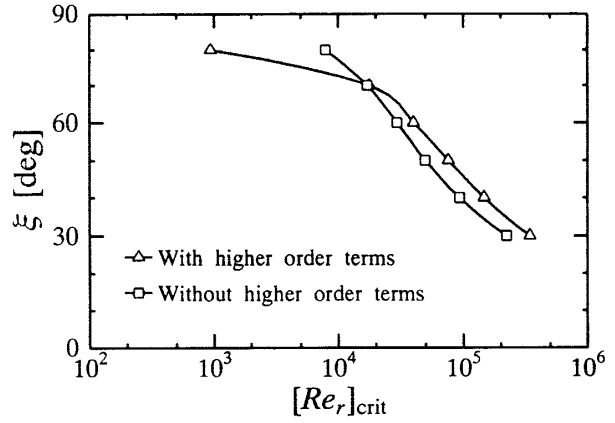


Fig. 8 Comparison of the critical Reynolds numbers between the results from the equations with (Eq. A-1, A-2) and without (Eq. 17) higher order terms ($\epsilon = 14^\circ$)

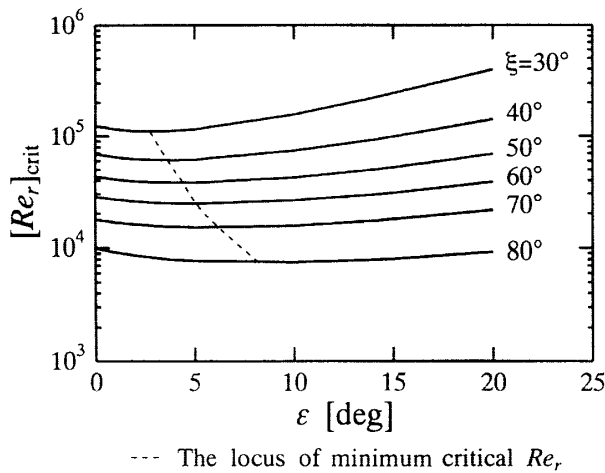


Fig. 6 The relation between the spiral vortex angle and the critical Reynolds number

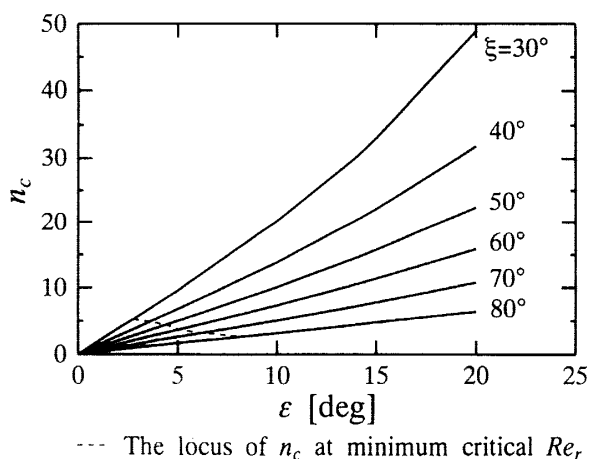


Fig. 7 The relation between the spiral vortex angle and the critical wave number

次に、図5に臨界点におけるらせん渦の球表面に対する相対速度を表す相対回転速度比 c_y/V_w とらせん渦の角度 ϵ との関係を各 ξ 位置に対して示している。ここで、 $V_w (= \sin \xi)$ は、ある角度 ξ における球表面の無次元回転速度を示している。また、 $c_y (= \gamma_r/\beta)$ は擾乱波の周方向の伝播速度を表し、実験において観測されるらせん渦の回転速度に対応する。したがって、 $c_y/V_w = 1$ の場合は、らせん渦が球表面に対し固定して一緒に回転している場合を表し、 $c_y/V_w < 1$ の場合は、らせん渦が球表面に対し遅れて回転していることを示している。図5より、らせん渦の角度 ϵ が小さくなるに従い、相対回転速度比が増大することが分かる。また、下流方向(角度 ξ の増加する方向)になるにつれ、相対回転速度比が小さくなる傾向があることが分かる。らせん渦の角度 $\epsilon = 14^\circ$ における本計算結果は、約 0.75 ~ 1.26 であり、Kobayashi-Arai⁽⁵⁾において観測された約 0.76 ~ 1.0 と良く一致をしている。

図6はらせん渦の角度 ϵ と臨界レイノルズ数 $[Re_r]_{crit}$ の関係を各位置 ξ に対して示している。また、図7にはらせん渦の角度 ϵ とらせん渦の臨界波数 n_c の関係を示している。臨界レイノルズ数について見ると、 ξ が増加し、よどみ点から離れるにしたがって、臨界レイノルズ数は全般的に小さくなり、かつ ξ が大きい所ではらせん渦の角度 ϵ による臨界レイノルズ数の変化が小さくなる事が分かる。しかし、臨界波数について見ると、一般にらせん渦の角度 ϵ の増加とともに増大し、よどみ点に近いほど (ξ 小)、その傾向は顕著である。

最後に、図8に微小項を省略した擾乱方程式(17)を用いた場合の計算結果と全ての微小項を含んだ擾乱方程式(A-1),(A-2)を用いた場合の計算結果との比較を臨

界レイノルズ数について示している。擾乱方程式(A-1),(A-2)の解析においては、外部境界条件による誤差が小さくなるよう壁面から十分遠い位置で外部境界条件を適用している。図より、一般に、微小項を考慮したほうが臨界レイノルズ数が増加し、より実験結果と近くなる傾向を示すことが分かる。しかし、赤道付近の $\xi = 80^\circ$ の場合は、逆に臨界レイノルズ数がかなり減少することを示している。

4. 結 言

静止流体中で回転する球表面に沿う境界層の遷移現象を理論的に解明することを目的として、線形安定性理論により擾乱方程式を導き、境界層の安定性解析を行った。その結果を要約すると次のとおりとなる。

(1) 不安定点が赤道($\xi = 90^\circ$)からよどみ点($\xi = 0^\circ$)の方向に移動するに伴い臨界レイノルズ数 $[Re_r]_{crit}$ およびらせん渦の臨界波数 n_c は増大する。

(2) らせん渦の角度 ε が大きくなると、中立安定曲線は回転レイノルズ数 Re_r およびらせん渦の個数 n が増

加する方向へと移動する。

(3) 計算から得られた臨界回転レイノルズ数 $[Re_r]_{crit}$ は、過去の実験結果とよい一致を示している。特に、らせん渦の角度 ε が大きいほどよく一致する。

(4) 計算から得られたらせん渦の回転球に対する相対回転速度比 c_y/V_w は、らせん渦の角度 $\varepsilon = 14^\circ$ のとき、約0.75~1.26で、過去の実験結果の約0.76~1.0とよい一致を示している。

(5) らせん渦の角度 ε による臨界レイノルズ数 $[Re_r]_{crit}$ の影響は、よどみ点から赤道に向かうに従い小さくなる。

(6) らせん渦の臨界波数 n_c は、らせん渦の角度 ε とともに増大し、よどみ点に近いほどその傾向が顕著である。

(7) らせん渦の角度 $\varepsilon = 14^\circ$ の場合、すべての微小項を含めた擾乱方程式より得られた臨界レイノルズ数 $[Re_r]_{crit}$ は、微小項を省略した場合の計算結果よりも大きな値になる。ただし、赤道近くの $\xi = 80^\circ$ においては反対に臨界レイノルズ数が小さくなる。

付 録

すべての項を含んだ擾乱方程式は次式となる。

$$\begin{aligned}
 & W \frac{d^3 w}{d\eta^3} + \left[i \{ l(\alpha U + \beta V) - \gamma \} + \delta' l \left[-U \cot \xi + 4W - \frac{\beta}{A} \left\{ \alpha \left(\frac{\partial V}{\partial \xi} - V \cot \xi \right) - \beta \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} - U \cot \xi \right) \right\} \right] \right. \\
 & \left. + \frac{i\beta\delta'^2 l \cot \xi}{A} \left(\frac{\partial V}{\partial \xi} - V \cot \xi \right) \right] \frac{d^2 w}{d\eta^2} \\
 & + \left[-(\alpha^2 + \beta^2) l^2 W + \delta' l \left[4i \{ l(\alpha U + \beta V) - \gamma \} - ial \left(\frac{\partial W}{\partial \xi} - W \cot \xi \right) \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{\beta}{A} \left\{ \alpha \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial V}{\partial \eta} \cot \xi \right) - \beta \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial U}{\partial \eta} \cot \xi \right) \right\} + \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial U}{\partial \eta} \cot \xi \right] \right. \\
 & \left. + \delta'^2 l^2 \left[-5U \cot \xi - \frac{\partial U}{\partial \xi} - 2W - \frac{\beta}{A} \left\{ \alpha \left(3 \frac{\partial V}{\partial \xi} - 5V \cot \xi \right) - \beta \left(3 \frac{\partial U}{\partial \xi} - 5U \cot \xi \right) \right\} \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{i\beta \cot \xi}{Al} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial V}{\partial \eta} \cot \xi \right) + \frac{\beta^2 \cot \xi}{A} \frac{\partial W}{\partial \xi} \right] + \frac{i\beta\delta'^3 l^2 \cot \xi}{A} \left(3 \frac{\partial V}{\partial \xi} - 5V \cot \xi \right) \right] \frac{dw}{d\eta} \\
 & + \left[-il^2(\alpha^2 + \beta^2) \{ l(\alpha U + \beta V) - \gamma \} - il \left(\alpha \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + \beta \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} \right) \right. \\
 & \left. + \delta' l \left[\cot \xi \left\{ \alpha \gamma l - \beta l^2(\alpha V - \beta U) - \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \right\} + l^2(\alpha^2 + \beta^2) \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} + 2W \right) \right] \right. \\
 & \left. + \delta'^2 l^2 \left[2i \{ 2l(\alpha U + \beta V) - \gamma \} - ial \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} + U \cot \xi \right) \cot \xi + 2 \left(\frac{\partial W}{\partial \xi} + W \cot \xi \right) \right\} \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{2\beta}{A} \left\{ \alpha \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial V}{\partial \eta} \cot \xi \right) - \beta \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial U}{\partial \eta} \cot \xi \right) \right\} + 2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial U}{\partial \eta} \cot \xi \right) \right] \right. \\
 & \left. + \delta'^3 l^3 \left[-2 \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} + U \cot \xi \right) - 4W + \frac{2\beta \cot \xi}{A} \left\{ 2(\alpha V - \beta U) + \frac{i}{l} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial V}{\partial \eta} \cot \xi \right) + \beta \frac{\partial W}{\partial \xi} \right\} - \frac{4i\beta\delta'^4 l^3 \cot^2 \xi}{A} V \right] \right] w \\
 & + \left[\delta' l \left[2V \cot \xi - \frac{\beta}{A} \left\{ \alpha \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} - U \cot \xi \right) + \beta \left(\frac{\partial V}{\partial \xi} - V \cot \xi \right) \right\} \right] + \frac{i\beta\delta'^2 l \cot \xi}{A} \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} - U \cot \xi \right) \right] \frac{d\xi}{d\eta}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[\delta' l \left[-2il(\alpha V - \beta U) + 2\frac{\partial V}{\partial \eta} \cot \xi - i\beta l \frac{\partial W}{\partial \xi} - \frac{\beta}{A} \left\{ \alpha \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial U}{\partial \eta} \cot \xi \right) + \beta \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial V}{\partial \eta} \cot \xi \right) \right\} \right] \right. \\
 & + \delta'^2 l^2 \left[2V \cot \xi - \frac{\beta}{A} \left\{ \alpha \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} - 3U \cot \xi \right) + \beta \left(\frac{\partial V}{\partial \xi} - 3V \cot \xi \right) \right\} + \frac{\beta \cot \xi}{A} \left\{ i \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial U}{\partial \eta} \cot \xi \right) - \alpha \frac{\partial W}{\partial \xi} \right\} \right. \\
 & \left. \left. + \frac{i\beta \delta'^3 l^2 \cot \xi}{A} \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} - 3U \cot \xi + \frac{\partial W}{\partial \xi} \cot \xi \right) \right] \right] \zeta \\
 & = \frac{1}{Re} \left[\frac{d^4 w}{d\eta^4} + 8\delta' l \frac{d^3 w}{d\eta^3} + l^2 \left\{ -2(\alpha^2 + \beta^2) + 2i\alpha\delta' \cot \xi + \delta'^2 \left(12 - \frac{1}{\sin^2 \xi} \right) \right\} \frac{d^2 w}{d\eta^2} \right. \\
 & \quad + 2\delta'^3 l^3 \left\{ -2(\alpha^2 + \beta^2) + 2i\alpha\delta' \cot \xi - \frac{\delta'^2}{\sin^2 \xi} \right\} \frac{dw}{d\eta} \\
 & \quad \left. + l^4 \left[(\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2i\alpha(\alpha^2 + \beta^2)\delta' \cot \xi - \delta'^2 \{ 2(\alpha^2 + \beta^2) + \alpha^2 \cot^2 \xi \} + 2i\alpha\delta'^3 \cot \xi + \frac{2\delta'^4}{\sin^2 \xi} \right] w \right. \\
 & \quad \left. + 2i\beta\delta' l^2 \cot \xi \frac{d\zeta}{d\eta} \right] \dots \dots \dots (A-1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & W \frac{d\zeta}{d\eta} + \left[i \{ l(\alpha U + \beta V) - \gamma \} + \delta' l \left\{ 2W - \frac{i\alpha \cot \xi}{B} (\alpha U + \beta V) + \frac{i\beta}{B} \left(\alpha \frac{\partial V}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial U}{\partial \xi} \right) \right\} - \frac{\delta'^2 l \cot^2 \xi}{B} (\alpha U + 2\beta V) \right] \zeta \\
 & - \frac{\beta \delta' \cot \xi}{B} W \frac{d^2 w}{d\eta^2} + \left[\delta' l \left\{ -V \cot \xi + \frac{i\beta \cot \xi}{Bl} \gamma + \frac{i\alpha}{B} \left(\alpha \frac{\partial V}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial U}{\partial \xi} \right) \right\} + \frac{\delta'^2 l \cot \xi}{B} \left\{ \alpha \frac{\partial V}{\partial \xi} - \beta \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} + 4W \right) \right\} \right] \frac{dw}{d\eta} \\
 & + \left[i l \left(\alpha \frac{\partial V}{\partial \eta} - \beta \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) + \delta' l \left\{ il(\alpha V - \beta U) - \frac{i\alpha \cot \xi}{B} \left(\alpha \frac{\partial V}{\partial \eta} - \beta \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) \right\} \right. \\
 & \left. + \delta'^2 l^2 \left[-V \cot \xi + \frac{i\beta \cot \xi}{Bl} \{ l(\alpha U + \beta V) + 2\gamma \} - \frac{\cot^2 \xi}{Bl} \left(\alpha \frac{\partial V}{\partial \eta} - \beta \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) + \frac{2i\alpha}{B} \left(\alpha \frac{\partial V}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial U}{\partial \xi} \right) \right] \right. \\
 & \left. + \frac{\delta'^3 l^2 \cot \xi}{B} \left\{ \beta(U \cot \xi - 2W) + 2 \left(\alpha \frac{\partial V}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial U}{\partial \xi} \right) \right\} \right] w \\
 & = \frac{1}{Re} \left[\frac{d^2 \zeta}{d\eta^2} + 4\delta' l \frac{d\zeta}{d\eta} + l^2 \left\{ -(\alpha^2 + \beta^2) + i\alpha\delta' \cot \xi + \delta'^2 \left(2 - \frac{1}{\sin^2 \xi} \right) - \frac{2i\beta^2 \delta'^2 \cot^2 \xi}{B} \right\} \zeta \right. \\
 & \quad \left. + \beta \cot \xi \left[-\frac{\delta' d^3 w}{B d\eta^3} - \frac{6\delta'^2 l d^2 w}{B d\eta^2} + \delta' l^2 \left\{ \frac{\delta'^2}{B} \left(\frac{1}{\sin^2 \xi} - 6 \right) - i \right\} \frac{dw}{d\eta} + 2\delta'^2 l^3 \left(\frac{\delta'^2}{B \sin^2 \xi} - i \right) w \right] \right] \dots \dots \dots (A-2)
 \end{aligned}$$

$$A = -(\alpha^2 + \beta^2) + 2i\alpha\delta' \cot \xi + \delta'^2 \cot^2 \xi, \quad B = -i(\alpha^2 + \beta^2) - \alpha\delta' \cot \xi \dots \dots \dots (A-3)$$

また、擾乱方程式(A-1)および(A-2)に対する境界条件については、球壁面において滑りなし条件、球壁面から無限遠方において擾乱は消滅するものと考え、次のように表される。

$$\eta = 0 : w = \frac{dw}{d\eta} = \zeta = 0, \quad \eta \rightarrow \infty : w, \frac{dw}{d\eta}, \zeta \rightarrow 0 \dots \dots \dots (A-4)$$

文 献

<p>(1) Kobayashi, R., <i>ASME Journal of Fluids Engineering</i>, 116 (1994), 200-211.</p> <p>(2) Sawatzki, O., <i>Acta Mech.</i>, 9 (1970), 159-214.</p> <p>(3) Kohama, Y. and Kobayashi, R., <i>J. Fluid Mech.</i>, 137 (1983), 153-164.</p>	<p>(4) Banks, W. H. H., <i>Quart. J. Mech. Appl. Math.</i>, 18 (1965), 443-454.</p> <p>(5) Kobayashi, R. and Arai, T. (Arnal, D. and Michel, R., eds.), <i>Laminar-Turbulent Transition</i>, (1990), 551-557, Springer-Verlag.</p> <p>(6) Itoh, N., <i>Fluid Dyn. Res.</i>, 13 (1994), 81-95.</p> <p>(7) 小林, 機論, 46-410, B(1980), 1900-1906.</p>
--	---