

くさび形物体に沿う自由対流境界層の安定性*
(一様熱流束の場合)渡邊 喬*¹, 谷口 英夫*¹, 狩野 勝幸*²

Stability of Free-Convection Boundary Layer over a Wedge

Takashi WATANABE, Hideo TANIGUCHI and Katuyuki KANO

Laminar free convection boundary layer flow along a porous wedge which is maintained at a uniform heat-flux have been studied theoretically. Boundary layer equations for the basic steady flow are solved numerically using an efficient finite-difference method in combination with an iterative method. The temporal neutral stability theory for wavelike disturbance of Tollmien-Schlichting type are then presented for the velocity and temperature functions. The corresponding eigenvalue problem for the disturbance amplitude functions is also solved numerically. The neutral stability curves and the disturbance amplitude of the velocity or temperature are given for some values of wedge angle parameter m , suction/injection parameter ξ and modified Grashof number G . The Prandtl number Pr is taken to 0.73 throughout this paper.

Key Words: Free Convection, Instability, Numerical Analysis, Uniform Heat Flux, Uniform Suction or Injection, Wedge Flow

1. 緒 言

自由対流は大気の流れまたは物体表面からの熱伝達などに関連して研究が行われてきている。自由対流境界層を解析する場合、体積力の項に依存する温度を介して運動方程式およびエネルギー式を連立させて解く必要があり、解の収束が難しくなってくる。垂直平板に沿う自由対流境界層については、Schmidt-Beckmann⁽¹⁾以来多くの研究がなされ^{(2)~(5)}、垂直平板からの自由対流に対する物質伝達の影響に関する研究もなされてきている^{(6)~(8)}。一方、層流自由対流境界層の安定性の問題は初めに Plapp⁽⁹⁾によって行われているが、その解は運動方程式のみを考慮したものである。その後、Nachtschiem⁽¹⁰⁾、Knowles-Gebhart⁽¹¹⁾および Gebhart⁽¹²⁾らは運動方程式とエネルギー式を連立させて安定問題を解いている。

本研究においては、一様熱流束をもつくさび形物体に沿う自由対流境界層の安定性に及ぼす一様な吸込み吹出しの影響を理論的に解析する。ここで、くさび形物体をとりあげた理由は、浮力に対する伝熱面の角度

の影響を容易に調べることができることによる。本解析においては、はじめに、一様な吸込み吹出しの作用するくさび形物体に沿う自由対流境界層の諸特性を明らかにした。次に、その結果を用いて、種々のくさび頂角および吸込み吹出し係数に対する中立安定曲線、臨界グラスホフ数の変化ならびにじょう乱の振幅分布などを明らかにし、境界層の安定性を考察している。

2. 記 号

G : 修正グラスホフ数 [式(12)]
 Gr_x : 熱流束で定義したグラスホフ数 [式(12)]
 m : 頂角パラメータ
 Pr : プラントル数
 q : 伝熱面の熱流束
 $s(\eta)$: じょう乱温度の振幅関数 [式(10)]
 U : 代表速度 [式(12)]
 v_w : 吸込み吹出し速度
 α : 波数
 β : 複素周波数 $=\beta_r + i\beta_i$
 β_i : 増幅度
 β_r/α : 位相速度
 β_T : 流体の体膨張係数
 δ : 代表長さ [式(12)]

* 原稿受付 1997年10月27日。

*¹ 正員, 岩手大学工学部(☎020-8551 盛岡市上田4-3-5)。*² 正員, 凸版印刷(株)(☎110-8560 東京都台東区台東1-5-1)。

κ : 熱伝導率
 $\phi(\eta)$: じょう乱流線関数の振幅関数 [式(9)]
 ξ : 吸込み吹出し係数 [式(13)]

3. じょう乱方程式の導出

図1に示すように、温度 T_∞ の静止流体中に置かれた一様な吸込み吹出しを伴う角度 Ω のくさび形物体に沿う自由対流境界層を考える。壁面に沿って x 軸、それと垂直方向に y 軸をとり、 x 軸および y 軸方向の速度成分をそれぞれ u, v とし、流体の温度を T 、圧力を p とする。平板表面は一様熱流束で保たれ、吸込み吹出し速度 v_w が作用する。流体は非圧縮性で、浮力項の密度以外の諸物性値は一定とすると、連続の式、運動方程式およびエネルギー式は次式で表される。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g\beta_\tau T \cos \frac{\Omega}{2} + \nu \nabla^2 u \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - g\beta_\tau T \sin \frac{\Omega}{2} + \nu \nabla^2 v \dots\dots\dots (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\nu}{Pr} \nabla^2 T \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 Pr はプラントル数、 ν は動粘度を表す。

いま、速度 (u, v) および圧力 p を層流境界層(基礎流)に対する値 ($\bar{u}, \bar{v}, \bar{p}$) とじょう乱成分 ($\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{p}$) に分け、

$$(u, v, p) = (\bar{u} + \tilde{u}, \bar{v} + \tilde{v}, \bar{p} + \tilde{p}) \dots\dots\dots (5)$$

と置く。式(5)を式(2)~(4)に代入し、じょう乱に対して線形化を行い、式(2)および式(3)から圧力項を消去する。その後、基礎流の非平行成分の影響が小さいものと考えれば次式が得られる。

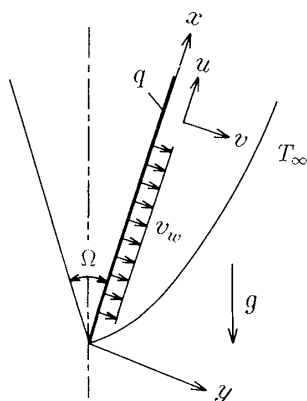


Fig.1 Coordinates system

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial y} \\ = g\beta_\tau \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} \sin \frac{\Omega}{2} + \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} \cos \frac{\Omega}{2} \right) + \nu \nabla^2 \tilde{\omega} \end{aligned} \dots\dots\dots (6)$$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} = \frac{\nu}{Pr} \nabla^2 \tilde{T} \dots\dots\dots (7)$$

ここに、

$$\tilde{\omega} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \dots\dots\dots (8)$$

じょう乱成分に関しては、じょう乱流線関数 $\tilde{\Psi}$ およびじょう乱温度 \tilde{T} を次式で定義する。

$$\tilde{\Psi}(x, y, t) = \tilde{\phi}(y) \exp[i(\bar{a}x - \tilde{\beta}t)] \dots\dots\dots (9)$$

$$\tilde{T}(x, y, t) = \tilde{s}(y) \exp[i(\bar{a}x - \tilde{\beta}t)] \dots\dots\dots (10)$$

$$\tilde{u} = \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial y}, \tilde{v} = -\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial x} \dots\dots\dots (11)$$

ここで、 \bar{a} は実数で、じょう乱の波数を表す。また $\tilde{\beta} (= \tilde{\beta}_r + i\tilde{\beta}_i)$ は複素角周波数で、その実部 $\tilde{\beta}_r$ から求まる $\tilde{\beta}_r/\bar{a}$ はじょう乱の x 方向の進行速度(位相速度)を表し、虚部 $\tilde{\beta}_i$ はじょう乱の時間増幅率を表す。すなわち、 $\tilde{\beta}_i < 0$ のときじょう乱が減衰するから流れは安定、 $\tilde{\beta}_i > 0$ のときはじょう乱が増幅するから流れは不安定となり、 $\tilde{\beta}_i = 0$ はじょう乱が増幅も減衰もせず流れは中立状態であることを示す。

次に、代表長さ δ 、代表速度 U および代表温度 ΔT を次式で定義する。

$$\left. \begin{aligned} \delta &= \left(\frac{2}{m+1} \right)^{1/2} \frac{5x}{G}, U = \frac{\nu G^2}{5x}, \Delta T = \frac{q\delta}{\kappa}, \\ G &= 5 \left(\frac{Gr_x}{5} \right)^{1/5}, Gr_x = \frac{g\beta_\tau q x^4}{\nu^2}, \\ m &= \frac{\gamma}{2-\gamma}, \gamma = \frac{\Omega}{180} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

ここに、 Gr_x は局所グラスホフ数、 G は修正グラスホフ数、 m はくさび頂角パラメータ、 κ は熱伝導率を表す。

さらに、基礎流に対して無次元流線関数 $f(\xi, \eta)$ および無次元温度 $\theta(\xi, \eta)$ を次式で定義する。

$$\left. \begin{aligned} f(\xi, \eta) &= \frac{\tilde{\Psi}(x, y)}{\delta U}, \theta(\xi, \eta) = \frac{\tilde{T}(x, y) - T_\infty}{\Delta T}, \\ \eta &= \frac{y}{\delta}, \xi = -\left(\frac{m+1}{2} \right)^{1/2} \left(\frac{5}{Gr_x} \right)^{1/5} \frac{\nu_w x}{5\nu} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

ここで、 $\tilde{u} = \partial \tilde{\phi} / \partial y$ 、 $\tilde{v} = -\partial \tilde{\phi} / \partial x$ である。また、 η は無次元座標、 ξ は吸込み吹出し係数を表す。

いま、じょう乱成分に対して次の無次元数を定義すれば

$$\phi(\eta) = \frac{\tilde{\phi}(y)}{\delta U}, s(\eta) = \frac{\tilde{s}(y)}{\Delta T},$$

$$\alpha = \bar{\alpha}\delta, \beta = \frac{\bar{\beta}\delta}{U}, \dots\dots\dots(14)$$

最終的に次式の無次元じょう乱方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} - \frac{\beta}{\alpha}\right) \left(\frac{d^2 \phi}{d\eta^2} - \alpha^2 \phi\right) - \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} \phi \\ & = \frac{1}{i\alpha G} \left\{ \frac{d^4 \phi}{d\eta^4} - 2\alpha^2 \frac{d^2 \phi}{d\eta^2} + \alpha^4 \phi \right. \\ & \left. + \left(\frac{2}{m+1}\right)^{3/2} \left(i\alpha s \sin \frac{Q}{2} + \frac{ds}{d\eta} \cos \frac{Q}{2} \right) \right\} \dots\dots(15) \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \eta} - \frac{\beta}{\alpha}\right) s - \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \phi = \frac{1}{i\alpha G Pr} \left(\frac{d^2 s}{d\eta^2} - \alpha^2 s\right) \dots\dots(16)$$

また、境界条件については、壁面において滑りなし条件および一様熱流束条件、無限遠方ではじょう乱は消滅するものと考え次式で表す。

$$\left. \begin{aligned} \eta=0: & \phi=0, \phi'=0, s'=0 \\ \eta \rightarrow \infty: & \phi, \phi', s \rightarrow 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(17)$$

ここに、(')はηによる微分を表す。境界条件においてs'(0)=0は壁面の熱容量が零の場合で、壁が非常に薄い加熱膜に相当する。Polymeropoulos⁽¹³⁾らの実験によると、基礎流は一様熱流束状態の流れであることは確かめられているが、一様熱流束に対応する境界条件s'(0)=0の数値解とは異なる結果が得られた。これより、基礎流は熱流束一定の場合であるが、壁の熱容量は有限の値をもつことを示している。また、Knowles-Gebhart⁽¹¹⁾らは壁の熱容量が有限の値をもつ場合の安定解析を行った結果、中立安定曲線はs'(0)=0とs(0)=0の曲線の間が存在することを明らかにしている。その後、Hieber-Gebhart⁽¹⁴⁾らは基礎流が一様熱流束の場合にはs'(0)=0およびs(0)=0の二つの境界条件を考慮すれば十分であることを述べている。このことより、本研究においては、壁面における温度境界条件に対し、s(0)=0の場合についても解析している。

4. 吸込み吹出しを伴う層流境界層(基礎流)

線形安定解析において使用される層流境界層流れ(基礎流)について考える。式(2)~(4)において境界層近似を適用し、式(12)および式(13)を用いて展開すると次の無次元境界層方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + \left(\frac{2}{m+1}\right) \left\{ 4f + \xi \frac{\partial f}{\partial \xi} \right\} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \\ & - \xi \left(\frac{2}{m+1}\right) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) - 3 \left(\frac{2}{m+1}\right) \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 \\ & + \left(\frac{2}{m+1}\right)^{3/2} \theta \cos \frac{Q}{2} = 0 \dots\dots\dots(18) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + \left(\frac{2}{m+1}\right) \left\{ 4f + \xi \frac{\partial f}{\partial \xi} \right\} \frac{\partial \theta}{\partial \eta}$$

$$- \left(\frac{2}{m+1}\right) \frac{\partial f}{\partial \eta} \theta - \left(\frac{2}{m+1}\right) \xi \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0 \dots\dots\dots(19)$$

また、境界条件は次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \eta=0: & \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0, \frac{4}{5}f + \frac{1}{5}\xi \frac{\partial f}{\partial \xi} = \xi, \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = -1 \\ \eta \rightarrow \infty: & \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0, \theta = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(20)$$

次に、ξに関する微分項を差分を用いて常微分方程式に変換する。ここでは、ξを間隔hで分割し、ξ=ξ_i=ih(i=0, 1, 2, ...)における導関数をGregory-Newtonの後退差分のうち四点公式を用いて式(18)および式(19)を次の常微分方程式で表す。

$$\begin{aligned} & \frac{d^3 f_i}{d\eta^3} + \left(\frac{2}{m+1}\right) \left\{ 4f_i + \frac{i}{6}(11f_i - 18f_{i-1} + 9f_{i-2} \right. \\ & \left. - 2f_{i-3}) \right\} \frac{d^2 f_i}{d\eta^2} - \frac{i}{6} \left(\frac{2}{m+1}\right) \left(11 \frac{df_i}{d\eta} - 18 \frac{df_{i-1}}{d\eta} \right. \\ & \left. + 9 \frac{df_{i-2}}{d\eta} - 2 \frac{df_{i-3}}{d\eta} \right) \frac{df_i}{d\eta} - 3 \left(\frac{2}{m+1}\right) \left(\frac{df_i}{d\eta} \right)^2 \\ & + \left(\frac{2}{m+1}\right)^{3/2} \theta_i \cos \frac{Q}{2} = 0 \dots\dots\dots(21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Pr} \frac{d^2 \theta_i}{d\eta^2} + \left(\frac{2}{m+1}\right) \left\{ 4f_i + \frac{i}{6}(11f_i - 18f_{i-1} \right. \\ & \left. + 9f_{i-2} - 2f_{i-3}) \right\} \frac{d\theta_i}{d\eta} \\ & - \left(\frac{2}{m+1}\right) \frac{df_i}{d\eta} \theta_i - \left(\frac{2}{m+1}\right) \frac{i}{6} (11\theta_i \\ & - 18\theta_{i-1} + 9\theta_{i-2} - 2\theta_{i-3}) \frac{df_i}{d\eta} = 0 \dots\dots\dots(22) \end{aligned}$$

境界条件は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \eta=0: & \frac{df_i}{d\eta} = 0, f_i = ih, \frac{d\theta_i}{d\eta} = -1 \\ \eta \rightarrow \infty: & \frac{df_i}{d\eta} = 0, \theta_i = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(23)$$

式(21)および式(22)の解は、境界条件(23)より次の積分方程式の形で表される。

$$\begin{aligned} & \frac{df_i}{d\eta} = \int_0^\eta E(\eta) \int_0^\eta \frac{R(\eta)}{E(\eta)} d\eta d\eta \\ & - \left\{ \int_0^\infty E(\eta) \int_0^\eta \frac{I(\eta)}{H(\eta)} d\eta d\eta \right\} \frac{H(\eta)}{H(\infty)} \dots\dots(24) \end{aligned}$$

$$f_i = \pm ih + \int_0^\eta \frac{df_i}{d\eta} d\eta \dots\dots\dots(25)$$

$$\begin{aligned} & \theta_i = - \int_0^\infty P(\eta) \int_0^\eta \frac{S(\eta)}{P(\eta)} d\eta d\eta + Q(\infty) \\ & + \int_0^\eta P(\eta) \int_0^\eta \frac{S(\eta)}{P(\eta)} d\eta d\eta - Q(\eta) \dots\dots\dots(26) \end{aligned}$$

ここに、

$$\begin{aligned} E(\eta) = & \exp \left[- \int_0^\eta \left(\frac{2}{m+1}\right) \left\{ 4f_i - \frac{i}{6}(11f_i - 18f_{i-1} \right. \right. \\ & \left. \left. + 9f_{i-2} - 2f_{i-3}) \right\} d\eta \right] \dots\dots\dots(27) \end{aligned}$$

$$R(\eta) = \frac{i}{6} \left(\frac{2}{m+1} \right) \left(11 \frac{df_i}{d\eta} - 18 \frac{df_{i-1}}{d\eta} + 9 \frac{df_{i-2}}{d\eta} - 2 \frac{df_{i-3}}{d\eta} \right) \frac{df_i}{d\eta} + 3 \left(\frac{2}{m+1} \right) \left(\frac{df_i}{d\eta} \right)^2 - \left(\frac{2}{m+1} \right)^{3/2} \theta_i \cos \frac{\Omega}{2} \dots\dots\dots (28)$$

$$H(\eta) = \int_0^\eta E(\eta) d\eta \dots\dots\dots (29)$$

$$P(\eta) = \exp \left[- \int_0^\eta Pr \left(\frac{2}{m+1} \right) \left\{ 4f_i - \frac{i}{6} (11f_i - 18f_{i-1} + 9f_{i-2} - 2f_{i-3}) \right\} d\eta \right] \dots\dots\dots (30)$$

$$S(\eta) = Pr \left(\frac{2}{m+1} \right) \left\{ \frac{iPr}{6} (11\theta_i - 18\theta_{i-1} + 9\theta_{i-2} - 2\theta_{i-3}) \frac{df_i}{d\eta} + \theta_i \frac{df_i}{d\eta} \right\} \dots\dots\dots (31)$$

$$Q(\eta) = \int_0^\eta P(\eta) d\eta \dots\dots\dots (32)$$

方程式(24)~(26)を繰返し計算⁽⁶⁾により求め、得られた速度分布 $f' (=df/d\eta)$ および温度分布 θ をくさび頂角パラメータ $m=0.2(\Omega=60^\circ)$ 、プラントル数 $Pr=0.73$ の場合につき、吸込み吹出し係数 ξ をパラメータにとり図2および図3に示す。ここで、 $\xi > 0$ は吸込み、 $\xi < 0$ は吹出しを表す。

5. 自由対流境界層の安定性

じょう乱方程式(15)、(16)を境界条件(17)のもとに解くことは一つの固有値問題である。式(15)、(16)はプラントル数 Pr 、グラスホフ数 G 、波数 α および角振動数 $\beta (= \beta_r + i\beta_i)$ の適切な値の組合せに対してのみ解をもつ。式(9)、(10)に示すように、その解において $\beta_i = 0$ のときは中立安定状態となり、 $\beta_i < 0$ で流れは安定、 $\beta_i > 0$ で不安定となる。ここでは、式(15)および式(16)の解法としてシューティング法を用いる。解法の手順は、初めに境界層の特性 f', f'' および θ' を式(24)~(26)を用いて算出し、パラメータ Pr 、 G 、 α にある値を入れ、固有値 β_r および β_i に推定値を与えて式(15)、(16)をAadms-Moulton法を用いて境界層外側から壁面に向かって数値積分する。ここで壁面での境界条件が満足されるまで β_r および β_i を変化させて計算を繰返す。なお、解法の詳細はWatanabeら⁽¹⁵⁾に示されているので、ここでは省略する。

また、じょう乱速度およびじょう乱温度の実際の物理量は、式(9)、(10)において、実部のみをとり次式で表される。

$$\tilde{u} = A_u \cos \left(\frac{\alpha}{\delta} x - \frac{\beta_r U}{\delta} t + \theta_u \right) \dots\dots\dots (33)$$

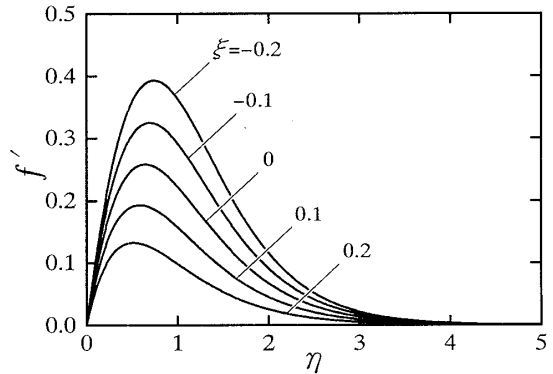


Fig. 2 Velocity profiles for $m=0.2$

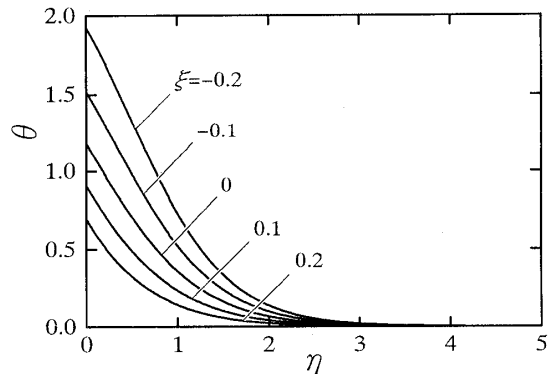


Fig. 3 Temperature profiles for $m=0.2$ and $Pr=0.73$

$$\tilde{v} = A_v \sin \left(\frac{\alpha}{\delta} x - \frac{\beta_r U}{\delta} t + \theta_v \right) \dots\dots\dots (34)$$

$$\tilde{\theta} = A_\tau \cos \left(\frac{\alpha}{\delta} x - \frac{\beta_r U}{\delta} t + \theta_\tau \right) \dots\dots\dots (35)$$

A_u, A_v および A_τ は、それぞれじょう乱速度 \tilde{u}, \tilde{v} およびじょう乱温度 \tilde{T} の振幅関数を表し、 θ_u, θ_v および θ_τ はその位相角を表す。

ここで、それぞれの振幅関数は、その最大値で正規化すると次式で表される。

$$\frac{A_u}{(A_u)_{\max}} = \frac{(\phi_r'^2 + \phi_i'^2)^{1/2}}{(\phi_r'^2 + \phi_i'^2)_{\max}^{1/2}} = \frac{|\phi'|}{|\phi'|_{\max}} \dots\dots\dots (36)$$

$$\frac{A_v}{(A_v)_{\max}} = \frac{(\phi_r^2 + \phi_i^2)^{1/2}}{(\phi_r^2 + \phi_i^2)_{\max}^{1/2}} = \frac{|\phi|}{|\phi|_{\max}} \dots\dots\dots (37)$$

$$\frac{A_\tau}{(A_\tau)_{\max}} = \frac{(s_r^2 + s_i^2)^{1/2}}{(s_r^2 + s_i^2)_{\max}^{1/2}} = \frac{|s|}{|s|_{\max}} \dots\dots\dots (38)$$

6. 数値計算結果および考察

数値計算は、頂角パラメータ $m=0.0141, 0.0909, 0.2(\Omega=15, 30, 60^\circ)$ 、プラントル数 $Pr=0.73$ で熱容量が零、すなわち境界条件(17)において $\eta=0$ での $s' = 0$ の場合と、熱容量が十分に大きい場合、すなわち $s=0$ の場合について修正グラスホフ数 G および吸込み吹出し係数 ξ を種々変化させて計算を行った。

6・1 熱容量が零の場合 [$s'(0)=0$ のとき] 図4には, $m=0.2$, グラスホフ数 $G=280$ における位相速度 β_r/α の値を吸込み吹出し係数 ξ をパラメータにとり, 波数 α との関係で示す. 位相速度 β_r/α は吹出し割合が大きくなると増大し, 吸込み割合が大きくなると減少する. また, β_r/α は波数 α および G が大きくなるにしたがい減少する. 図5には, グラスホフ数 $G=280$ における増幅度 β_i と α の関係を吸込み吹出し係数 ξ をパラメータにとり示す. 吹出し割合が大きくなると増幅度 β_i は増大し, 吸込み割合が大きくなると β_i は減少する. 図4において, $\xi=0$ のときの位相速度 β_r/α は, $\alpha=0.5$ 付近においてステップ状に変化している. これは, $\alpha=0.5$ 付近を境にして異なる不安定現象が発生しているためである. 図5の $\xi=0$ における増幅度曲線を見ると二山になっており, 谷の部分は鋭い形状となっている. これまでの研究において, 増幅度曲線の低波数側の山は熱的不安定に起因するものであり, 高波数側の山は速度場固有の不安定(変曲点不安定)によるものであることが知られてい

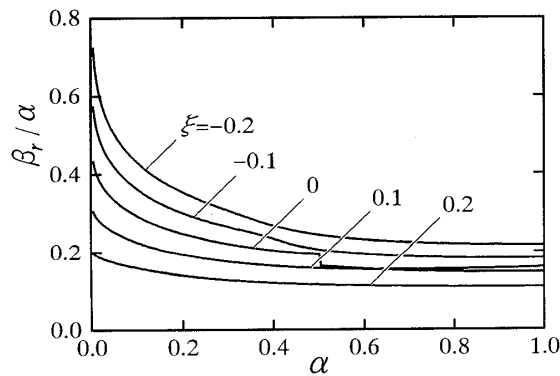


Fig. 4 Variation of the wave propagation with the wave number for $s'(0)=0$, $m=0.2$ and $G=280$

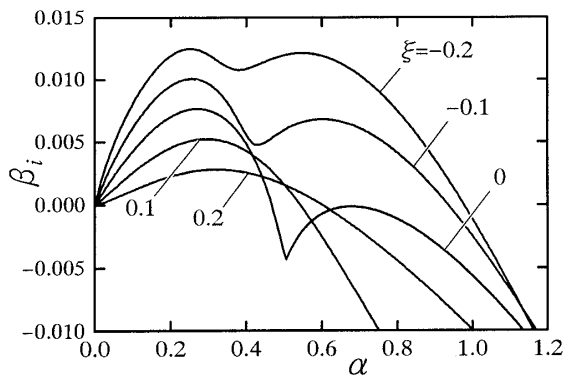


Fig. 5 Variation of the temporal exponential amplification factor with the wave number for $s'(0)=0$, $m=0.2$ and $G=280$

る. $\xi=0$ のときの位相速度 β_r/α が $\alpha=0.5$ 付近において急に変化しているのは, 熱的不安定性から速度場固有の不安定性へ急に移行したためであると考えられる.

図6および図7には, 吸込み吹出し係数 ξ およびグラスホフ数 G を種々変化させて増幅度 β_i と波数 α の関係を求め, それより, α と G との関係で示す中立安定曲線を吸込み吹出し係数 ξ をパラメータにとり示されている. 図6は吸込み吹出し係数 $\xi=0$ で頂角パラメータ m が変化した場合, 図7は頂角パラメータ $m=0.2$ で吸込み吹出し係数 ξ が種々変化した場合である. 流れの安定領域は各曲線の左側を示し, くさび頂角および吸込み割合が大きくなるにしたがい広がり, 吹出し割合が大きくなると狭まる.

6・2 熱容量が十分に大きい場合 [$s(0)=0$ のとき]

図8および図9には $m=0.0141$, $G=110$ の場合の固有値 β_r および β_i の値を吸込み吹出し係数 ξ をパラメータにとり表している. 位相速度 β_r/α は吸込み割合が大きくなると減少し, 吹出し割合が大きくなると増大する. また, 吹出し割合が大きくなると増幅度 β_i は増大し, 吸込み割合が大きくなると β_i は減少す

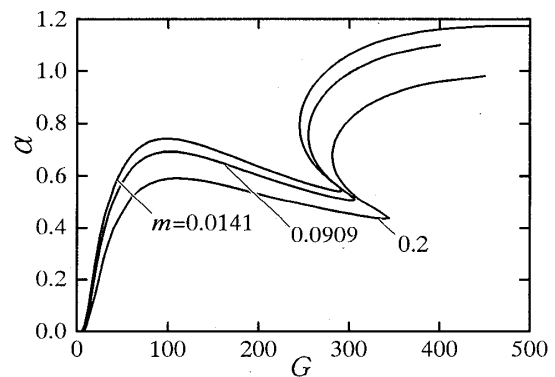


Fig. 6 Neutral stability curves for $s'(0)=0$, $\xi=0$ and $Pr=0.73$

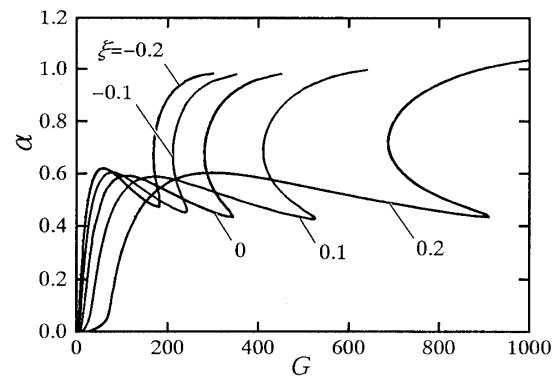


Fig. 7 Neutral stability curves for $s'(0)=0$, $m=0.2$ and $Pr=0.73$

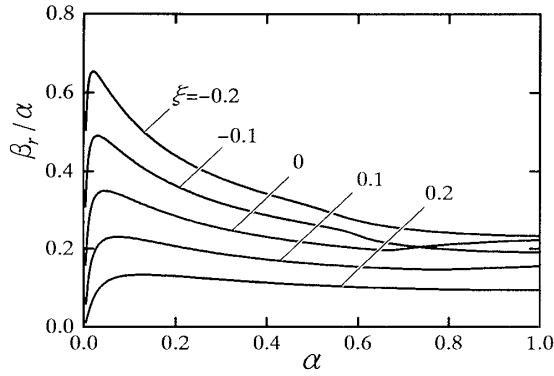


Fig. 8 Variation of the wave propagation velocity with the wave number for $s(0)=0$, $m=0.0141$ and $G=110$

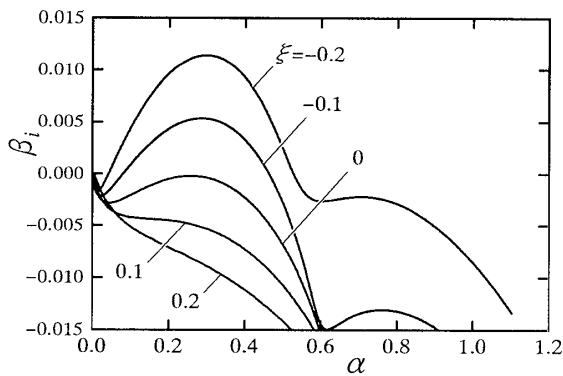


Fig. 9 Variation of the temporal exponential amplification factor with the wave number for $s(0)=0$, $m=0.0141$, $Pr=0.73$ and $G=110$

る。同様に吸込み吹出し係数 ξ およびグラスホフ数 G を種々変化させたときの固有値 β_i と波数 α の関係を算出し、それより ξ をパラメータにとり α と G の関係で示す中立安定曲線を求め図 10 および図 11 に示す。図 10 は $\xi=0$ で頂角パラメータ m を変化させた場合であり、図 11 は $m=0.0141$ で吸込み吹出し係数 ξ を変化させた場合である。図 10, 11 から明らかなように、頂角および吸込み割合が増大するにしたがい、安定域は増大し、吹出し割合が大きくなるにしたがい、安定域は減少する。図 11 における点線は G の臨界値 G_c とそのときの波数 α_c を示しており、その数値を表 1 に示す。吸込み吹出しの作用しない場合の臨界値 $G_c=112$ に対し、吸込み割合が大きくなると安定領域は増大し吸込み係数 $\xi=0.2$ においては臨界値 $G_c=430$ となる。これとは逆に吹出し割合が大きくなると安定領域は小さくなり、吹出し係数 $\xi=-0.2$ においては臨界値 $G_c=42$ となる。

図 12 および図 13 は頂角パラメータ $m=0.0909$ において、吸込み吹出し係数が $\xi=0$ と $\xi=0.1, -0.1$ の

Table 1 Values of α_c and G_c

ξ	$m=0.0141$		0.0909		0.2	
	G_c	α_c	G_c	α_c	G_c	α_c
0.2	430	0.287	436	0.269	458	0.233
0.1	207	0.274	214	0.250	232	0.217
0.0	112	0.265	118	0.241	131	0.205
-0.1	66	0.256	70	0.235	79	0.197
-0.2	42	0.250	45	0.230	52	0.193

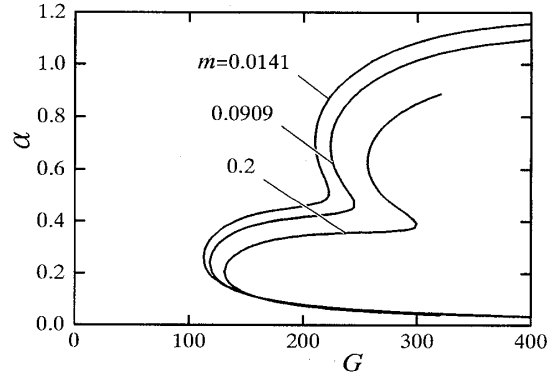


Fig. 10 Neutral stability curves for $s(0)=0$, $\xi=0$, $Pr=0.73$

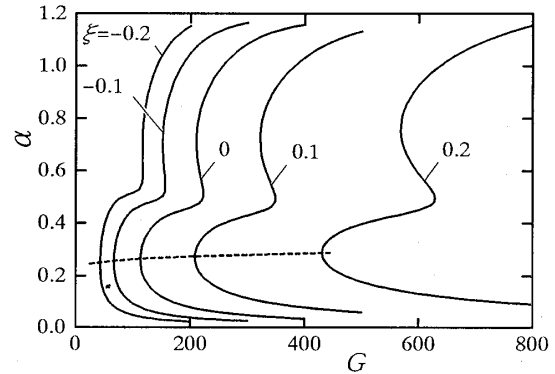


Fig. 11 Neutral stability curves for $m=0.0141$ and $Pr=0.73$

それぞれの場合について境界条件 $s'(0)=0$ および $s(0)=0$ における中立安定曲線を同時に示している。これより熱容量が有限の場合の中立曲線はこの二つの曲線間に存在することになる。 $s'(0)=0$ の境界条件における安定性解析で、図 12 に示す点 B を境にして点 A または点 C を含む二つの曲線が得られた。点 C を含む側の安定曲線はこれまでの研究においては平板についてもいまだ得られていない。本解析においては、この範囲での解が得られ、すべての波数における中立曲線を求めることができた。また、図 12 に示す境界条件 $s(0)=0$ における安定曲線において、点 b を境にして点 a または点 c を含む二つの曲線に分かれる。安定性解析において温度じょう乱を結合させて解くこ

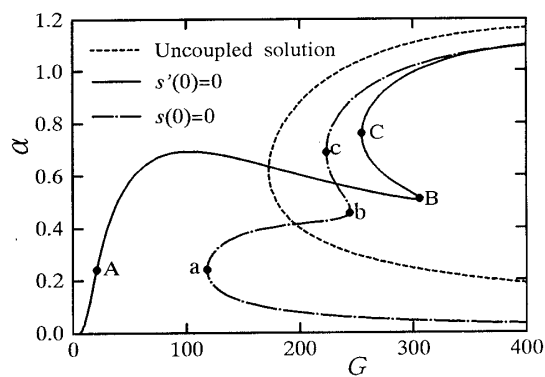


Fig. 12 Neutral stability curves for $m=0.0909$, $\xi=0$ and $Pr=0.73$

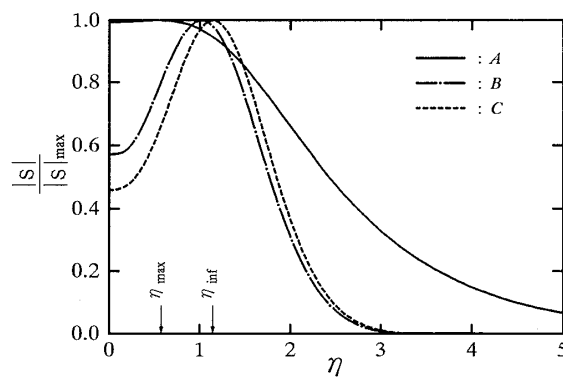


Fig. 15 Disturbance amplitude of the temperature for $m=0.0909$, $Pr=0.73$ and $\xi=0$; curves A, B, C correspond to Fig. 12

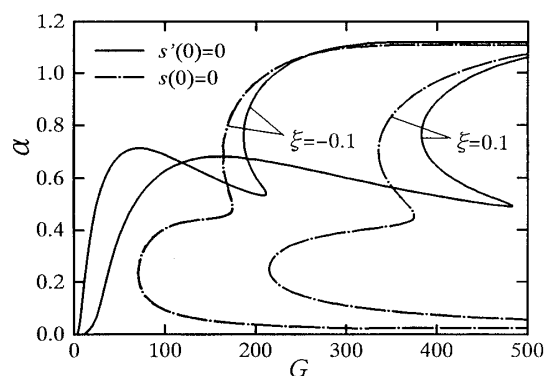


Fig. 13 Neutral stability curves for $m=0.0909$, $\xi=0.1$, $\xi=-0.1$ and $Pr=0.73$

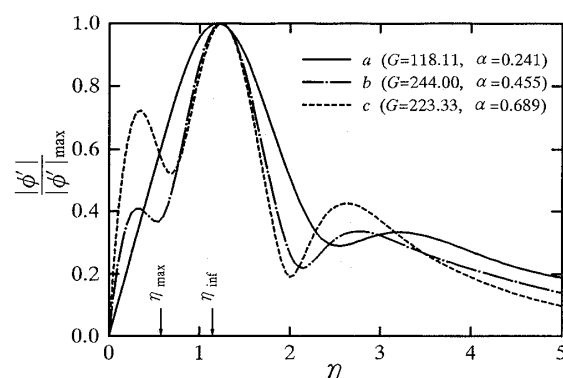


Fig. 16 Disturbance amplitude of the velocity component along the wedge for $m=0.0909$, $Pr=0.73$ and $\xi=0$; curves a, b, c correspond to Fig. 12

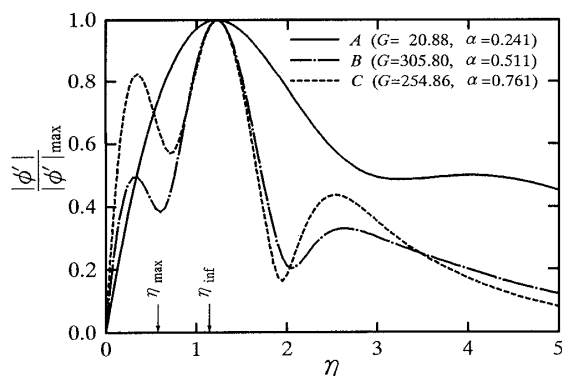


Fig. 14 Disturbance amplitude of the velocity component along the plate for $Pr=0.73$ and $\xi=0$; curves A, B, C correspond to Fig. 12

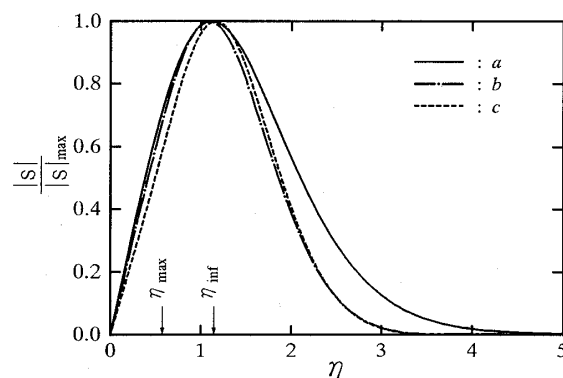


Fig. 17 Disturbance amplitude of the temperature for $m=0.0909$, $Pr=0.73$ and $\xi=0$; curves a, b, c correspond to Fig. 12

とにより点 a を含む側の曲線が得られ、温度じょう乱は波数 α の小さい範囲において流れの不安定に大きな影響を及ぼしていることがわかる。図 12 の点線の曲線は速度じょう乱のみを考慮して求めた安定曲線を表している。また、流れの不安定性に及ぼす影響を解明するうえでじょう乱波の境界層内における振幅分布を調べることが重要である。

図 14~17 には図 12 に示す中立安定曲線上の各点におけるじょう乱速度およびじょう乱温度の振幅分布を示す。図 14~17 の振幅分布は最大値が 1.0 になるように正規化されている。また、図 14~17 中の η_{\max} および η_{inf} の記号は、それぞれ基礎流の速度分布の最大

値の位置および変曲点の位置を表している。ここでは、 η_{\max} より壁面側を内部層、外側を外部層と呼ぶことにする。図 14~17 において、振幅分布は正規化されているためその大きさは直接比較できないが、じょう乱速度およびじょう乱温度の振幅分布の最大値の位置は速度分布の変曲点付近に現れ、変曲点が流れの不安定性に大きな影響を及ぼすことがわかる。また、じょう乱速度の振幅分布は波数が大きくなる [A(a)→B(b)→C(c)] にしたがって壁面付近において傾きが大きくなり、内部層においてもピークが現れる。一方、温度分布は $s(0)=0$ においては波数による変化は見られないが、 $s'(0)=0$ においては壁面付近においても温度じょう乱は大きく、波数が小さくなるにしたがい壁面温度の変動に励起・共振されて G の非常に小さい値で不安定になることがわかる。

7. 結 言

くさび形物体表面からの熱流束一様な場合の自由対流に対し、一様な吸込み吹出しが作用する場合の境界層を理論的に解析した。はじめに、種々のくさび頂角における一様な吸込み吹出しの作用する自由対流境界層の諸特性を算出した。次に、得られた境界層の諸特性を用いて安定曲線を求め、境界層の安定性に及ぼすくさび頂角および一様な吸込み吹出しの影響を調べた。得られた結果を要約すると次のようになる。

(1) 位相速度 β_r/α および増幅度 β_i は吹出し割合が大きくなると増大し、吸込み割合が大きくなると減少する。

(2) 吸込み吹出しの変化による流れの安定領域は吸込み割合が大きくなると増大し、吹出し割合が大きくなると減少する。また、くさび頂角が大きくなるにしたがい安定となる。なお、波数の小さいところでは壁面温度の変動に励起・共振されて G の非常に小さいところで不安定になる。

(3) 熱容量が十分大きい場合は、吸込み吹出しを作用させた場合も波数 $\alpha=0.2$ 前後において臨界グラスホフ数 G_c が存在する。臨界グラスホフ数 G_c はく

さび頂角および吸込み割合が増大すると大きくなり、流れの安定領域は増大し、吹出し割合が増大すると G_c は小となり、流れの安定領域は狭くなる。頂角 $\Omega=30^\circ$ の場合について考えると吸込み吹出しが作用しない場合の $G_c=118$ に対し、吸込み係数 $\xi=0.2$ の場合は $G_c=436$ 、吹出し係数 $\xi=-0.2$ の場合は $G_c=45$ となる。また、安定解析において温度じょう乱は波数 α の小さいところで流れの不安定に大きな影響を及ぼす。

(4) じょう乱速度およびじょう乱温度の振幅分布より、基礎流の速度分布の変曲点が流れの不安定性に大きな影響を及ぼす。

(5) 熱容量が零の場合と十分に大きい場合についての安定曲線を求め、熱容量が有限の場合の安定曲線の範囲を明らかにした。

おわりに、本研究に協力された岩手大学技官 金子昌晴君に謝意を表す。

文 献

- (1) Schmidt, E. and Beckmann, W., *Forsch. Ingenieurwes.*, **1** (1930), 391-404.
- (2) Yang, K. T., *Trans. ASME, Ser. E*, **82** (1960), 230-236.
- (3) Sparrow, E. M., Tsou, F. K. and Kurts, E. F., *Phys. Fluid*, **8** (1960), 1559-1561.
- (4) Eichhorn, R., *Trans. ASME, Ser. C*, **82** (1960), 260-263.
- (5) Sparrow, E. M. and Cess, R. D., *Trans. ASME, Ser. C*, **83** (1961), 387-389.
- (6) Merkin, J. H., *Int. J. Heat Mass Transf.*, **15** (1972), 989-999.
- (7) Parikh, P. G., Moffat, R. J., Kays, W. M. and Bershader, D., *Int. J. Heat Mass Transf.*, **17** (1974), 1465-1474.
- (8) 渡邊喬・川上秀樹, 機論, **55-519, B** (1989), 3365-3371.
- (9) Plapp, J. E., *J. Aeronaut. Sci.*, **24** (1957), 318-319.
- (10) Nachtsheim, P. R., *NASA Tech. Note*, D-2089 (1963).
- (11) Knowles, C. P. and Gebhart, B., *J. Fluid Mech.*, **34** (1968), 657-686.
- (12) Gebhart, B., *Trans. ASME, Ser. C*, **91** (1969), 293-309.
- (13) Polymeropoulos, C. E. and Gebhart, B., *AIAA J.*, **4** (1966), 2066-2068.
- (14) Hieber, C. A. and Gebhart, B., *J. Fluid Mech.*, **48** (1971), 625-646.
- (15) Watanabe, T., Taniguchi, H. and Pop, I., *ASME J. Appl. Mech.*, **63** (1996), 404-410.