

熱応力緩和型傾斜機能材料の
熱弾性挙動に関する確率論的研究

2009年3月

岩手大学大学院工学研究科
生産開発工学専攻

千葉 良一

目 次

第1章 序 論	1
1.1 研究の背景	1
1.2 本研究に関連する既往の研究	2
1.3 熱応力緩和型傾斜機能材料	3
1.4 本論文の研究課題	5
1.5 確率論的評価に用いる統計量	6
1.6 確率過程と確率場	7
1.6.1 確率過程と相関関数	8
1.6.2 定常確率過程	8
1.6.3 確率場	9
1.7 本論文で用いる主な記号	10
第2章 熱的境界条件に確率過程が含まれる場合	12
2.1 緒 言	12
2.2 解 析	13
2.2.1 温度場	13
2.2.2 熱応力場	18
2.3 数値計算結果と考察	20
2.3.1 周囲媒体温度がホワイトノイズの場合	22
2.3.2 周囲媒体温度が定常マルコフ過程の場合	26
2.4 結 言	29
第3章 初期温度が確率場である場合	31
3.1 緒 言	31
3.2 温度場の解析	31
3.3 熱応力場の解析	35
3.4 数値計算結果と考察	37
3.4.1 初期温度がホワイトノイズの場合	39
3.4.2 初期温度が一様マルコフ確率場の場合	41
3.5 結 言	45
第4章 物性値が確率場で与えられる場合	46

4.1	緒 言	46
4.2	モンテカルロ・シミュレーション法による解析	47
4.2.1	解析モデル	47
4.2.2	モンテカルロ・シミュレーション法	49
4.2.3	温度場・熱応力場の解析	50
4.2.4	数値計算結果と考察	50
4.3	摂動法による解析	62
4.3.1	解析モデル	62
4.3.2	解 析	62
4.3.3	数値計算結果と考察	68
4.4	結 言	75
第5章	放熱面における熱伝達率が確率場の場合	77
5.1	緒 言	77
5.2	解析モデル	78
5.3	モンテカルロ・シミュレーション	80
5.4	決定論的温度場および熱応力場の解析解	81
5.4.1	温度場	81
5.4.2	熱応力場	85
5.5	数値計算結果と考察	86
5.5.1	計算条件の設定	86
5.5.2	決定論的な温度と熱応力に対する解析解の検証	89
5.5.3	解析結果の収束に及ぼすシミュレーション回数の影響	90
5.5.4	温度の二次統計量	90
5.5.5	熱応力の二次統計量	95
5.5.6	板厚変化の影響	99
5.6	結 言	101
第6章	総 括	103
参考文献		107
付録 A		117
付録 B		118

付録 C	ランダムな初期温度をもつ均質体の熱応力	120
1	緒 言	120
2	一般理論	121
3	解析	122
4	数値計算結果と考察	131
5	結 言	135
付録 D	空間的にランダムな熱伝達率を有する均質中空円板の確率論的熱応力解析	136
1	緒 言	136
2	解析モデル	137
3	解 析	138
4	数値計算結果と考察	146
5	結 言	156
付録 E		157
付録 F		158
付録 G		159
付録 H		160
謝 辞		162

第1章 序 論

1.1 研究の背景

近年、電子計算機の高性能化と、それに適した計算方法のめざましい発展にともない、機械、機器、装置、構造物（以降、これらを構造体と総称する）の設計・解析は著しく高度化し、精緻な結果を得ることが可能となってきた。これは、熱弾性学の分野においても当てはまり、熱応力問題の理論的研究は、3次元熱応力場や熱弾性逆問題、電磁熱弾性問題、各種異方性体や不均質体にまでその解析対象を拡大してきている。しかし、これらの進歩は、物体に対する外力や熱負荷、物体の特性などがばらつかない、もしくはバラツキが無視できるほど小さいとした、いわゆる「決定論的取扱い」を前提とした場合に限られる。

一般に、構造体が受ける外力や熱負荷には、本来正確な予測がしにくいものが多い。また、構造体の物性値にバラツキがあることも疑問の余地はなく、衆目の認めるところである。事実、ガスタービンなどの高温機器において、それを構成する各要素の熱的環境や機械的負荷を正確に予測することは非常に困難であり、設計上かなりの不確定要因が存在する⁽¹⁾ことが指摘されている。これらの事実を勘案して、いわゆる安全率なるものが設計に取り入れられているのであるが、現行の安全率の考え方に基づく許容応力設計法では、構造体の安全性を定量的に評価できないことも事実である。そこで1960年代より、荷重および構造材料等の統計的バラツキを考慮した確率論手法を用いて、安全性を合理的に決定しようとする動きが進んでいる。そして、それは強度や寿命が必要にして十分か否かを定性的・主観的ではなく、信頼性の概念に基づいて定量的・客観的に評価することを可能にしている。

確率論手法の工学問題への応用に関する文献をサーベイすると、土木関係の学術誌において不規則振動理論に関する研究が比較的多く見つかる。また、確率変量を有する構造系の振動解析に関する研究も散見される。土木工学の分野において不規則振動問題が活発に研究されている理由は、それが構造物の耐震設計と関連して重要視されているからであろう。さらに、伝熱工学の分野でも確率論的熱伝導解析に関する論文が幾つか発表され、各解析手法の数値計算への適用性が検討されている⁽²⁾。しかしながら、それらの分野と比べると、熱弾性問題への確率論手法の導入は遅れており、異方性体や不均質体はもとより、均質体を対象としたものですら、その報告例が非常に少ない現状である。

近年、不均質体の確率論的熱弾性問題は、熱応力緩和型傾斜機能材料 (FGM) の信頼性評価と関連して、特に重要な研究テーマになりつつある。現在、スペースシャトルに代わる次世代宇宙機 (スペースプレーン) の機体材料として、1000K 以上もの温度落差に耐えうる超耐熱材料である FGM が注目されている。熱応力緩和型 FGM は、セラミックから金属へ組成が連続的に変化する典型的な不均質材料である。一般に、機体が実際の大気圏飛行中に受ける熱的負荷を正確に予測するのは困難⁽³⁾であり、また、製造時の連続的な組成制御の難しさから、FGM の物性値その

ものも不確定性を含む。有人宇宙往還機であるスペースプレーンの機体破損は直ちに人命に関わるため、その安全性評価は不可欠である。したがって、不均質体の熱応力に対する確率論的評価手法の開発が昨今求められている。

1.2 本研究に関連する既往の研究

これまでに報告されている「確率論手法を用いた熱伝導および熱弾性解析」に関する研究を表 1-1 にまとめる。確率量と見なしているパラメータ別に、解析対象物の均質/不均質および熱応力場の解析の有無に応じて分類している。この表によれば、均質体を対象としたものでは、熱伝導問題のみを扱った研究は比較的多いものの、ランダムなパラメータが及ぼす熱応力（または熱変形）への影響まで検討したものは非常に少ない。また、不均質体を対象とした研究は、FGM の出現と相まって 90 年代前半から徐々に行われ始めてはいるが、均質体を対象としたものと比べると極端に少ない。

Table 1-1 Summary of stochastic heat conduction/thermal stress studies

Random parameter	Homogeneous bodies		Nonhomogeneous bodies	
	Temperature	Thermal stresses	Temperature	Thermal stresses
Surface temperature (or ambient temperature)	(4, 7-16)	(5, 17-24, 160-162)	(25)	(26, 27)
Initial temperature	(16, 28-31)		(25)	
Material properties	(32-46)	(47-52)		(6, 53-55)
Heat transfer coefficients	(14, 16, 34, 37, 46, 56, 57)	(21, 58, 59)		
Heat generation rate	(4, 14, 30, 31, 40, 60, 61)		(25)	
Geometry	(62)	(50, 63, 64)		(53)

plus there exist some review articles^(2, 65, 66).

確率論手法を用いた熱伝導解析の先駆的研究を行ったのは Samuels⁽⁴⁾である。彼は、ランダム変動する表面温度と時空間的にランダムな内部熱発生をもつ平板と球に対して解析を行った。一方、ランダム熱応力に関する研究は Parkus⁽⁵⁾によって提起され、彼は半無限体の熱弾性問題を確率論手法を用いて巧みに解析した。

確率量として考慮したパラメータに注目すると、物体の表面温度または周囲媒体温度を確率量とみなした、いわゆるランダム加熱問題に関する研究が多いようである。これは、例えば、温度変化に敏感な機器を周囲から断熱するシステムの設計などに強く関連するからであろう。また、物体の材料特性を確率量とみなした研究も少なくないが、これは、構造体を構成する材料の特性は一般に少なからずばらつくものであるという事実が公知となった証拠であろう。後述するように、FGM は他の材料と比べて、物性値に大きなバラツキを生じせしめる多くの要因を包含している。Poterasu ら⁽⁶⁾は、FGM の物性値の大きなバラツキに早くから注目し、そのランダム性を考慮

して熱弾性解析を試みようとしたが、その研究が確率有限要素法に基づく定式化にとどまっていることは非常に残念に思われる。

FGM が所要の機能性を最大限に発現するには、そのための材料組成設計が必須事項となる。したがって、一般的な FGM の解析モデルは、任意の不均質特性を有する不均質体でなければならない。しかしながら、このような不均質体に関する確率論的研究は全く報告されていない。

1.3 熱応力緩和型傾斜機能材料

傾斜機能材料 (FGM) とは、異なる性質をもつ複数の材料を用いて、その組成・組織の分布を材料内で連続的に制御することにより、任意の材料機能を発現させることができる先進材料である。使用条件に合わせて発現させる機能を最大限に引き出すために、あらかじめ組成・組織の分布を設計する「材料設計」の概念を持つ。従来の研究・開発の対象であった均質材料とはまったく異なる「不均質材料」といえるものである。FGM は我が国独自のアイデアによって生み出された材料である。

その中でも熱応力緩和型 FGM は、加熱面にはセラミックを配して耐熱性を与え、一方、冷却を行う面には金属材料を配して高熱伝導性および機械的強度を与え、その間の組成・組織の分布を連続的に制御することにより、熱膨張係数を連続的に変化させた一体の材料であり、高温で発生する熱応力の緩和を目的としたものである。ここで各種材料の構成と諸特性の関係を図 1-1 に示す。均質材料は諸特性が材料内部で一定であるが、複合材料 (貼り合わせ材) では諸特性が接合界面において大きく異なり、特性の段差を有する。熱膨張係数の段差は高温において大きな熱応力を発生させ、接合界面の破壊を招く。FGM の場合には、組成が連続的に変化しているために特定の接合界面が存在せず、諸特性も連続的に変化している。熱膨張係数に段差がないため高温で発生する熱応力を大幅に低減することができ、超高温での接合界面の破壊を防ぐことが可能になる。

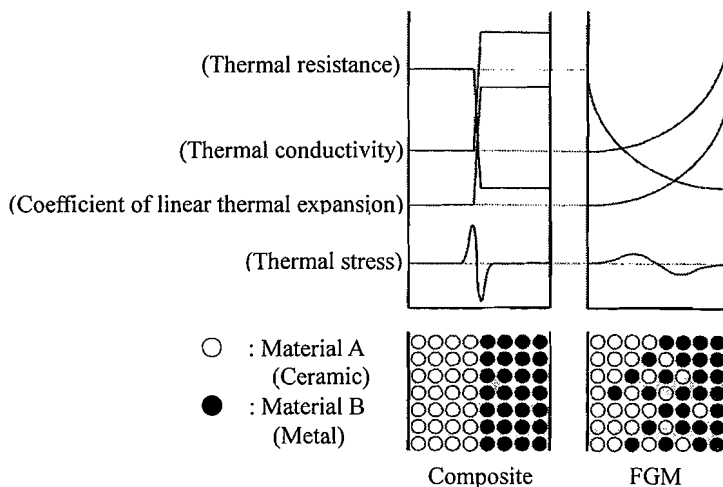


Fig. 1-1 Relationship between material composition and resulting properties⁽¹⁶⁴⁾

* 段階的に変化させた材料も広義の意味で FGM と呼ぶことがある。

FGM 発想のきっかけをつくったのはスペースプレーンに要求される「大温度落差にも耐えうる超耐熱性」であったため、熱応力緩和型 FGM はいわば FGM の元祖といえる。しかしながら、今や FGM は耐熱材料だけでなく、人工股関節や人工歯根などの生体材料、温度や湿度をコントロールする建築材料、光ファイバー、熱電変換材料、シェーバーの刃など広範な分野に応用されている。

ところで、FGM の製造方法はこれまでに様々開発されてはいるが、いずれの方法を用いたとしても組成分布を設計値通りに制御することは技術的に困難であり、FGM の組成分布は設計値からばらつくものとなる^(88, 99, 163)。図 1-2 (a)は、減圧プラズマ溶射法で製造された Ni-20Cr/ZrO₂-8Y₂O₃ FGM のジルコニア重量%の板厚方向分布を、図 1-2 (b)はホットプレスで製造された Cu/Al FGM の組成の板厚方向分布を示したものである。これらを見ると、金属とセラミックスが組成比を漸変させながら微細に堆積しており、設計目標と完全に一致していないことがわかる。また、一般に FGM を製造する時の温度は非常に高いため、原子拡散（サーモマイグレーション）⁽⁹⁰⁾が生じやすく、このことも FGM の物性値が不確定なものとなる所以である。

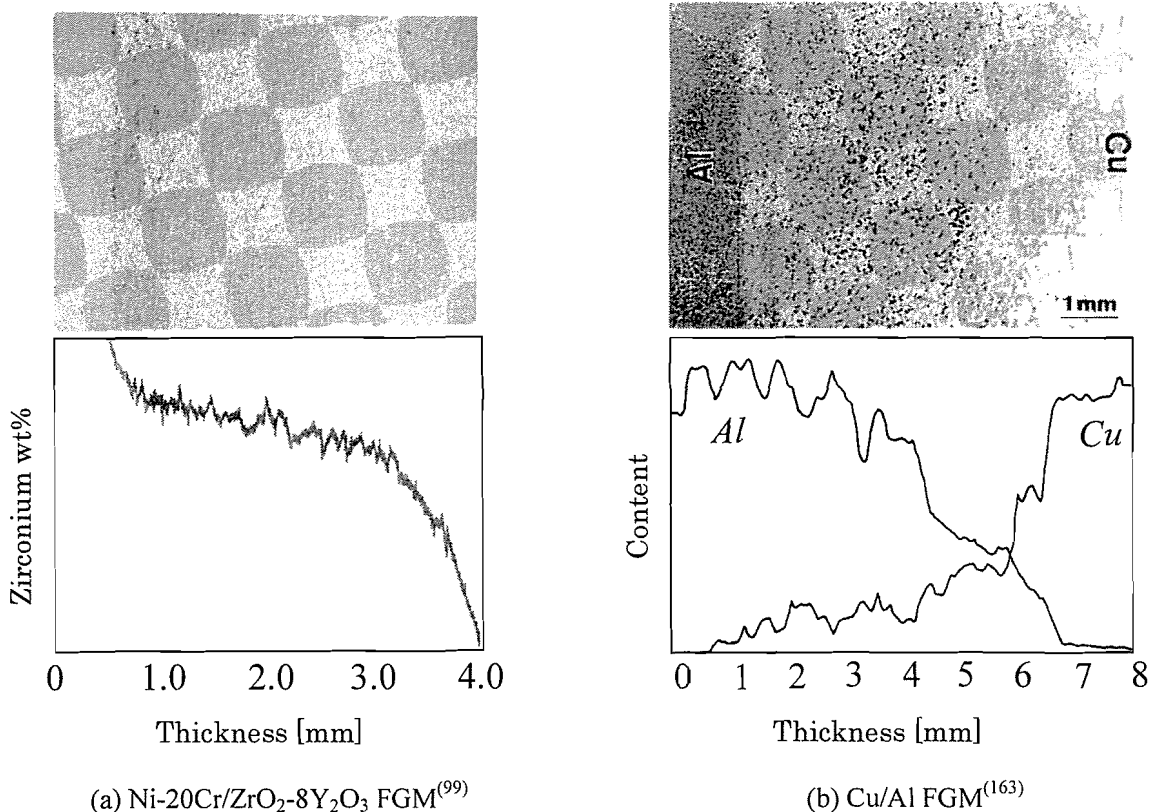


Fig. 1-2 Composition distributions of FGM along the thickness

このように、熱応力緩和型 FGM は他の材料と比べて、その物性値に大きな不確実性を抱える。従来の設計手法では、安全係数という経験的な係数を用いて不確実性に対処しているが、まだ研

究段階の FGM においては、製造方法や使用条件など未知の部分が多く存在するため、FGM の材料設計に際して、安全係数を主観的に決定することは危険であり、確率論に基づいて不確定性を客観的に取り扱うことにより、より信頼性の高い安全性評価を行うことができる。

1.4 本論文の研究課題

不均質体、特に熱応力緩和型 FGM の熱弾性挙動に関する確率論的評価手法の開発が急務である現状を考慮し、本論文では、熱負荷条件や物性値などに不確定性を含む不均質体の温度・熱応力の統計量を数理解析的に評価する方法について論じ、以てスペースプレーンや高温ガスタービン、原子炉などのように、高度の安全性が要求される高温構造体の信頼性評価に資することを目的としている。何を確率変量と見なすかによって温度および熱応力の確率論的評価方法が異なるため、確率変量として考えるパラメータの種類に応じて問題を 4 つに分類し、章ごとに分けて取り扱った。以下、各章における内容を概説する。

第 2 章では、熱的境界条件に確率過程が含まれる不均質体の確率論的熱弾性問題について論じた。具体的には、板厚方向への熱的・機械的不均質性が任意である傾斜機能無限平板が、温度がランダム変動する周囲媒体から対流加熱を受ける場合を取り扱った。一般的な FGM がもつ任意の熱的不均質性に対処するため、温度場は区分的線形不均質近似法を適用して解析した。また熱応力場は、厚さ方向にのみ温度変化がある不均質無限平板に対する厳密解を用いて解析した。そして、これらの結果を基に、温度と熱応力の統計量として、それぞれの自己相関関数とスペクトル密度を導出した。金属とセラミックからなる典型的な熱応力緩和型 FGM について数値計算を行い、周囲媒体の温度変化が①ホワイトノイズ、②定常正規マルコフ過程—で与えられる場合について、温度と熱応力の統計量に及ぼす傾斜組成分布の影響を考察した。

第 3 章では、初期温度が確率場である不均質体の非定常熱弾性問題について論じた。板厚方向への熱的・機械的不均質性が任意である傾斜機能無限平板がランダムな初期温度を有する場合について、積分変換法の一つである Vodicka の手法を応用して解析した。また数値計算は、初期温度がホワイトノイズの場合に加え、一様マルコフ確率場の場合についても実行し、傾斜組成分布と温度・熱応力の統計量との関係を考察した。なお、初期温度が確率場で与えられる非定常熱弾性問題に対する確率論的研究は、均質体を対象としたものですら報告されていない現状である。そこで付録において、7 種類の単純な幾何形状を有する均質体が、ランダム分布する初期温度をもつ場合について解析を行った。そのうち数種類の形状に対して、ホワイトノイズ型の初期温度を仮定して温度と熱応力の統計量を数値計算し、その統計量の非定常挙動について考察している。

第 4 章では、確率変量を有する不均質体の熱弾性問題の一例として、物性値に不確定性を含む傾斜機能無限平板が、その表面を対流加熱される場合の非定常熱弾性問題について論じた。本章では、一般に熱応力緩和型 FGM の構成材料間で大きく値の異なる「熱伝導率」と「線膨張係数」を不確定量として扱い、問題の求解には二つのアプローチを採った。一つは、第 4 章第 2 節で述べるモンテカルロ・シミュレーション法であり、確率変数の個数や相関の有無に関係なく解析が可能であるという特長をもつ。他の一つは、第 3 節で述べる摂動法である。この手法の使用は、

不確定量のバラツキ幅が小さい場合に限定されるが、その数値計算の容易さから、実際の FGM の設計時に有用であると思われる。また、数値計算を行い、温度および熱応力の標準偏差に及ぼす傾斜組成分布、加熱面の熱伝達率、不確定な物性値の相関係数の影響を明らかにした。

第5章では、周囲への熱放散を考慮して物体内の温度や熱応力分布を評価・予測する際、一般に最も不確定なパラメータは熱伝達率であるという事実に注目して、熱放散面の熱伝達率が確率場である不均質円板の軸対称非定常熱弾性問題について論じた。半径方向に組成と板厚が変化する変厚傾斜機能円板に対して、決定論的温度と熱応力に対する解析解を利用したモンテカルロ・シミュレーション法により、温度と熱応力の統計量を評価した。半径方向へのなめらかな板厚変化をステップ状に近似し、かつ各層で様な熱伝達率を有する均質環状層からなる積層体で元の円板を近似することにより、温度の解析解を導出した。また熱応力の解析解は、ヤング率の区分的ベキ乗関数近似を導入することで得た。数値計算は、タービンディスクへの応用を想定して行い、温度と熱応力の統計量に及ぼす熱伝達率の平均の大きさ、構成材料の体積分率分布、および板厚変化の影響について検討した。なお、確率場の熱伝達率を有する物体の非定常熱弾性問題に関する研究は、その物体が均質・不均質に関わらず、これまで全く行われていない。そこで、均質円板の平坦面における熱伝達率が確率場の場合について、温度と熱応力の統計量（平均と分散）を摂動法で解析的に導出する手法を付録に示した。さらに、温度の標準偏差について、本解析解とモンテカルロ・シミュレーションからの結果を比較し、熱伝達率の変動係数が小さい範囲で、両者が精度良く一致することを確認した。

第6章は総括であり、本研究で得られた成果を要約している。また、本研究の今後の展開についても述べる。

1.5 確率論的評価に用いる統計量

本論文では、“平均”と“分散（標準偏差）”を主に統計的評価の対象としている。その理由は以下に示す信頼性設計法との関連性に基づいている。

構造体を設計する際、土木・建築・機械・航空・船舶その他を問わず全ての構造体に対して、それを使用するであろう耐用期間内に、安全性と機能性が十分確保されるように設計することが基本条件である。ところで、設計変数の多くは厳密に考えると何らかの不確定性を有するものである。たとえば自然環境に置かれた構造体は、地震荷重や風荷重などのような、発生時点、継続時間、その大きさ等に不規則性を持つ荷重を受けることになる。また、荷重に対する構造体の強度や耐力は、構造材料の物性値のバラツキや製作精度の変動性など様々な不確定要因を含んでいる。我々が十分な安全性を確保した設計を行うということは、絶対に破壊しないものをつくるということではなく、上述の不確定要因のもとで「各破壊モードを確率的にどの程度の発生頻度におさめたらよいか」に基づき設計することであり、不確定要因を定量的に正しく評価することを前提とする。これが<信頼性設計法>である。信頼性設計法には次に示す3つの設計水準がある⁽⁶⁷⁾。

- ・ レベル III：各破壊モードの生起確率を算出し、設定した許容破壊確率を下回るものの中から最

良と思われるものを設計案として決定する方法。最も上位の方法であるが、これを適用するには関係する因子の確率分布を与える必要がある。

- ・レベルⅡ：煩雑なレベルⅢの設計を単純化した方法で、二次モーメント法と呼ばれる。確率・統計的にはたかだか平均値と分散の範囲を道具として用いて信頼性設計を行うため、確率分布が不明でも適用できる。安全性の余裕として安全性指標の β 値（これは間接的に破壊確率に対応づけられる）を用いる。
- ・レベルⅠ：荷重と強度のそれぞれに対して部分安全係数を定め、それらの係数をもつ設計基準式に従って決定論的手法で設計を行う方法。設計者は直接に確率・統計的手法を用いなくても設計可能。

実際の設計に上記レベルⅢの設計水準を用いるには、材料の物性値や荷重の確率分布を知らねばならない。もちろん、確率分布の状態を正確に把握するためには実験による裏付けが必要である。しかしながら、実験によって得られる情報は主として確率量の中央値周辺のバラツキ状態に対するものであり、信頼性理論で必要とされる確率分布の裾の形状に対する情報を得ることは非常に困難である。また、破壊モードの生起確率の算出にはモンテカルロ・シミュレーション法が良く用いられるが、これは、破壊確率が小さくなるにしたがって試行回数を多くとらねばならないという欠点を持つ。例えば、破壊確率 $P_f=10^{-6}$ とすれば、少なくとも試行回数を $10^7(=1/10^{-6} \times 10)$ 回とらねばならず、試行回数が極端に大きくなってしまう。この欠点は、コンピュータの性能向上やLine sampling法⁽⁶⁸⁾、Subset simulation法⁽⁶⁹⁾などのようなシミュレーション法自体の改良により次第に克服されてきているものの、それでも破壊モードの生起確率を算出するには膨大な計算時間を要する。したがって、たとえ全ての不確定因子に対する確率分布の裾の形状を正確に把握できたとしても、レベルⅢの設計水準の使用は実用的ではない。破壊モードに対する信頼度を定量的に求めるということでは、解析上いくつかの近似を含むが、レベルⅡの設計水準の使用が実用性をも満足する唯一の方法であろう。

以上のような理由から本論文では、個々の破壊モードの生起確率を定量的かつ実用に供する範囲内で求めることを念頭におき、レベルⅡの設計水準による信頼性設計に必要な“平均”と“分散（標準偏差）”を主に統計的評価の対象とした。

1.6 確率過程と確率場^(70, 71)

構造体は将来予想されるいかなる外的負荷に対しても耐用年限中に安全かつ機能を保つように設計されなければならない。そのために構造解析および設計法は最初に、①構造体に作用する負荷をできるだけ正確に推定または算出し、設計作業が容易なように、それをモデル化して使用に供する。次いで、②この簡潔に表示されたモデル負荷を用いて構造解析を進め、③最終的にその安全性を検査し施工に移される。①に関してさらに考察すれば、構造体はある程度規則性を有する負荷を受ける一方、地震動、強風時の風圧力あるいは海洋構造物に作用する波浪水圧などのように、その性状を正確に把握することがきわめて困難な負荷も受ける。それらの波形はきわめて複雑であり、二度と同一波形は再現されない。したがって、このような不規則かつ再現性のない

負荷を設計負荷にモデル化するためには、まずその時間的に変化する動特性を解明する必要がある。

この節では、時間的に不規則変動する熱負荷や外力などのランダム関数を数学的に記述するのに必要なモデルである「確率過程」と、空間的な不規則関数のモデルである「確率場」の基本的な事項についてまとめる。

1.6.1 確率過程と相関関数

確率過程とは時間に依存する確率変数のことを指す。図 1-3 に確率過程の一例（例えば、 $x(t)$ を物体に作用する荷重と考えよ）を示す。横軸は時間であり、荷重 x_i は第 i 番目のサンプル関数を示す。サンプル関数とは、確率的に支配された同一環境下の無数の波形集合（アンサンブル）を構成する個々の要素のことである。

$t = t_i$ と $t = t_j$ における不規則確率過程 $x(t_i)$ と $x(t_j)$ との積の期待値を自己相関関数とよぶ。これは $x(t_i)$ と $x(t_j)$ の同時確率密度関数 $f(x_i, x_j)$ を用いて次のように表せる。

$$E[x(t_i)x(t_j)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k(t_i)x_k(t_j) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_i x_j f(x_i, x_j) dx_i dx_j \quad (1.1)$$

ここで、 $E[\]$ は期待値演算子である。 t_i, t_j を固定したので式(1.1)で計算される値は定数となるが、 t_i, t_j を変化させれば、この自己相関関数は t_i と t_j の関数となる。この自己相関関数は $x(t)$ の統計的性質をいっそう明瞭にしてくれる。すなわち、自己相関関数の値によって 2 点間 t_i と t_j における $x(t)$ の相関性の度合を推定できるのである。もし $t_i = t_j$ ならば、自己相関関数は二乗平均値 $E[x^2(t_i)]$ となる。平均値（期待値）、二乗平均値、自己相関関数によって不規則確率過程 $x(t)$ の母集団としての統計的な基本的特性をある程度まで明らかにすることができる。

1.6.2 定常確率過程

不規則過程 $x(t)$ の時間 t_i における確率密度関数 $f(x_i)$ が時間 t_i に対して独立、すなわち時間 t_i を移しても不変であり、かつ同時確率密度関数 $f(x_i, x_j)$ が時間差 $t_j - t_i$ だけの関数であるとき、不規則確率過程 $x(t)$ は「狭義の定常確率過程」または「強定常過程」という。これは、例えば、測定する実験データの統計的性質が、現在でも任意の時間後でも変わらないことを意味する。この場合、1, 2 次のモーメント関数である平均値 $E[x(t_i)]$ は定数、自己相関関数 $E[x(t_i)x(t_j)]$ は時間差 $t_j - t_i$ のみの関数となり t_i, t_j に対しては独立となるから、定常確率過程 $x(t)$ の自己相関関数は時間差 $\tau = t_j - t_i$ を用いて

$$R(\tau) = E[x(t_i)x(t_j)] = E[x(t)x(t+\tau)] \quad (1.2)$$

と表される。一方、平均値と相関関数が時間移動のもとで不変な確率過程を「広義の定常確率過程」または「弱定常過程」とよぶ。一般に強定常過程であれば弱定常過程であるが、逆は必ずしも成立しない。ただし、Gauss 過程だけは例外で、この場合、弱定常過程 = 強定常過程となる。式(1.2)において $\tau = 0$ とすれば $R(0) = E[x^2(t)]$ 、すなわち二乗平均値に等しくなる。さらに、もし $E[x(t)] = 0$ ならば、 $R(0) = \sigma_x^2$ 、すなわち分散値に等しくなる。厳密には工学分野における物理現象には必ず現象の始めと終わりがあり、定常確率過程とはいえないのではあるが、一般に不規則

確率過程の継続時間が非定常性を表す時間の始めと終わりに比べて十分に長い場合には、定常確率過程として扱って十分である。

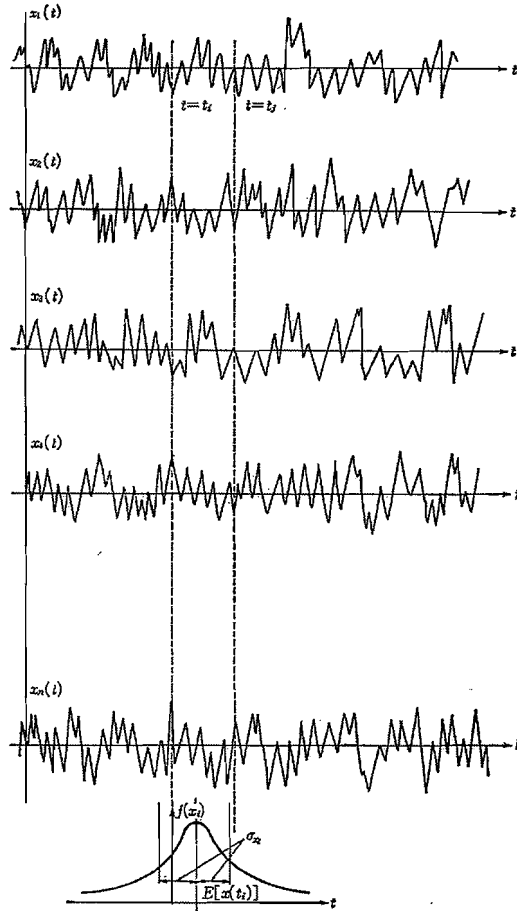


Fig. 1.3 The ensemble of a random process $x(t)$ ⁽⁷⁰⁾

1.6.3 確率場

確率過程は時間をパラメータとする確率変数であるが、空間座標をパラメータとする確率変数を確率場という。空間座標には2, 3次元の場合があるが、場合によっては時空間上の確率場も取り扱われる。確率場は、画像処理・物理学などによく登場する不規則関数のモデルである。確率場の定義・性質などの定式化は、定常確率過程の場合を拡張して行われるが、空間次元は時間の次元よりも大きいため、異なる様相や新しい問題も多く現れる。

確率過程の場合には、定常性、すなわち時間軸に沿う統計的な一様性の概念があった。このような確率過程の定常性に対応して、確率場の統計的性質が空間内の平行移動に関して変化しなければ、確率場は「一様」であるという。また、統計的性質が回転に関して不変ならば「等方」、移動と回転の双方について不変ならば「一様等方」であるという。

1.7 本論文で用いる主な記号

a :	内半径
B_a, B_b, B_t :	ビオー数
B_1, B_2, B_3 :	相関パラメータ
b :	外半径
b_0, b_1, b_2, \dots :	仮想界面座標 (無限平板)
C_1 :	相関パラメータ
c :	比熱
d :	板厚
E :	ヤング率
$E[]$:	期待値
h_b, h_t :	確定的な熱伝達率
$I_m()$:	m 次の第一種変形ベッセル関数
$J_m()$:	m 次の第一種ベッセル関数
j :	虚数
$K_m()$:	m 次の第二種変形ベッセル関数
L :	Vodicka の手法による温度解の第二項に現れる空間座標の関数
N :	組成変化パラメータ
n :	分割層数
R :	自己相関関数
r :	半径方向座標
r_0, r_1, r_2, \dots :	仮想界面座標 (円板)
S :	スペクトル密度
$S[]$:	標準偏差
s :	相関距離
T :	温度
T_0 :	初期温度
T_a, T_b, T_l, T_u :	円板の周囲媒体温度
t :	時間
U :	半径方向変位
V :	変動係数
X :	Vodicka の手法による温度解の第一項に現れる空間座標の関数 (固有関数)
x :	直交座標
$Y_m()$:	m 次の第二種ベッセル関数
y :	直交座標, 板厚変化パラメータ

z :	直交座標
α :	線膨張係数
β_a, β_b :	確定的な熱伝達率
χ :	ランダムな熱伝達率
δ_{ij} :	クロネッカー・デルタ
$\delta(\cdot)$:	デルタ関数
Φ :	Vodicka の手法による温度解の第一項に現れる時間の関数
ϕ :	周囲媒体温度
Γ :	Vodicka の手法による温度解の第二項に現れる時間の関数
γ :	固有値
η :	ランダムな熱伝達率
κ :	熱拡散率
λ :	熱伝導率
μ :	相関時間
ν :	ポアソン比
Θ :	無次元温度
θ :	周方向座標
ρ :	密度
ρ^* :	相関係数
σ :	応力
$\bar{\sigma}$:	無次元応力
τ :	フーリエ数, 時間間隔
ω :	確率変数
Ω :	角周波数
ω :	空間角周波数
ξ :	無次元半径座標
ψ :	周囲媒体温度
ζ :	無次元板厚座標

第2章 熱的境界条件に確率過程が含まれる場合

2.1 緒言

最近、高温機器や耐熱構造物の信頼性・安全性が設計段階で重要視されるにつれ、従来のような決定論的熱応力解析だけでは十分とは言えなくなっており、構造体そのものに含まれる不確かさや周囲媒体温度のような熱的環境に含まれる不確かさを考慮した解析が必要となってきた。一般に高温機器において、それを構成する各要素の熱的環境や機械的負荷を正確に予測することは非常に困難であり、設計上かなりの不確定要因が存在する⁽¹⁾。例えば、高速増殖炉の炉心上部機構におけるランダムな高サイクル温度変動⁽⁷²⁾やガスタービン静翼まわりの熱伝達率のゆらぎ⁽⁵⁸⁾などが挙げられる。このように不確定要因が熱的環境に内在する場合、物体内の温度や熱応力は確率論的に評価されるべきものである。

温度場や熱応力に関する既往の確率論的研究は1.2節にまとめられている。ここでは特に、熱的境界条件がランダムな場合を取り扱った研究に注目すると、Samuels⁽⁴⁾は確率論手法を用いた熱伝導解析の先駆的研究として、表面温度がランダム変動する平板と球の温度場を解析した。また、Hung⁽¹²⁾は根元温度がランダム変動する矩形フィンの熱伝導解析を行った。Heller⁽¹³⁾はランダム加熱される無限平板の温度の周波数応答関数を求め、それを基に温度の標準偏差を評価した。一方、ランダム加熱される物体の熱応力に関する研究は、Parkus⁽⁵⁾による半無限体を対象とした解析に始まり、その後、Heller⁽²⁰⁾がコンクリート柱を心材にもつ鋼管の表面温度が狭帯域確率過程で表される問題を解析した。Miller⁽²⁴⁾は温度変動が狭帯域定常過程であると想定した上で、温度スペクトルから応答関数を通じて応力拡大係数のパワースペクトルを導き、統計的解析手法を用いて熱疲労による平均き裂長の時間変化を算出している。さらに、天田⁽¹⁷⁾は平板、球、円柱の表面温度がランダム変動している場合について、温度と熱応力の確率論的解析を行った。

一方、不均質体に関しては、表面温度がランダム変動する不均質平板⁽²⁶⁾と不均質円板⁽²⁷⁾の確率論的熱応力問題が菅野らによって解析されている。彼らは、物体内の熱的性質が一方方向に特定の変化を示すものと仮定して、温度と熱応力の統計量に対する解析解を導いている。しかし、一般的なFGMに適用できるような、任意の熱的不均質性を有する不均質体に対する解析解は報告されていない。FGMの材料設計は、そのFGMの使用環境に応じて所要の機能を最大限に発揮できるよう、構成材料の体積分率（つまりFGMの不均質性）を決定することを目的としているため、FGMの設計に供するための解析解は「任意の不均質性をもつ不均質体」に対するものでなければならない。

そこで本章⁽⁷³⁾では、板厚方向への熱的・機械的不均質性が任意である傾斜機能無限平板が、ランダム変動する温度をもつ周囲媒体から対流加熱を受ける場合の確率論的熱応力問題を取扱い、同問題に対する解析解を導いた。ただし、周囲媒体の温度は定常確率過程で表されるものと仮定している。非定常温度場は、FGM平板を区分的に線形の不均質性をもった多層の不均質層で近似

(74)することにより解析した。また熱応力場は、板厚方向にのみ温度変化がある不均質無限平板に対する厳密解(75)により解析した。そして、これらの結果を基に、温度と熱応力の変動性を特徴づける統計量として、それぞれの自己相関関数とスペクトル密度を陽に導出した。さらに、周囲媒体温度がホワイトノイズと定常マルコフ過程で表現される場合について数値計算を行い、傾斜組成と温度・熱応力の統計量との関係を考察した。

2.2 解析

2.2.1 温度場

図 2.1a に示すように、熱伝導率 λ 、比熱 c および密度 ρ が厚さ方向 (z 軸方向) に任意に変化する厚さ d の傾斜機能無限平板を考える。図の z 軸方向にのみ温度が変化するならば、この FGM 平板の非定常熱伝導問題に対する支配方程式は次式で表される。

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda(z) \frac{\partial T}{\partial z} \right] = \rho(z)c(z) \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.1)$$

ここで、 T は温度、 t は時間を意味する。 λ, ρ, c の z 軸方向への任意変化に対して、(2.1) を厳密に解くことは非常に困難である。そこで、FGM 平板を厚さ方向に n 層に分割し、各層における熱伝導率を線形近似する。こうすることで、菅野らが開発した区分的線形不均質近似法(74)を用いて温度の近似解析解を得ることができる。この手法は、不均質体の熱伝導解析に一般に用いられる多層均質層近似(76-78)と異なり、各層間の仮想界面における熱伝導率に不連続性がなく、また、より少ない層分割数で精度良い解析ができるという特長を有する。図 2.1a の第 i 層に注目すれば、線形近似された熱伝導率は 2 点 $P_{i-1}(b_{i-1}, \Lambda_{i-1}), P_i(b_i, \Lambda_i)$ を通過する直線として次式で与えられる。

$$\lambda_i(z) = \lambda'_i z - \lambda'_i b_{i-1} + \Lambda_{i-1}, \quad \lambda'_i = \frac{\Lambda_i - \Lambda_{i-1}}{b_i - b_{i-1}}, \quad b_{i-1} \leq z \leq b_i \quad (2.2)$$

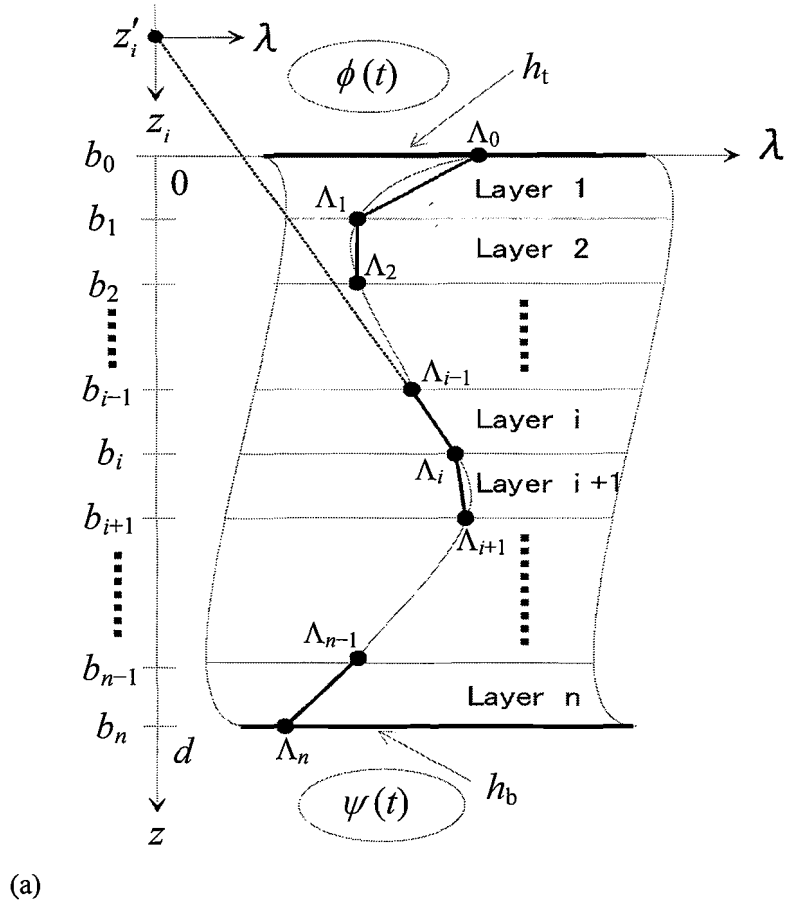
ただし、 Λ_i は $z = b_i$ における熱伝導率である。

また、原点において λ が 0 となるような局所座標 z_i を各層に導入する。この時、全体座標系(z, λ) と局所座標系(z_i, λ) は次式で関係づけられる。

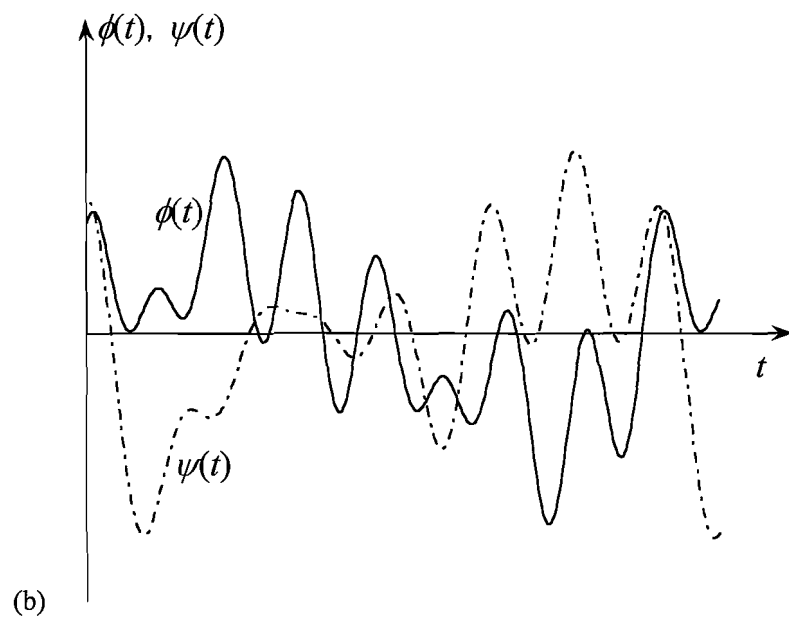
$$z = z_i + z'_i, \quad z'_i = b_{i-1} - \frac{\Lambda_{i-1}}{\lambda'_i} \quad (2.3)$$

ただし、 z'_i は第 i 層に対する局所座標系の原点の座標である。また、 $\Lambda_{i-1} = \Lambda_i$ の場合、つまり熱伝導率が層内で一定値の場合は、上記のように定義した局所座標系は使えないことに注意すべきである*。

* 例えば二つの均質層間に FGM が中間層として挿入されている平板を考えた場合、この積層平板の非定常熱伝導解析を本手法で行うことは厳密には不可能である。しかし、本来一定値である均質層内の熱伝導率を非常に小さな勾配を有する直線で近似(79)することで、近似的には解析可能である。



(a)



(b)

Fig. 2-1 (a) An infinite FGM plate and (b) random external temperatures

FGM 平板の初期温度は一様に 0 であるとし、平板表面と接する周囲媒体の温度 $\phi(t)$, $\psi(t)$ が、 $t > 0$ で図 2.1b に示すようにランダム変動するものと仮定する。これらの周囲媒体により平板は熱伝達率 h_a , h_b で対流加熱される。密度と比熱は各層で相異なる一定値であるとすれば、この FGM 無限平板に対する熱伝導方程式、初期条件式、境界条件式、温度と熱量の連続条件式は、式(2.3)で表される局所座標系を用いて以下のように表される。

$$\lambda'_i \frac{\partial}{\partial z_i} \left(z_i \frac{\partial T_i}{\partial z_i} \right) = \rho_i c_i \frac{\partial T_i}{\partial t}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.4)$$

$$T_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad t = 0 \quad (2.5)$$

$$\Lambda_0 \frac{\partial T_1}{\partial z_1} - h_a [T_1 - \phi(t)] = 0, \quad z_1 = b_0 - z'_1 \quad (2.6)$$

$$\Lambda_n \frac{\partial T_n}{\partial z_n} + h_b [T_n - \psi(t)] = 0, \quad z_n = b_n - z'_n \quad (2.7)$$

$$T_i = T_{i+1}, \quad \frac{\partial T_i}{\partial z_i} = \frac{\partial T_{i+1}}{\partial z_{i+1}}, \quad z_i = b_i - z'_i, \quad z_{i+1} = b_{i+1} - z'_{i+1} \quad (2.8)$$

ただし、局所座標表示の第 i 層の熱伝導率は式(2.9)で表される。

$$\lambda_i(z_i) = \lambda'_i z_i \quad (2.9)$$

ラプラス変換と畳み込みの定理を式(2.4)と式(2.6)~(2.8)に適用すれば、第 i 層の温度関数 $T_i(z, t)$ が全体座標系を用いて次式のように得られる。

$$T_i(z, t) = -2 \left[\int_0^t \psi(t-q) \sum_{l=1}^{\infty} P_{\psi l}(z) \exp(-\gamma_l^2 q) dq + \int_0^t \phi(t-q) \sum_{l=1}^{\infty} P_{\phi l}(z) \exp(-\gamma_l^2 q) dq \right] \quad (2.10)$$

ただし

$$P_{\psi l}(z) = \frac{\gamma}{d|\mathbf{F}|} \left[|\mathbf{A}_i| J_0 \left(2\gamma \sqrt{\frac{z-z'_i}{\kappa_i}} \right) - |\mathbf{B}_i| Y_0 \left(2\gamma \sqrt{\frac{z-z'_i}{\kappa_i}} \right) \right]_{\gamma=\gamma_l},$$

$$P_{\phi l}(z) = \frac{\gamma}{d|\mathbf{F}|} \left[|\mathbf{C}_i| J_0 \left(2\gamma \sqrt{\frac{z-z'_i}{\kappa_i}} \right) - |\mathbf{D}_i| Y_0 \left(2\gamma \sqrt{\frac{z-z'_i}{\kappa_i}} \right) \right]_{\gamma=\gamma_l}, \quad b_{i-1} \leq z \leq b_i \quad (2.11)$$

式(2.11)において、 κ_i は $\lambda'_i / (\rho_i c_i)$ で定義される熱拡散率であり、 $J_0(\cdot)$, $Y_0(\cdot)$ はそれぞれ 0 次の第一種、第二種ベッセル関数である。固有値 γ_l ($l = 1, 2, \dots$) は、式(2.12)の超越方程式を満足する第 l 番目の

正根である.

$$\det \mathbf{F} = |\mathbf{F}| = 0 \quad (2.12)$$

ここで, \mathbf{F} は次式で定義される $2n \times 2n$ の行列である.

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \hat{e}_{1,1} & \hat{e}_{1,2} & \cdots & \hat{e}_{1,2n-1} & \hat{e}_{1,2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \hat{e}_{2n,1} & \hat{e}_{2n,2} & \cdots & \hat{e}_{2n,2n-1} & \hat{e}_{2n,2n} \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

$$\hat{e}_{1,1} = -\frac{\Lambda_0 \gamma}{h_1 \sqrt{\kappa_1} (b_0 - z'_1)} J_1 \left(2\gamma \sqrt{\frac{b_0 - z'_1}{\kappa_1}} \right) + J_0 \left(2\gamma \sqrt{\frac{b_0 - z'_1}{\kappa_1}} \right),$$

$$\hat{e}_{1,2} = \frac{\Lambda_0 \gamma}{h_1 \sqrt{\kappa_1} (b_0 - z'_1)} Y_1 \left(2\gamma \sqrt{\frac{b_0 - z'_1}{\kappa_1}} \right) - Y_0 \left(2\gamma \sqrt{\frac{b_0 - z'_1}{\kappa_1}} \right),$$

$$\hat{e}_{2n,2n-1} = \frac{\Lambda_n \gamma}{h_b \sqrt{\kappa_n} (b_n - z'_n)} J_1 \left(2\gamma \sqrt{\frac{b_n - z'_n}{\kappa_n}} \right) + J_0 \left(2\gamma \sqrt{\frac{b_n - z'_n}{\kappa_n}} \right),$$

$$\hat{e}_{2n,2n} = -\frac{\Lambda_n \gamma}{h_b \sqrt{\kappa_n} (b_n - z'_n)} Y_1 \left(2\gamma \sqrt{\frac{b_n - z'_n}{\kappa_n}} \right) - Y_0 \left(2\gamma \sqrt{\frac{b_n - z'_n}{\kappa_n}} \right),$$

$$\hat{e}_{2k,2k-1} = J_0 \left(2\gamma \sqrt{\frac{b_k - z'_k}{\kappa_k}} \right), \quad \hat{e}_{2k,2k} = -Y_0 \left(2\gamma \sqrt{\frac{b_k - z'_k}{\kappa_k}} \right),$$

$$\hat{e}_{2k,2k+1} = -J_0 \left(2\gamma \sqrt{\frac{b_k - z'_{k+1}}{\kappa_{k+1}}} \right), \quad \hat{e}_{2k,2k+2} = Y_0 \left(2\gamma \sqrt{\frac{b_k - z'_{k+1}}{\kappa_{k+1}}} \right),$$

$$\hat{e}_{2k+1,2k-1} = \frac{1}{\sqrt{\kappa_k} (b_k - z'_k)} J_1 \left(2\gamma \sqrt{\frac{b_k - z'_k}{\kappa_k}} \right), \quad \hat{e}_{2k+1,2k} = -\frac{1}{\sqrt{\kappa_k} (b_k - z'_k)} Y_1 \left(2\gamma \sqrt{\frac{b_k - z'_k}{\kappa_k}} \right),$$

$$\hat{e}_{2k+1,2k+1} = -\frac{1}{\sqrt{\kappa_{k+1}} (b_k - z'_{k+1})} J_1 \left(2\gamma \sqrt{\frac{b_k - z'_{k+1}}{\kappa_{k+1}}} \right), \quad \hat{e}_{2k+1,2k+2} = \frac{1}{\sqrt{\kappa_{k+1}} (b_k - z'_{k+1})} Y_1 \left(2\gamma \sqrt{\frac{b_k - z'_{k+1}}{\kappa_{k+1}}} \right),$$

$$k = 1, 2, \dots, n-1 \quad (2.14)$$

行列 \mathbf{F} の上記の要素以外はすべて 0 である。また、行列 $\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i$ はそれぞれ、行列 \mathbf{F} の第 $(2i-1)$ 列めと第 $(2i)$ 列め (ただし、 $i=1, 2, \dots, n$) を式(2.15)の列ベクトル \mathbf{d} に置き換えることで得られる。一方、 \mathbf{d} の代わりに式(2.16)の \mathbf{d}^* を用いて置き換えを行えば、それぞれ行列 $\mathbf{C}_i, \mathbf{D}_i$ が得られる。

$${}^t\mathbf{d} = (0, 0, \dots, 0, 1) \quad (2.15)$$

$${}^t\mathbf{d}^* = (1, 0, \dots, 0, 0) \quad (2.16)$$

ここで、上添え字の t は転置行列記号である。

式(2.10)で与えられる温度関数 T_i は、時間的にランダム変動する温度 $\phi(t), \psi(t)$ を含んでいるため、決定論的に評価するのは不可能であり、したがって統計的な評価が必要となる。そこで、 T_i の自己相関関数とスペクトル密度を求め統計的な評価を行う。期待値演算子を $E[\cdot]$ 、任意の時間間隔を τ とすれば、 T_i の自己相関関数 R_{T_i} は次式で表される。

$$R_{T_i}(z, t, t + \tau) = E[T_i(z, t) \cdot T_i(z, t + \tau)] \quad (2.17)$$

$\phi(t), \psi(t)$ を $E[\phi] = E[\psi] = 0$ である定常確率過程*と仮定すれば、式(2.17)に式(2.10)を代入して、 R_{T_i} を式(2.18)のように得る。なお、 $E[\phi] \neq 0$ ならば、 $\phi(t) \rightarrow \phi(t) - E[\phi]$ とおけば平均値 0 の場合に帰着するから、 $E[\phi] = 0$ の仮定は本解析の一般性を失わせない。このことは、 $\psi(t)$ に対しても同様である。

$$\begin{aligned} R_{T_i}(z, \tau) = & 4 \left[\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} P_{\psi l}(z) P_{\psi m}(z) \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} R_{\psi}(\tau + p - q) \exp(-\gamma_l^2 p - \gamma_m^2 q) dp dq \right. \\ & + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} P_{\psi l}(z) P_{\phi m}(z) \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} R_{\psi\phi}(\tau + p - q) \exp(-\gamma_l^2 p - \gamma_m^2 q) dp dq \\ & + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} P_{\phi l}(z) P_{\psi m}(z) \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} R_{\phi\psi}(\tau + p - q) \exp(-\gamma_l^2 p - \gamma_m^2 q) dp dq \\ & \left. + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} P_{\phi l}(z) P_{\phi m}(z) \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} R_{\phi}(\tau + p - q) \exp(-\gamma_l^2 p - \gamma_m^2 q) dp dq \right] \quad (2.18) \end{aligned}$$

ここで、 R_{ϕ}, R_{ψ} はそれぞれ周囲媒体温度 $\phi(t), \psi(t)$ の自己相関関数を表し、 $R_{\psi\phi}, R_{\phi\psi}$ は $\phi(t)$ と $\psi(t)$ との相互相関関数を意味する。また、 τ は任意の時間間隔である。これらの相関関数が与えられると、式(2.18)より T_i の自己相関関数を計算できる。

次に、温度のスペクトル密度 S_{T_i} を求める。これは、次式に示す Wiener-Khintchine の関係式⁽⁷¹⁾ より得ることができる。

* 厳密には弱定常過程 (広義の定常過程) である。この場合、平均と分散は時間に依存せず一定で、自己相関関数は時間差のみの関数となる。一般に、時間移動のもとで確率分布が変わらない確率過程 (強定常過程) と区別される。ただし、平均値と相関関数のみで確率分布が決まる Gauss 過程の場合は、弱定常過程 = 強定常過程である。

$$S_{T_i}(z, \Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{T_i}(z, \tau) \exp(-j\Omega\tau) d\tau \quad (2.19)$$

ここで、 j は虚数、 Ω は正負軸上で定義された角周波数である。式(2.18)を式(2.19)に代入すれば、 S_{T_i} は次式のように得られる。

$$\begin{aligned} S_{T_i}(z, \Omega) = & 4 \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} P_{\psi l}(z) P_{\psi m}(z) \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} S_{\psi}(\Omega) \exp[-(\gamma_l^2 - j\Omega)p - (\gamma_m^2 + j\Omega)q] dpdq \right. \\ & + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} P_{\phi l}(z) P_{\phi m}(z) \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} S_{\psi\phi}(\Omega) \exp[-(\gamma_l^2 - j\Omega)p - (\gamma_m^2 + j\Omega)q] dpdq \\ & + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} P_{\phi l}(z) P_{\psi m}(z) \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} S_{\phi\psi}(\Omega) \exp[-(\gamma_l^2 - j\Omega)p - (\gamma_m^2 + j\Omega)q] dpdq \\ & \left. + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} P_{\phi l}(z) P_{\phi m}(z) \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} S_{\phi}(\Omega) \exp[-(\gamma_l^2 - j\Omega)p - (\gamma_m^2 + j\Omega)q] dpdq \right\} \quad (2.20) \end{aligned}$$

以上より、温度のスペクトル密度 S_{T_i} は、周囲媒体温度 $\phi(t)$ 、 $\psi(t)$ のスペクトル密度、および $\phi(t)$ と $\psi(t)$ との相互スペクトル密度で表すことができる。

2.2.2 熱応力場

式(2.10)で与えられる温度場による傾斜機能無限平板の熱応力を統計的に評価する。図2.1aの z 軸方向に平面応力状態であり、 x - y 面内のせん断変形がないと仮定する。板厚方向にのみ温度変化がある不均質平板の熱応力式は、面内・面外変形ともに自由とした境界条件下において、Sugano⁽⁷⁵⁾によって厳密に得られている。式(2.21)、(2.22)に示すこの厳密解は、板厚方向へのヤング率 E 、線膨張係数 α 、ポアソン比 ν の任意の不均質性に対して有効である。

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma(z, t) = \frac{E(z)}{1-\nu(z)} \left[-\alpha(z)T(z, t) + \frac{(I_2 z - I_3)I_{F1} + (I_2 - I_1 z)I_{F2}}{I_2^2 - I_1 I_3} \right] \quad (2.21)$$

ここで、

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^d \frac{E(z)}{1-\nu(z)} dz, & I_2 &= \int_0^d \frac{zE(z)}{1-\nu(z)} dz, & I_3 &= \int_0^d \frac{z^2 E(z)}{1-\nu(z)} dz, \\ I_{F1} &= \int_0^d \frac{E(z)\alpha(z)T(z, t)}{1-\nu(z)} dz, & I_{F2} &= \int_0^d \frac{zE(z)\alpha(z)T(z, t)}{1-\nu(z)} dz \end{aligned} \quad (2.22)$$

温度 T_i のランダム性に起因して熱応力 σ も時間的にランダム変動するため、 σ の統計量として自己相関関数およびスペクトル密度を求める。自己相関関数 R_{σ} は式(2.17)と同様に、

$$R_{\sigma}(z, t, t + \tau) = E[\sigma(z, t) \cdot \sigma(z, t + \tau)] \quad (2.23)$$

で与えられる．この式に式(2.10), (2.21)を代入すれば, R_σ を次式のように得る．

$$\begin{aligned}
 R_\sigma(z, \tau) = & \left[\frac{E(z)}{1-\nu(z)} \right]^2 \left\{ \alpha^2(z) R_{T_i}(z, \tau) - \frac{\alpha(z)}{I_2^2 - I_1 I_3} \{ (I_2 z - I_3) \right. \\
 & \times [V_{1ml}(z, \tau) + V_{1lm}(z, \tau)] + (I_2 - I_1 z) [V_{2ml}(z, \tau) + V_{2lm}(z, \tau)] \} \\
 & + \frac{1}{(I_2^2 - I_1 I_3)^2} \{ (I_2 z - I_3)^2 W_{11}(\tau) + (I_2 - I_1 z)^2 W_{22}(\tau) + (I_2 z - I_3) \\
 & \left. \times (I_2 - I_1 z) [W_{21}(\tau) + W_{12}(\tau)] \} \right\} \quad (2.24)
 \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
 V_{ilm}(z, \tau) = & 4 \left[\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} I_{\psi m} P_{\psi l}(z) \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} R_{\psi}(\tau + p - q) \exp(-\gamma_l^2 p - \gamma_m^2 q) dp dq \right. \\
 & + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} I_{i\phi m} P_{\psi l}(z) \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} R_{\psi\phi}(\tau + p - q) \exp(-\gamma_l^2 p - \gamma_m^2 q) dp dq \\
 & + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} I_{i\psi m} P_{\phi l}(z) \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} R_{\phi\psi}(\tau + p - q) \exp(-\gamma_l^2 p - \gamma_m^2 q) dp dq \\
 & \left. + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} I_{i\phi m} P_{\phi l}(z) \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} R_{\phi}(\tau + p - q) \exp(-\gamma_l^2 p - \gamma_m^2 q) dp dq \right], \quad i = 1, 2 \quad (2.25)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{ij}(\tau) = & 4 \left[\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} I_{\psi l} I_{j\psi m} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} R_{\psi}(\tau + p - q) \exp(-\gamma_l^2 p - \gamma_m^2 q) dp dq \right. \\
 & + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} I_{\psi l} I_{j\phi m} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} R_{\psi\phi}(\tau + p - q) \exp(-\gamma_l^2 p - \gamma_m^2 q) dp dq \\
 & + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} I_{i\phi l} I_{j\psi m} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} R_{\phi\psi}(\tau + p - q) \exp(-\gamma_l^2 p - \gamma_m^2 q) dp dq \\
 & \left. + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} I_{i\phi l} I_{j\phi m} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} R_{\phi}(\tau + p - q) \exp(-\gamma_l^2 p - \gamma_m^2 q) dp dq \right], \quad i, j = 1, 2 \quad (2.26)
 \end{aligned}$$

$$I_{i\phi l} = \int_0^d \frac{z^{i-1} E(z) \alpha(z)}{1-\nu(z)} P_{\phi l}(z) dz, \quad I_{\psi l} = \int_0^d \frac{z^{i-1} E(z) \alpha(z)}{1-\nu(z)} P_{\psi l}(z) dz, \quad i = 1, 2 \quad (2.27)$$

$V_{ilm}(z, \tau)$ ($i = 1, 2$) は, 式(2.25)の各項において, $I_{ijm} P_{kl}(z)$ を $I_{ikl} P_{jm}(z)$ で置き換えることによって得られる．以上より, 熱応力の自己相関関数 R_σ は, 周囲媒体温度の4つの相関関数 $R_\phi, R_\psi, R_{\phi\psi}, R_{\psi\phi}$ に依存していることがわかる．

一方、熱応力のスペクトル密度 S_σ は、次式に式(2.24)を代入することにより得られる。

$$S_\sigma(z, \Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_\sigma(z, \tau) \exp(-j\Omega\tau) d\tau \quad (2.28)$$

2.3 数値計算結果と考察

数値計算の一例として、FGM 平板の $z=0$ の面と接する周囲媒体の温度 $\phi(t)$ が決定論的に 0 で与えられ、 $z=d$ の面と接する周囲媒体の温度 $\psi(t)$ がホワイトノイズと定常マルコフ過程でモデル化される場合を計算する。この場合、相関関数 $R_\phi, R_{\phi\psi}, R_{\psi\phi}$ は 0 となり、 R_ψ は次式で与えられる⁽⁷¹⁾。

$$\text{ホワイトノイズ} : R_\psi(\tau) = T_s^2 \delta(\tau) \quad (2.29)$$

$$\text{定常マルコフ過程} : R_\psi(\tau) = T_s^2 \exp\left(-\frac{|\tau|}{\mu}\right) \quad (\mu > 0) \quad (2.30)$$

ここで、 $\delta(\cdot)$ は Dirac の Delta 関数、 μ は相関時間、 T_s は温度の次元をもつ定数である。ホワイトノイズと定常マルコフ過程はどちらも実世界のノイズを表す代表的なモデルであり、その数学的取扱いの容易さから、定常過程の理論・応用においてよく用いられている。付録 A の図 A-1 に両モデルに対する相関関数とスペクトル密度を示す。ホワイトノイズは相関時間が 0 であり、分散 $R_\psi(0)$ が発散するような相関関数を表す。また、そのスペクトル密度は周波数によらず一定である。一方、定常マルコフ過程は高周波成分より低周波成分を比較的多く含む確率過程である。相関時間 μ を小さくとれば低周波域でのスペクトル強度が低くなり、そのぶん高周波域での強度が高くなる。式(2.1)が線形であるため、確率過程 $\psi(t)$ が正規分布に従うならば、温度 $T(z, t)$ も正規分布に従う確率過程となる。

FGM の構成材料として、部分安定化ジルコニア(PSZ)とオーステナイト系ステンレス鋼(SUS304)を採用する。板厚方向への PSZ の体積分率分布 $f_{\text{PSZ}}(z)$ は、無次元座標 $\zeta (= z/d)$ のベキ乗関数形とし、セラミックの配合率が高い組成(Ceramic-rich)と逆に低い組成(Ceramic-poor)に分けてそれぞれ式(2.31a)と式(2.31b)で定義した (図 2-2 を参照せよ)。

$$\text{Ceramic-rich} : f_{\text{PSZ}}(z) = 1 - (1 - \zeta)^{N_R} \quad (2.31a)$$

$$\text{Ceramic-poor} : f_{\text{PSZ}}(z) = \zeta^{N_P} \quad (2.31b)$$

ここで、 N_R, N_P は組成変化パラメータである。 $N_R = N_P = 1$ の場合は、式(2.31a), (2.31b)とも線形組成分布を示す。図 2-2 中の「GA」とは、境界温度が決定論的に与えられた FGM 平板内の引張熱応力を最小化するように、遺伝的アルゴリズムを用いて組成分布を最適化した結果として得られた傾斜組成分布⁽⁸⁰⁾である。

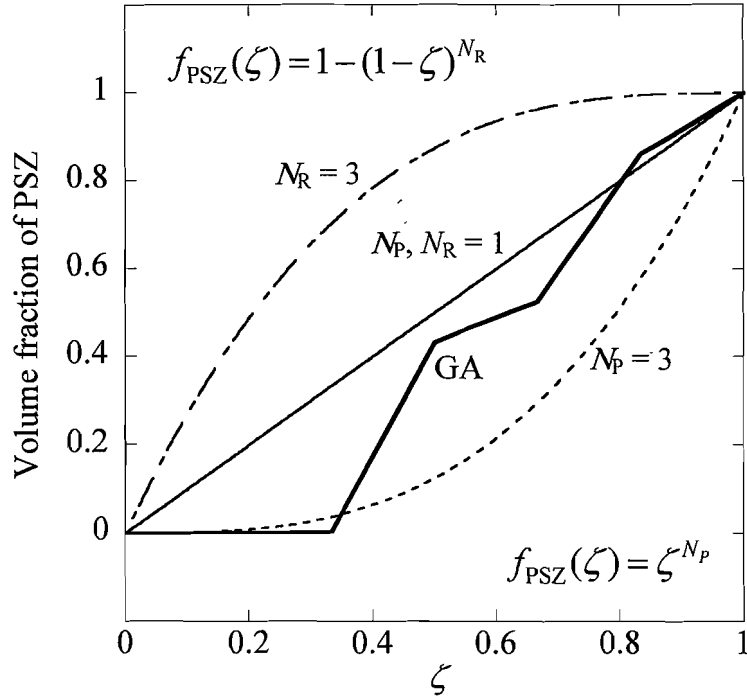


Fig. 2.2 Metal-ceramic constituent profile across the thickness

表 2.1 に PSZ と SUS304 の材料特性を示す⁽⁷⁴⁾. 各組成分布に対する FGM の材料特性は、密度と比熱については線形複合則より算出し、またポアソン比は、一般に FGM の構成材料間で値に大きな差が見られないことから、簡単化のため一定値($\nu=0.3$)とした. 熱伝導率、ヤング率および線膨張係数の評価には、母層中に球状粒子が分散しているという仮定の下で Mori-Tanaka の理論⁽⁸¹⁾を用い、また、中間層においてはこれにファジィ推論を併用して算出した⁽⁸²⁾. この算出方法の詳細については付録 B を参照のこと.

Table 2.1 Material properties of PSZ and SUS304

	λ [W/(m·K)]	E [GPa]	α [K ⁻¹]	ρ [kg/m ³]	c [kJ/(kg·K)]
PSZ	1.67	211	2.93×10^{-6}	5,730	0.467
SUS304	15.97	193	14.87×10^{-6}	7,930	0.361

さらに解析の一般性を考慮して、次式の無次元量を導入する.

$$Fo = \frac{\kappa_0 t}{d^2}, \quad Fo^* = \frac{\kappa_0 \tau}{d^2}, \quad B_t = \frac{h_t d}{\Lambda_0}, \quad B_b = \frac{h_b d}{\Lambda_0}, \quad \zeta_i = \frac{b_i}{d}, \quad \Theta_i = \frac{T_i}{T_s},$$

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma(1-\nu)}{E_0 \alpha_0 T_s}, \quad \bar{\Omega} = \frac{d^2 \Omega}{\kappa_0}, \quad R_{\Theta_i} = E \left[\Theta_i(\zeta, Fo) \cdot \Theta_i(\zeta, Fo + Fo^*) \right],$$

$$R_{\bar{\sigma}} = E[\bar{\sigma}(\zeta, Fo) \cdot \bar{\sigma}(\zeta, Fo + Fo^*)] \quad (2.32)$$

ここで、 $\kappa_0 = \Lambda_0 / (\rho_0 c_0)$ であり、下添え字0はSUS304の物性値を意味する。

また、数値計算諸元として次の値を採用した。

$$B_t = \infty, \quad B_b = 0.1, 1, \infty, \quad \mu = 0.1, 1, 10, \quad n = 6 \quad (2.33)$$

本計算に用いる式(2.18), (2.20), (2.25), (2.26)の二重無限級数の項数を決定するため、その項数が計算結果に及ぼす影響について調べた。一例として、 $\psi(t)$ がマルコフ過程で与えられ、 $B_b = 1, \mu = 1, N_R = 3$ とした場合の無次元温度の二乗平均(2.3.1節を参照)の収束挙動を表2-2に示す。最も収束が遅いのは $\zeta = 1$ での値であり、項数を200×200にとったとしても有効数字はわずか2桁である。しかし、 $\zeta = 1$ 以外の位置では4桁の有効数字が得られている。また、これと同様の収束挙動が熱応力の二乗平均でも確認された。そこで本計算では、計算精度と計算時間との兼ね合いから、項数を300×300として以下の計算を行った。

Table 2-2 Relationship between the convergence of the mean square values of temperature and the number of terms, for $B_b = 1, \mu = 1$ and $N_R = 3$ (ceramic-rich composition)

ζ	Number of terms				
	30×30	50×50	100×100	200×200	300×300
0.2	$1.1406 \cdot 10^{-3}$	$1.1352 \cdot 10^{-3}$	$1.1267 \cdot 10^{-3}$	$1.1289 \cdot 10^{-3}$	$1.1288 \cdot 10^{-3}$
0.4	$1.3614 \cdot 10^{-2}$	$1.3698 \cdot 10^{-2}$	$1.3660 \cdot 10^{-2}$	$1.3657 \cdot 10^{-2}$	$1.3658 \cdot 10^{-2}$
0.6	$7.5025 \cdot 10^{-2}$	$7.5093 \cdot 10^{-2}$	$7.5238 \cdot 10^{-2}$	$7.5199 \cdot 10^{-2}$	$7.5197 \cdot 10^{-2}$
0.8	0.23338	0.23511	0.23467	0.23476	0.23479
1.0	0.52805	0.55639	0.57824	0.58936	0.59309

2.3.1 周囲媒体温度がホワイトノイズの場合

式(2.29)で与えられる周囲媒体温度は種々の周波数成分を持っており、このような場合において周囲媒体の外乱がどれだけ物体内部へ影響するかという問題が最も注目される。このため、ここでは主に温度と熱応力の二乗平均に焦点を当てて考察する。温度と熱応力の二乗平均は、式(2.18)と式(2.24)で与えられるそれぞれの自己相関関数において $\tau = 0$ とおくことで得られる。本解析では、温度、熱応力とも時間に対するランダム変動の平均が0となるため、それらの二乗平均は分散と等しいことになる。

図2-3と図2-4はそれぞれ、 $B_b = \infty$ 、すなわち境界上の温度がランダム変動する場合に、温度と熱応力の二乗平均が傾斜組成の違いによってどのような影響を受けるのかを示したものである。図2-3より、Ceramic-poor ($N_p = 3$)組成の場合、ほかの傾斜組成に比べて温度変動が大きい。これは、セラミックの配合比を小さくすれば熱伝導率が高くなり、境界温度変動の影響が内部まで容易に伝わるからである。しかし、逆にCeramic-rich ($N_r = 3$)組成のようにセラミックの体積分率が高くと、セラミックのもつ高い遮熱効果のために低温側での温度変動は小さくなるが、その一方

でセラミックの体積分率が高い場所では熱流が滞ってしまい、線形傾斜組成に比べて加熱面側で温度変動が大きくなっている。

一方、熱応力の挙動についてみると、図 2.4 から明らかなように、Ceramic-rich 組成の場合に板厚全域にわたって変動が最も抑制されるという、温度場とは異なる結果が得られた。この理由は、セラミックの配合比を大きくすると、物性値の中で熱応力への影響度が最も大きい線膨張係数が小さくなり、結果的に温度の変動が熱応力の変動に影響しにくく（変換されにくく）なるからだと考えられる。また、決定論的には最適な組成分布である GA 組成は、加熱側での組成が線形傾斜組成と非常に似ているため、両者の二乗平均はほぼ同じ分布を示している。したがって、GA 組成は決定論的熱応力の緩和という観点からは最適な組成分布であっても、熱応力変動の抑制という観点からは Ceramic-rich 組成に劣っており、確率論的には最適な組成分布とは言えない。また、単調変化している温度の二乗平均分布とは異なり、熱応力の二乗平均分布に極小点が存在していることは注目に値する。 $0 \leq \zeta \leq 0.3$ の範囲では板の曲げの影響が現れているものと思われる。

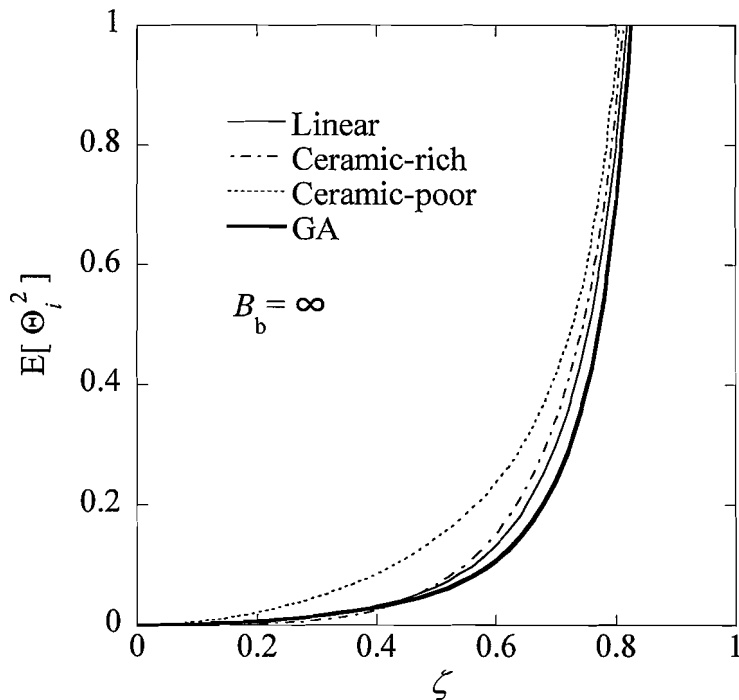


Fig. 2-3 Mean square distribution of temperature for $\psi(t)$ of white noise

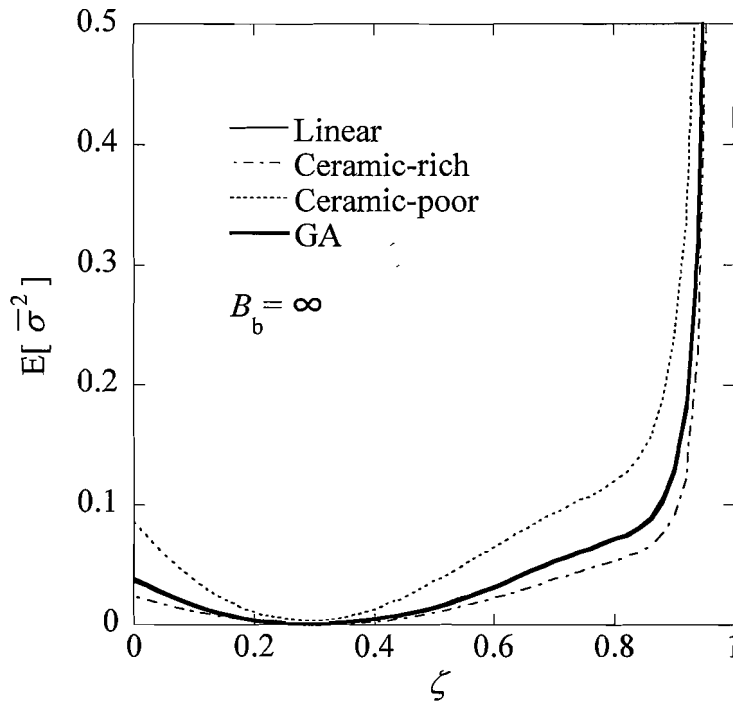


Fig. 2.4 Mean square distribution of thermal stress for $\psi(t)$ of white noise

図 2.5 は、無次元板厚座標値をパラメータとして温度のスペクトル密度を示したものである。ホワイトノイズは「スペクトル密度が周波数によらず一定」であることが特徴であるため、加熱面上でスペクトル密度は一定値 $1/(2\pi)$ を保っている。そして、加熱面から遠ざかるにつれ、スペクトル密度は低下していくが、特に加熱面近傍では、高周波領域にあるスペクトル密度の急激な低下がみられる。したがって、図 2.3、図 2.4 で見られる加熱面近傍での二乗平均値の著しい変化は高周波成分の影響である。

図 2.6 と図 2.7 は、前述の境界温度がランダム変動する場合とは異なり、周囲媒体温度がホワイトノイズで与えられ、FGM 平板がその媒体からビオ一数 B_b で対流加熱される場合の計算結果である。これらの図はそれぞれ、温度と熱応力の振動特性に及ぼす B_b の影響を示している。両図より、温度・熱応力とも B_b の増加につれて二乗平均も増加することがわかる。また、対流加熱の場合でも ζ が 1 に近づくにつれて二乗平均に発散がみられる。しかし実現象としては、周囲媒体温度が同じ振幅であっても、高周波ゆらぎは構造に伝わりにくい性質を持っている⁽⁸³⁾ため、図 2.6、図 2.7 のように加熱面で二乗平均が発散することは現実にはない。

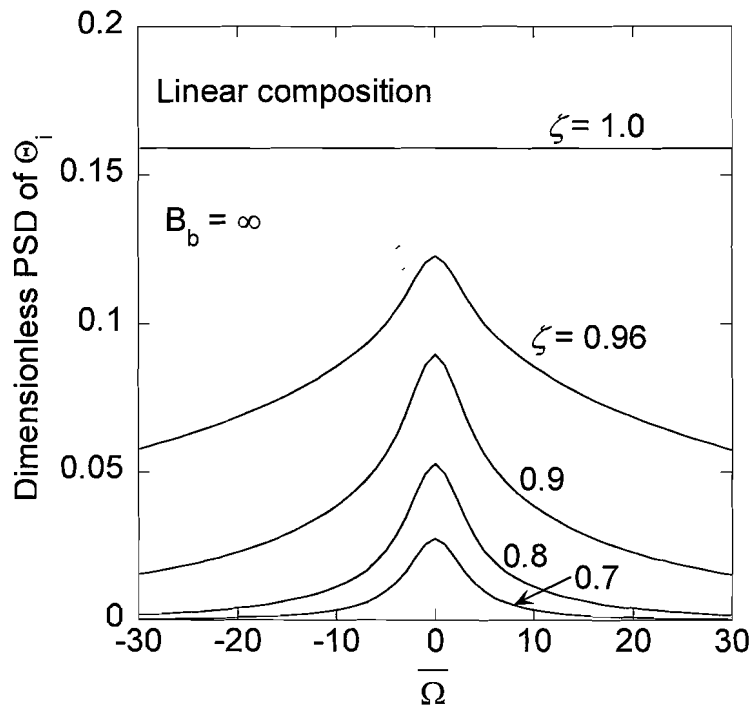


Fig. 2-5 Power spectrum densities of temperature for $\psi(t)$ of white noise

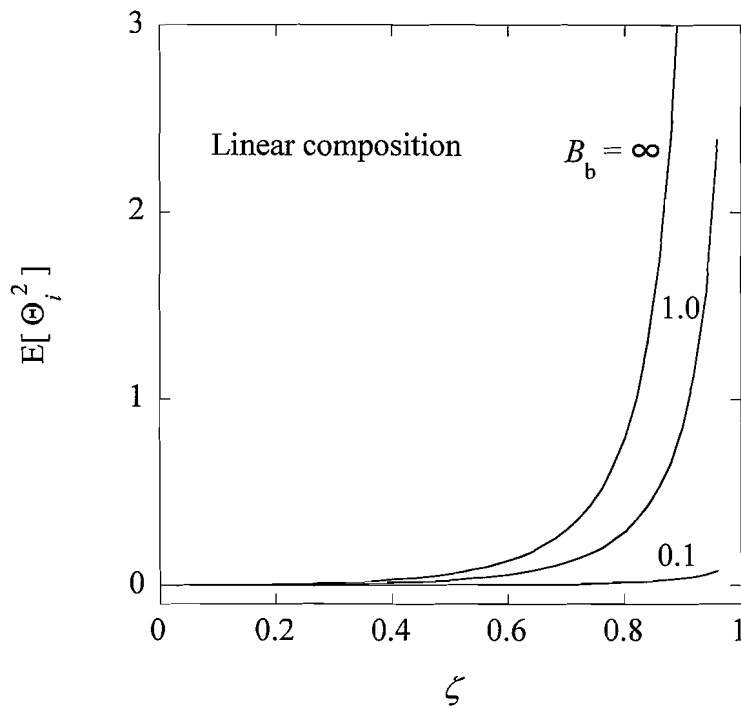


Fig. 2-6 Mean square distribution of temperature in an FGM plate convectively heated by a medium with white-noise temperature fluctuation

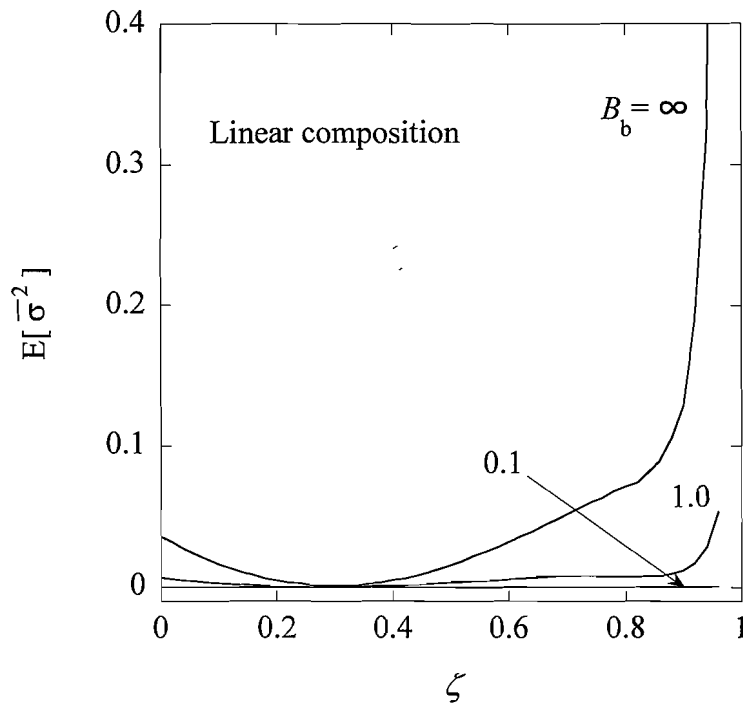


Fig. 2.7 Mean square distribution of thermal stress in an FGM plate convectively heated by a medium with white-noise temperature fluctuation

2.3.2 周囲媒体温度が定常マルコフ過程の場合

図 2.8 と図 2.9 はそれぞれ、境界温度が定常マルコフ過程で与えられた場合の、温度と熱応力の二乗平均分布である。図 2.3 と図 2.8 との比較より、温度の二乗平均分布における Ceramic-rich 組成と Ceramic-poor 組成との大小関係は、 $\psi(t)$ がホワイトノイズで与えられた場合と定常マルコフ過程の場合とで異なることがわかる。これは、定常マルコフ過程のスペクトル密度はホワイトノイズのそれと比べ、全周波数成分に占める低周波成分の割合が大きい(図 A.1 を参照せよ)ことに起因している。境界温度が定常マルコフ過程の場合、一般に物体内部へ伝わりやすい低周波成分が支配的であるため、熱伝導性に優れる Ceramic-poor 組成の場合、境界温度変動の影響が加熱部近傍に滞ることなく高温部から平板内部へ伝わる。したがって、高温部での変動は線形傾斜組成の場合に比べて小さく、逆に低温部では大きくなる。一方 Ceramic-rich 組成の場合、その高い遮熱性に起因して、セラミックの配合割合が高い領域 ($0.6 < \zeta < 1$) で低温部への低周波成分の伝播が遮られ、結果として、同領域での二乗平均が 4 種類の傾斜組成分布の中で最も大きい。

図 2.9 の熱応力についてみると、Ceramic-poor 組成は他の 3 つの組成分布と比べ、加熱面において二乗平均値が約 3 倍という大きな値を示している。加熱面での二乗平均値が最も小さいのは Ceramic-rich 組成の場合で、その値は約 0.012 である。また、GA 組成の場合は約 0.015 である。したがって、決定論的熱応力を最小化する GA 組成は、熱応力変動の抑制という観点において、やはり最適な傾斜組成分布であるとはいえない。

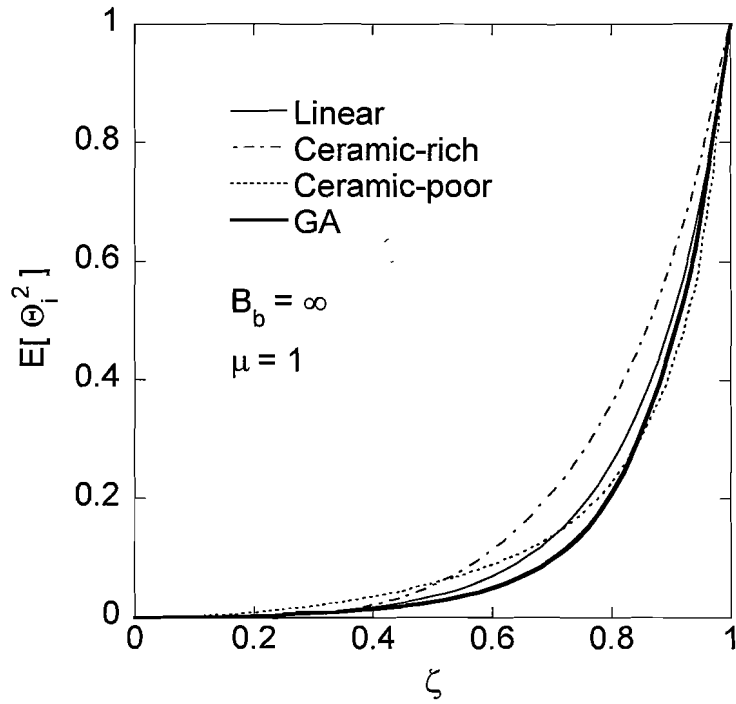


Fig. 2-8 Mean square distribution of temperature for $\psi(t)$ of a stationary Markov process

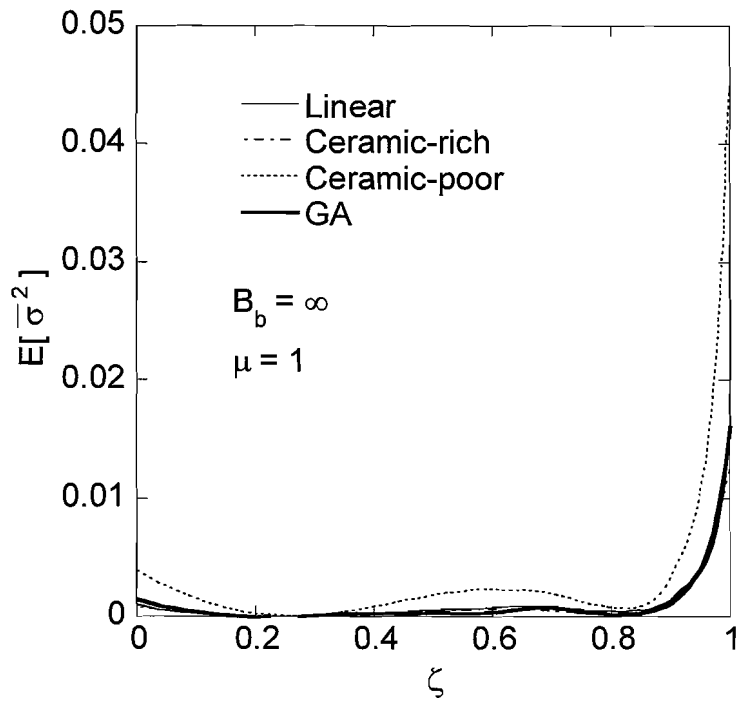


Fig. 2-9 Mean square distribution of thermal stress for $\psi(t)$ of a stationary Markov process

図 2.10 と図 2.11 はそれぞれ、ランダム変動する周囲媒体温度の周波数特性によって温度と熱応力の二乗平均がどのような影響を受けるかを示したものである。温度の二乗平均は、組成分布の種類に関わらず μ を大きくすれば増加している。つまり、周囲媒体温度の全周波数成分に占める低周波成分の割合が大きくなれば、温度の振幅は大きくなる。一方、熱応力の二乗平均に及ぼす μ の影響は組成分布の種類によって異なっている。Ceramic-poor 組成では温度場と同様に、 μ の増加とともに熱応力の二乗平均も上昇している。しかし、翻って Ceramic-rich 組成では、 μ が大きくなるにつれて熱応力の二乗平均が低下している。図示していないが、Linear 組成の場合もこれと同様の傾向を示した。この理由は次のとおりである：一般に、熱負荷に含まれる低周波成分が多くなると、物体内の温度の振幅は大きくなる。しかしながら、その一方で、熱伝導により物体内の均熱化が促進されるため、均質体の場合、熱負荷の低周波成分は熱応力に変換されにくい性質を有している⁽⁸³⁾。したがって、加熱面近傍はセラミックの均質体とみなせる Ceramic-rich 組成 (図 2.2) では、 μ が大きい、すなわち低周波成分が多くなると、熱応力の二乗平均は減少する。一方、Ceramic-poor 組成では、加熱面近傍で組成が大きく変化している。この場合、低周波成分により物体内の均熱化が促進されたとしても、加熱面近傍で線膨張係数の変化が著しいために、同領域で大きな熱応力を生じる。この熱応力は温度が高いほど大きくなるため、物体内の温度振幅が大きくなる (μ が大なる) 場合に、熱応力の二乗平均は大きくなる。

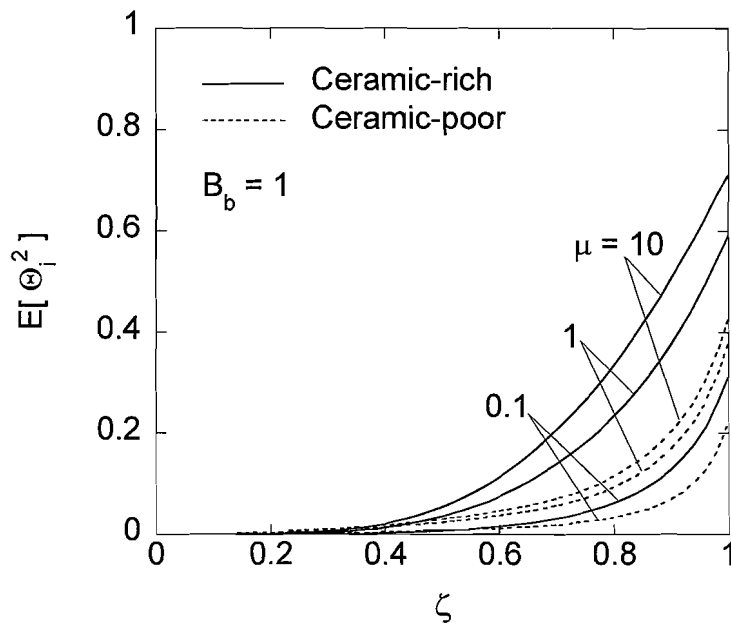


Fig. 2.10 Mean square distribution of temperature in a convectively heated FGM plate for $\psi(t)$ of a stationary Markov process

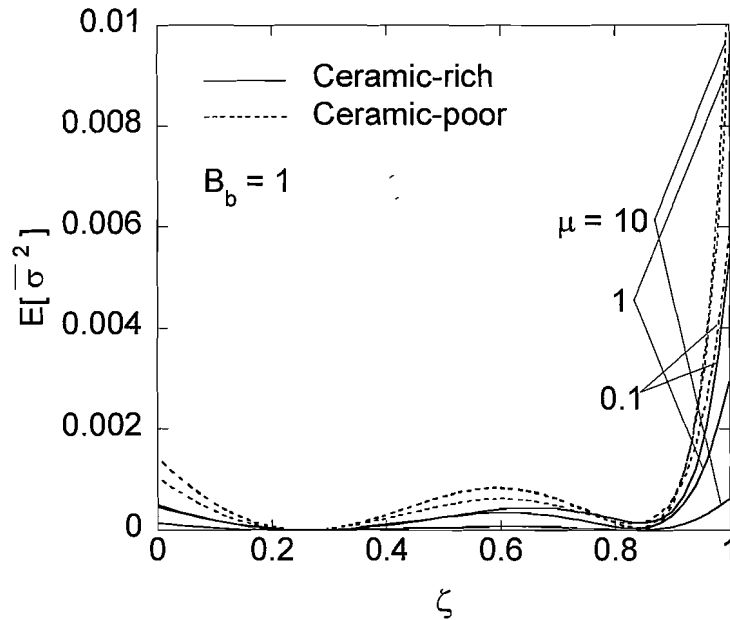


Fig. 2.11 Mean square distribution of thermal stress in a convectively heated FGM plate for $\psi(t)$ of a stationary Markov process

2.4 結 言

任意の不均質性を有する FGM 平板が、ランダム変動する温度をもつ周囲媒体から対流加熱を受ける場合の確率論的熱伝導・熱応力解析を行った。非定常温度場は区分的線形不均質法とラプラス変換により解析し、熱応力場は板厚方向にのみ温度変化を有する不均質無限平板に対する厳密解により解析した。さらに、周囲媒体温度が定常確率過程でモデル化できるという仮定の下で、温度と熱応力に対する自己相関関数とスペクトル密度を陽に導出した。また、PSZ と SUS304 からなる FGM 平板が、ホワイトノイズと定常マルコフ過程で表現される周囲媒体温度によりランダム加熱される場合について数値計算を行い、傾斜組成と温度・熱応力の統計量との関係を考察した。得られた知見を以下にまとめる。

1. 決定論的熱応力解析に基づいて最適化された組成分布は、ランダム加熱を受ける FGM 平板の熱応力変動の抑制という観点から、その変動の大きさと変動領域の広さからみて最適な組成分布とはいえない。
2. 温度変動に及ぼす傾斜組成の影響は、ランダム変動する熱負荷の周波数スペクトル特性によって異なる。
3. 熱負荷の周波数スペクトル特性が①ホワイトノイズ②定常マルコフ過程のいずれの場合においても、傾斜組成をセラミックリッチな組成とすることで板厚全域にわたって熱応力変動を効果的に抑制できる。

4. FGM の組成分布の種類によらず，熱負荷に含まれる低周波成分の割合が高くなるほど，温度変動は大きくなる．しかし，熱負荷の周波数スペクトル特性が熱応力変動に及ぼす影響は，組成分布の種類によって変化する．

本研究で導出した熱応力の自己相関関数（二乗平均）とスペクトル密度は，ランダム変動する熱負荷を受ける FGM 平板の熱疲労を考える際，その寿命予測に必要な熱応力振幅とサイクル周波数の統計データとして供することができる．

第3章 初期温度が確率場である場合

3.1 緒言

一般に決定論的に取り扱われている熱応力問題でも、厳密に考えると何らかのランダム因子を包含している。例えば、材料の熱的・機械的性質、境界条件、初期条件、内部熱発生、物体の形状などにランダム因子の存在が考えられる。

実際の使用環境下にある構造体では、その初期温度がランダムな場合が少なくない。ここで熱応力緩和を目的としてFGMの使用が予想される環境を考えると、たとえば、スペースシャトルやスペースプレーンなどの宇宙往還機が大気圏に再突入する時、機体の初期温度分布⁽⁸⁴⁾は常に不確定性を有している。また、ガスタービンに代表される高温機器の運転再開時における温度分布は、運転停止からの経過時間や作動流体などの周囲媒体との熱伝達のため、設計上の不確定要因⁽¹⁾になっている。このような初期温度のランダム性を考慮し、このランダム因子が温度分布、熱応力分布に及ぼす影響を知るためには、確率論的解析が必要不可欠である。

これまでに報告された、ランダムな初期温度をもつ物体の熱伝導・熱応力問題の確率論的研究は、非常に少ない。Ahmadi⁽²⁸⁾は初期温度が確率場である無限平板および半無限体の温度場について検討を行い、時間とともに徐々に温度のランダム性が減衰することを示した。その後、この研究はGrigorkivら⁽²⁹⁾によって非フーリエ熱伝導の立場からも行われている。しかしながら、初期温度がランダムな場合の熱応力問題まで踏み込んでいる既往の研究はない。もちろん、一般的なFGMに適用可能な（すなわち、任意の熱的・機械的不均質特性をもつ）不均質体に関するこの種の確率論的研究は、温度場のみに関するものですら全く報告されていない現状である。

そこで本章⁽⁸⁵⁾では、空間的にランダムな初期温度を有する、板厚方向への熱的・機械的不均質性が任意である傾斜機能平板の熱伝導問題と熱応力問題を確率論の立場から解析し、温度と熱応力の自己相関関数を陽な形式で導出した。また、初期温度が①ホワイトノイズ②一様マルコフ確率場の場合について数値計算を行い、板厚方向への傾斜組成分布と温度・熱応力の統計量（二乗平均）との関係を考察した。なお、ランダムな初期温度を有する均質体の熱応力に関しては付録Cにまとめている。

3.2 温度場の解析

板厚方向にのみ物性値が変化する傾斜機能無限平板を考え、その表面が一様に加熱された場合の平板の非定常温度場を解析する。板厚方向座標を z 、熱伝導率を λ 、比熱を c 、密度を ρ とすれば、一次元非定常熱伝導方程式は次式のように表せる。

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda(z) \frac{\partial T}{\partial z} \right] = \rho(z)c(z) \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.1)$$

ただし、 T は温度、 t は時間を表す。式(3.1)は変数係数の微分方程式であり、任意に不均質な λ, ρ, c に対して解けない。そこで、平板を板厚方向へ n 層に仮想的に分割し、連続的な物性値の変化を各層で相異なる一定値と近似して、Vodickaの手法⁽⁸⁶⁾により解析する*。

図3-1に解析モデルを示す。図3-1aのように、板厚方向(z 軸方向)に任意の不均質性を持つ厚さ a の無限平板があり、その周囲媒体温度を $\phi(t), \psi(t)$ 、平板表面の熱伝達率を h_t, h_b とする。 n 層に分割された平板の各仮想界面における座標値を $b_i (i=1, 2, \dots, n-1)$ とする。また、図3-1bのように、平板の初期温度 $T_0(z)$ は板厚方向にランダム分布しているものとする。

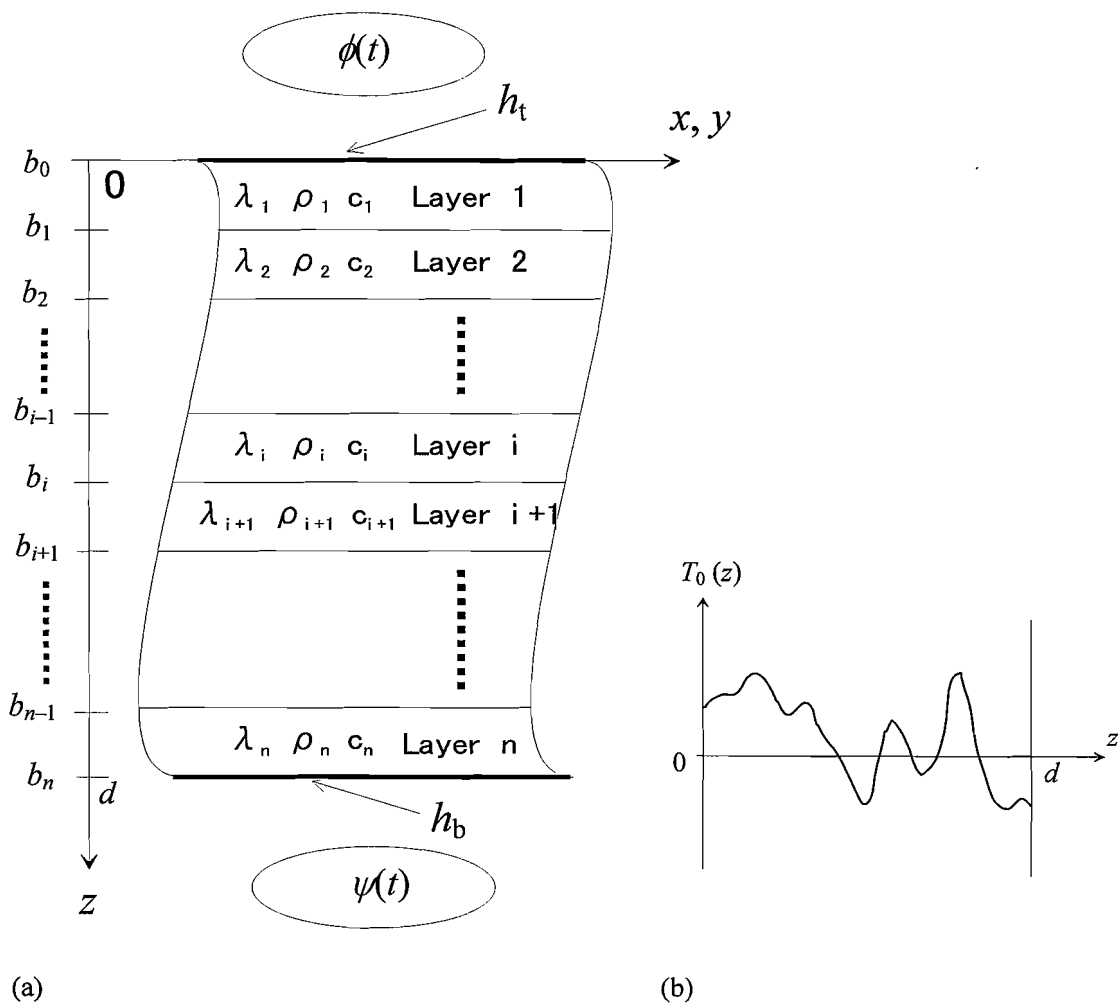


Fig. 3-1 (a) Analytical model for an FGM plate and (b) its random initial temperature

*熱伝導率の不均質性を各層で線形近似する区分的線形不均質近似法⁽⁷⁴⁾の適用も試みたが、この手法を用いて初期温度がランダム分布する本問題の温度場を解析することは非常に困難であったため、ここでは採用しない。

第 i 層の温度関数を T_i とすると、この FGM 平板の非定常熱伝導問題は次のように定式化される。

$$\lambda_i \frac{\partial^2 T_i}{\partial z^2} = \rho_i c_i \frac{\partial T_i}{\partial t} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.2)$$

$$T_i = T_0(z, \varpi) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \text{at } t = 0 \quad (3.3)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} - h_1 [T_1 - \phi(t)] = 0 \quad \text{at } z = 0 \quad (3.4)$$

$$\lambda_n \frac{\partial T_n}{\partial z} + h_0 [T_n - \psi(t)] = 0 \quad \text{at } z = d \quad (3.5)$$

$$T_i = T_{i+1}, \quad \lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial z} = \lambda_{i+1} \frac{\partial T_{i+1}}{\partial z} \quad \text{at } z = b_i \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (3.6)$$

ここで、 ϖ は確率変数を意味するが、式表記の簡単化のために以下では ϖ を省略する。温度関数 T_i を Vodicka の手法⁽⁸⁶⁾で解析すれば、次式のように導出できる。

$$T_i(z, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m(t) X_{im}(z) + \sum_{j=1}^2 L_j(z) \Gamma_j(t) \quad (3.7)$$

ただし、 $L_j(z), \Gamma_j(t)$ は次式で与えられる。

$$L_j(z) = C_{ij} z + D_{ij} \quad (3.8)$$

$$\Gamma_1(t) = -\phi(t) \quad (3.9)$$

$$\Gamma_2(t) = \psi(t) \quad (3.10)$$

また、 $X_{im}(z)$ は式(3.2)、式(3.4)~(3.6)に対する固有値問題の解であり、次式で与えられる。

$$X_{im}(z) = A_{im} \cos\left(\frac{\gamma_m z}{\sqrt{\kappa_i}}\right) + B_{im} \sin\left(\frac{\gamma_m z}{\sqrt{\kappa_i}}\right) \quad (3.11)$$

ここで、 κ_i は $\kappa_i = \lambda_i / (\rho_i c_i)$ で表される熱拡散率である。固有値 γ_m ($m = 1, 2, \dots$) は未知係数 A_{im}, B_{im} が 0 以外の解を持つための条件から決定され、次の超越方程式の正根として求められる。

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 \cdots \mathbf{E}_{n-1} \cdot \mathbf{a} = 0 \quad (3.12)$$

ここで、

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -\frac{h_a}{\lambda_1} & u_{1m} \end{bmatrix}, \quad u_{im} = \frac{\gamma_m}{\sqrt{\kappa_i}},$$

$$\mathbf{E}_i = \begin{bmatrix} \lambda_i u_{im} \cos(u_{im} b_i) & -\sin(u_{im} b_i) \\ \lambda_i u_{im} \sin(u_{im} b_i) & \cos(u_{im} b_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos[u_{(i+1)m} b_i] & \sin[u_{(i+1)m} b_i] \\ -\lambda_{i+1} u_{(i+1)m} \sin[u_{(i+1)m} b_i] & \lambda_{i+1} u_{(i+1)m} \cos[u_{(i+1)m} b_i] \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} u_{nm} \cos(u_{nm} d) + \frac{h_a}{\lambda_n} \sin(u_{nm} d) \\ u_{nm} \sin(u_{nm} d) - \frac{h_b}{\lambda_n} \cos(u_{nm} d) \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

式(3.8), (3.11)に含まれる未知係数 $A_{im}, B_{im}, C_{ij}, D_{ij}$ は式(3.4)~(3.6)より決定できる. また, $\Phi_m(t)$ は次式で与えられる.

$$\Phi_m(t) = \exp(-\gamma_m^2 t) \left[g_m - \int_0^t \exp(\gamma_m^2 t') \sum_{j=1}^2 l_{mj} \frac{d\Gamma_j(t')}{dt'} dt' \right] \quad (3.14)$$

ただし,

$$g_m = M_m^{-1} \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\kappa_i} \int_{b_{i-1}}^{b_i} \left[T_0(z) - \sum_{j=1}^2 L_{ij}(z) \Gamma_j(0) \right] X_{im}(z) dz,$$

$$l_{mj} = M_m^{-1} \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\kappa_i} \int_{b_{i-1}}^{b_i} L_{ij}(z) X_{im}(z) dz, \quad M_m = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\kappa_i} \int_{b_{i-1}}^{b_i} [X_{im}(z)]^2 dz \quad (3.15)$$

式(3.14)で表される関数 $\Phi_m(t)$ に含まれている g_m は, 初期条件式を関数 $X_{im}(z)$ で展開した場合の展開係数であり, 式(3.3)の $T_0(z)$ がランダム関数 (確率場) であるため, g_m もランダムな値となる. したがって, 式(3.7)で表される温度関数にはランダム関数が含まれており, 統計的評価が必要となる.

本問題のように, 確率変数のパラメータが空間座標である「確率場」にとって重要な統計量は自己相関関数とスペクトル密度であることから, 温度に関してそれらを求める. 期待値演算子を $E[\cdot]$ として, 温度 T_i の自己相関関数 R_{T_i} は次式のように与えられる.

$$R_{T_i}(z_1, z_2, t) = E[T_i(z_1, t) \cdot T_i(z_2, t)] \quad (3.16)$$

ここで, z_1, z_2 は任意の板厚方向の座標値である. $E[T_0] = 0$ とすれば*, 式(3.7), (3.16)より R_{T_i} は次式のように導出される.

$$R_{T_i}(z_1, z_2, t) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} E[\Phi_l(t) \Phi_m(t)] X_{il}(z_1) X_{im}(z_2) + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^2 E[\Phi_l(t)] X_{il}(z_1) L_{im}(z_2) \Gamma_m(t)$$

* 2.2.1 節でも述べたように, $E[T_0] \neq 0$ ならば, $T_0(z) \rightarrow T_0(z) - E[T_0]$ とおけば平均値 0 の場合に帰着するから, $E[T_0] = 0$ の仮定は本解析の一般性を失わせない.

$$+ \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^2 E[\Phi_l(t)] X_{il}(z_2) L_{im}(z_1) \Gamma_m(t) + \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^2 L_{il}(z_1) L_{im}(z_2) \Gamma_l(t) \Gamma_m(t) \quad (3.17)$$

ここで,

$$E[\Phi_l(t)\Phi_m(t)] = e^{-(\gamma_l^2 + \gamma_m^2)t} \left\{ E[g_l g_m] - E[g_l] \int_0^t e^{\gamma_l^2 t'} \left[\sum_{j=1}^2 l_{mj} \frac{d\Gamma_j(t')}{dt'} \right] dt' - E[g_m] \int_0^t e^{\gamma_m^2 t'} \left[\sum_{j=1}^2 l_{lj} \frac{d\Gamma_j(t')}{dt'} \right] dt' \right. \\ \left. + \int_0^t \int_0^t e^{\gamma_l^2 \xi_1} e^{\gamma_m^2 \xi_2} \left[\sum_{j=1}^2 l_{lj} \frac{d\Gamma_j(\xi_1)}{d\xi_1} \right] \left[\sum_{k=1}^2 l_{mk} \frac{d\Gamma_k(\xi_2)}{d\xi_2} \right] d\xi_1 d\xi_2 \right\},$$

$$E[\Phi_l(t)] = \exp(-\gamma_l^2 t) \left[E[g_l] - \int_0^t \exp(\gamma_l^2 t') \sum_{j=1}^2 l_{lj} \frac{d\Gamma_j(t')}{dt'} dt' \right],$$

$$E[g_l g_m] = M_l^{-1} M_m^{-1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_i \lambda_j}{\kappa_i \kappa_j} \int_{b_{i-1}}^{b_i} \int_{b_{j-1}}^{b_j} E[G_{ij}(\xi_1, \xi_2)] X_{il}(\xi_1) X_{jm}(\xi_2) d\xi_2 d\xi_1,$$

$$E[g_l] = -M_l^{-1} \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\kappa_i} \int_{b_{i-1}}^{b_i} \left[\sum_{j=1}^2 L_{ij}(z) \Gamma_j(0) \right] X_{il}(z) dz,$$

$$E[G_{ij}(\xi_1, \xi_2)] = R_{T_0}(\xi_2 - \xi_1) + \sum_{l=1}^2 \sum_{k=1}^2 L_{il}(\xi_1) L_{jk}(\xi_2) \Gamma_l(0) \Gamma_k(0) \quad (3.18)$$

$R_{T_0}(\cdot)$ は初期温度 T_0 の自己相関関数である。これが与えられると、式(3.17)、(3.18)より温度の自己相関関数を求めることができる。

次に、温度 T_i のスペクトル密度関数 S_{T_i} は、Wiener-Khintchine の関係式⁽⁷¹⁾より次式で与えられる。

$$S_{T_i}(z, \omega, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^d R_{T_i}(z, z + \beta, t) \exp(-j\omega\beta) d\beta \quad (3.19)$$

ここで、 j は虚数を表し、 ω は正負軸上で定義された空間角周波数である。

3.3 熱応力場の解析

板厚方向に熱弾性特性の不均質性が任意である不均質平板の熱応力式⁽⁷⁵⁾は、Sugano によって既に次式のように導出されている。ただし、板厚方向に平面応力状態であり、周囲から何の拘束も受けない純熱応力問題を考えている。

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma(z, t) = \frac{E(z)}{1-\nu(z)} \left[-\alpha(z) T(z, t) + \frac{(I_2 z - I_3) I_{F1} + (I_2 - I_1 z) I_{F2}}{I_2^2 - I_1 I_3} \right] \quad (3.20)$$

ここで,

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_0^d \frac{E(z)}{1-\nu(z)} dz, & I_2 &= \int_0^d \frac{zE(z)}{1-\nu(z)} dz, & I_3 &= \int_0^d \frac{z^2 E(z)}{1-\nu(z)} dz, \\
 I_{F1} &= \int_0^d \frac{E(z)\alpha(z)T(z,t)}{1-\nu(z)} dz, & I_{F2} &= \int_0^d \frac{zE(z)\alpha(z)T(z,t)}{1-\nu(z)} dz
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

上式中の E はヤング率, α は線膨張係数, ν はポアソン比である. 式(3.20), (3.21)を利用して前述の温度場による傾斜機能平板の熱応力を統計的に解析する. 温度 T_i のランダム性により, 平板の熱応力も確率場となる. ここでは統計量として応力 σ の自己相関関数 R_σ を求める. R_σ は式(3.16)と同様に, 次式で与えられる.

$$R_\sigma(z_1, z_2, t) = E[\sigma(z_1, t) \cdot \sigma(z_2, t)] \tag{3.22}$$

この式に式(3.7), (3.20)を代入すれば, R_σ は次式のようになる.

$$\begin{aligned}
 R_\sigma(z_1, z_2, t) &= \left[\frac{E(z_1)}{1-\nu(z_1)} \right] \left[\frac{E(z_2)}{1-\nu(z_2)} \right] \left\{ \alpha(z_1)\alpha(z_2)R_{T_i}(z_1, z_2, t) - \frac{1}{I_2^2 - I_1 I_3} \right. \\
 &\quad \times [(I_2 z_2 - I_3)\alpha(z_1)V_0(z_1, t) + (I_2 - I_1 z_2)\alpha(z_1)V_1(z_1, t)] \\
 &\quad + [(I_2 z_1 - I_3)\alpha(z_2)V_0(z_2, t) + (I_2 - I_1 z_1)\alpha(z_2)V_1(z_2, t)] \\
 &\quad + \frac{1}{(I_2^2 - I_1 I_3)^2} [(I_2 z_1 - I_3)(I_2 z_2 - I_3)W_{00}(t) + (I_2 z_1 - I_3) \\
 &\quad \times (I_2 - I_1 z_2)W_{01}(t) + (I_2 - I_1 z_1)(I_2 z_2 - I_3)W_{10}(t) \\
 &\quad \left. + (I_2 - I_1 z_1)(I_2 - I_1 z_2)W_{11}(t)] \right\} \tag{3.23}
 \end{aligned}$$

ただし,

$$\begin{aligned}
 V_p(z, t) &= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} E[\Phi_l(t)\Phi_m(t)]X_{il}(z)I_{pm} + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^2 E[\Phi_l(t)]X_{il}(z)I_{pm}^* \Gamma_m(t) \\
 &\quad + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^2 E[\Phi_l(t)]I_{pl}L_{im}(z)\Gamma_m(t) + \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^2 L_{il}(z)I_{pm}^* \Gamma_l(t)\Gamma_m(t) \quad p = 0, 1 \tag{3.24}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{pq}(t) &= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} E[\Phi_l(t)\Phi_m(t)]I_{pl}I_{qm} + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^2 E[\Phi_l(t)]I_{pl}I_{qm}^* \Gamma_m(t) \\
 &\quad + \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^2 E[\Phi_l(t)]I_{pl}I_{qm}^* \Gamma_m(t) + \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^2 I_{pl}^* I_{qm}^* \Gamma_l(t)\Gamma_m(t) \quad p, q = 0, 1 \tag{3.25}
 \end{aligned}$$

$$I_{pl} = \int_0^d \frac{z^p E(z) \alpha(z)}{1-\nu(z)} X_{il}(z) dz, \quad I_{pl}^* = \int_0^d \frac{z^p E(z) \alpha(z)}{1-\nu(z)} L_{il}(z) dz \quad p = 0, 1 \quad (3.26)$$

式(3.18)と式(3.23)～(3.26)より，初期温度の自己相関関数 R_{T_0} が与えられると，熱応力の自己相関関数 R_σ が求まる．応力のスペクトル密度関数 S_σ は式(3.19)と同様に，次に式(3.23)を代入することにより求めることができる．

$$S_\sigma(z, \omega, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^d R_\sigma(z, z + \beta, t) \exp(-j\omega\beta) d\beta \quad (3.27)$$

3.4 数値計算結果と考察

数値計算の一例として， $z=0, d$ の平板表面温度が共に 0 で与えられ，初期温度 $T_0(z)$ がホワイトノイズと一様マルコフ確率場で与えられる場合を考察する．この場合，初期温度の自己相関関数 R_{T_0} はそれぞれ次式で与えられる⁽⁷¹⁾．

$$\text{ホワイトノイズ} : R_{T_0}(z) = T_s^2 \delta(z) \quad (3.28)$$

$$\text{一様マルコフ確率場} : R_{T_0}(z) = T_s^2 \exp\left(-\frac{|z|}{s}\right) \quad (s > 0) \quad (3.29)$$

ここで， $\delta(\cdot)$ は Dirac の Delta 関数， s は相関距離， T_s は初期温度のランダム変動の強度を表す定数である．一般に，構造体の初期温度のランダム分布特性は，その構造体の使用環境履歴に依存する．現実の初期温度分布の空間的変動は，それが広帯域の空間周波数特性をもつ場合，ホワイトノイズで近似できる*．一方，狭帯域の空間周波数特性をもつ場合はマルコフ確率場と考え，相関距離 s を適切に選択することにより近似できると考える．通常， s は実測された初期温度の変動分布から決定される．

さらに次式の無次元量を導入する．

$$\zeta = \frac{z}{d}, \quad \tau = \frac{\kappa_0 t}{d^2}, \quad B_t = \frac{h_t d}{\lambda_1}, \quad B_b = \frac{h_b d}{\lambda_n}, \quad \Theta_i = \frac{T_i}{T_s}, \quad \bar{\sigma} = \frac{(1-\nu_0)\sigma}{E_0 \alpha_0 T_s},$$

$$R_{\Theta_i} = E[\Theta_i(\zeta_1, \tau) \cdot \Theta_i(\zeta_2, \tau)], \quad R_{\bar{\sigma}} = E[\bar{\sigma}(\zeta_1, \tau) \cdot \bar{\sigma}(\zeta_2, \tau)] \quad (3.30)$$

ここで， $\kappa_0, E_0, \alpha_0, \nu_0$ はそれぞれ， $\zeta=0$ における熱拡散率，ヤング率，線膨張係数，ポアソン比である．また，数値計算に供する FGM としてセラミックと金属からなる熱応力緩和型 FGM を考え，その構成材料には PSZ (セラミック) と SUS304 (金属) を採用した．PSZ と SUS304 の材料特性は第2章の表 2-1 に示されている．

* 厳密には自己相関関数にデルタ関数といった“無限”を含むものは実在し得ないので，理想的なホワイトノイズは現実に存在しない．しかし実用上は，有限値の，理想的ホワイトノイズに十分近いものをホワイトノイズとして扱う．

傾斜組成の種類は様々考えられるが、ここでは図 3-2 に示すように、金属 100%からセラミック 100%まで直線的に変化する Linear、これよりセラミックの体積比率を高くした Ceramic rich、逆に低くした Ceramic poor に加え、FGM の使用熱的環境として平板の片側表面が一定温度に加熱された場合に生じる熱応力を最小化するように組成を最適化⁽⁸⁰⁾した Optimum (2-3 節の GA と同一) の合計 4 種類について計算を行った。

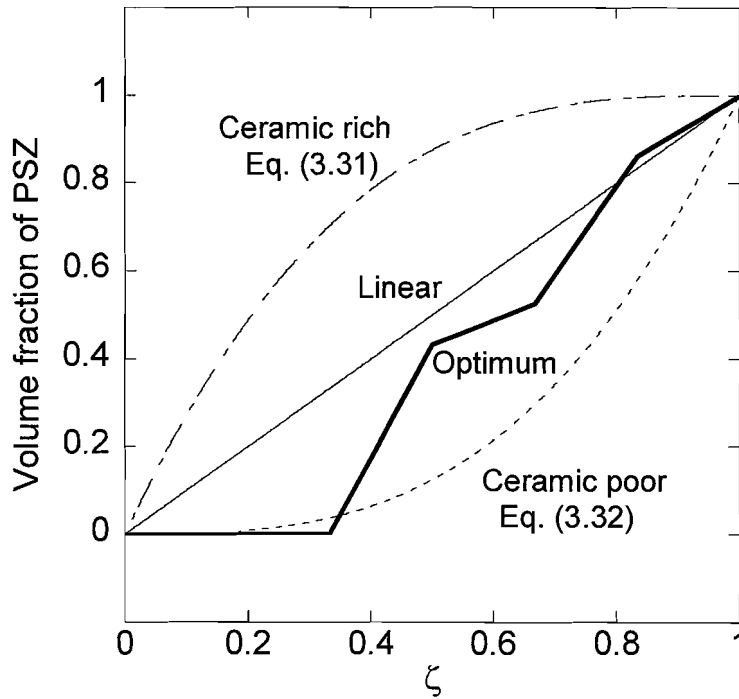


Fig. 3-2 Compositional distributions of PSZ in FGM plates

ここで、Ceramic rich と Ceramic poor の組成に対する板厚方向への PSZ の組成分布 $f_{\text{PSZ}}(\zeta)$ として、式(3.31)、(3.32)で表現される無次元座標 ζ のべき乗関数形を採用した。

$$f_{\text{PSZ}}(\zeta) = 1 - (1 - \zeta)^3 \quad (\text{Ceramic rich}) \quad (3.31)$$

$$f_{\text{PSZ}}(\zeta) = \zeta^3 \quad (\text{Ceramic poor}) \quad (3.32)$$

各材料組成分布に対する FGM の材料特性は、第 2 章と同様に、ポアソン比 ν は一定値、密度と比熱は線形複合則より算出し、他は母層に球状粒子を分散させた場合の Mori-Tanaka の理論⁽⁸¹⁾を用い、さらに中間層においてはこれにファジィ推論^(82, 87)を併用して算出した。この算出方法の詳細については付録 B を参照のこと。

また、数値計算諸元として次の値を採用した。

$$B_t = B_b = \infty, \quad s = 0.01, 0.1, 1, \quad n = 20, \quad \nu = 0.3 \quad (3.33)$$

本計算に用いる式(3.17), (3.24), (3.25)の二重無限級数の項数を決定するため、その項数が計算結果に及ぼす影響について調べた。一例として、初期温度が一様マルコフ確率場の場合について、無次元温度の二乗平均の収束挙動を表 3-1 に示す。項数を 50×50 にとれば、 ζ の値に関わらず 4桁の有効数字が得られている。また、これと同様の収束挙動が熱応力の二乗平均でも確認された。表に示されていないが、フーリエ数 τ の増加とともに温度・熱応力の二乗平均の収束性は良くなる傾向にあるため、 $\tau \geq 0.001$ の範囲では 50×50 の項数で十分である。そこで本計算では、項数を 50×50 として以下の計算を行った。

Table 3-1 Relationship between the convergence of mean square temperature and the number of terms, in the FGM plate with linear composition profile for $\tau = 0.001$ and $s = 1$

ζ	Number of terms			
	10×10	30×30	50×50	100×100
0.2	1.133582	0.9570273	0.9573048	0.9573201
0.4	0.9997275	0.9626392	0.9647401	0.9647262
0.6	0.9699160	0.9744156	0.9737740	0.9737702
0.8	1.060701	0.9816321	0.9797880	0.9797829

3.4.1 初期温度がホワイトノイズの場合

図 3-3 は FGM 平板の傾斜組成分布が温度の二乗平均値にどのような影響を及ぼすのかを示したものである。二乗平均値は自己相関関数から得られ、式(3.17)において $z_1 = z_2 = z$ とおけばよい。本章では初期温度の期待値を 0 としているので、二乗平均値は分散に等しい。この図から、フーリエ数 τ の増加、すなわち時間の経過とともに二乗平均値が減少していることがわかる。また、各時間について分布の傾向をみると、セラミック 100%側でピーク値を示し、その位置は時間の経過とともに平板内部へ移動している。二乗平均値の大きさを比較すると、Ceramic rich > Linear > Optimum > Ceramic poor なる関係を確認できる。これはセラミックの体積分率を低くすれば熱伝導率が高くなり、結果として、初期温度のランダム性の影響が周囲へ拡散しやすくなるためである。

図 3-4 は熱応力の二乗平均分布をフーリエ数をパラメータとして描いたものである。温度の場合と同様、時間の経過とともに熱応力の二乗平均値は減少しているが、この二乗平均値と材料組成分布との関係は、温度の場合とは逆に、Ceramic poor の場合に最も大きく、Ceramic rich の場合に最も小さくなっている。この熱応力の二乗平均値と材料組成分布の関係は、決定論的な初期温度分布を有する FGM 平板が、ある瞬間から急に両表面を温度 0 に冷却された場合の「熱応力分布と材料組成分布の関係」と同じである。図 3-2 からわかるように、Ceramic poor の組成分布では、線膨張係数が大きい SUS304 の体積分率が板厚の広範囲にわたって支配的であるために、大きな熱応力の二乗平均値をもたらすものと考えられる。また、平板両表面の温度を決定論的に指定し

ているために、表面における温度の二乗平均値は常に0であるのに対して、熱応力の二乗平均値は、経過時間の小さい時は平板内部で大きな値をとるが、ある時刻から平板表面に最大値が現れている。

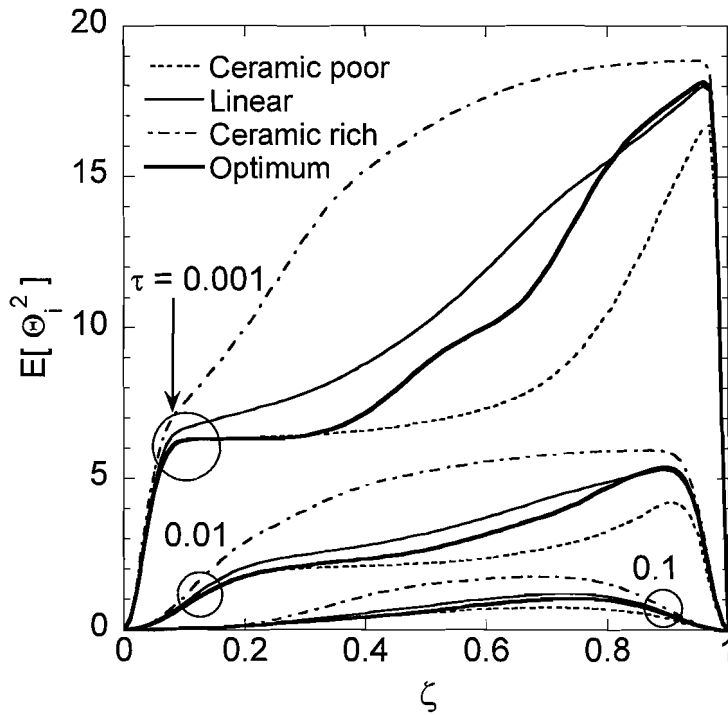


Fig. 3.3 Relationship between the composition profile and the mean square temperature for $T_0(z)$ of white noise disturbance

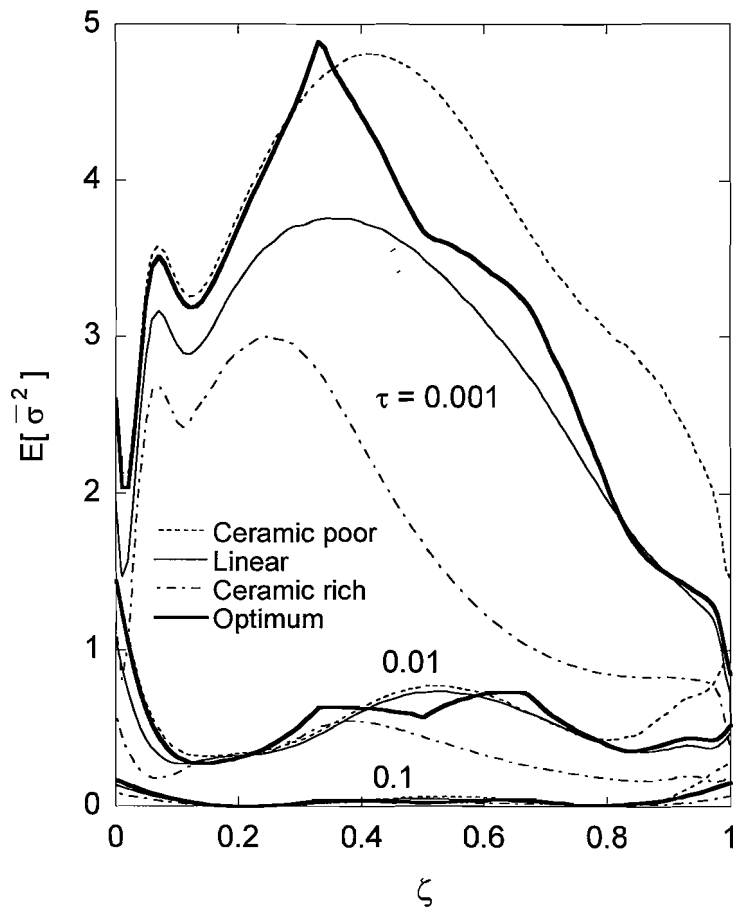


Fig. 3-4 Relationship between the composition profile and the mean square thermal stress for $T_0(z)$ of white noise disturbance

3.4.2 初期温度が一様マルコフ確率場の場合

図 3-5 に相関距離 s を 1 とした場合の温度の二乗平均分布を示す。初期温度がホワイトノイズで与えられた場合（図 3-3）と比べると、初期温度分布の分散値 $R_{T_0}(0)$ が小さいために、全体的に二乗平均値の大きさは極端に小さくなっているが、分布の傾向は良く似ている。また、一様マルコフ確率場は、減衰に時間を要する低周波成分が支配的*であるため、異なる組成分布間での二乗平均値の差は熱移動開始直後は小さく、 $\tau = 0.1$ 付近で最大となり、その後は小さくなりながら、どの組成分布の二乗平均値も一様に 0 へと収束する。この結果は、経過時間が小さいほど温度の二乗平均値に及ぼす傾斜組成の影響が大きいホワイトノイズの場合と異なっている。

熱応力の二乗平均分布（図 3-6）に関しては、①時間とともに二乗平均値は減少する② τ の値に関わらず、二乗平均値は Ceramic poor で最も大きく、Ceramic rich で最も小さい—という 2 点でホワイトノイズの場合（図 3-4）と一致するが、図 3-4 でみられた、経過時間の小さい範囲における平板内部での大きな二乗平均値は確認できない。 $\tau \geq 0.01$ であれば、両者間で分布の傾向は非常に

* 付録 A を参照のこと。

似ている。

次に、温度・熱応力の二乗平均値に及ぼす初期温度の空間周波数特性の影響を調べるために、傾斜組成を Linear に固定し、 s の値を変化させて計算を試みた。図 3-7 に示すように、 s が大きいほど初期温度の分布形状はゆるやかに振幅を変える形状になり、 s が小さくなるにつれて初期温度の空間周波数が高周波成分を含むようになるため、激しく変動した分布形状となる。

図 3-8, 図 3-9 はそれぞれ、初期温度の空間周波数特性が温度、熱応力の二乗平均値にどのような影響を及ぼすかを示したものである。これらの図より、 s が小さくなる、すなわち初期温度分布の空間周波数特性が広帯域になるにつれて、初期温度のランダム性が温度と熱応力の二乗平均値に及ぼす影響は小さくなるのがわかる。

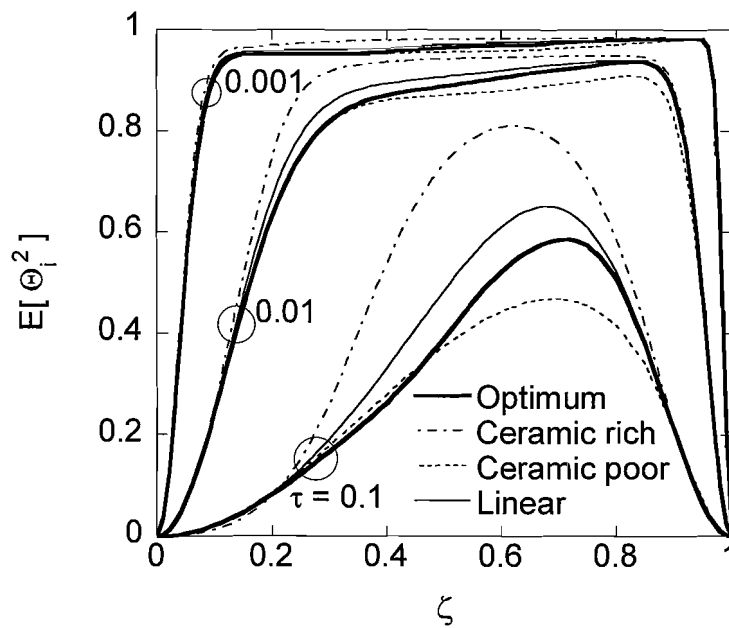


Fig. 3-5 Relationship between the composition profile and the mean square temperature for $T_0(z)$ of a Markov random field with $s = 1$

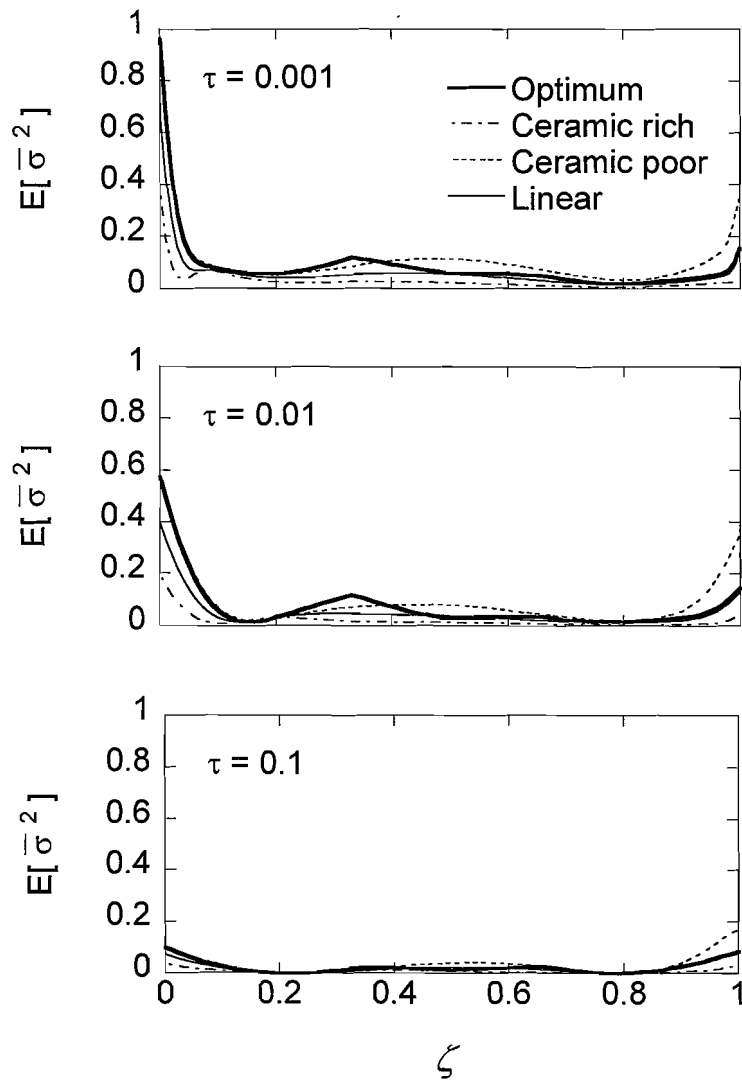


Fig. 3·6 Relationship between the composition profile and the mean square thermal stress for $T_0(z)$ of a Markov random field with $s = 1$

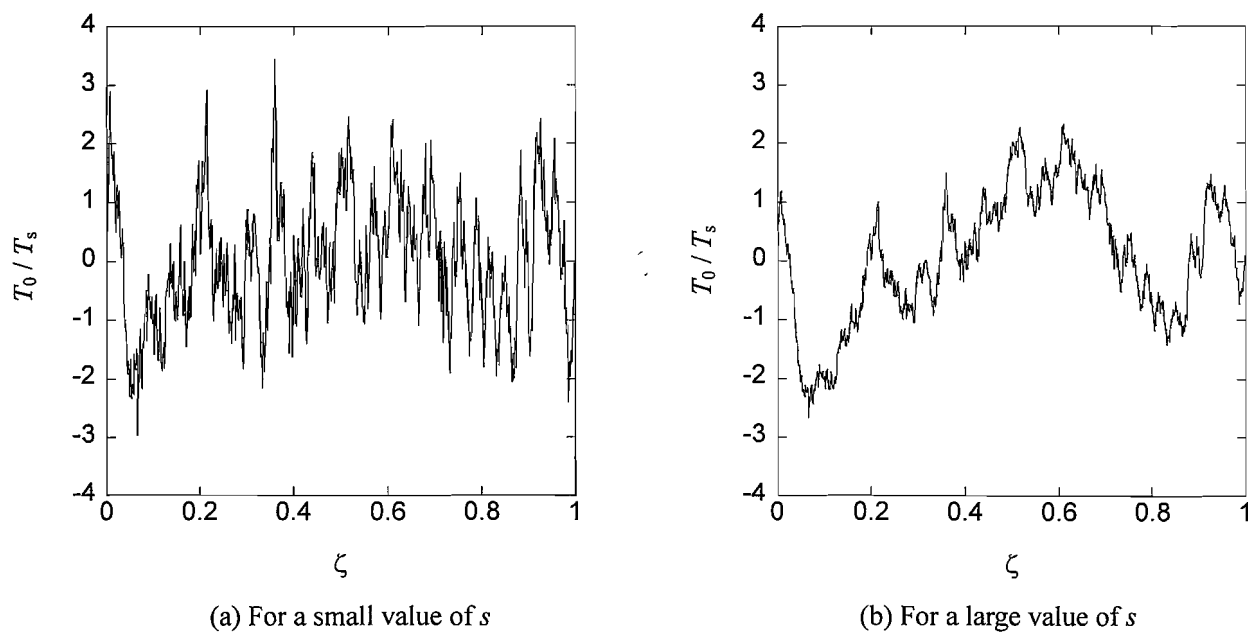


Fig. 3.7 Effect of s on the distribution of initial temperature T_0

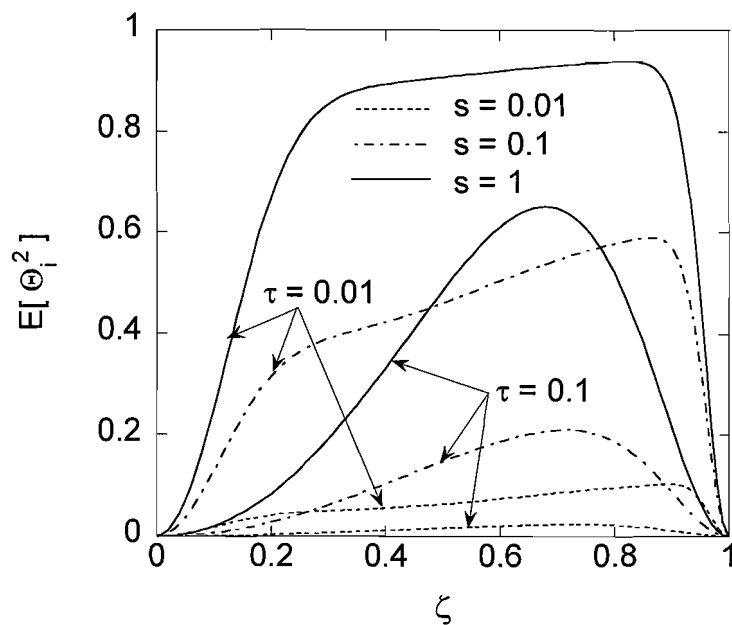


Fig. 3.8 Relationship between the correlation distance of initial temperature and the mean square temperature in the FGM plate with linear composition profile

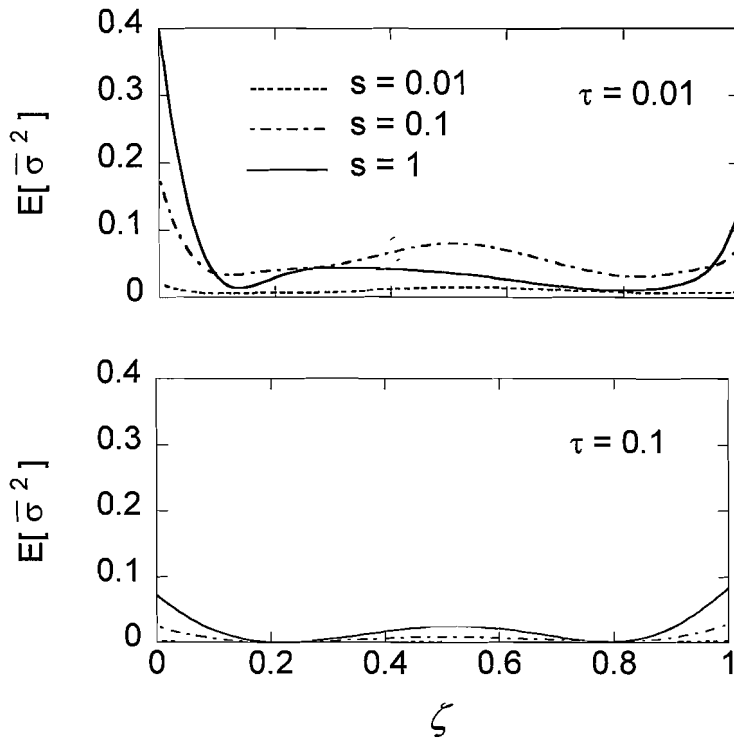


Fig. 3-9 Relationship between the correlation distance of initial temperature and the mean square thermal stress in the FGM plate with linear composition profile

3.5 結 言

板厚方向に任意の不均質性を有する FGM 平板を、各層が相異なる一定の熱的特性を持った積層板で近似し、ランダムな初期温度をもつ FGM 平板の熱伝導問題と熱応力問題を確率論的に解析した。また、温度および熱応力の統計量として、それぞれの自己相関関数を解析的に導出した。さらに、PSZ/SUS304 系 FGM 平板の初期温度が①ホワイトノイズ②一様マルコフ確率場—で与えられた場合の数値計算結果より、傾斜組成の相違が温度と熱応力の二乗平均に及ぼす影響について考察した。得られた結論を以下に示す。

1. 初期温度の確率場モデルに係わらず、温度の二乗平均値については、セラミックの体積分率を増すと大きくなり、熱応力の二乗平均値については逆にセラミックの体積分率を低くすると大きくなる。
2. 初期温度がホワイトノイズと一様マルコフ確率場の場合において、温度および熱応力の二乗平均値は時間の経過とともに減少する。また、それらの分布傾向は熱移動開始直後を除いて、両確率場モデル間で非常に似ている。
3. 熱応力の二乗平均値は、初期温度がホワイトノイズの場合、経過時間の短い時に平板内部で大きな値を示し、その後ある時刻から平板表面で最大値をとる。一方、初期温度がマルコフ確率場の場合は、常に平板表面に最大値が現れる。
4. 初期温度分布の空間周波数特性が広帯域になるにつれ、ランダム性の影響は速く減衰する。

第4章 物性値が確率場で与えられる場合

4.1 緒言

傾斜機能材料 (FGM) とは、材料組成やマイクロ組織の分布を連続的に制御することにより、熱応力緩和機能、医学的・生体的機能、光学的機能などを発現させようとしたものである⁽⁸⁸⁾。この組成・組織を連続的に変化させる傾斜化技術によれば、一様機能を追求してきた従来の材料技術では得られない、「機能の傾斜化」が可能となる。しかし、必要とする特性を最大限に発現させるためには、その使用環境に応じてあらかじめ決定された設計目標にしたがってマイクロ組織などの構造パラメータを制御し、製造できることが必要である。

現在確立されている FGM の製造方法としては、粒子噴霧積層技術や遠心成形技術を用いて粉末原料を傾斜組成充填したのち焼結する方法、異種粒子独立溶射法 (プラズマツイントーチ溶射方式)、化学気相析出法 (CVD) などがある。しかし、いかなる製造法を用いても、組成を連続的に制御する技術に難しさがあるため、できあがった FGM の組成分布が設計目標と完全に一致することではなく、目標とする分布から少なからずバラツキが生じる⁽⁸⁹⁾。その結果、FGM の物性値にもバラツキが生じる。また、その製造の容易さから、材料組成が段階的に変化する FGM も開発されているが、この場合でも実際に製造された FGM の物性値は、焼結時に充填する粉末粒径のバラツキや組成不連続部でのサーモマイグレーション⁽⁹⁰⁾に起因して不確定になる。このように、実際に製造された FGM そのものが不確定性を内在している以上、FGM の熱応力を評価する際にこれを確率モデルとしてとらえ、統計的に処理するのが合理的であろう。

ランダムな材料特性を有する物体を対象とした熱伝導・熱弾性問題の確率論的研究は、これまでに幾つか報告されている。中村ら⁽³⁶⁾は材料の熱的特性と周囲媒体温度が不確定な場合について、Emery⁽³⁷⁾は熱伝導率、熱伝達率と放射率が不確定な場合について、それぞれ確率有限要素法⁽⁹¹⁾を用いて熱伝導解析を行っている。また、會田ら⁽⁴⁹⁾は引張・圧縮強度と弾性係数に不確定性を持つ場合に、熱応力によって生じる亀裂の発生確率を FEM-based モンテカルロ・シミュレーション法で推定している。これらに加え、繊維配向角が不確定な CFRP 積層平板の熱変形問題を解析した研究⁽⁴⁷⁾も報告されている。一方、解析的手法を用いた例では、Kellar⁽³²⁾、Ahmadi⁽³⁸⁾、Tzou⁽³⁹⁾が熱伝導率がランダムな均質体について、Barrett⁽⁵³⁾が同じく不均質体について熱伝導解析を行っている。また菅野ら⁽⁵⁴⁾は、熱伝導率と線膨張係数がランダムな不均質平板の熱弾性問題を解析している。さらに、Kotulski⁽⁴⁸⁾は線膨張係数がランダムな物体の熱弾性波動解析を行っている。

ところで、FGM が所要の機能性を発現するには、そのための材料組成設計が必要となる。したがって、一般的な FGM の解析モデルは、任意の不均質特性を有する不均質体でなければならない。しかし現時点において、このような不均質体に関する確率論的研究は非常に少ない。Madera⁽²⁵⁾は任意の境界条件をもつ任意形状の不均質体を対象に、その三次元非定常温度場の確率論的評価のための数値解法を開発した。また、菅野らはランダム変動する境界温度をもつ FGM 積層平板⁽⁷⁹⁾

とランダムな周囲媒体温度にさらされる FGM 平板⁽⁷³⁾の確率論的熱応力を解析した。初期温度がランダムに分布している FGM 平板の確率論的熱応力も同研究グループにより解析されている⁽⁸⁵⁾。物性値の不確定性を考慮した FGM の確率論的研究に関しては、Kitipornchai ら⁽⁹²⁾が温度変化を受ける FGM 平板のランダム自由振動を扱っている。また、Yang ら⁽⁹³⁾は静的荷重を受ける FGM 平板の曲げ応答を摂動法(Perturbation method)で解析している。しかし、これら2つの論文では、不確実な物性値の空間的相関性が考慮されていない*。その一方で Ferrante ら⁽⁵⁵⁾は、体積分率と空隙率を空間的相関性を考慮した確率場と見なし、線形傾斜組成をもつ FGM 平板の定常熱応力をモンテカルロ・シミュレーション法で解析している。また、Poterasu ら⁽⁶⁾は熱的・機械的物性値が一樣確率場で与えられる FGM の熱弾性問題に対する確率有限要素法の定式化を行っている。

本章^(94, 95)では、板厚方向に任意の熱的・機械的不均質性を持つ FGM 無限平板が、その熱伝導率と線膨張係数に不確定性を有する場合について、非定常熱伝導問題と熱応力問題を確率論的に解析する。通常、熱応力緩和型 FGM はセラミックと金属からなり、これらの材料間で物性値の差が著しい「熱伝導率」と「線膨張係数」が熱応力緩和に重大な影響を及ぼす事実から、ここでは上記二つの物性値にのみ不確定性を考慮した。また、部分安定化ジルコニア(PSZ)とオーステナイト系ステンレス鋼(SUS304)からなる FGM 平板が片面加熱される場合に対し、温度および熱応力の平均と標準偏差を数値計算し、これらに及ぼす傾斜組成分布、加熱面の熱伝達率、不確実な物性値の自己/相互相関係数の影響を明らかにする。

なお、解析は二種類の手法を用いて行った。一つは 4.2 節で述べるモンテカルロ・シミュレーション法⁽⁹⁴⁾であり、もう一つは 4.3 節にて述べる摂動法⁽⁹⁵⁾である。前者は一種の数値実験法で、確率変数の個数や相関の有無に関係なく解析が可能という特長を有するが、計算効率が非常に低いという欠点をもつ。一方、後者は相関を持つ確率変数を多く含む大規模な系には適用困難であり、確率変数のバラツキ幅が小さい†場合にのみ精度良い結果をもたらす近似解析法であるが、数値計算が容易で計算効率が高い。

4.2 モンテカルロ・シミュレーション法による解析

4.2.1 解析モデル

熱伝導率 λ 、密度 ρ 、比熱 c 、ヤング率 E 、および線膨張係数 α が、図 4-1 の z 軸方向にのみ任意に変化する厚さ d の FGM 無限平板を考える。この FGM 平板は、熱伝導率と線膨張係数に確率場とみなせる不確定性を含んでいるものとする。物性値の温度依存性が無視でき、かつ内部熱発生がないものとするれば、この FGM 平板に対する一次元非定常熱伝導問題の支配方程式は次式で表される。

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda(z, \varpi) \frac{\partial T}{\partial z} \right] = \rho(z) c(z) \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.1)$$

* 不確実な物性値が空間的に相関を持たない場合、つまり、帯域制限されたホワイトノイズ確率場を扱っている。

† 正確には“確率変数の平均値に対する変動量が小さい”である。

ここで、 T は温度、 t は時間、 ω は確率変数である。 z 軸方向への任意の不均質性に対して、式(4.1)の厳密解を得ることは非常に困難であるため、図4-1のようにFGM平板を板厚方向へ仮想的に n 層に分割し、各層における物性値を相異なる一定値と近似する。この近似により、確率場も連続的なものから離散的なもの、つまり離散座標の確率場へと変換される。平板の初期温度は一様に0であるとし、ある時刻から平板の $z=0$ と $z=d$ の境界面に接する温度がそれぞれ、 $\phi(t)$ 、 $\psi(t)$ になるものとする。平板表面の熱伝達率は h_t と h_b で与える。また、 n 層に分割された平板内の仮想界面の座標値を $b_i (i=1, 2, \dots, n-1)$ とする。平板は板厚方向に平面応力状態にあり、さらに周囲から何の拘束も受けない純熱応力問題を考えている。

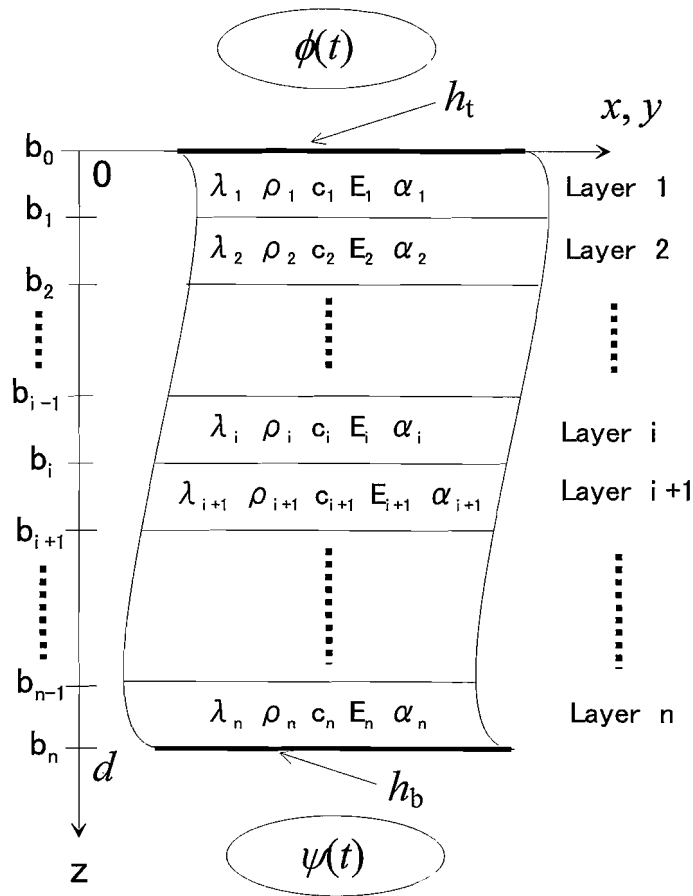


Fig. 4-1 Analytical model for an FGM infinite plate

次に、確率量を有する物体の熱伝導・熱応力問題を考えるにあたり、文献⁽³⁸⁾と同様に、不確定性をもつ熱伝導率と線膨張係数を以下のように仮定する。

(i) 確率量 λ_i と α_i は確定量 R_i, A_i と確率変動量 r_i, a_i との和で与えられるものとする。すなわち、

$$\lambda_i = R_i + r_i, \quad \alpha_i = A_i + a_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.2)$$

ここに, r_i, a_i は平均値 0 とする.

(ii) 確率変動量 r_i と a_i の相関係数 ρ_{rr}^* , ρ_{aa}^* , ρ_{ra}^* は, 離散座標のマルコフ確率場として次のような指数関数で表現する.

$$\begin{aligned}\rho_{rr}^*(p, q) &= \frac{E[r_p r_q]}{S[r_p] \cdot S[r_q]} = \exp[-B_1 | p - q |], \\ \rho_{aa}^*(p, q) &= \frac{E[a_p a_q]}{S[a_p] \cdot S[a_q]} = \exp[-B_2 | p - q |], \\ \rho_{ra}^*(p, q) &= \frac{E[r_p a_q]}{S[r_p] \cdot S[a_q]} = C_1 \cdot \exp[-B_3 | p - q |] \quad p, q = 1, 2, \dots, n\end{aligned}\quad (4.3)$$

ここで, $E[\cdot]$ は期待値演算子であり, $S[\cdot]$ は標準偏差である. また B_i ($i = 1, 2, 3$) は相関性の強さによって決定される正の定数である. 一方, C_1 も同様に相関性の強さを表す定数であるが, $-1 \leq C_1 \leq 1$ の制約がある. 式(4.3)は上から, 熱伝導率の自己相関性, 線膨張係数の自己相関性, 熱伝導率と線膨張係数の相互相関性を表している.

4.2.2 モンテカルロ・シミュレーション法

本解析法は, 式(4.2)の確率変動量 r_i と a_i を成分にもつベクトル $\mathbf{r} = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$, $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ を数多く作り出し, 各 \mathbf{r}, \mathbf{a} に対応する熱伝導率と線膨張係数をもつ FGM 平板の温度および熱応力を求め, 所要の統計量を得る方法である. サンプル数, すなわちシミュレーションの繰り返し回数が大きいほど, 得られた温度および熱応力の統計量は真の値に近づく. また, r_i, a_i ($i = 1, 2, \dots, n$) なる確率量の確率分布関数は任意に仮定できる.

以下に, 相互に相関をもつ複数の確率変動量 r_i, a_i の発生方法⁽⁹⁶⁾について説明する. 初めに, 式(4.3)を用いて次に示す($2n \times 2n$)の相関マトリックス \mathbf{H} を作る.

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} E[r_p r_q] & E[r_p a_q] \\ E[a_p r_q] & E[a_p a_q] \end{bmatrix}; \quad p, q = 1, 2, \dots, n \quad (4.4)$$

ここで対角線上の要素は r_i および a_i の分散であり, 非対角要素は互いの相関を示す共分散である. 次に, 平均値 0 かつ分散 1 の任意の確率分布に従う, 互いに独立な $2n$ 個の要素よりなるベクトル \mathbf{w} を作り出す. すなわち, $[\]^T$ を転置行列記号とすれば

$$\mathbf{w} = [w_1 \quad w_2 \quad \dots \quad w_n \quad w_{n+1} \quad \dots \quad w_{2n}]^T \quad (4.5)$$

このベクトル \mathbf{w} を線形変換することにより, 式(4.3)を満足する r_i, a_i なる確率変動量を求めることができる. ここで, 次のような線形変換子を考える.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{1,1} & & & 0 \\ C_{2,1} & C_{2,2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ C_{2n,1} & \cdots & \cdots & C_{2n,2n} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

この線形変換子を使うと、 r_i, a_i は次のように表せる。

$$\mathbf{v} = [r_1 \ r_2 \ \cdots \ r_n \ a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n]^T = \mathbf{C}\mathbf{w} \quad (4.7)$$

したがって、

$$\mathbf{v}\mathbf{v}^T = \mathbf{C}\mathbf{w}\mathbf{w}^T\mathbf{C}^T \quad (4.8)$$

両辺の期待値をとると、

$$\mathbf{E}[\mathbf{v}\mathbf{v}^T] = \mathbf{C}\mathbf{E}[\mathbf{w}\mathbf{w}^T]\mathbf{C}^T \quad (4.9)$$

ところで、 $\mathbf{E}[\mathbf{v}\mathbf{v}^T] = \mathbf{H}$ 、 $\mathbf{E}[\mathbf{w}\mathbf{w}^T] = \mathbf{I}$ (Unit matrix) であるから、結局、式(4.9)は次のようになる。

$$\mathbf{H} = \mathbf{C}\mathbf{C}^T \quad (4.10)$$

したがって、式(4.10)を満足する三角マトリックス \mathbf{C} をコレスキー分解を用いて求めれば、式(4.7)より確率変動量 r_i および a_i が求まる。 \mathbf{C} は確定量より構成され、 \mathbf{w} は平均値 0 であるので \mathbf{v} の平均値も当然 0 となっている。したがって、求めた r_i, a_i は目的とした平均値 0 で、かつ式(4.3)を満足する確率変動量となっている。

4.2.3 温度場・熱応力場の解析

FGM 平板の温度および熱応力の解析については、すでに文献に示されている手法^(75, 82)を用いて解析した。一般に FGM 平板の熱応力場は、相異なる均質多層平板で近似することなしに解析可能であるが、ここでは各層における線膨張係数に不確定性を有するものとしているため、熱応力場の解析の際にも FGM 平板を多層平板で近似した。

4.2.4 数値計算結果と考察

4.2.4.1 計算条件の設定

数値計算の一例として、PSZ と SUS304 からなる熱応力緩和型 FGM を取り扱い、FGM 平板の $z = 0$ における境界温度が 0、 $z = d$ の周囲媒体温度が T_{ref} で与えられた場合を考察する。解析の一般性を考慮して次式の無次元量を導入する。

$$\tau = \frac{\kappa_0 t}{d^2}, \quad \zeta = \frac{z}{d}, \quad \bar{b}_i = \frac{b_i}{d}, \quad B_t = \frac{h_t d}{\lambda_0}, \quad B_b = \frac{h_b d}{\lambda_0}, \quad \Theta_i = \frac{T_i}{T_{\text{ref}}},$$

$$\bar{\sigma}_i = \frac{\sigma_i(1-\nu_0)}{E_0\alpha_0 T_{ref}}, \quad \bar{r}_i = \frac{r_i}{\lambda_0}, \quad \bar{a}_i = \frac{a_i}{\alpha_0}, \quad \bar{R}_i = \frac{R_i}{\lambda_0}, \quad \bar{A}_i = \frac{A_i}{\alpha_0},$$

$$S[\bar{r}_i] = \sqrt{E[\bar{r}_i^2]}, \quad S[\bar{a}_i] = \sqrt{E[\bar{a}_i^2]} \quad (4.11)$$

ここで、 $\lambda_0, E_0, \alpha_0, \nu_0, \kappa_0$ はそれぞれ、SUS304の熱伝導率、ヤング率、線膨張係数、ポアソン比、熱拡散率である。また、 σ_i は第*i*層の面内応力を意味する。PSZとSUS304の物性値は第2章の表2.1に示されている。

傾斜組成の種類に解析上の制限はないが、本節では、図4.2に示すように金属100%からセラミック100%まで組成が直線的に変化するLinear、これよりセラミックの体積比率を多くしたCeramic rich、逆に少なくしたCeramic poorの3種類について数値計算を行った。ここで、組成がCeramic richとCeramic poorの場合に対応する板厚方向へのPSZの体積分率 $f_{PSZ}(\zeta)$ は、無次元座標 ζ のベキ乗関数とし、次式で定義した。

$$f_{PSZ}(\zeta) = 1 - (1 - \zeta)^3 \quad (\text{Ceramic rich}) \quad (4.12)$$

$$f_{PSZ}(\zeta) = \zeta^3 \quad (\text{Ceramic poor}) \quad (4.13)$$

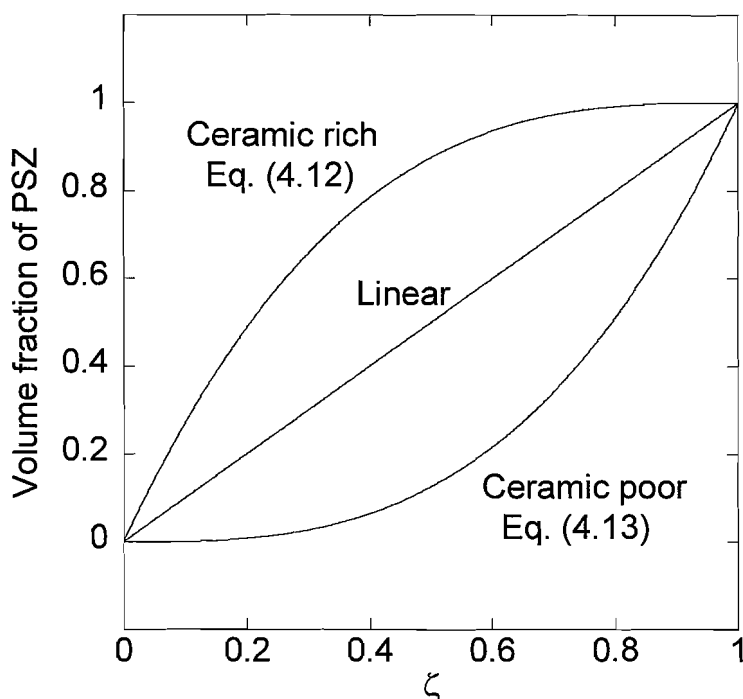


Fig. 4.2 Composition distribution of PSZ in FGM plates

各材料組成分布に対する FGM の材料特性は、ポアソン比は一定値(0.3)、密度と比熱は線形複合則より算出し、それ以外は母層内に球状粒子が分散しているとした Mori-Tanaka の理論⁽⁸¹⁾を用い、さらに中間層においては、母相と分散相の識別にファジィ推論⁽⁸²⁾を併用して算出した。この算出方法の詳細については付録 B を参照のこと。また、数値計算諸元として次の値を採用した。

$$B_1 = \infty, \quad B_0 = 0.1, \infty, \quad n = 10 \quad (4.14)$$

物性値のバラツキの例としては、表 4-1 に示す 2 種類を用意した。表中の変数 V は確率量 \bar{r}_i, \bar{a}_i の標準偏差 $S[\bar{r}_i], S[\bar{a}_i]$ と平均値 \bar{R}_i, \bar{A}_i との比であり、物性値の相対的なバラツキの程度を示す変動係数である。本数値計算では、確率量 \bar{r}_i, \bar{a}_i の確率分布関数に正規分布を採用した。

Table 4-1 Input parameters adopted in numerical computation

Example-1	$V = S[\bar{r}_i]/\bar{R}_i = S[\bar{a}_i]/\bar{A}_i = 0.07$ $B_i = 2.0; i = 1, 2, 3$ $C_1 = 0.8$
Example-2	\bar{r}_i, \bar{a}_i ; having the distribution of standard deviation shown in Fig. 4-3 $B_i = 0.02, 0.2, 2.0; i = 1, 2, 3$ $C_1 = 0, 0.8$

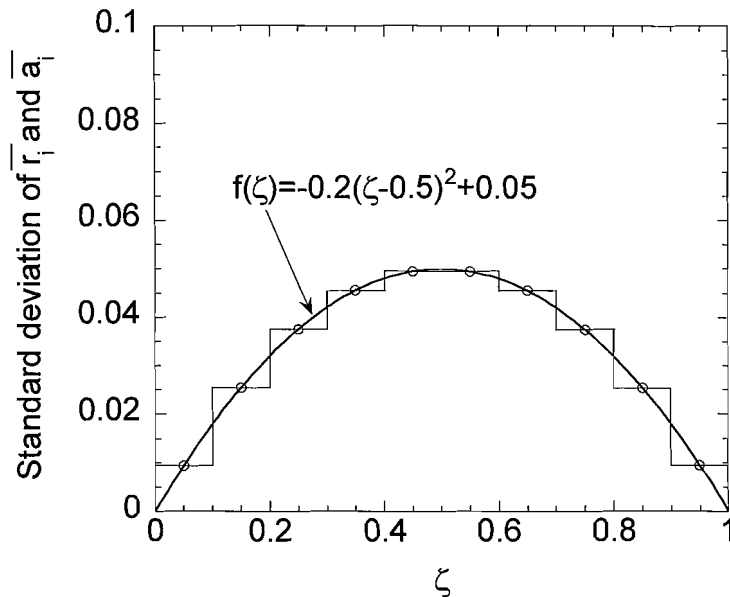


Fig. 4-3 Standard deviations of thermal conductivity and coefficient of linear thermal expansion in each layer for example-2

計算例1は、FGMを構成する2つの材料そのものの物性値がばらついている場合を想定している。鋼材の機械的性質などのバラツキの指標として、文献^(97, 98)では変動係数が採用されている。一方、一般に物性値のバラツキが大きいセラミックについて、物性値のバラツキの指標は変動係数で与えられるとは限らないが、ここでは鋼材と同様に変動係数で与えられるものと仮定した。

計算例2は、以下のような物性値のバラツキ傾向を模擬する理由から設定した。一般に合成法によらずFGMの物性値は、2つの構成材料の体積分率が50%-50%に近いところで大きくばらつく傾向がある。これは、FGMを構成する2つの材料の体積分率が同程度の領域では、微視構造がネットワーク構造になり⁽⁹⁹⁾、その微視構造は個々のFGMごとにばらつき、非常に不安定であることに起因する。正確には図4-2のLinear, Ceramic rich, Ceramic poorの各組成分布ごとに、2つの構成材料の体積分率が50%-50%になる位置が異なるが、ここでは簡単化のため、いずれの組成分布においてもLinearの場合と同様、板厚中央部でバラツキが最も大きくなるように設定した。

これら2つの計算例における確率量の標準偏差分布の影響をみるため、FGM平板の傾斜組成分布はLinear、繰り返し回数を100としたシミュレーションを行い、熱伝導率のバラツキの様子を比較した。各計算例の条件に沿って発生させた熱伝導率のバラツキを図4-4と図4-5に示す。これらの図より、計算例1では熱伝導率が大きい場所において、計算例2では板厚中央付近で、それぞれバラツキが大きくなることがわかる。図示していないが、線膨張係数についても各計算例において熱伝導率と同様の傾向を示した。

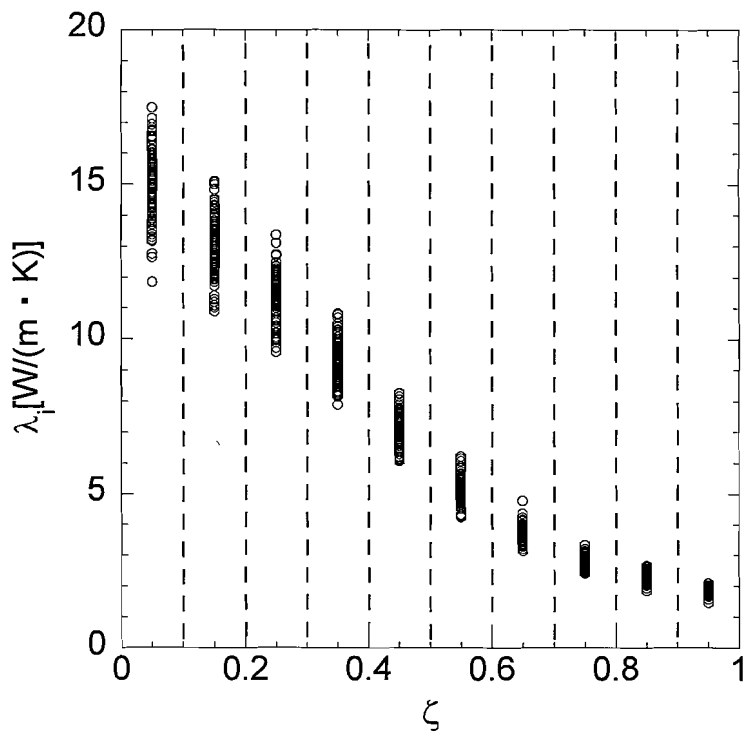


Fig. 4-4 Thermal conductivities in each layer generated for example-1

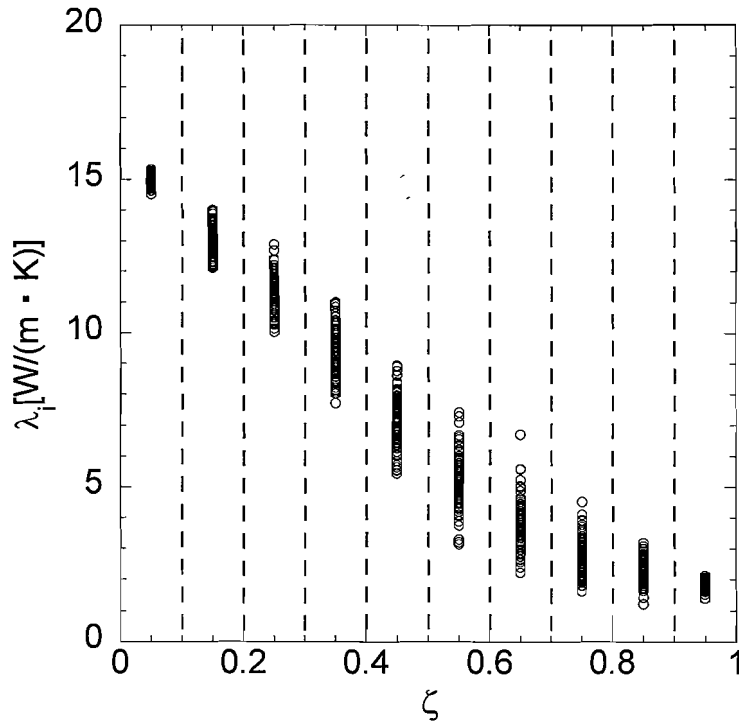


Fig. 4-5 Thermal conductivities in each layer generated for example-2

4.2.4.2 シミュレーション回数の検討

計算例2で傾斜組成をLinearとした場合について、シミュレーション回数に対する統計量の収束挙動を調べた。計算に用いた相関係数パラメータと加熱面のビオー数は、 $B_1 = B_2 = B_3 = 2.0$, $C_1 = 0.8$, $B_0 = \infty$ である。シミュレーションを繰り返し回数500まで行い、その結果を図4-6～図4-9に示した。図4-6, 図4-8はそれぞれ、横軸にシミュレーションの繰り返し回数を、縦軸に定常温度場での $\zeta = 0.4$ と 0.8 の位置における温度、熱応力の平均値をとっている。図4-7, 図4-9においては、横軸にシミュレーションの繰り返し回数を、縦軸にそれぞれ定常時における同位置での温度、熱応力の標準偏差をとっている。

図4-6, 図4-8からわかるように、平均値の変動は繰り返し回数が250を超えると0.5%以内であり、ほぼ一定とみてさしつかえないだろう。一方、図4-7からわかるように、標準偏差は温度についてみると300回程度まではかなりの変動を示している。このことから、シミュレーションの繰り返し回数は300以上とすべきである。もちろん、回数が多いほど正確にはなるが、計算時間との関係から、あまり繰り返し回数を多くすることは得策ではない。そこで本節では、シミュレーションの回数を400として計算を行った。

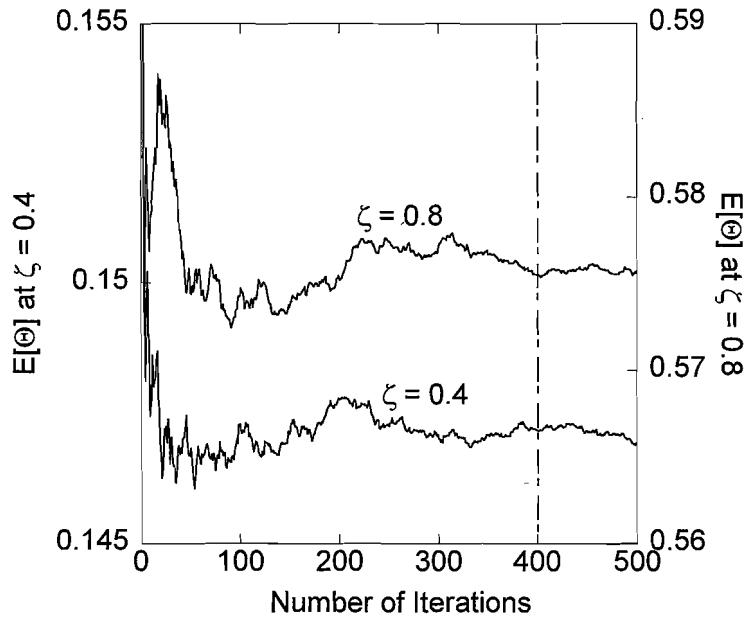


Fig. 4.6 Convergence check of the mean values of steady-state temperature

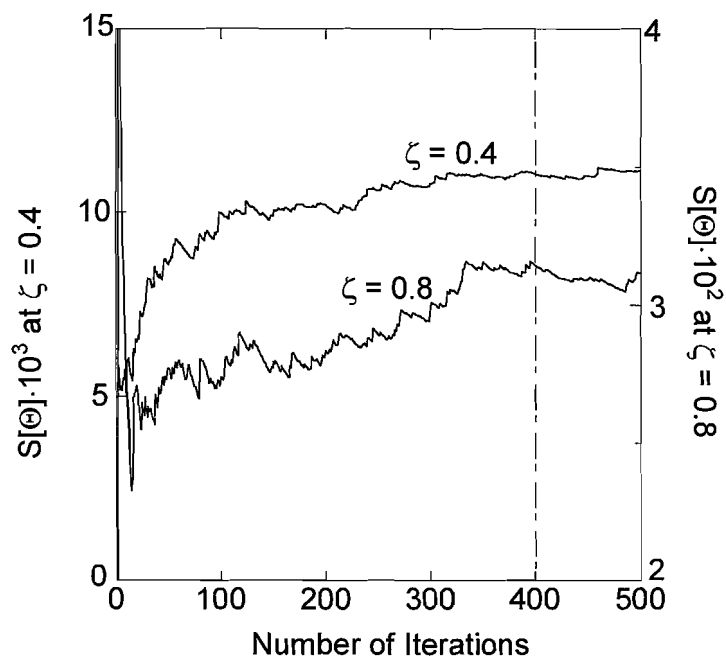


Fig. 4.7 Convergence check of the standard deviations of steady-state temperature

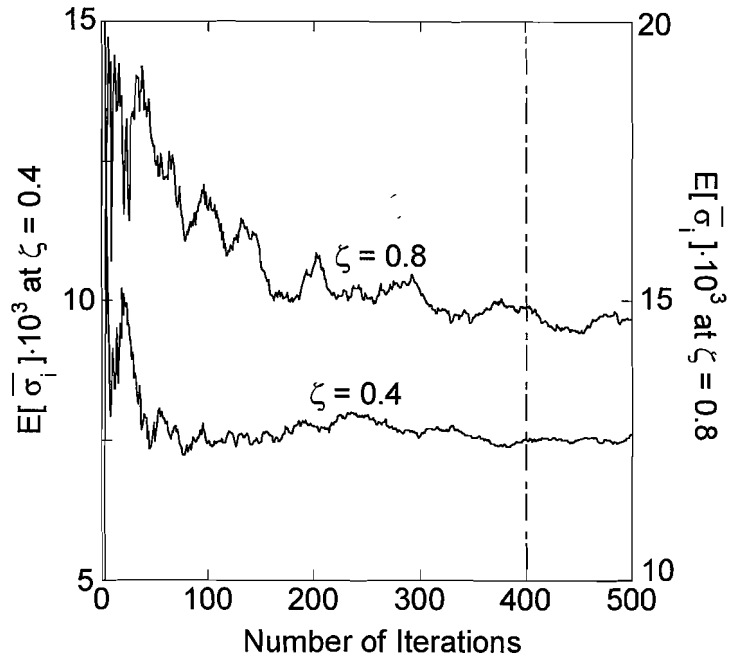


Fig. 4-8 Convergence check of the mean values of steady-state thermal stress

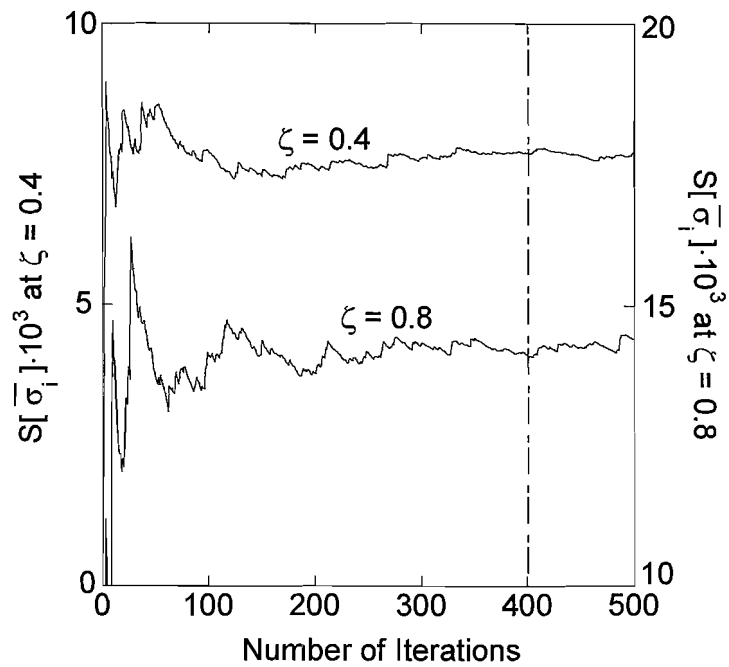


Fig. 4-9 Convergence check of the standard deviations of steady-state thermal stress

4.2.4.3 温度および熱応力の標準偏差分布とその考察

はじめに, FGM 平板の傾斜組成分布とシミュレーションによって得られた温度・熱応力の標準偏差との関係を計算例 1 について考察する. 図 4-10, 図 4-11 は横軸に無次元板厚座標, 縦軸にそれぞれ温度と熱応力の標準偏差をとったものである. Ceramic poor 型傾斜組成とした場合, 定常時, $\zeta=0.9$ 付近で温度, 熱応力とも大きな標準偏差値を示している. これは, セラミックが少なければ材料の熱伝導率と線膨張係数が大きくなるため, 物性値のバラツキ具合がその物性値の大きさに依存する計算例 1 (図 4-4) では, Ceramic poor で相対的にバラツキが大きくなるからである. なお, 熱応力の標準偏差がなめらかでないのは, FGM 平板を積層体で近似して階段状に変化する組成を与えたため, 界面で組成が連続していないことに起因する. 非定常時についてみると, $\tau=0.1$ での温度の標準偏差の最大値が定常時のそれを上回っている. しかし, 熱応力の標準偏差は, 時間の経過とともに単純に増加する傾向が見られる.

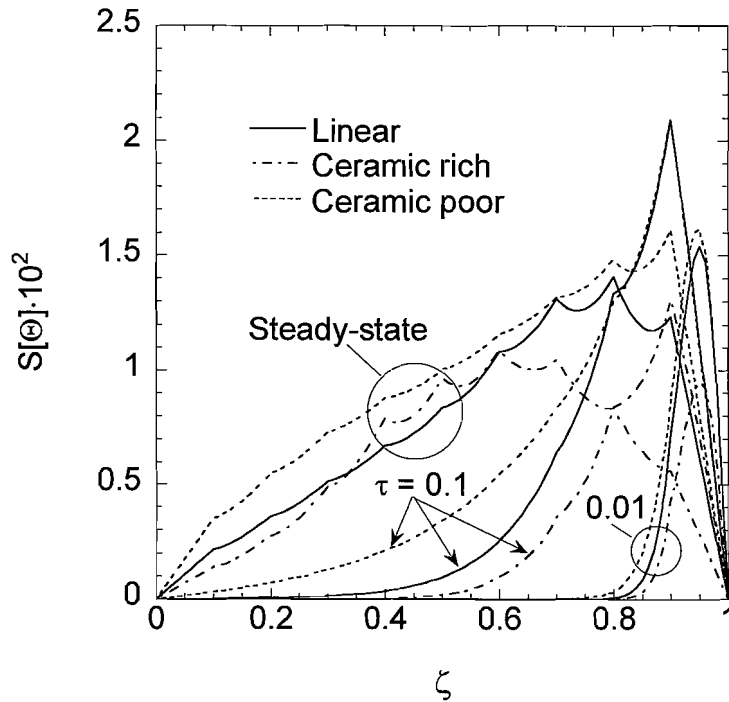


Fig. 4-10 Standard deviation of transient temperature for example-1 with $B_0 = \infty$

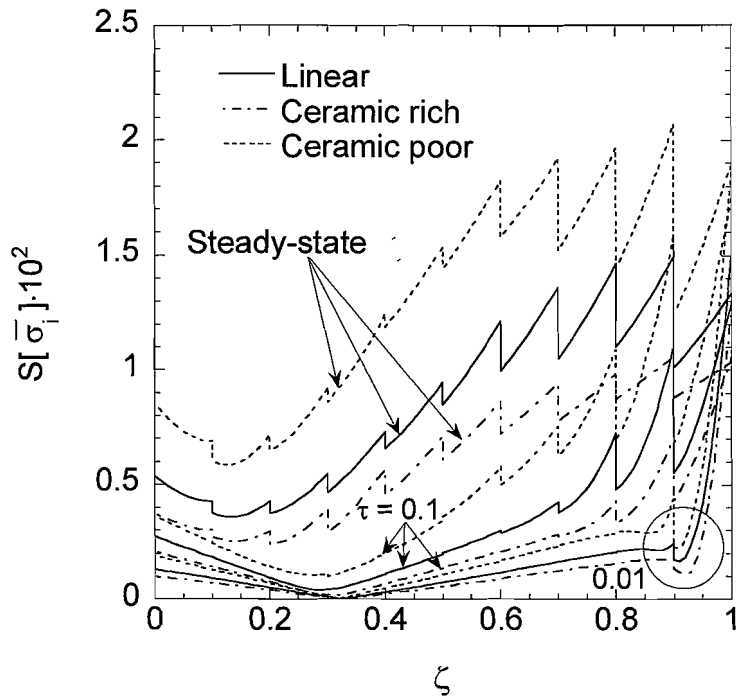


Fig. 4.11 Standard deviation of transient thermal stress for example-1 with $B_b = \infty$

次に計算例2について、温度および熱応力の標準偏差に及ぼす傾斜組成分布、加熱面のビオ一数、相関パラメータの影響を考察する。図4.12、図4.13に、加熱面の境界条件を温度指定で与えた場合の計算結果を示す。定常時において、温度・熱応力ともに Ceramic rich の場合に最も大きい標準偏差値を示している。一方、非定常時では組成分布による差は小さいが、逆に Ceramic rich の場合に最も小さくなっている。これは経過時間が小さい場合、遮熱性の高い Ceramic rich では、ほかの2つの傾斜組成に比べて熱が板内部まで伝導せず、温度・熱応力の標準偏差に及ぼす物性値のバラツキの影響が顕在化しないからである。また、図4.10, 4.11と比較すると、計算例2の方が計算例1よりも標準偏差値が全体的に高い。これは、図4.5のように計算例2の方が、より加熱面に近い場所で物性値のバラツキが大きいことに起因すると考える。

図4.14は、周囲媒体との熱伝達を考慮して、加熱面のビオ一数を0.1とした場合の熱応力の標準偏差分布である。図4.13と比較すると、分布の傾向はほぼ同じであるが、値そのものは全体的に低い。これはビオ一数が大きいほど平板への流入熱量が多くなり、内部の温度上昇が促進され、物性値のバラツキが熱応力の標準偏差分布に及ぼす影響が大きくなるからである。

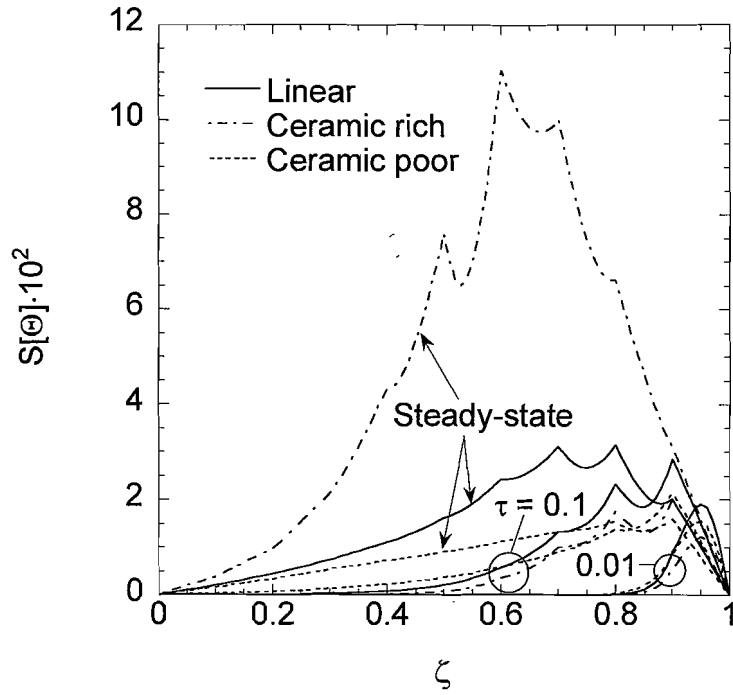


Fig. 4-12 Standard deviation of transient temperature for example-2 with $B_b = \infty, B_1 = B_2 = B_3 = 2$ and $C_1 = 0.8$

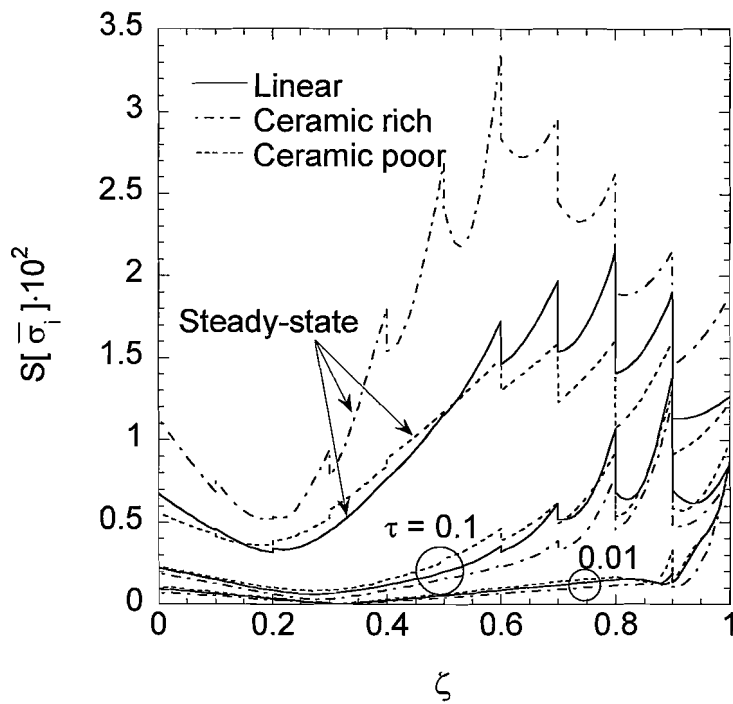


Fig. 4-13 Standard deviation of transient thermal stress for example-2 with $B_b = \infty, B_1 = B_2 = B_3 = 2$ and $C_1 = 0.8$

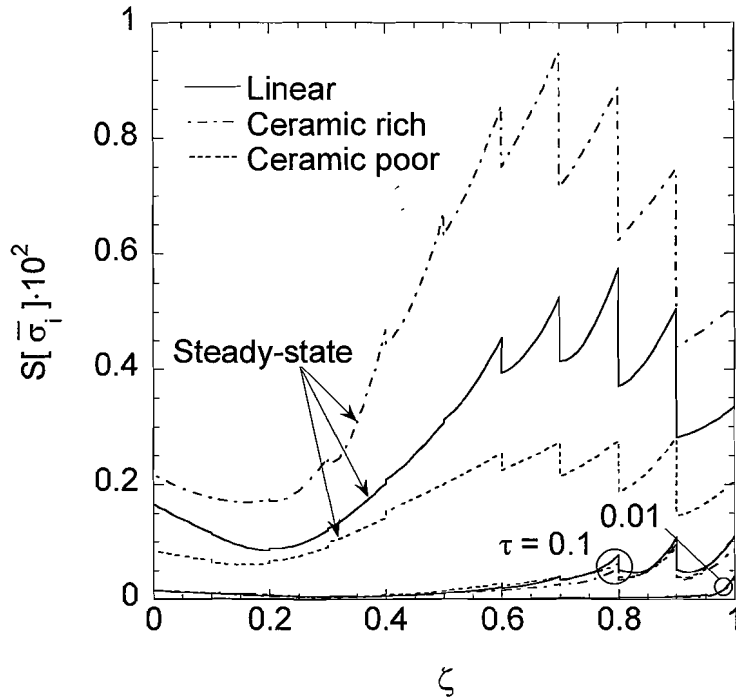


Fig. 4-14 Standard deviation of transient thermal stress due to convective heating for example-2
with $B_0 = 0.1, B_1 = B_2 = B_3 = 2$ and $C_1 = 0.8$

図4-15は、材料組成を Ceramic rich とした場合の定常温度の標準偏差分布である。パラメータとして、熱伝導率の自己相関性を支配する B_1 をとった。図より、 B_1 が大きくなると標準偏差値が減少している。 B_1 の増大は、熱伝導率の自己相関性が低下することを意味する。

図4-16は、同じく材料組成を Ceramic rich とした場合の熱応力の標準偏差分布である。図中の表に示すように、相関パラメータの組み合わせを5種類考え、それぞれに対して計算を行った。まず Case 1 と Case 2 を比較すると、線膨張係数の自己相関性が弱い Case 1 の方が標準偏差値が平板内部で大きくなっている。一方、加熱面近傍と低温側では Case 2 が Case 1 を上回っている。温度の場合、熱伝導率の自己相関性が弱まると標準偏差値も減少するのに対し、熱応力の場合、線膨張係数の自己相関性が弱まると標準偏差値は逆に増大することがわかる。次に、熱伝導率と線膨張係数の相互相関の影響をみるため、Case 1 と Case 3, 4, 5 を比較する。Case 4 と Case 5 は、相互相関を無視している Case 1 より板厚全域で標準偏差値が小さい。また、Case 1 と Case 3 では分布がほぼ一致している。このことから、熱伝導率と線膨張係数の相互相関は熱応力の標準偏差を低下させるが、その低下の程度はパラメータ B_3 に依存し、 B_3 が小さいほど標準偏差値は小さくなる。また、 B_3 が比較的大きければ、熱伝導率と線膨張係数の相互相関は熱応力の標準偏差に影響しない。

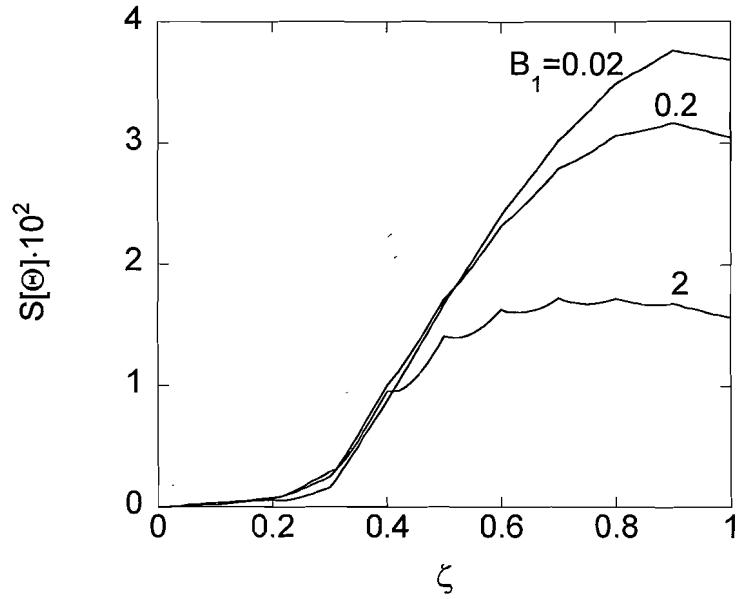


Fig. 4-15 Relationship between correlation parameter B_1 and standard deviation of steady-state temperature, for $B_0 = 0.1$ and $C_1 = 0$

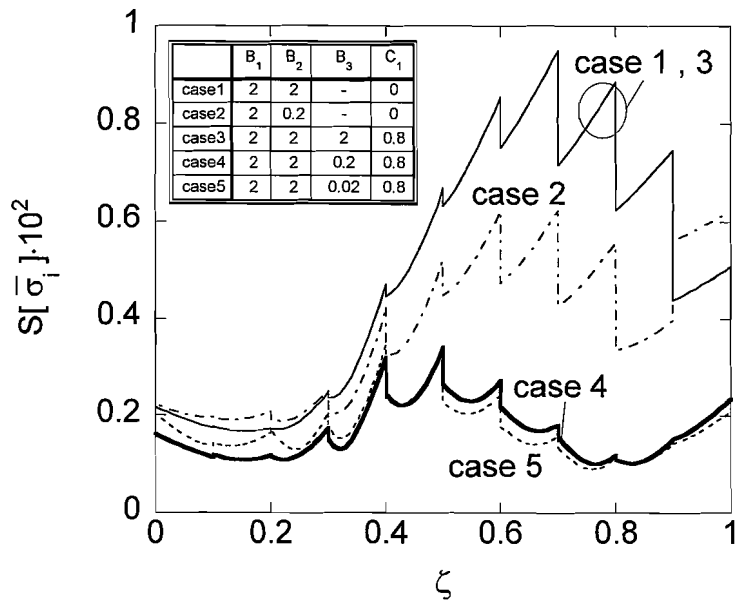


Fig. 4-16 Effect of correlation parameters on standard deviation of steady-state thermal stress for $B_0 = 0.1$

4.3 摂動法による解析

本節では、4.2節と同様に、熱伝導率と線膨張係数が確率場として平均値まわりにランダムにばらついている FGM 無限平板が、その表面に対流加熱を受ける場合において、温度と熱応力の統計量（平均と分散）を摂動法により解析的に求める方法について示す。

4.3.1 解析モデル

解析モデルは 4.2.1 節と同様に、板厚方向へ物性値がなめらかに変化する FGM 平板を、解析的処理を容易にするために積層体で近似した、いわゆる「多層平板モデル（図 4-1）」を用いる。初期条件、熱的・力学的境界条件は 4.2.1 節で述べたとおりである。また、式(4.2)、(4.3)で表される仮定(i)、(ii)を本節でも同様に導入する。さらに、次の仮定を追加する。

(iii) 確率変動量 r_i, a_i は、それぞれ R_i, A_i と比べて十分に小さな値である。

4.3.2 解析

4.3.2.1 温度場

図 4-1 に示される FGM 多層平板の非定常熱伝導問題は、式(4.2)を考慮することで次のように定式化される。

$$(R_i + r_i) \frac{\partial^2 T_i}{\partial z^2} = \rho_i c_i \frac{\partial T_i}{\partial t}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.15)$$

$$T_i = 0, \quad \text{at } t = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.16)$$

$$(R_1 + r_1) \frac{\partial T_1}{\partial z} - h_1 [T_1 - \phi(t)] = 0, \quad \text{at } z = b_0 = 0 \quad (4.17)$$

$$(R_n + r_n) \frac{\partial T_n}{\partial z} + h_b [T_n - \psi(t)] = 0, \quad \text{at } z = b_n = d \quad (4.18)$$

$$T_i = T_{i+1}, \quad \text{at } z = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (4.19)$$

$$(R_i + r_i) \frac{\partial T_i}{\partial z} = (R_{i+1} + r_{i+1}) \frac{\partial T_{i+1}}{\partial z}, \quad \text{at } z = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (4.20)$$

ここで r_i ($i = 1, 2, \dots, n$) が確率変数であるため、温度場を決定論的に評価するのは不可能で、統計的に評価しなければならない。仮定(iii)より、式(4.15)–(4.20)の方程式系を解くために摂動法を適用できる。したがって本節では、温度場の統計量として平均と分散を摂動法により解析的に導出する。式(4.15)–(4.20)の方程式系の解を r_i ($i = 1, 2, \dots, n$) について摂動展開すれば

$$T_i(z, t) = T_{i0}(z, t) + \sum_{x=1}^{\infty} \sum_{s=1}^n T_{ixs}(z, t) r_s^x \quad (4.21)$$

式(4.21)において r_s ($s = 1, 2, \dots, n$) の2次以上の項を無視することで、次式のような線形化を行う。

$$T_i(z, t) \cong T_{i0}(z, t) + \sum_{s=1}^n T_{ils}(z, t) r_s \quad (4.22)$$

これは近似解を与えることになり、 λ_i の変動係数 $S[r_i]/R_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) が十分に小さい場合に良い精度が得られる。式(4.22)を式(4.15)–(4.20)に代入し、 r_s の各次数について等置すれば、 r_s の0次の方程式系と1次の方程式系が以下のように得られる。

4.3.2.1.1 0次の方程式系

0次の方程式系は次のように得られる。

$$R_i \frac{\partial^2 T_{i0}}{\partial z^2} = \rho_i c_i \frac{\partial T_{i0}}{\partial t}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.23)$$

$$T_{i0} = 0, \quad \text{at } t = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.24)$$

$$R_1 \frac{\partial T_{10}}{\partial z} - h_1 [T_{10} - \phi(t)] = 0, \quad \text{at } z = b_0 = 0 \quad (4.25)$$

$$R_n \frac{\partial T_{n0}}{\partial z} + h_n [T_{n0} - \psi(t)] = 0, \quad \text{at } z = b_n = d \quad (4.26)$$

$$T_{i0} = T_{(i+1)0}, \quad \text{at } z = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (4.27)$$

$$R_i \frac{\partial T_{i0}}{\partial z} = R_{i+1} \frac{\partial T_{(i+1)0}}{\partial z}, \quad \text{at } z = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (4.28)$$

式(4.23)–(4.28)の方程式系は、 n 層からなる複合領域に対する一般的な非定常熱伝導問題を表している。この問題の解は Vodicka⁽⁸⁶⁾, Olcer⁽¹⁰⁰⁾, Mikhailov⁽¹⁰¹⁾, Ozisik⁽¹⁰²⁾によって既に導出されているため、ここではその解の誘導過程を省略する。

4.3.2.1.2 1次の方程式系

1次の方程式系は次のように得られる。

$$R_i \frac{\partial^2 T_{ils}}{\partial z^2} + \delta_{is} \frac{\partial^2 T_{i0}}{\partial z^2} = \rho_i c_i \frac{\partial T_{ils}}{\partial t}, \quad i, s = 1, 2, \dots, n \quad (4.29)$$

$$T_{ils} = 0, \quad \text{at } t = 0, \quad i, s = 1, 2, \dots, n \quad (4.30)$$

$$R_1 \frac{\partial T_{11s}}{\partial z} + \delta_{1s} \frac{\partial T_{10}}{\partial z} - h_1 T_{11s} = 0, \quad \text{at } z = b_0 = 0, \quad s = 1, 2, \dots, n \quad (4.31)$$

$$R_n \frac{\partial T_{n1s}}{\partial z} + \delta_{ns} \frac{\partial T_{n0}}{\partial z} + h_b T_{n1s} = 0, \quad \text{at } z = b_n = d, \quad s = 1, 2, \dots, n \quad (4.32)$$

$$T_{i1s} = T_{(i+1)1s}, \quad \text{at } z = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad s = 1, 2, \dots, n \quad (4.33)$$

$$R_i \frac{\partial T_{i1s}}{\partial z} + \delta_{is} \frac{\partial T_{i0}}{\partial z} = R_{i+1} \frac{\partial T_{(i+1)1s}}{\partial z} + \delta_{(i+1)s} \frac{\partial T_{(i+1)0}}{\partial z},$$

$$\text{at } z = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad s = 1, 2, \dots, n \quad (4.34)$$

ここで、 δ_{ij} はクロネッカー・デルタである。この方程式系の解は、一種の積分変換法に相当する Vodicka の手法を拡張して用いることで、次式のように得られる。Vodicka の手法の詳細については文献⁽⁸⁶⁾を参照のこと。

$$T_{i1s}(z, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_{ms}(t) X_{im}(z) + \sum_{j=1}^{n+1} L_{ij}(z) \Gamma_{js}(t), \quad i, s = 1, 2, \dots, n \quad (4.35)$$

ここで、

$$L_{ij}(z) = C_{ij}z + D_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, n+1 \quad (4.36)$$

$$\Gamma_{1s}(t) = -\delta_{1s} \frac{\partial T_{10}(0, t)}{\partial z}, \quad s = 1, 2, \dots, n \quad (4.37a)$$

$$\Gamma_{(n+1)s}(t) = -\delta_{ns} \frac{\partial T_{n0}(d, t)}{\partial z}, \quad s = 1, 2, \dots, n \quad (4.37b)$$

$$\Gamma_{js}(t) = -\delta_{(j-1)s} \frac{\partial T_{(j-1)0}(b_{j-1}, t)}{\partial z} + \delta_{js} \frac{\partial T_{j0}(b_{j-1}, t)}{\partial z}, \quad j = 2, 3, \dots, n, \quad s = 1, 2, \dots, n \quad (4.37c)$$

式(4.36)に含まれる未知係数 C_{ij}, D_{ij} は次の関係式から決定される。

$$R_1 \frac{dL_{1j}(0)}{dz} - h_t L_{1j}(0) = \delta_{1j}, \quad R_n \frac{dL_{nj}(d)}{dz} + h_b L_{nj}(d) = \delta_{(n+1)j},$$

$$L_{ij}(b_i) = L_{(i+1)j}(b_i), \quad R_i \frac{dL_{ij}(b_i)}{dz} - R_{i+1} \frac{dL_{(i+1)j}(b_i)}{dz} = \delta_{(i+1)j},$$

$$i = 1, 2, \dots, n-1, \quad j = 1, 2, \dots, n+1 \quad (4.38)$$

$X_{im}(z)$ は式(4.29)と式(4.31)–(4.34)に対応する固有値問題の解であり、次式で与えられる。

$$X_{im}(z) = A_{im} \cos \left(\frac{\gamma_m z}{\sqrt{\kappa_i}} \right) + B_{im} \sin \left(\frac{\gamma_m z}{\sqrt{\kappa_i}} \right) \quad (4.39)$$

ここで、 κ_i は $\kappa_i = R_i/(\rho_i c_i)$ で定義される熱拡散率、 γ_m は固有値である。未知係数 A_{im}, B_{im} の決定に必要な条件式は、式(4.35)–(4.39)を式(4.31)–(4.34)に代入することで次のように得られる。

$$\begin{aligned} \frac{dX_{1m}(0)}{dz} - \frac{h_t}{R_1} X_{1m}(0) &= 0, & \frac{dX_{nm}(d)}{dz} + \frac{h_b}{R_n} X_{nm}(d) &= 0, \\ X_{im}(b_i) &= X_{(i+1)m}(b_i), & R_i \frac{dX_{im}(b_i)}{dz} &= R_{i+1} \frac{dX_{(i+1)m}(b_i)}{dz}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (4.40)$$

固有値 γ_m ($m = 1, 2, \dots$)は、未知係数 A_{im}, B_{im} が0以外の解をもつための条件から決定でき、次式の超越方程式の正根として得られる。

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 \cdots \mathbf{E}_{n-1} \cdot \mathbf{a} = 0, \quad (4.41)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \begin{bmatrix} -\frac{h_t}{R_1} & \frac{\gamma_m}{\sqrt{\kappa_1}} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{E}_i &= \begin{bmatrix} R_i \frac{\gamma_m}{\sqrt{\kappa_i}} \cos\left(\frac{\gamma_m}{\sqrt{\kappa_i}} b_i\right) & -\sin\left(\frac{\gamma_m}{\sqrt{\kappa_i}} b_i\right) \\ R_i \frac{\gamma_m}{\sqrt{\kappa_i}} \sin\left(\frac{\gamma_m}{\sqrt{\kappa_i}} b_i\right) & \cos\left(\frac{\gamma_m}{\sqrt{\kappa_i}} b_i\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\gamma_m}{\sqrt{\kappa_{i+1}}} b_i\right) & \sin\left(\frac{\gamma_m}{\sqrt{\kappa_{i+1}}} b_i\right) \\ -R_{i+1} \frac{\gamma_m}{\sqrt{\kappa_{i+1}}} \sin\left(\frac{\gamma_m}{\sqrt{\kappa_{i+1}}} b_i\right) & R_{i+1} \frac{\gamma_m}{\sqrt{\kappa_{i+1}}} \cos\left(\frac{\gamma_m}{\sqrt{\kappa_{i+1}}} b_i\right) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{a} &= \begin{bmatrix} \frac{\gamma_m}{\sqrt{\kappa_n}} \cos\left(\frac{\gamma_m}{\sqrt{\kappa_n}} d\right) + \frac{h_b}{R_n} \sin\left(\frac{\gamma_m}{\sqrt{\kappa_n}} d\right) \\ \frac{\gamma_m}{\sqrt{\kappa_n}} \sin\left(\frac{\gamma_m}{\sqrt{\kappa_n}} d\right) - \frac{h_b}{R_n} \cos\left(\frac{\gamma_m}{\sqrt{\kappa_n}} d\right) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.42)$$

一方、関数 $\Phi_{ms}(t)$ は次のように表される。

$$\Phi_{ms}(t) = \exp(-\gamma_m^2 t) \left\{ g_{ms} + \int_0^t \exp(\gamma_m^2 \tau) \left[q_{ms}(\tau) - \sum_{j=1}^{n+1} l_{mj} \frac{d\Gamma_{js}(\tau)}{d\tau} \right] d\tau \right\} \quad (4.43)$$

ここで、展開係数 $g_{ms}, q_{ms}(t), l_{mj}$ はそれぞれ

$$g_{ms} = -\frac{\sum_{i=1}^n \frac{R_i}{\kappa_i} \int_{b_{i-1}}^{b_i} \left[\sum_{j=1}^{n+1} L_{ij}(z) \Gamma_{js}(0) \right] X_{im}(z) dz}{\sum_{i=1}^n \frac{R_i}{\kappa_i} \int_{b_{i-1}}^{b_i} [X_{im}(z)]^2 dz}, \quad q_{ms}(t) = \frac{\sum_{i=1}^n \int_{b_{i-1}}^{b_i} \delta_{is} \frac{\partial^2 T_{i0}(z, t)}{\partial z^2} X_{im}(z) dz}{\sum_{i=1}^n \frac{R_i}{\kappa_i} \int_{b_{i-1}}^{b_i} [X_{im}(z)]^2 dz},$$

$$l_{mj} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{R_i}{K_i} \int_{b_{i-1}}^{b_i} L_{ij}(z) X_{im}(z) dz}{\sum_{i=1}^n \frac{R_i}{K_i} \int_{b_{i-1}}^{b_i} [X_{im}(z)]^2 dz} \quad (4.44)$$

4.3.2.1.3 温度の平均と分散

式(4.22)の形で表される温度解 T_i を利用すれば、温度場の平均と分散を容易に計算できる。仮定(i)より $E[r_s] = 0$ であるから、それらは次のように得られる。

$$E[T_i] = T_{i0}(z, t) \quad (4.45)$$

$$\text{Var}[T_i] = E[T_i^2] - \{E[T_i]\}^2 = \sum_{s=1}^n \sum_{x=1}^n T_{ils}(z, t) T_{ilx}(z, t) E[r_s r_x] \quad (4.46)$$

ここで、 $\text{Var}[\cdot]$ は分散を意味する。式(4.46)は式(4.3)を導入することで計算できる。また、標準偏差は分散の平方根として得られる。もし r_s と r_x が $s \neq x$ で互いに独立であるならば、式(4.46)は次式のように単純化される。

$$\text{Var}[T_i] = \sum_{s=1}^n T_{ils}^2(z, t) E[r_s^2] \quad (4.46)'$$

4.3.2.2 熱応力場

温度が板厚座標のみの関数、すなわち $T = T(z)$ の場合、板厚方向に任意の不均質性をもつ不均質平板の熱応力式が Sugano⁽⁷⁵⁾ によって提案されている。したがって、FGM 平板の熱応力場は、その FGM を各層が均質な多層平板で近似しなくとも解析可能である。しかし本章では、各層における線膨張係数に不確定性を有するものと仮定しているため、熱応力場の解析の際にも FGM 平板を多層平板で近似した。ヤング率、線膨張係数、ポアソン比をそれぞれ E , α , ν とすれば、図4.1に示す積層平板の第 i 層における面内応力は次式で与えられる。

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_i(z, t) = \frac{E_i}{1-\nu_i} \left[-\alpha_i T_i(z, t) + \frac{(I_2 z - I_3) I_{F1}(t) + (I_2 - I_1 z) I_{F2}(t)}{I_2^2 - I_1 I_3} \right] \quad (4.47)$$

ここで、板の両表面に外力が作用しないとすれば、 $I_1, I_2, I_3, I_{F1}, I_{F2}$ は次式で与えられる。

$$I_j = \sum_{k=1}^n \int_{b_{k-1}}^{b_k} \frac{z^{j-1} E_k}{1-\nu_k} dz, \quad j = 1, 2, 3,$$

$$I_{Fj}(t) = \sum_{k=1}^n \int_{b_{k-1}}^{b_k} \frac{z^{j-1} E_k \alpha_k}{1-\nu_k} T_k(z, t) dz, \quad j = 1, 2 \quad (4.48)$$

なお、平板に作用する垂直応力 σ_{zz} とせん断応力 $\sigma_{zx}, \sigma_{zy}, \sigma_{xy}$ は 0 である。

式(4.47)の熱応力解には確率量 T_i, α_i が含まれているため、熱応力も統計的に評価する必要がある。そこで、温度場と同様に統計量として平均と分散を導出する。仮定(i)より $E[a_i] = 0$ であるから、熱応力の平均は次式のように表される。

$$E[\sigma_i] = \frac{E_i}{1-\nu_i} \left[-P_i(z, t) + \frac{(I_2 z - I_3)I_{F1}^*(t) + (I_2 - I_1 z)I_{F2}^*(t)}{I_2^2 - I_1 I_3} \right] \quad (4.49)$$

ここで、

$$P_i(z, t) = A_i T_{i0}(z, t) + \sum_{s=1}^n T_{ils}(z, t) E[r_s a_i],$$

$$I_{Fj}^*(t) = \sum_{k=1}^n \int_{b_{k-1}}^{b_k} \frac{z^{j-1} E_k}{1-\nu_k} P_k(z, t) dz, \quad j = 1, 2 \quad (4.50)$$

一方、熱応力の分散は次のように得られる。

$$\text{Var}[\sigma_i] = \left(\frac{E_i}{1-\nu_i} \right)^2 \left\{ W_{1i}(z, t) - \frac{2}{I_2^2 - I_1 I_3} [(I_2 z - I_3)W_{21i}(z, t) + (I_2 - I_1 z)W_{22i}(z, t)] \right. \\ \left. + \frac{1}{(I_2^2 - I_1 I_3)^2} [(I_2 z - I_3)^2 W_{31}(t) + 2(I_2 z - I_3)(I_2 - I_1 z)W_{32}(t) + (I_2 - I_1 z)^2 W_{33}(t)] \right\} \quad (4.51)$$

ここで、

$$W_{1i}(z, t) = A_i^2 \sum_{s=1}^n \sum_{x=1}^n T_{ils}(z, t) T_{ilx}(z, t) E[r_s r_x] + 2A_i T_{i0}(z, t) \sum_{s=1}^n T_{ils}(z, t) E[r_s a_i] + T_{i0}^2(z, t) E[a_i^2] \quad (4.52)$$

$$W_{21i}(z, t) = A_i \sum_{s=1}^n T_{ils}(z, t) \sum_{j=1}^n \int_{b_{j-1}}^{b_j} \frac{E_j A_j}{1-\nu_j} \sum_{x=1}^n T_{j1x}(y, t) E[r_s r_x] dy \\ + A_i \sum_{s=1}^n T_{ils}(z, t) \sum_{j=1}^n \int_{b_{j-1}}^{b_j} \frac{E_j}{1-\nu_j} T_{j0}(y, t) E[r_s a_j] dy \\ + T_{i0}(z, t) \sum_{s=1}^n E[r_s a_i] \sum_{j=1}^n \int_{b_{j-1}}^{b_j} \frac{E_j A_j}{1-\nu_j} T_{j1s}(y, t) dy \\ + T_{i0}(z, t) \sum_{j=1}^n \int_{b_{j-1}}^{b_j} \frac{E_j}{1-\nu_j} T_{j0}(y, t) E[a_i a_j] dy \quad (4.53)$$

$$W_{31}(t) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \int_{b_{j-1}}^{b_j} \int_{b_{k-1}}^{b_k} \frac{E_j E_k}{(1-\nu_j)(1-\nu_k)} \left\{ A_j A_k \sum_{s=1}^n \sum_{x=1}^n T_{j1s}(y, t) T_{k1x}(z, t) E[r_s r_x] \right. \\ \left. + A_j T_{k0}(z, t) \sum_{s=1}^n T_{j1s}(y, t) E[r_s a_k] + A_k T_{j0}(y, t) \sum_{s=1}^n T_{k1s}(z, t) E[r_s a_j] \right. \\ \left. + T_{j0}(y, t) T_{k0}(z, t) E[a_j a_k] \right\} dy dz \quad (4.54)$$

$W_{22i}(z, t)$ は式(4.53)中の E_j を yE_j で置き換えることにより容易に得られ, $W_{32}(t)$ と $W_{33}(t)$ は式(4.54)中の E_jE_k をそれぞれ, zE_jE_k と yzE_jE_k で置き換えることにより得られる. 式(4.50)と式(4.52)–(4.54)は式(4.3)を導入することで評価される. もし $i \neq j$ で r_i と r_j が互いに独立で, 同じく a_i と a_j も互いに独立であり, かつ r_i と a_j がいかなる場合でも独立であれば, 式(4.52)–(4.54)は次式のように単純化される.

$$W_{1i}(z, t) = A_i^2 \sum_{s=1}^n T_{i1s}^2(z, t) E[r_s^2] + T_{i0}^2(z, t) E[a_i^2] \quad (4.52)'$$

$$W_{21i}(z, t) = A_i \sum_{s=1}^n T_{i1s}(z, t) \sum_{j=1}^n \int_{b_{j-1}}^{b_j} \frac{E_j A_j}{1 - \nu_j} T_{j1s}(y, t) E[r_s^2] dy \\ + T_{i0}(z, t) \int_{b_{i-1}}^{b_i} \frac{E_i}{1 - \nu_i} T_{i0}(y, t) E[a_i^2] dy \quad (4.53)'$$

$$W_{31}(t) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \int_{b_{j-1}}^{b_j} \int_{b_{k-1}}^{b_k} \frac{E_j E_k}{(1 - \nu_j)(1 - \nu_k)} A_j A_k \sum_{s=1}^n T_{j1s}(y, t) T_{k1s}(z, t) E[r_s^2] dy dz \\ + \sum_{j=1}^n \frac{E_j^2}{(1 - \nu_j)^2} \left[\int_{b_{j-1}}^{b_j} T_{j0}(z, t) dz \right]^2 E[a_j^2] \quad (4.54)'$$

4.3.3 数値計算結果と考察

4.3.3.1 計算条件の設定

数値計算の一例として, PSZ と SUS304 からなる熱応力緩和型 FGM 平板が, $\phi(t) = 0, \psi(t) = T_{ref}$ なる周囲媒体により片面加熱される場合を考察する. また, 式(4.11)で定義された無次元量を用いる. PSZ の体積分率分布は図 4-2 に示されている三種類を用いた. PSZ と SUS304 の物性値は第 2 章の表 2-1 に与えられている. 各材料組成分布に対する FGM の材料特性は, 4.2 節と同様にポアソン比は全板厚にわたって一定値(0.3), 密度と比熱は線形複合則より算出し, 熱伝導率と線膨張係数それぞれの平均とヤング率は Mori-Tanaka の理論⁽⁸¹⁾を用い, さらに中間層においては, 母相と分散相の識別にファジィ推論⁽⁸²⁾を併用して算出した. また, 数値計算諸元として次の値を採用した.

$$B_t = \infty, \quad B_b = 0.1, 1, \infty, \quad n = 50 \quad (4.55)$$

各層における熱伝導率と線膨張係数のバラツキ特性としては, 次式で定義される PSZ の体積分率 f_{PSZ} の 2 次関数を採用した.

$$S[\bar{r}_i] = S[\bar{a}_i] = -4k \cdot f_{PSZ}(\mathcal{G}_i) [f_{PSZ}(\mathcal{G}_i) - 1], \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.56)$$

ここで, \mathcal{G}_i は $(\bar{b}_i + \bar{b}_{i-1})/2$ で定義される第 i 層の中央における無次元座標値である. パラメータ k は $S[\bar{r}_i]$ と $S[\bar{a}_i]$ の変化量を規定している. 式(4.56)は, 構成材料の体積分率が 0.5 の位置で熱伝導率と線膨張係数が最も広くばらつき, その位置での物性値の標準偏差は k に等しいことを意味し

ている。FGMは第二成分の含有量の増加とともに、その微視構造のタイプが、粒子-母相構造（孤立した球状粒子が母相内に分散している構造）からネットワーク構造（二つの相が複雑に絡み合っている構造）を経て再び粒子-母相構造へと変化する⁽⁸⁸⁾。ネットワーク構造領域では、その複雑な微視構造に起因して材料の物性値が大きくばらつき得る。したがって、実際の物性値のバラツキ特性を模擬するための第一近似式として、式(4.56)は妥当であろう⁽⁵⁵⁾。

4.3.3.2 温度と熱応力の標準偏差分布

4.2.4.3節で示したように、温度と熱応力の標準偏差は時間とともに増加することから、定常状態における温度および熱応力の統計量がFGMの材料設計者にとっては特に重要であろう。そこで、以下では定常状態での計算結果のみを示す。図4.17, 4.18はそれぞれ、 $B_b = \infty, k = 0.05$ とした場合の定常温度と熱応力の標準偏差分布である。本節で提案した解析手法の妥当性を検証するため、4.2節で述べたモンテカルロ・シミュレーションから得られた結果⁽¹⁰³⁾を併せて示している。式(4.3)中の相関パラメータは、比較のために両者間で一致（ $B_1 = B_2 = B_3 = 0.4, C_1 = 0.8$ ）させている。図より、本節の一次摂動解はモンテカルロ・シミュレーションからの結果と良く一致していることがわかる。また、どちらの図においても Ceramic-poor な傾斜組成を有する FGM の標準偏差が3種類の組成分布の中で最も大きい。

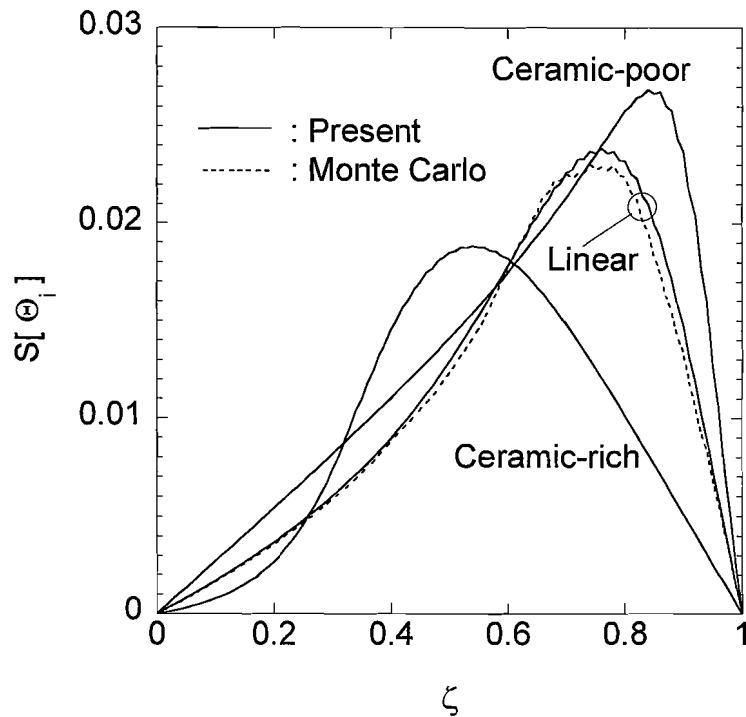


Fig. 4.17 Standard deviation of steady-state temperature for $B_b = \infty$ and $k = 0.05$

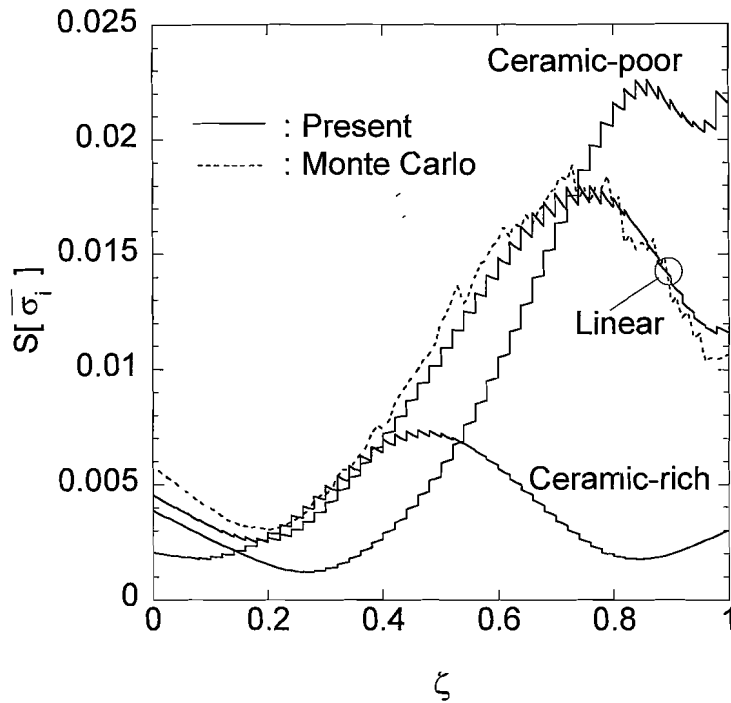


Fig. 4-18 Standard deviation of steady-state thermal stress for $B_b = \infty$ and $k = 0.05$

図4-19, 4-20はそれぞれ, $k = 0.05$ とした場合の定常温度と熱応力の標準偏差分布を, ビオ一数 B_b をパラメータにとり示している. 相関パラメータ B_1, B_2, B_3, C_1 の値は上述のものと同一である. 図4-17, 4-18と比較すれば, 温度の標準偏差において異なった分布傾向が見られるが, 標準偏差の大きさは全板厚にわたって小さい. これは, 加熱面のビオ一数が増すと板内部の温度上昇が促進され, 熱応力の標準偏差に及ぼす物性値のバラツキの影響がより大きくなるためである.

図4-21a-cはそれぞれ, 式(4.56)で与えられたランダムな物性値の標準偏差に対応して, 組成分布が Ceramic-rich, Linear, Ceramic-poor である FGM 平板の定常熱応力のバラツキを示したものである. 各図において, 平均を挟んだ上下の線は, それぞれ平均に $3S[\sigma_i]$ を足したものと平均から $3S[\sigma_i]$ を引いたものである. この二つの線で囲まれた範囲は, ランダムな熱応力が正規分布に従うという条件下で, 99.7%の確率でばらつく範囲である. これらの図からわかるように, 熱応力のバラツキは物性値のバラツキと定性的に異なっている. さらに, Ceramic-rich 組成は決定論的にも確率論的にも熱応力緩和の見地から Ceramic-poor 組成よりも優れている.

図4-22は, 三つの異なる位置における熱応力の変動係数の絶対値を, パラメータ k に対してプロットしたものである. どの位置においても熱応力の変動係数と k との間には線形関係が認められる. Ceramic-rich 組成と Linear 組成をもつ FGM 平板の応答は, 板厚中央付近において, 熱伝導率と線膨張係数のバラツキに対して最も敏感である. しかしながら, Ceramic-poor の組成分布をもつ FGM 平板の応答は, 物性値のバラツキに対して加熱面近傍以外の場所で感度が非常に低い.

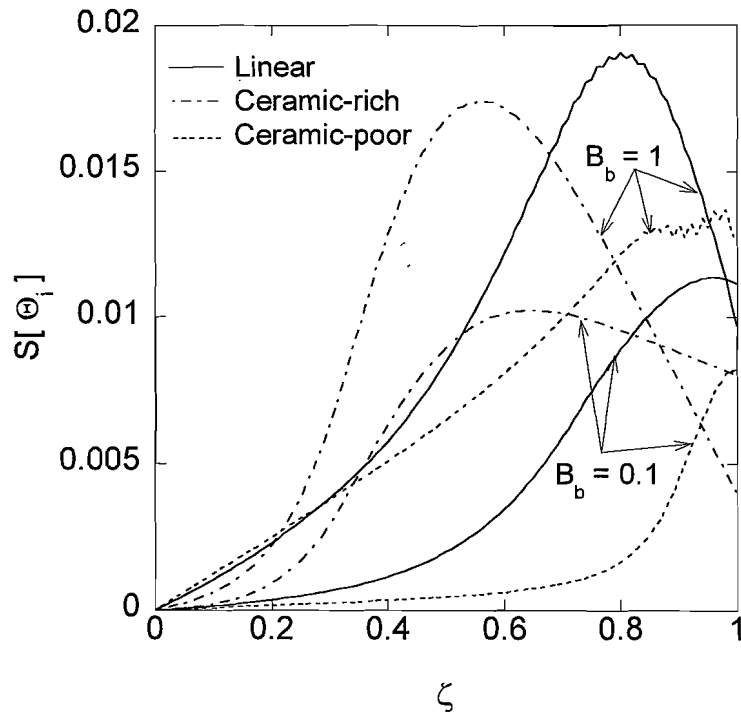


Fig. 4-19 Standard deviation of steady-state temperature for $k = 0.05$

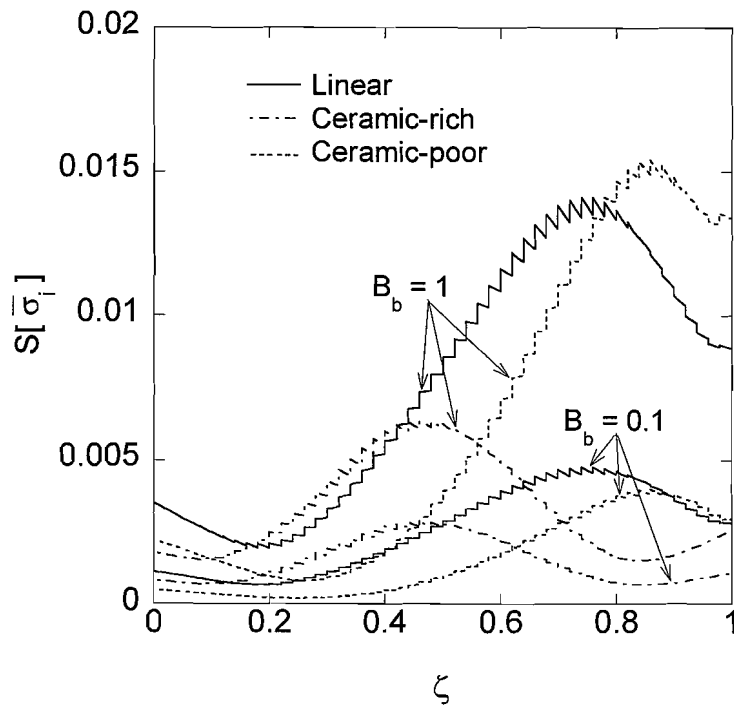
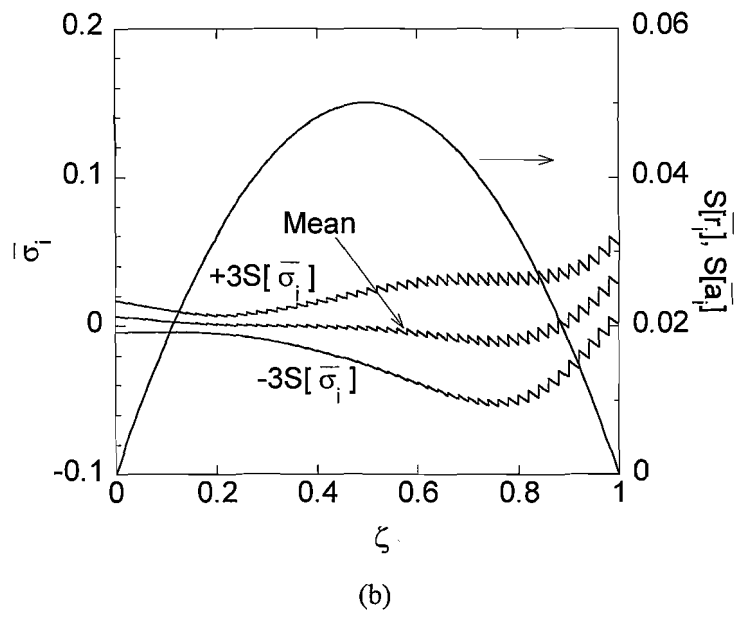
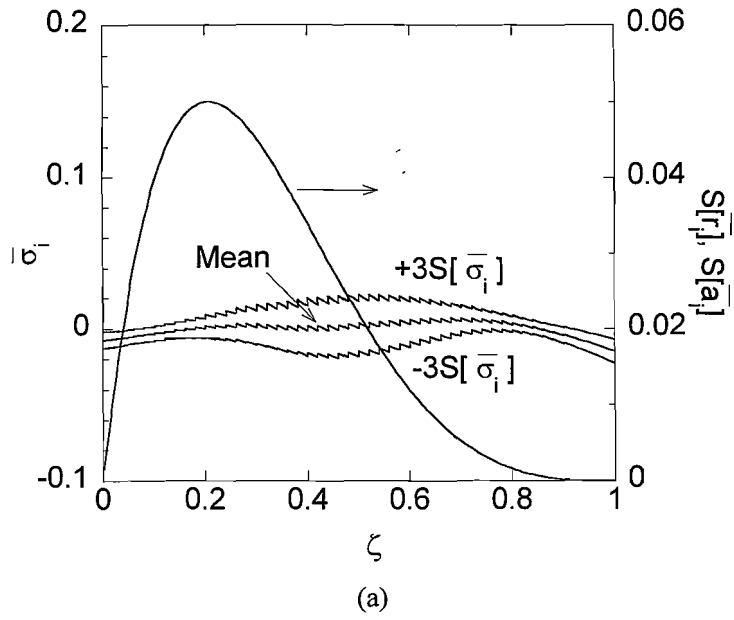


Fig. 4-20 Standard deviation of steady-state thermal stress for $k = 0.05$



Continued on the next page

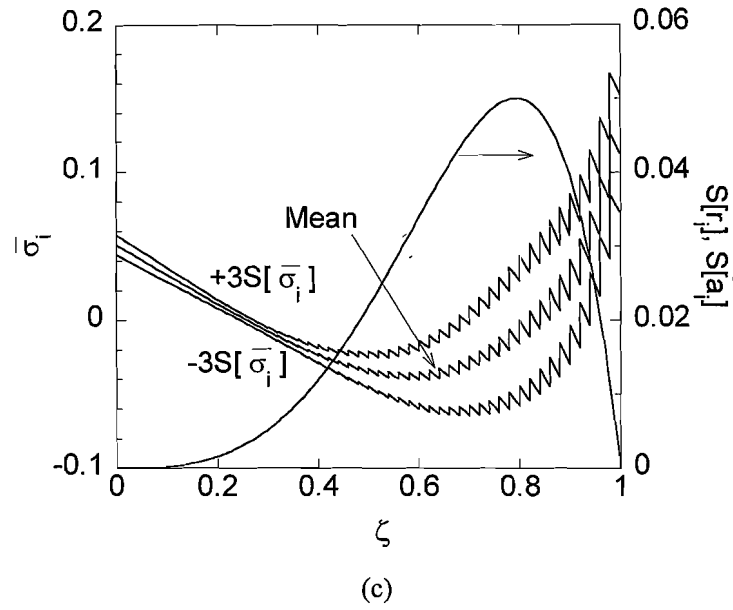


Fig. 4-21 Steady-state thermal stress distribution with confidence limits and standard deviation of random properties for $B_b = 1$ and $k = 0.05$: (a) ceramic-rich FGM, (b) linear FGM and (c) ceramic-poor FGM

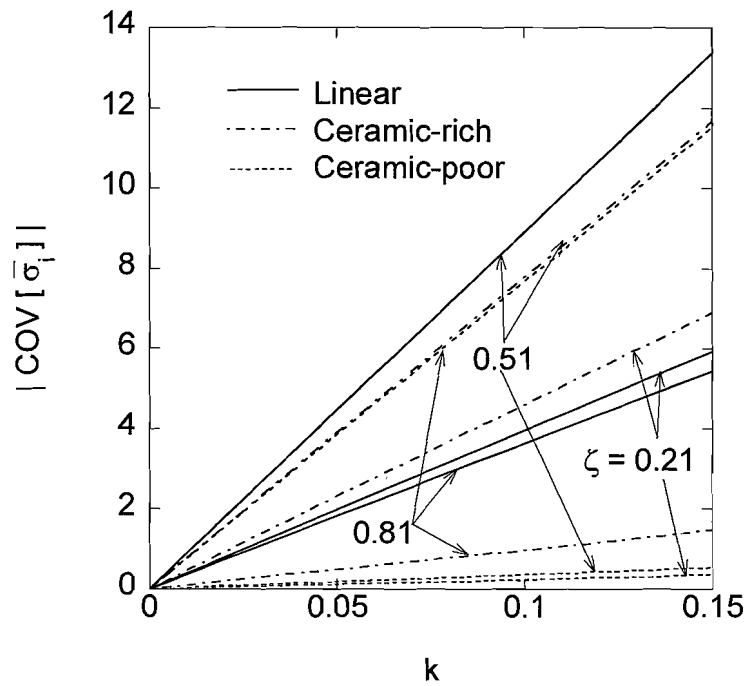


Fig. 4-22 Coefficient of variation of thermal stress at different locations against the value of k for $B_b = \infty$ in the case of no correlation among random properties

図4-23は、Ceramic-rich組成をもつFGM平板の定常温度の標準偏差を、異なる B_1 値に対して示している。 B_1 の増加、すなわち熱伝導率の自己相関性の減少とともに温度の標準偏差が低下している。これは4.2節で得られた結果*と同じである(図4-15)。

図4-24は組成分布がCeramic-richであるFGM平板の定常熱応力の標準偏差を示している。図中の表に示すように、相関パラメータの組合せを5種類考え、それぞれについて計算を行った。Case 1~3を比較すると、線膨張係数の自己相関性が最も弱いCase 1が板内部で最も大きな標準偏差を示している。一方、Case 3はCase 1, 2よりも加熱面近傍と低温側において大きい。したがって、熱伝導率の強い自己相関性は温度の標準偏差を増加させる傾向にあるが、線膨張係数の強い自己相関性は熱応力の標準偏差の最大値を減少させることがわかる。次に、熱伝導率と線膨張係数の相互相関性の影響を調べるため、Case 4, 5とCase 2を比較する。Case 4, 5の標準偏差は板厚全域にわたって、物性間の相互相関を無視しているCase 2よりも小さい。つまり、熱伝導率と線膨張係数の相互相関性は熱応力の標準偏差を減少させ、その減少の程度はパラメータ B_3 に依存して変化する(B_3 が小さいほど減少の程度が大きくなる)ことがわかる—以上の結果も4.2節で得られたもの(図4-16)と同一である。したがって、温度と熱応力の標準偏差に及ぼす相関パラメータの影響は、 B_b や n の値、熱伝導率と線膨張係数のバラツキ特性によって定性的に変化しない。

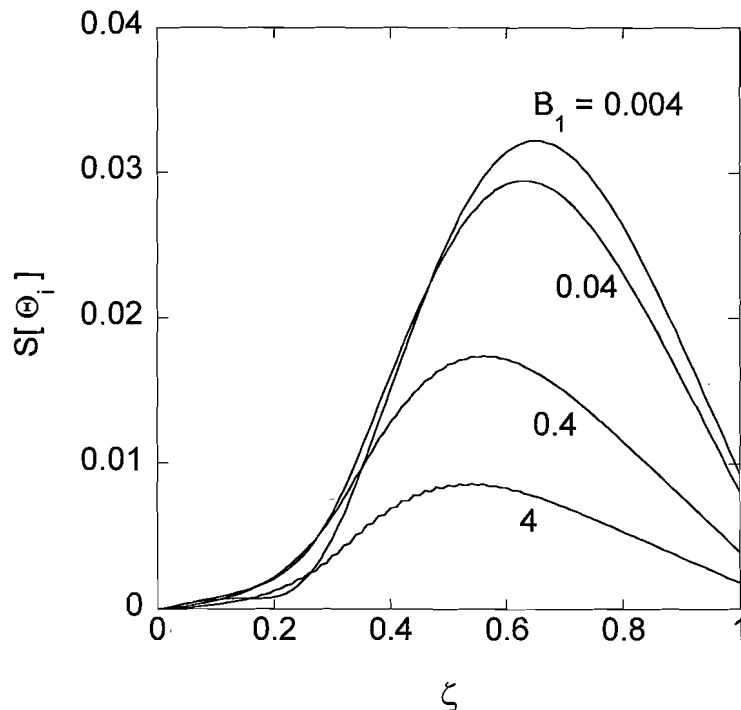


Fig. 4-23 Relationship between correlation parameter B_1 and standard deviation of steady-state temperature in ceramic-rich FGM for $B_b = 1$, $C_1 = 0$ and $k = 0.05$

* 図4-23と図4-15は、①ピオー数 B_b ②層分割数 n ③熱伝導率と線膨張係数のバラツキ特性、の三点が異なる。

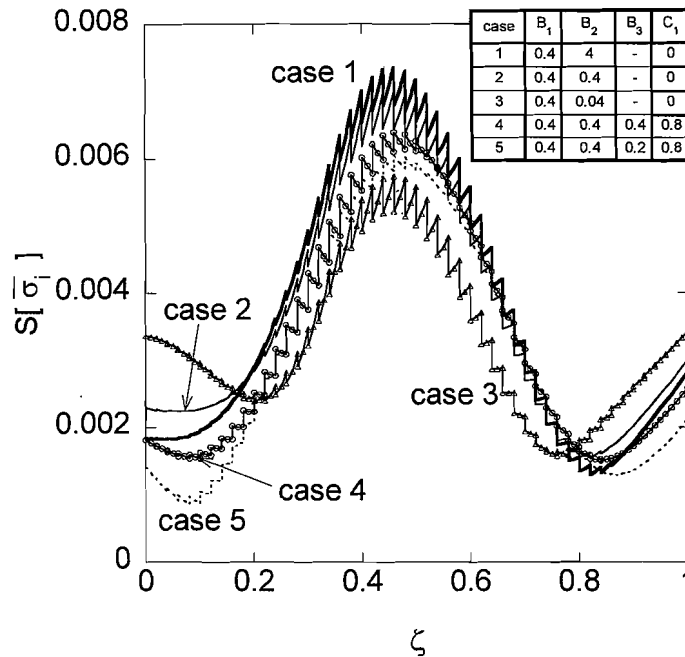


Fig. 4-24 Effects of correlation parameters on standard deviation of steady-state thermal stress in ceramic-rich FGM for $B_0 = 1$ and $k = 0.05$

4.4 結 言

物性値の不確定性を考慮した FGM 平板の確率論的熱伝導問題と熱応力問題について、熱伝導率と線膨張係数が確率場である場合の、温度および熱応力の統計量（平均と標準偏差）をモンテカルロ・シミュレーション法（4.2 節）と摂動法（4.3 節）により定量的に明らかにした。また、物性値のばらつき特性が異なる PSZ/SUS304 傾斜機能平板が片面に対流加熱を受ける場合について数値計算し、傾斜組成分布、加熱面のピオー数、物性値の相関パラメータの違いが温度と熱応力の標準偏差に及ぼす影響を考察した。

得られた主な結論を以下にまとめる。

1. 温度と熱応力の標準偏差は時間とともに増加する。
2. 物性値のバラツキが大きい位置が加熱面に近いほど、また加熱面のピオー数が大きいほど、温度と熱応力の標準偏差は大きくなる。
3. 熱応力のバラツキは物性値のバラツキと定性的に必ずしも一致しない。
4. FGM の構成材料そのものの物性値がばらつく場合、および物性値が FGM 固有の微視構造に基づいたバラツキ特性をもつ場合、Ceramic-rich 組成は Linear 組成や Ceramic-poor 組成と比較して、熱応力の平均、標準偏差のどちらも効果的に低減できる。
5. 熱伝導率の自己相関性が強いと温度の標準偏差は大きくなるが、線膨張係数の自己相関性が強いと熱応力の標準偏差は小さくなる。また、熱伝導率と線膨張係数との間に相互相関が存

在する場合、存在しない場合と比べて熱応力の標準偏差は低下する。

実際に製造された FGM の物性値のバラツキに関しては、現状ではデータ不足*のため推測に頼らざるを得ない。したがって、本研究から更に発展して、FGM の信頼性評価まで至るには、今後、各製造法によって製造された FGM の物性値がどれほどばらつくのか、その統計量を得ることが必要である。

* 今のところ、実際の FGM の物性値に関する統計データは、筆者の知る限り報告されていないようである。ただし、FGM のヤング率とポアソン比に関して、それらの統計量を数値的に予測するための微視力学的な確率モデルが Rahman ら⁽¹⁰⁴⁾によって提案され、その予測値が実験値と良い一致を示すことが報告されている。しかし、FGM の熱応力緩和に重大な影響を及ぼす熱伝導率と線膨張係数の統計量に関する研究は皆無である。

第5章 放熱面における熱伝達率が確率場の場合

5.1 緒言

実際の熱的環境下において、物体表面の熱伝達率は空間的に変化することが知られている。例えば、光ファイバ素線の紡糸過程において、炉内ガスの非定常流れに起因してファイバ素線表面の熱伝達率が空間的に変化し、素線外径のバラツキを引き起こす⁽¹⁰⁵⁾ことが報告されている。しかし、この熱伝達率の空間分布を正確に予測することは実際問題、非常に難しい。他にも、タービンディスク表面の熱伝達率は、ディスクの回転数、シュラウドおよび隣接ディスクの有無とその間隔、冷却空気速度、冷却空気流れのパターンなど多くの影響を受け、さらにその影響は非線形で変化も激しいため、熱伝達率の正確な予測は困難を極める⁽¹⁰⁶⁾との報告がある。また、熱交換器の伝熱面における熱貫流率の測定時には、50%以上もの測定不確実性が存在する⁽¹⁰⁷⁾ようである。このように熱伝達率の予測値に不確実性が内在している以上、製品の品質や構造体の信頼性をある基準レベル以上に保つためには、温度や応力に関する統計量の定量的評価が必要であり、したがって、物体内の温度・熱応力は確率論の立場から解析されるべきものである。

熱伝達率の空間的もしくは時間的ランダム性を考慮した熱伝導・熱応力問題に関する確率論的研究は非常に少ない。Madera⁽⁵⁶⁾と Emery⁽³⁷⁾はそれぞれ、拡大伝熱面の熱伝達率が確率過程および確率場として表現された矩形フィンの確率論的熱伝導問題を解析した。Kuznetsov⁽⁵⁷⁾は熱伝達率が確率場ではないが空間的にランダムな無限帯板の確率論的熱伝導問題の解析を行った。しかし、彼らは温度変化に付随して生じる熱応力までは言及していない。一方、森ら⁽⁵⁸⁾は時間的にランダムな熱伝達率を介して周囲から加熱されるガスタービン静翼に生じる熱応力の統計量を確率有限要素法により数値解析した。また、Klevtsov ら⁽²¹⁾はランダム変動する熱伝達率により誘起される蒸気発生管のランダムな熱応力振動について研究したほか、石川⁽⁵⁹⁾も確率過程で表される熱伝達率をもつ棒の連成熱弾性問題を差分法で解析した。しかし、これらの報告例はいずれも均質材料を想定したものであるため、熱伝達率のランダム性を考慮した不均質弾性体の熱応力に関する研究は、現在まで報告されていないようである*。もし、任意の不均質性を有する不均質体内に生じる熱応力の統計量を得ることが出来れば、最近開発が積極的に展開されつつある熱応力緩和型 FGM の信頼性評価に応用できるため、それは非常に有益である。FGM の確率論的熱応力解析は、その破壊確率を定量的に評価するために必要不可欠であり、熱的境界条件がランダムな場合^(73,79)、初期温度がランダムな場合⁽⁸⁵⁾、物性値がランダムな場合^(55,94)など、近年盛んに行われている。

そこで本章⁽¹⁰⁹⁾では、(熱応力緩和型) FGM 中空円板の非円筒面の熱伝達率が空間的にランダムであり、円筒面に軸対称熱負荷を受ける場合の温度と熱応力の二次統計量、すなわち平均と標準偏差を定量的に評価する。工業の分野で使われる円板は変厚形状であるのが一般的なため、ここ

* 熱伝達率の空間的ランダム性を考慮した均質弾性体の熱応力に関する研究も、解析的な取り扱いをしているものは著者による研究⁽¹⁰⁸⁾を除いて見あたらない。この研究については付録 D にまとめている。

では板厚の半径方向変化を考慮する。本章で取り扱う FGM 円板は、その材料組成が一方向（半径方向）にのみ傾斜している。また、熱伝達率は半径方向にのみ任意に変化し、確率場としてその平均値まわりをランダムな振幅でばらつくものとする。温度・熱応力の統計量の評価には、決定論的な温度と熱応力に対する解析解を利用したモンテカルロ・シミュレーション法を用いた*。温度に対する解析解は一種の積分変換法に相当する Vodicka の手法により導出した。一方、熱応力に対する解析解はヤング率の区分的ベキ乗関数近似により得た。

数値計算は、熱伝達率の平均が半径方向へ増加する場合について、二種類の異なる傾斜組成分布を有する FGM 円板に対して行った。熱伝達率の平均の大きさ、構成材料の体積分率分布、および板厚変化が温度と熱応力の統計量に及ぼす影響について考察した。

5.2 解析モデル

非円筒面の熱伝達率 η, χ が半径方向（ r 軸方向）に任意に変化する内半径 a 、外半径 b の傾斜機能中空円板を考える（図 5-1）。この円板の非円筒面（上下表面）は、それぞれ確定的な温度 T_u, T_l の周囲媒体と接している。円板の材料は等方性であるが不均質で、その物性値—密度 ρ 、比熱 c 、熱伝導率 λ 、ヤング率 E 、線膨張係数 α —は半径座標 r の関数で確定的に与えられる。しかしながら、熱伝達率 η, χ には確率場とみなせる不確実性が存在しているものとする。また、この円板の板厚 d が次のように r のベキ乗関数で与えられると仮定する。

$$d(r) = d_0 \left(\frac{r}{a} \right)^y \quad (5.1)$$

ここで、 d_0 と y は定数であり、 $r \in [a, b]$ で $d(r)/b \ll 1$ とする。もし、円板の温度が円周方向にも軸方向にも変化せず、また内部熱発生/熱吸収も存在しないならば、この円板に対する一次元非定常熱伝導問題の支配方程式は次式で表せる⁽¹¹¹⁾。

$$\frac{\rho(r)c(r)}{\lambda(r)} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\lambda(r)} \frac{d\lambda}{dr} + \frac{1}{d(r)} \frac{dd}{dr} \right) \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{\eta(r, \omega_1)}{\lambda(r)d(r)} [T - T_u(r, t)] - \frac{\chi(r, \omega_2)}{\lambda(r)d(r)} [T - T_l(r, t)] \quad (5.2)$$

ここで、 $T, t, \{\omega_1, \omega_2\}$ はそれぞれ温度、時間、確率変数である。熱伝達率と物性値の任意の空間的变化に対して式(5.2)の厳密解を得ることは不可能である。そこで、温度解析を容易にするため、図 5-2 に示すように円板を n 個の均質かつ一定厚さの環状層（第 i 層の熱的物性値 ρ_i, c_i, λ_i 、板厚 d_i ）に分割し、各層の熱伝達率をランダム定数 η_i, χ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) で近似する。ただし、これらの離散値は各層の中央半径における値で代表する。この近似は連続的な確率場を離散座標の確率場へと変換することを意味する。円板の初期温度を $T_0(r)$ とし、 $r = a$ と $r = b$ の側面に接する媒体の温度はそれぞれ $T_a(t), T_b(t)$ で与えられる。また、円板の内・外側面の熱伝達率はそれぞれ β_a, β_b である。

* 付録 D と同様に、摂動法による解析も試みたが、この手法では、熱伝達率がランダム分布する FGM 変厚円板の温度場に関しては問題なく解析できる⁽¹¹⁰⁾ものの、同問題の熱応力場を解析することは非常に困難であったため、ここでは採用しない。

n 層に分割された円板の仮想界面の位置を $r_i (i = 1, 2, \dots, n-1)$ とする. さらに, 円板には外力が一切作用していないものとする.

確率量を有する物体の熱伝導問題を考えるにあたり, 以下のような仮定を導入する.

(i) 確率量 η_i と $\chi_i (i = 1, 2, \dots, n)$ は確定量 H_i, G_i と確率変動量 h_i, g_i との和で与えられるものとする. すなわち,

$$\eta_i = H_i + h_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{5.3}$$

$$\chi_i = G_i + g_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{5.4}$$

ここに H_i, G_i はそれぞれ η_i, χ_i の平均を意味する定数であり, したがって h_i, g_i の平均値は 0 である.

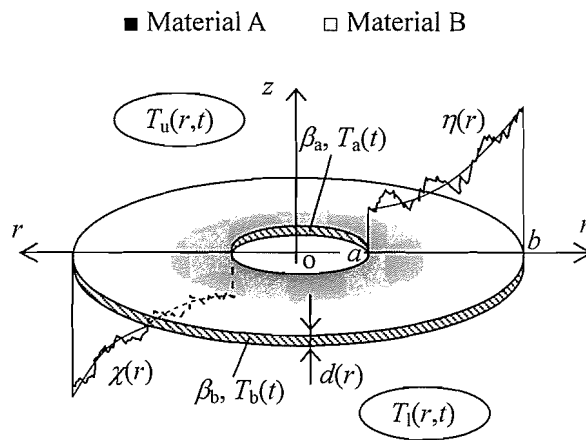


Fig. 5-1 Physical model and coordinate system for an FGM annular disc of variable thickness

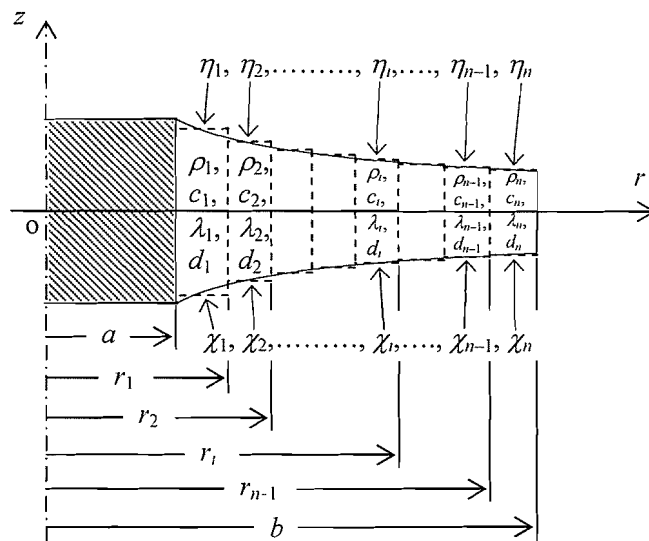


Fig. 5-2 Discretization by a system of step-annular homogeneous discs

(ii) h_i と g_i の相関係数は、離散座標の確率場として次のような関数形で与える。これは付録 F の図 F-1 に示すように三角形の相関関数であり、 $|\varrho_p - \varrho_q| > 1/B$ では相関をもたない。

$$\rho_{hh}^*(p, q) = \frac{E[h_p h_q]}{S[h_p] \cdot S[h_q]} = \begin{cases} 1 - B_1 |\varrho_p - \varrho_q|, & |\varrho_p - \varrho_q| \leq 1/B_1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}, \quad p, q = 1, 2, \dots, n \quad (5.5)$$

$$\rho_{gg}^*(p, q) = \frac{E[g_p g_q]}{S[g_p] \cdot S[g_q]} = \begin{cases} 1 - B_2 |\varrho_p - \varrho_q|, & |\varrho_p - \varrho_q| \leq 1/B_2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}, \quad p, q = 1, 2, \dots, n \quad (5.6)$$

$$\rho_{hg}^*(p, q) = \frac{E[h_p g_q]}{S[h_p] \cdot S[g_q]} = \begin{cases} C_1(1 - B_3 |\varrho_p - \varrho_q|), & |\varrho_p - \varrho_q| \leq 1/B_3 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}, \quad p, q = 1, 2, \dots, n \quad (5.7)$$

ここで、 $E[\cdot]$ と $S[\cdot]$ はそれぞれ期待値と標準偏差である。また、 ϱ_p は第 p 層の中央半径であり、 $\varrho_p = (r_p + r_{p-1})/2$ で定義される。 B_i ($i = 1, 2, 3$) は相関性の強さによって決定される正の定数であり、 C_1 は同様に相関性の強さを表すが -1 から 1 の間の定数である。

式(5.5)–(5.7)はそれぞれ、上面の熱伝達率の自己相関性、下面の熱伝達率の自己相関性、上下面の熱伝達率の相互相関性を表している。 B_1, B_2 が小さいほど熱伝達率の自己相関性は強く、 $B_1 = B_2 = 0$ は確率変動量の完全相関（すなわち、各表面上の熱伝達率のランダム性がたった一つのランダム変数で表現可能）を意味する。一方、 B_1, B_2 が十分に大きい場合、式(5.5), (5.6)で表される自己相関係数がクロネッカー・デルタ δ_{pq} で近似できるため、熱伝達率のランダム性は帯域制限されたホワイトノイズに相当する。なお、相関係数 $\rho_{hh}^*, \rho_{gg}^*, \rho_{hg}^*$ の関数形に解析上の制限はなく、本章では一例として式(5.5)–(5.7)を採用していることに注意すべきである。

5.3 モンテカルロ・シミュレーション

本章では統計量の評価にモンテカルロ・シミュレーションを用いる。この手法は以下の手順で構成されている。

- (i) 式(5.5)–(5.7)を満足する確率量 h_i, g_i を成分にもつベクトル $\mathbf{h} = \{h_1, h_2, \dots, h_n\}$, $\mathbf{g} = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ を、疑似乱数を用いて大量に (M セット) 発生させる。
- (ii) 各 \mathbf{h}, \mathbf{g} に対応した熱伝達率を有する変厚 FGM 中空円板の温度と熱応力を計算する。そして、この計算を M 回繰り返す。
- (iii) 得られた計算結果の統計処理を行い、所望の統計量を得る。

シミュレーション回数、すなわち M が十分に大きい場合、得られた統計量はある値に収束する。また、確率量 h_i, g_i の確率分布関数は任意に仮定できる。手順(i)については 4.2.2 節で詳説している (r と a に h と g が対応することに注意)。手順(ii)の計算には、熱伝達率が決定論的に与えられた場合の温度と熱応力の解析解を用いた。それらの導出過程の詳細については 5.4 節にて説明する。

5.4 決定論的温度場および熱応力場の解析解

5.4.1 温度場

図 5.2 に示す板厚がステップ状に変化する複合中空円板において、その上下面の熱伝達率 η_i, χ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) が決定論的に与えられる場合の非定常熱伝導問題は次のように定式化される。

$$\frac{\rho_i c_i}{\lambda_i} \frac{\partial T_i}{\partial t} = \frac{\partial^2 T_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_i}{\partial r} - \frac{\eta_i}{\lambda_i d_i} [T_i - T_u(r, t)] - \frac{\chi_i}{\lambda_i d_i} [T_i - T_l(r, t)], \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.8)$$

$$T_i = T_0(r), \quad \text{at } t = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.9)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} - \beta_a [T_1 - T_a(t)] = 0, \quad \text{at } r = r_0 = a \quad (5.10)$$

$$\lambda_n \frac{\partial T_n}{\partial r} + \beta_b [T_n - T_b(t)] = 0, \quad \text{at } r = r_n = b \quad (5.11)$$

$$T_i = T_{i+1}, \quad \text{at } r = r_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (5.12)$$

$$\lambda_i d_i \frac{\partial T_i}{\partial r} = \lambda_{i+1} d_{i+1} \frac{\partial T_{i+1}}{\partial r}, \quad \text{at } r = r_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (5.13)$$

一種の積分変換法に相当する Vodicka の手法を用いて、式(5.8)–(5.13)に対する解を導出する。この手法は複合領域の非定常熱伝導問題を簡便に解析できるため、任意の熱伝達率の変化を有する円板⁽¹¹²⁾や傾斜機能材料のような不均質体⁽¹¹³⁾の温度場、発達した層流内部流れの温度助走区間における温度場^(114, 115)の解析などに応用されている。この手法の詳細は参考文献⁽⁸⁶⁾に記述されている。この Vodicka の手法によれば、解は次式のように得られる。

$$T_i(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m(t) X_{im}(r) + \sum_{j=1}^2 L_{ij}(r) \Gamma_j(t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.14)$$

ただし、

$$L_{ij}(r) = C_{ij} I_0 \left(\sqrt{\frac{\eta_i + \chi_i}{\lambda_i d_i}} r \right) + D_{ij} K_0 \left(\sqrt{\frac{\eta_i + \chi_i}{\lambda_i d_i}} r \right), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2 \quad (5.15)$$

$$\Gamma_1(t) = -T_a(t), \quad \Gamma_2(t) = T_b(t) \quad (5.16)$$

ここで、 $I_0(\cdot)$ と $K_0(\cdot)$ はそれぞれ 0 次の第一種、第二種変形ベッセル関数である。式(5.15)に含まれる定数 C_{ij}, D_{ij} は次の関係式より得られる。

$$\lambda_1 \frac{dL_{11}(a)}{dr} - \beta_a L_{11}(a) = \beta_a, \quad \lambda_n \frac{dL_{n1}(b)}{dr} + \beta_b L_{n1}(b) = 0,$$

$$L_{i1}(r_i) = L_{(i+1)1}(r_i), \quad \lambda_i d_i \frac{dL_{i1}(r_i)}{dr} = \lambda_{i+1} d_{i+1} \frac{dL_{(i+1)1}(r_i)}{dr}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (5.17)$$

$$\lambda_1 \frac{dL_{12}(a)}{dr} - \beta_a L_{12}(a) = 0, \quad \lambda_n \frac{dL_{n2}(b)}{dr} + \beta_b L_{n2}(b) = \beta_b,$$

$$L_{i2}(r_i) = L_{(i+1)2}(r_i), \quad \lambda_i d_i \frac{dL_{i2}(r_i)}{dr} = \lambda_{i+1} d_{i+1} \frac{dL_{(i+1)2}(r_i)}{dr}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (5.18)$$

$X_{im}(r)$ は式(5.8), 式(5.10)–(5.13)に対応した固有値問題の解であり, 次式で与えられる.

$$X_{im}(r) = A_{im} J_0(u_{im} r) + B_{im} Y_0(u_{im} r) \quad (5.19)$$

ただし,

$$u_{im} = \sqrt{\frac{\gamma_m^2}{\kappa_i} - \frac{\eta_i + \chi_i}{\lambda_i d_i}} \quad (5.20)$$

ここで, $J_0(\cdot)$ と $Y_0(\cdot)$ はそれぞれ0次の第一種, 第二種ベッセル関数, γ_m は固有値である. 式(5.19), (5.20)は $\gamma_m^2 / \kappa_i > (\eta_i + \chi_i) / (\lambda_i d_i)$ の場合にのみ有効で, $\gamma_m^2 / \kappa_i < (\eta_i + \chi_i) / (\lambda_i d_i)$ と $\gamma_m^2 / \kappa_i = (\eta_i + \chi_i) / (\lambda_i d_i)$ の場合はそれぞれ, 式(5.19)の代わりに次のものを用いる.

$$X_{im}(r) = A_{im} I_0(u_{im}^* r) + B_{im} K_0(u_{im}^* r) \quad \text{for } \frac{\gamma_m^2}{\kappa_i} - \frac{(\eta_i + \chi_i)}{\lambda_i d_i} < 0 \quad (5.19)'$$

ただし,

$$u_{im}^* = \sqrt{\frac{\eta_i + \chi_i}{\lambda_i d_i} - \frac{\gamma_m^2}{\kappa_i}}, \quad (5.20)'$$

$$X_{im}(r) = A_{im} \ln r + B_{im} \quad \text{for } \frac{\gamma_m^2}{\kappa_i} - \frac{(\eta_i + \chi_i)}{\lambda_i d_i} = 0 \quad (5.19)''$$

未知定数 A_{im}, B_{im} の決定に必要な条件式は, 式(5.14)–(5.20)を式(5.10)–(5.13)に代入することで次式のように得られる.

$$\lambda_1 \frac{dX_{1m}(a)}{dr} - \beta_a X_{1m}(a) = 0, \quad \lambda_n \frac{dX_{nm}(b)}{dr} + \beta_b X_{nm}(b) = 0,$$

$$X_{im}(r_i) = X_{(i+1)m}(r_i), \quad \lambda_i d_i \frac{dX_{im}(r_i)}{dr} = \lambda_{i+1} d_{i+1} \frac{dX_{(i+1)m}(r_i)}{dr}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (5.21)$$

固有値 γ_m ($m = 1, 2, \dots$)は, 未知係数 A_{im}, B_{im} が0以外の解をもつための条件から決定でき, 次式の超越方程式の正根として得られる.

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 \cdots \mathbf{E}_{n-1} \cdot \mathbf{a} = 0 \quad (5.22)$$

ここで,

$$\mathbf{G} = \begin{cases} \begin{bmatrix} u_{1m}J_1(u_{1m}r_0) + \frac{\beta_a}{\lambda_1}J_0(u_{1m}r_0) & u_{1m}Y_1(u_{1m}r_0) + \frac{\beta_a}{\lambda_1}Y_0(u_{1m}r_0) \\ -u_{1m}^*I_1(u_{1m}^*r_0) + \frac{\beta_a}{\lambda_1}I_0(u_{1m}^*r_0) & u_{1m}^*K_1(u_{1m}^*r_0) + \frac{\beta_a}{\lambda_1}K_0(u_{1m}^*r_0) \end{bmatrix}, & \text{for } \frac{\gamma_m^2}{\kappa_1} - \frac{(\eta_1 + \chi_1)}{\lambda_1 d_1} \begin{cases} > 0 \\ < 0, \\ = 0 \end{cases} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{r_0} - \frac{\beta_a}{\lambda_1} \ln r_0 & -\frac{\beta_a}{\lambda_1} \\ & \vdots \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{C}_i \cdot \mathbf{D}_{i+1},$$

$$\mathbf{C}_i = \begin{cases} \begin{bmatrix} -\lambda_i d_i u_{im} Y_1(u_{im} r_i) & -Y_0(u_{im} r_i) \\ \lambda_i d_i u_{im} J_1(u_{im} r_i) & J_0(u_{im} r_i) \\ -\lambda_i d_i u_{im}^* K_1(u_{im}^* r_i) & -K_0(u_{im}^* r_i) \\ -\lambda_i d_i u_{im}^* I_1(u_{im}^* r_i) & I_0(u_{im}^* r_i) \end{bmatrix}, & \text{for } \frac{\gamma_m^2}{\kappa_i} - \frac{(\eta_i + \chi_i)}{\lambda_i d_i} \begin{cases} > 0 \\ < 0, \\ = 0 \end{cases} \\ \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{\lambda_i d_i}{r_i} & \ln r_i \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\mathbf{D}_{i+1} = \begin{cases} \begin{bmatrix} J_0[u_{(i+1)m} r_i] & Y_0[u_{(i+1)m} r_i] \\ -\lambda_{i+1} d_{i+1} u_{(i+1)m} J_1[u_{(i+1)m} r_i] & -\lambda_{i+1} d_{i+1} u_{(i+1)m} Y_1[u_{(i+1)m} r_i] \\ I_0[u_{(i+1)m}^* r_i] & K_0[u_{(i+1)m}^* r_i] \\ \lambda_{i+1} d_{i+1} u_{(i+1)m}^* I_1[u_{(i+1)m}^* r_i] & -\lambda_{i+1} d_{i+1} u_{(i+1)m}^* K_1[u_{(i+1)m}^* r_i] \end{bmatrix}, & \text{for } \frac{\gamma_m^2}{\kappa_{i+1}} - \frac{(\eta_{i+1} + \chi_{i+1})}{\lambda_{i+1} d_{i+1}} \begin{cases} > 0 \\ < 0, \\ = 0 \end{cases} \\ \begin{bmatrix} \ln r_i & 1 \\ \frac{\lambda_{i+1} d_{i+1}}{r_i} & 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = \begin{cases} \begin{bmatrix} u_{nm} Y_1(u_{nm} r_n) - \frac{\beta_b}{\lambda_n} Y_0(u_{nm} r_n) \\ -u_{nm} J_1(u_{nm} r_n) + \frac{\beta_b}{\lambda_n} J_0(u_{nm} r_n) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} u_{nm}^* K_1(u_{nm}^* r_n) - \frac{\beta_b}{\lambda_n} K_0(u_{nm}^* r_n) \\ u_{nm}^* I_1(u_{nm}^* r_n) + \frac{\beta_b}{\lambda_n} I_0(u_{nm}^* r_n) \end{bmatrix}, & \text{for } \frac{\gamma_m^2}{\kappa_n} - \frac{(\eta_n + \chi_n)}{\lambda_n d_n} \begin{cases} > 0 \\ < 0 \\ = 0 \end{cases} \\ \begin{bmatrix} -\frac{\beta_b}{\lambda_n} \\ \frac{1}{r_n} + \frac{\beta_b}{\lambda_n} \ln r_n \end{bmatrix} \end{cases} \quad (5.23)$$

ここで、 $J_1(\cdot)$, $Y_1(\cdot)$ はそれぞれ1次の第一種、第二種ベッセル関数であり、 $I_1(\cdot)$, $K_1(\cdot)$ はそれぞれ1次の第一種、第二種変形ベッセル関数である。式(5.22), (5.23)から明らかのように、超越方程式は γ_m の値に応じて変化する。したがって、固有値の探索は十分注意して行う必要がある。

関数 $\Phi_m(t)$ は次のように表される。

$$\Phi_m(t) = \exp(-\gamma_m^2 t) \left\{ f_m + \int_0^t \exp(\gamma_m^2 \tau) \left[q_m(\tau) - \sum_{j=1}^2 l_{mj} \frac{d\Gamma_j(\tau)}{d\tau} \right] d\tau \right\} \quad (5.24)$$

ここで、展開係数 f_m , $q_m(t)$, l_{mj} ($j = 1, 2$)は次式で与えられる。

$$f_m = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i d_i}{\kappa_i} \int_{r_{i-1}}^{r_i} r \left[T_0(r) - \sum_{j=1}^2 L_{ij}(r) \Gamma_j(0) \right] X_{im}(r) dr}{\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i d_i}{\kappa_i} \int_{r_{i-1}}^{r_i} r [X_{im}(r)]^2 dr},$$

$$q_m(t) = \frac{\sum_{i=1}^n \int_{r_{i-1}}^{r_i} r [\eta_i T_u(r, t) + \chi_i T_l(r, t)] X_{im}(r) dr}{\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i d_i}{\kappa_i} \int_{r_{i-1}}^{r_i} r [X_{im}(r)]^2 dr},$$

$$l_{mj} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i d_i}{\kappa_i} \int_{r_{i-1}}^{r_i} r L_{ij}(r) X_{im}(r) dr}{\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i d_i}{\kappa_i} \int_{r_{i-1}}^{r_i} r [X_{im}(r)]^2 dr}, \quad j = 1, 2 \quad (5.25)$$

5.4.2 熱応力場

板厚が式(5.1)のように変化する FGM 中空円板が軸対称温度分布をもつ場合の、平面応力問題の近似解析解を導出する。平面熱応力問題のフックの法則を半径方向変位 U で表すと⁽¹¹⁶⁾

$$\sigma_{rr} = \frac{E(r)}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\nu U}{r} \right) - \frac{E(r)}{1-\nu} \alpha(r) T^*(r, t) \quad (5.26)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E(r)}{1-\nu^2} \left(\frac{U}{r} + \nu \frac{\partial U}{\partial r} \right) - \frac{E(r)}{1-\nu} \alpha(r) T^*(r, t) \quad (5.27)$$

ここで、 σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ はそれぞれ応力の半径方向成分と円周方向成分である。 T^* は基準温度[†]からの温度変化量を意味する。 $E(r)$, $\alpha(r)$ はそれぞれヤング率と線膨張係数であり、どちらも半径座標 r の任意関数である。一般的な工業材料の範囲内でポアソン比 ν の材料依存性は大きくないという事実から、ここでは簡単化のため、FGM の ν を一定値とした。式(5.26), (5.27)を平衡方程式に代入すると、 U の満足すべき微分方程式を次式のように得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \left[\frac{r}{E(r)} \frac{dE}{dr} + y + 1 \right] \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \left[\frac{\nu r}{E(r)} \frac{dE}{dr} + \nu y - 1 \right] \frac{U}{r^2} \\ = \frac{1+\nu}{E(r)d(r)} \frac{\partial}{\partial r} [E(r)d(r)\alpha(r)T^*(r, t)] \end{aligned} \quad (5.28)$$

ヤング率の任意の不均質性に対して式(5.28)の厳密解を得ることは不可能である。そこで、その任意の不均質性に対処するため、温度場の解析と同様に、円板を半径方向へ k 個の環状層に分割し、各層のヤング率を r のべき乗関数 $E_j(r) = E_{0j} r^{x_j}$ ($j = 1, 2, \dots, k$) で近似する。ただし、この分割は5.2節で述べた温度解析のための分割と同一である必要はない。本章では、最も単純な近似である「分割した各層におけるヤング率を相異なる一定値と近似する」ことは避けた。なぜなら、各仮想界面で円周方向応力が不連続になるという、連続的な組成変化を特徴とする FGM にとって望ましくない結果をもたらすからである。なお、パラメータ E_{0j} および x_j の決め方については付録 G にて説明する。

このヤング率の区分的べき乗関数近似を導入すれば、式(5.28)は次式のように表記される。

$$\frac{\partial^2 U_j}{\partial r^2} + \frac{x_j + y + 1}{r} \frac{\partial U_j}{\partial r} + \frac{\nu(x_j + y) - 1}{r^2} U_j = \frac{1+\nu}{E_j(r)d(r)} \frac{\partial}{\partial r} [E_j(r)d(r)\alpha(r)T^*(r, t)] \quad (5.29)$$

ここで、 U_j は第 j 層の半径方向変位である。式(5.29)の一般解は

$$U_j = C_{1j}^* r^{\varepsilon_{1j}} + C_{2j}^* r^{\varepsilon_{2j}} + \sum_{m=1}^2 (-1)^{m-1} \frac{(1+\nu)r^{\varepsilon_{mj}}}{\varepsilon_{1j} - \varepsilon_{2j}} \int_a^r \frac{r^{1-\varepsilon_{mj}}}{E_j(r)d(r)} \frac{\partial}{\partial r} [E_j(r)d(r)\alpha(r)T^*(r, t)] dr \quad (5.30)$$

ただし、

[†] 拘束されていても物体内に応力が生じない温度のこと。

$$\varepsilon_{1j}, \varepsilon_{2j} = \frac{-(x_j + y) \pm \sqrt{(x_j + y)^2 - 4[\nu(x_j + y) - 1]}}{2} \quad (5.31)$$

式(5.31)の判別式は一般の工業材料のポアソン比に対して常に正である。したがって、 ε_{1j} と ε_{2j} は相異なる二実根である。式(5.30)を式(5.26), (5.27)に代入すれば、最終的に第 j 層における二つの応力成分が次のように得られる。

$$\sigma_{rrj} = \frac{E_j(r)}{1-\nu^2} \sum_{m=1}^2 (\varepsilon_{mj} + \nu) r^{\varepsilon_{mj}-1} \left\{ C_{mj}^* + (-1)^m \frac{1+\nu}{\varepsilon_{1j} - \varepsilon_{2j}} [1 - \varepsilon_{mj} - (x_j + y)] \int_a^r r^{-\varepsilon_{mj}} \alpha(r) T^*(r, t) dr \right\} \quad (5.32)$$

$$\sigma_{\theta\theta j} = \frac{E_j(r)}{1-\nu^2} \sum_{m=1}^2 (1 + \nu \varepsilon_{mj}) r^{\varepsilon_{mj}-1} \left\{ C_{mj}^* + (-1)^m \frac{1+\nu}{\varepsilon_{1j} - \varepsilon_{2j}} [1 - \varepsilon_{mj} - (x_j + y)] \int_a^r r^{-\varepsilon_{mj}} \alpha(r) T^*(r, t) dr \right\} - E_j(r) \alpha(r) T^*(r, t) \quad (5.33)$$

円板の内・外側面には外力が作用していないと仮定しているため、境界条件は次式で与えられる。

$$\sigma_{rr1} = 0 \quad \text{at } r = a \quad (5.34)$$

$$\sigma_{rrk} = 0 \quad \text{at } r = b \quad (5.35)$$

一方、仮想界面での連続条件は

$$\sigma_{rrj} = \sigma_{rr(j+1)} \quad \text{at } r = r_j, \quad j = 1, 2, \dots, k-1 \quad (5.36)$$

$$U_j = U_{j+1} \quad \text{at } r = r_j, \quad j = 1, 2, \dots, k-1 \quad (5.37)$$

式(5.32), (5.33)に含まれる未知定数 C_{1j}^* , C_{2j}^* は式(5.34)–(5.37)から決定される。

5.5 数値計算結果と考察

5.5.1 計算条件の設定

数値計算の一例として、マルテンサイト系ステンレス鋼(SUS410)と部分安定化ジルコニア(PSZ)の組合せからなる傾斜機能中空円板が、典型的なガスタービンディスクが受ける熱負荷にさらされる場合を考える。この場合、熱は一定温度 T_b のガスによって円板の外縁部から一様に供給され、また、冷却流体の強制対流によって円板表面から除去される⁽¹⁷⁾。解析の一般性を考慮して、次のような無次元量を導入する。

$$B_a = \frac{\beta_a b}{\lambda_s}, \quad B_b = \frac{\beta_b b}{\lambda_s}, \quad \Theta_a(\tau) = \frac{T_a(t)}{T_b}, \quad \bar{d}_0 = \frac{d_0}{b}, \quad \xi = \frac{r}{b},$$

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \frac{a}{b}, & \tau &= \frac{\kappa_s t}{b^2}, & \Theta_u(\xi, \tau) &= \frac{T_u(r, t)}{T_b}, & \Theta_1(\xi, \tau) &= \frac{T_1(r, t)}{T_b}, \\ \Theta_i(\xi, \tau) &= \frac{T_i(r, t)}{T_b}, & \Theta_0(\xi) &= \frac{T_0(r)}{T_b}, & \bar{\sigma}_{rr}(\xi, \tau) &= \frac{\sigma_{rr}(r, t)}{E_s \alpha_s T_b}, & \bar{\sigma}_{\theta\theta}(\xi, \tau) &= \frac{\sigma_{\theta\theta}(r, t)}{E_s \alpha_s T_b}, \\ \bar{H}_i &= \frac{H_i b}{\lambda_s}, & \bar{G}_i &= \frac{G_i b}{\lambda_s}, & \bar{h}_i &= \frac{h_i b}{\lambda_s}, & \bar{g}_i &= \frac{g_i b}{\lambda_s} \end{aligned} \quad (5.38)$$

ここで、 $\lambda_s, \kappa_s, E_s, \alpha_s$ はそれぞれ SUS410 の熱伝導率、熱拡散率、ヤング率、線膨張係数である。

表 5-1 に SUS410 と PSZ の物性値を示す。また、FGM の材料組成分布は次のようなベキ乗則で与えられるものとした。

$$f_{\text{PSZ}} = \left(\frac{\xi - \bar{a}}{1 - \bar{a}} \right)^N \quad (5.39)$$

ここで、 f_{PSZ} は PSZ の体積分率、 N はベキ指数である。図 5-3 に示すように、数値計算は二種類の傾斜組成分布—セラミックリッチ($N=0.3$)およびセラミックプア($N=3$)—に対して行った。各材料組成分布に対する FGM の材料特性は、密度と比熱に関しては線形複合則より算出し、それ以外は Mori-Tanaka の理論⁽⁸¹⁾を用い、さらに中間層($0.3 < f_{\text{PSZ}} < 0.7$)においては、母相と分散相の識別にファジィ推論⁽⁸²⁾を併用して算出した。

Table 5-1 Material properties of SUS410 and PSZ^(74, 118, 119)

	λ [W/(m·K)]	E [GPa]	α [K ⁻¹]	ρ [kg/m ³]	c [J/(kg·K)]
SUS410	24.91	200	11.7×10^{-6}	7,750	461
PSZ	1.67	211	2.93×10^{-6}	5,730	467

また、円板の上下面で熱伝達率の平均は互いに等しいとし、その空間的変化として次式のベキ乗関数を定義する。

$$\bar{H}(\xi) = \bar{G}(\xi) = m \cdot \xi^{0.6} \quad (5.40)$$

これは、ガスタービンディスクのように周囲媒体が乱流となるような高速回転円板の、実際の表面熱伝達率分布に対する第一近似とみなせる⁽¹²⁰⁾。パラメータ m は熱伝達率の大きさを規定している。 \bar{H}_i, \bar{G}_i ($i=1, 2, \dots, n$) の値は $\xi = (\xi_i + \xi_{i-1})/2$ で定義される各層の中央半径での $\bar{H}(\xi), \bar{G}(\xi)$ の評価値として得られる。

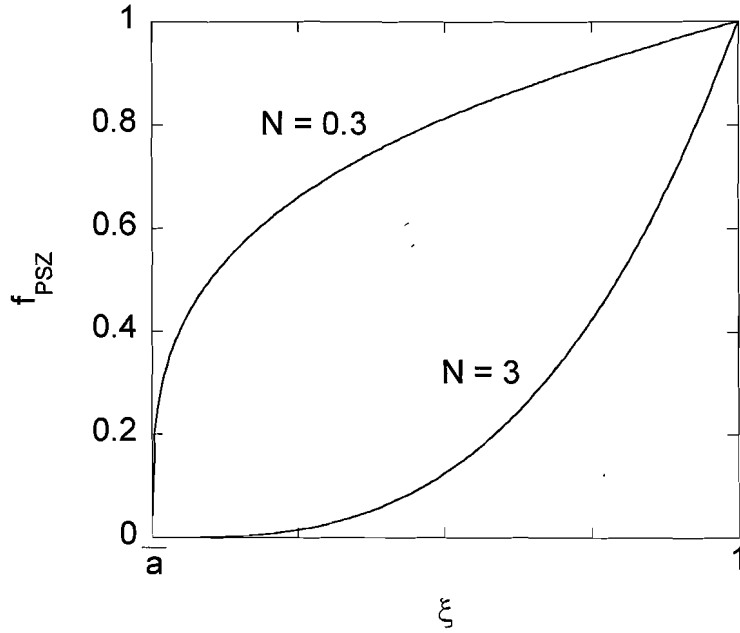


Fig. 5.3 Volume fraction profiles of PSZ along the radial direction

数値計算諸元として次の値を採用する.

$$\begin{aligned}
 B_a = 0, \quad B_b = \infty, \quad \bar{d}_0 = 0.05, \quad \Theta_u = \Theta_l = 0, \quad \nu = 0.3, \\
 \bar{a} = 0.2, \quad \Theta_0 = 0, \quad B_1 = B_2 = 5, \quad C_1 = 0, \quad n = k = 50
 \end{aligned} \tag{5.41}$$

ここで, Brown ら⁽¹⁷⁾と同様に中空円板の内側面は断熱されているものとした. また, 円板の初期温度を基準温度にとった. 本数値計算では簡単化のために, 熱応力解析のための層分割は温度解析の際に用いたものと同じとし, 全半径にわたって等間隔 (キザミ $\Delta = (1-\bar{a})/n$) に分割している. n の値はランダムな熱伝達率の空間周波数特性に応じて適切に選択する必要がある. その選択方法の詳細は付録 E にて説明する. 本数値計算では, 熱伝達率のランダム性はその変動係数によって特徴づけられるものと仮定し, それを次のように与える.

$$V = \frac{S[\bar{h}_i]}{\bar{H}_i} = \frac{S[\bar{g}_i]}{\bar{G}_i} = 0.2 \tag{5.42}$$

式(5.42)は, ランダムな熱伝達率が正規分布に従うならば, その平均まわりに $\pm 60\%$ の範囲でばらつくことを意味する.

式(5.14)に含まれる無限級数は, 温度の統計量について有効数字を 4 桁得るために, $\infty = 50$ と近似して以下の計算を行った.

5.5.2 決定論的な温度と熱応力に対する解析解の検証

5.4節で導いた解析解の妥当性を示すため、非円筒面が断熱されている一様厚さの不均質中空円板を考える。不均質性は次式で与えられるものとする。

$$\lambda(\xi) = \lambda_0 \exp\left(N_\lambda \frac{\xi - \bar{a}}{1 - \bar{a}}\right), \quad E(\xi) = E_0 \exp\left(N_E \frac{\xi - \bar{a}}{1 - \bar{a}}\right),$$

$$\alpha(\xi) = \alpha_0 \exp\left(N_\alpha \frac{\xi - \bar{a}}{1 - \bar{a}}\right). \quad (5.43)$$

この不均質円板に対して、Zenkour⁽¹¹⁶⁾は定常温度と熱応力の厳密解を得ている。5.4節で導いた解析解とZenkourによる厳密解を用いて、 $N_\lambda = \ln(2.09/204)$, $N_E = \ln(151/70)$, $N_\alpha = \ln(1/2.3)$, 無次元内側面温度 $T_a/T_b = 290/1290$ として温度分布および熱応力分布の比較を行った (図5-4)。図の縦軸には上記文献内で使用されている無次元量を用いている。この図より、導出した解析解と厳密解は温度、熱応力とも良く一致しており、層分割数を $n = k = 50$ にとれば工学的に十分な精度で解析できることが示された。

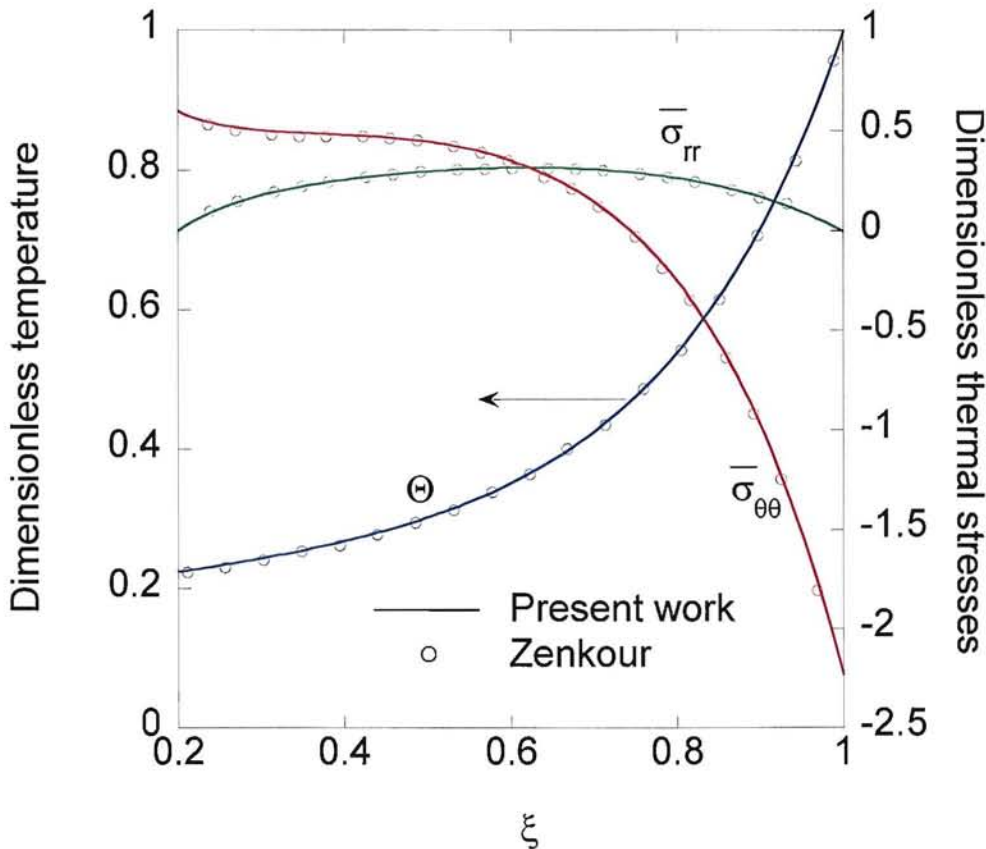


Fig. 5-4 Comparison of present analytical solution with exact solution for dimensionless temperature and thermal stresses

5.5.3 解析結果の収束に及ぼすシミュレーション回数の影響

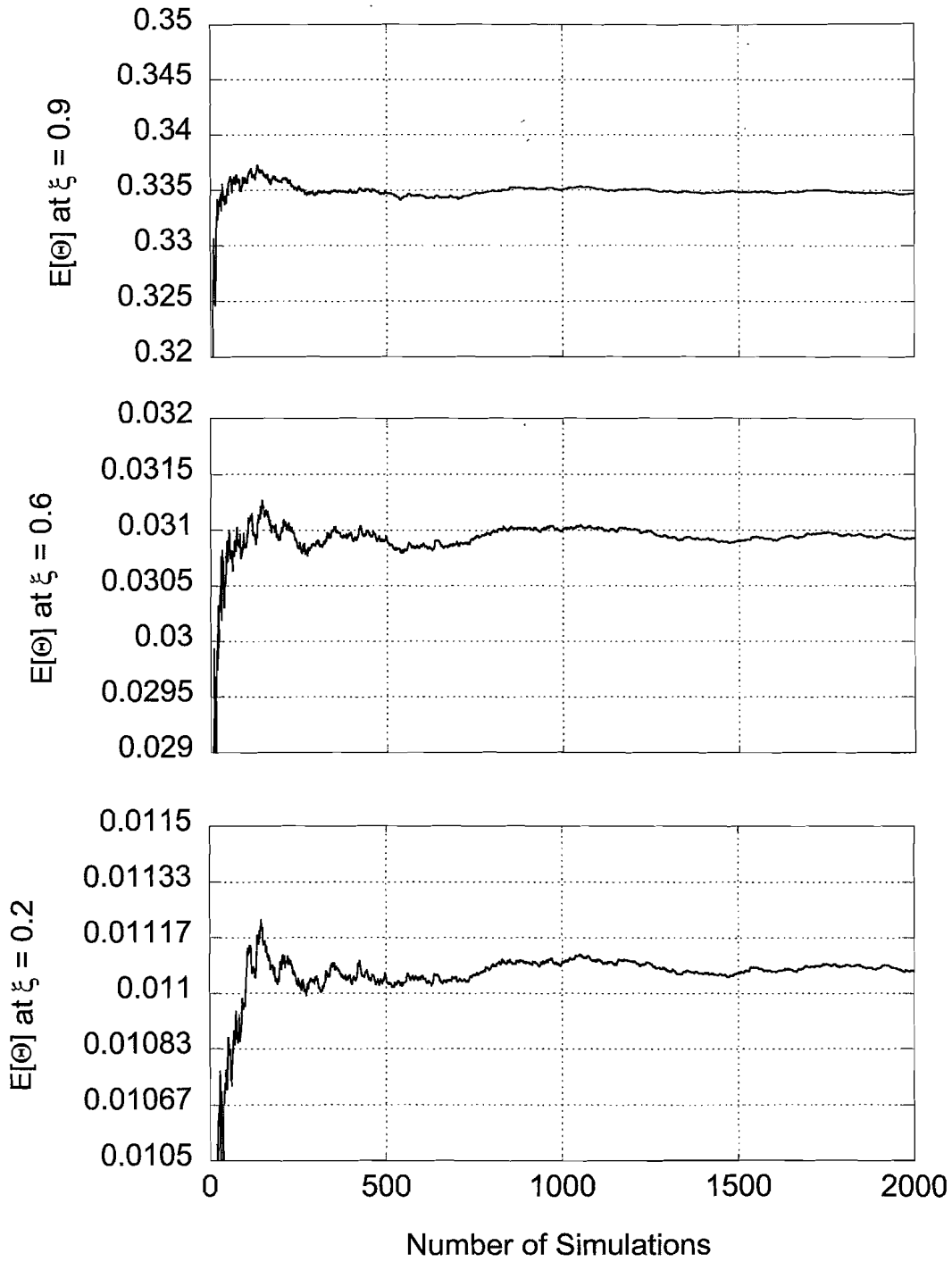
モンテカルロ・シミュレーションに基づく解析結果の収束状況を調べるため、5.3節で述べたベクトル \mathbf{h}, \mathbf{g} のセットを 2000 個発生させ、これらのサンプルを用いて複数の位置での温度および熱応力値を計算した。図 5-5 は $m=0.1, N=0.3, y=-0.5$ とした場合の 3 つの異なる位置 ($\xi=0.2, 0.6, 0.9$) における定常温度の平均と標準偏差の収束挙動を示している。シミュレーション回数が 1000 を越えると平均の変動は 0.5%以内であるため、平均はほぼ一定とみなせるだろう。一方、標準偏差は平均と比べるとかなりの変動を示している。しかしながら、シミュレーション回数が 1500 を越えるとその変動は 1%以内に収まる。したがって、1500 サンプルを用いれば解析結果の十分な収束が得られることがわかる。同位置における応力値の収束に関しても同様な結果が得られた。これ以降に示す結果は全て、サンプル数を 1500 としたシミュレーションから得られたものである。

5.5.4 温度の二次統計量

はじめに、熱伝達率の平均の大きさと構成材料の体積分率分布が及ぼす温度の統計量の非定常分布への影響について考察する。図 5-6a-c はそれぞれ、 $m=0.01, 0.1, 1$ とした場合の無次元温度 Θ の平均と標準偏差を示したものである。図 5-6c 中の内挿図は、平均、標準偏差ともに変化の大きな $0.9 \leq \xi \leq 1$ の範囲を見やすくするため、横軸のレンジを拡大したものである。まず、どの図においても、平均と標準偏差はフーリエ数 τ 、すなわち時間とともに増加していることがわかる。さらに、平均は半径方向に単調に増加しているが、標準偏差の分布は単調ではなく、極大値をもっている。 m が小さい時、加熱面近傍で大きな温度勾配が生じるため、同領域に標準偏差の極大値が現れている。そして時間の経過とともに、その極大値を生じる位置は内半径側へ移動している。これは熱が徐々に内半径側へ伝導するからである。極大値の位置の移動量は m が大きいほど小さく、 $m=1$ の場合、その移動量は外半径のわずか 3%程度にすぎない。

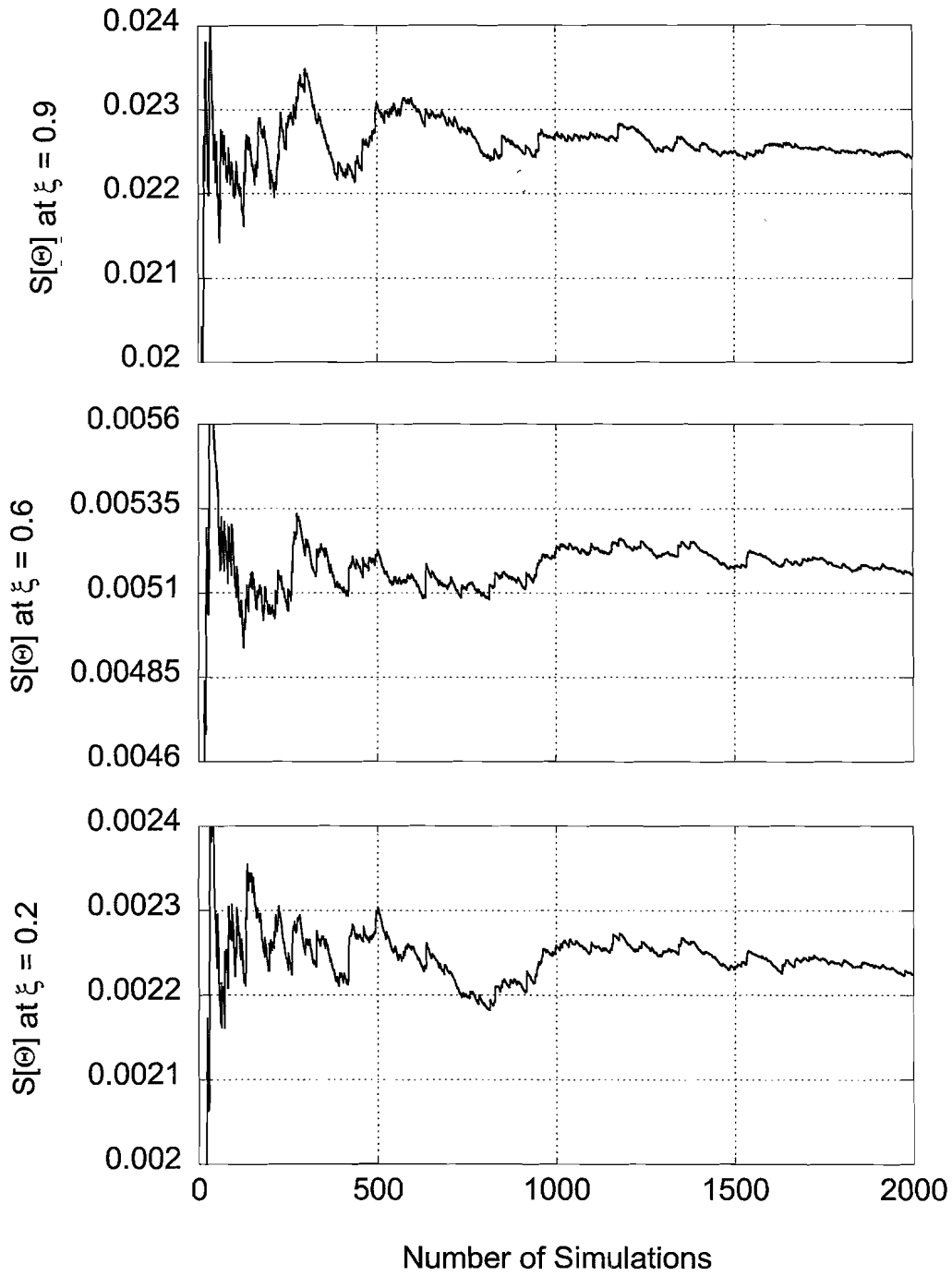
図 5-6 の 3 つのグラフの比較から、平均分布において、 m が大きいほど外半径上での温度勾配がより急峻なことがわかる。これは、周囲媒体への熱放散が m の増加にともない促進されるためである。 m の値、すなわち熱伝達率の標準偏差の大きさ*が 2 オーダ変化するにもかかわらず、定常時の Θ の標準偏差が同一オーダにあることは興味深い。しかし同オーダにあっても、 m が大きいほど標準偏差の極大値は大きく、より尖った分布形状を呈す。式(5.40)、(5.42)から明らかなように、本計算例では熱伝達率の標準偏差は内半径上で最も小さく、半径座標とともに増加している。しかし、温度の標準偏差は内半径側で必ずしも小さくなく、特に m が小さい場合にこの傾向は顕著である。したがって、熱伝達率のバラツキと温度のバラツキは定性的に必ずしも一致しないと言える。なお、温度と熱応力の標準偏差に及ぼす m 値の影響について、付録 H にて詳しく考察している。

* 変動係数 $V =$ 一定の条件下では、式(5.42)より、熱伝達率の平均を M オーダ変化させると、熱伝達率の標準偏差も M オーダ変化する。



(a)

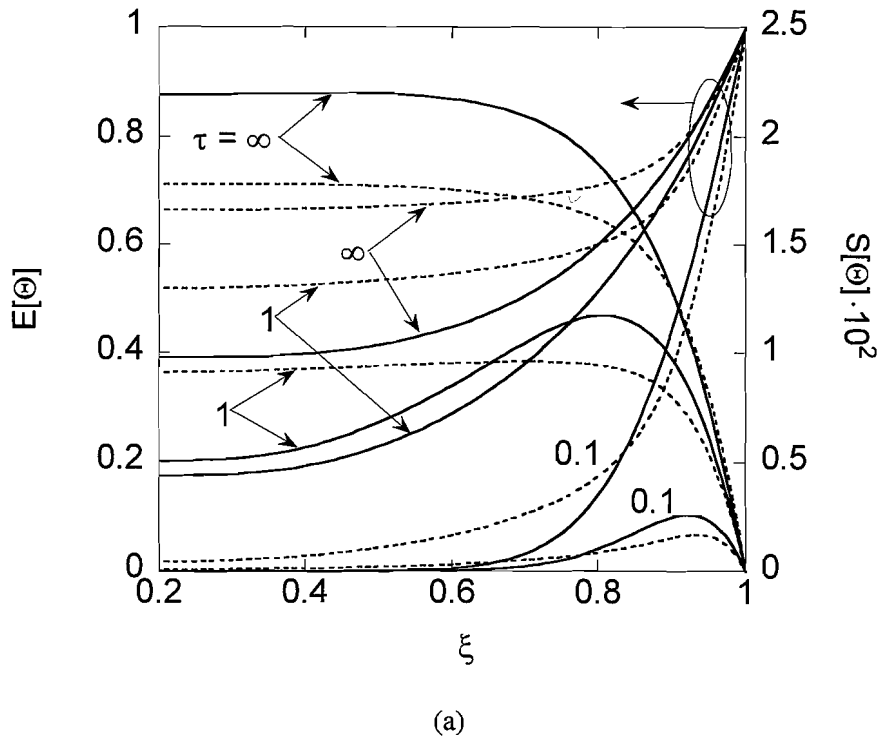
Continued on the next page



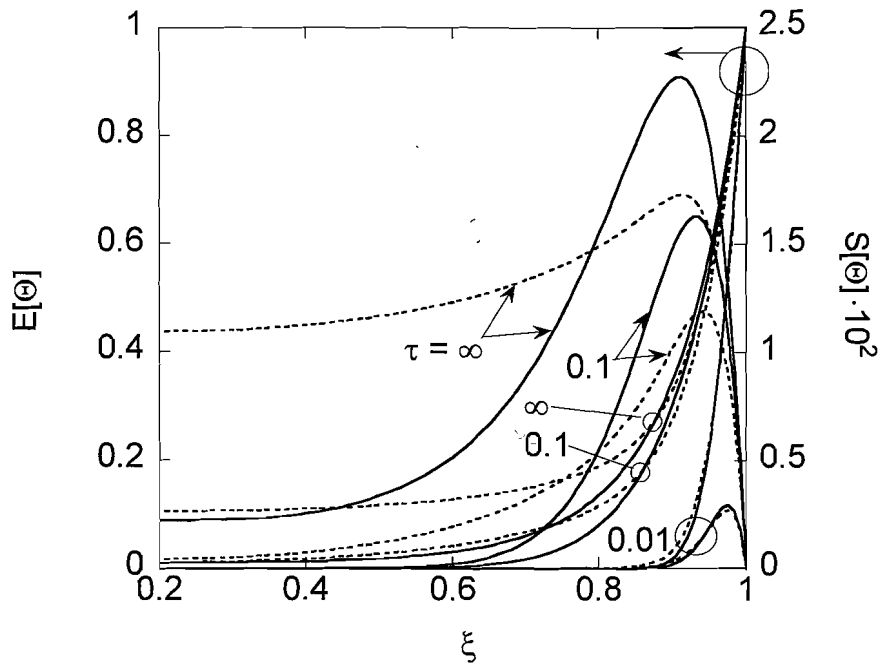
(b)

Fig. 5-5 (a) Mean and (b) standard deviation of Θ at three different locations, as a function of the number of simulations

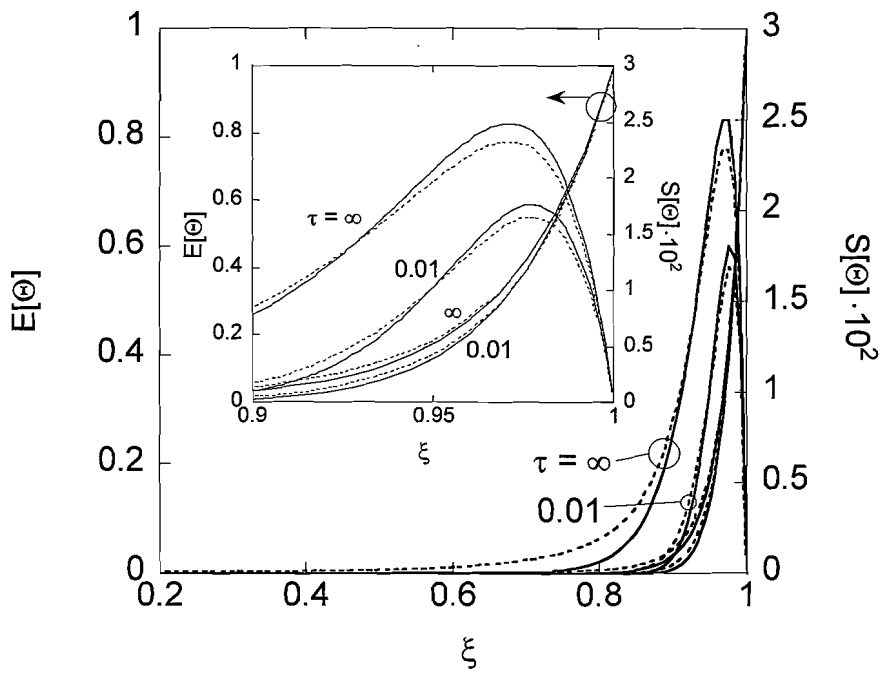
図 5-6a-c において組成分布の影響に注目すると、セラミックプアな組成($N=3$)は、熱伝導率が大きい金属の配合比が高いため、内半径側まで熱が良く伝わっている。一方、セラミックリッチな組成($N=0.3$)は、外半径側の豊富なセラミックによる高い遮熱性のため、内半径側の温度はセラミックプアほど上昇していない。加えて、二つの異なる組成分布間での Θ の標準偏差の差が時間とともに大きくなっている。各時刻における、二つの異なる組成分布間での標準偏差の大小関係は半径位置とともに変化するが、極大値で比較すると、常にセラミックリッチ組成のほうが大きい。



Continued on the next page



(b)



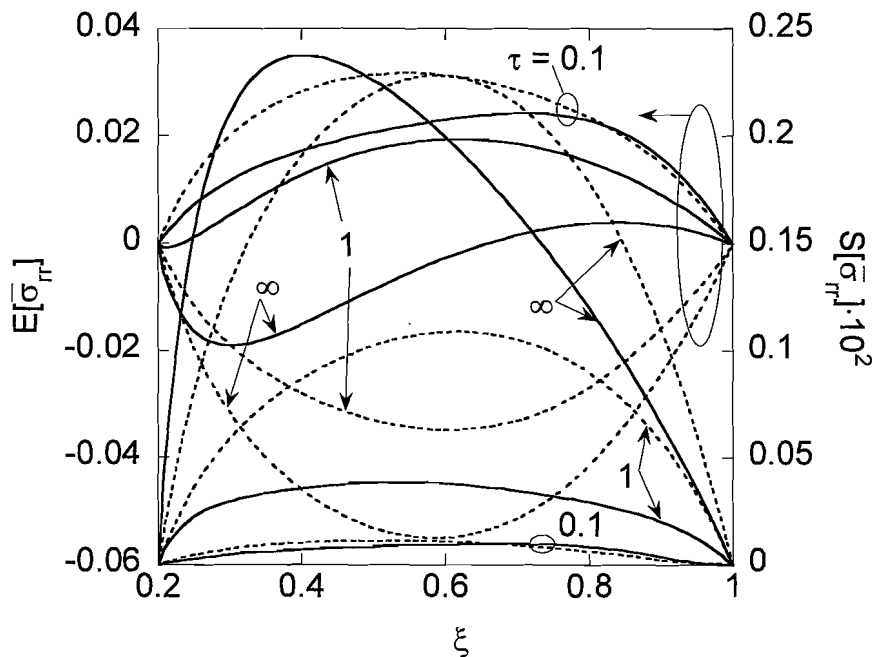
(c)

Fig. 5-6 The transient distribution of the statistics of the dimensionless temperature with $\gamma = -0.5$ for $N = 0.3$ (solid lines) and $N = 3$ (dashed lines), for (a) $m = 0.01$, (b) $m = 0.1$ and (c) $m = 1$

5.5.5 熱応力の二次統計量

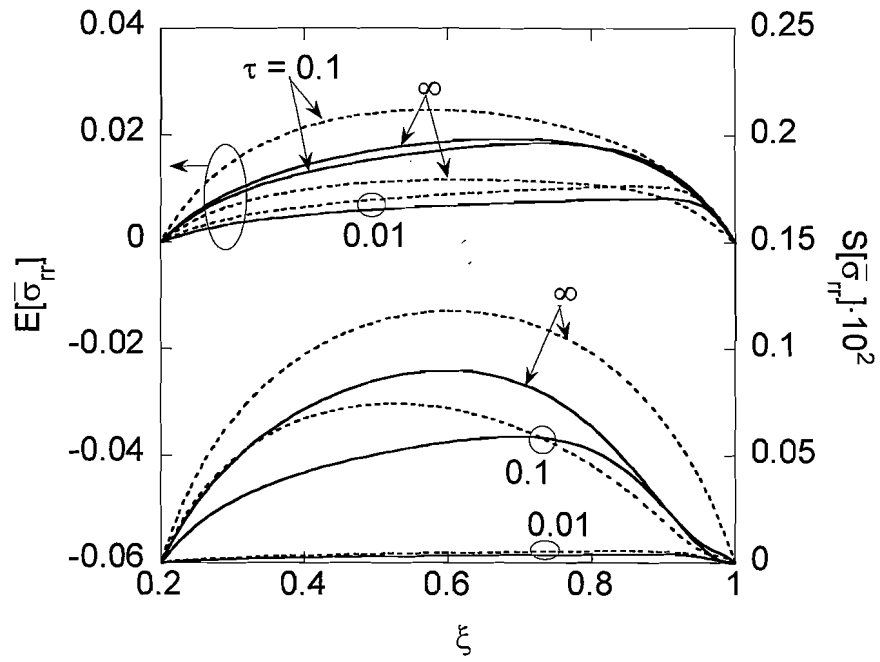
次に、熱応力の統計量の非定常挙動について考察する。図5-7a-cはそれぞれ、 $m = 0.01, 0.1, 1$ とした場合の無次元半径方向応力 σ_r の平均と標準偏差を示している。これらの図からわかるように、平均は必ずしも時間とともに増加していない（例えば $m = 0.01$ の場合、時間経過とともに平均は引張から圧縮へと変化している）が、標準偏差は常に増加している。さらに、 m の値の増加は σ_r の絶対値を減少させ、その標準偏差の変化レンジも狭めている。標準偏差の分布傾向は平均のそれと非常に良く一致している。すなわち、標準偏差は $E[\sigma_r]$ の絶対値が大きい場所で大きな値を示す傾向にある。

σ_r の標準偏差に及ぼす材料組成分布の影響は、温度場と同様、時間とともに増大している。二つの異なる材料組成に対する標準偏差の最大値を比較すると、 $m = 0.01, \tau = \infty$ の場合を除いて、セラミックプア組成の標準偏差がセラミックリッチ組成のそれよりも大きい。この結果は温度場の結果と異なっている。この理由は、セラミックプア組成のFGM円板では、線膨張係数が大きい金属の配合比が高いため、温度のバラツキが熱膨張量の大きなバラツキをもたらし、結果として、熱応力の標準偏差を大きくするからである。

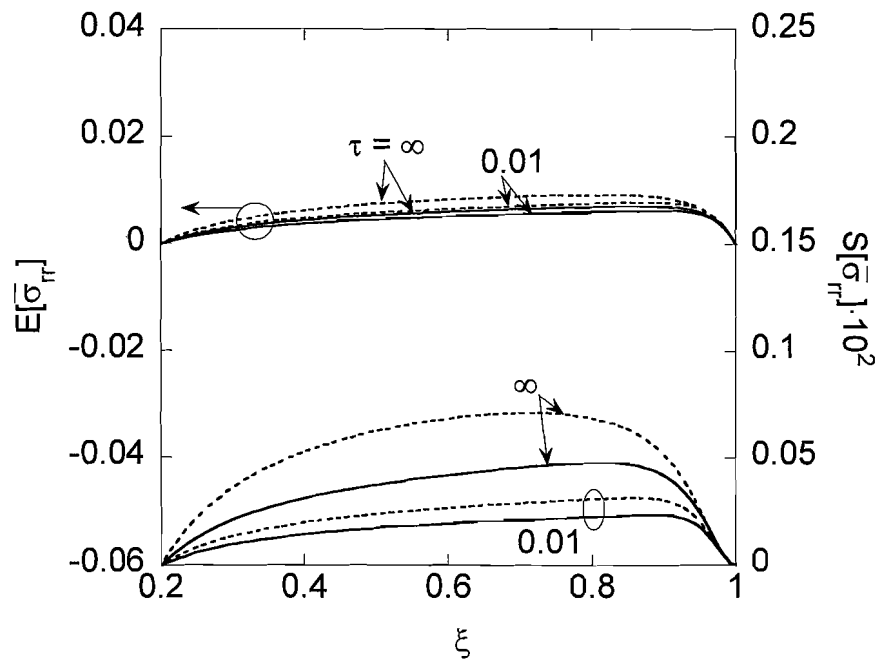


(a)

Continued on the next page



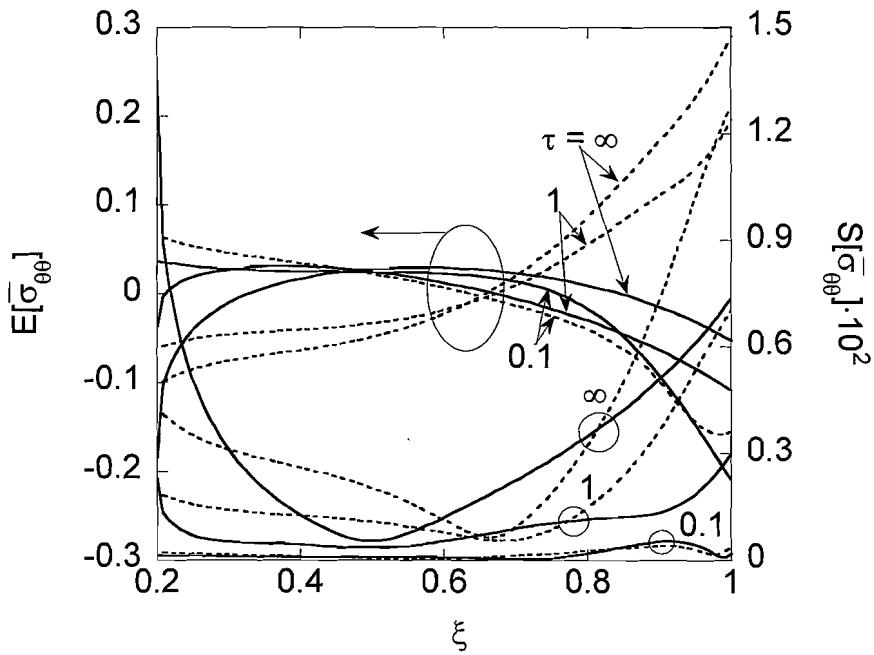
(b)



(c)

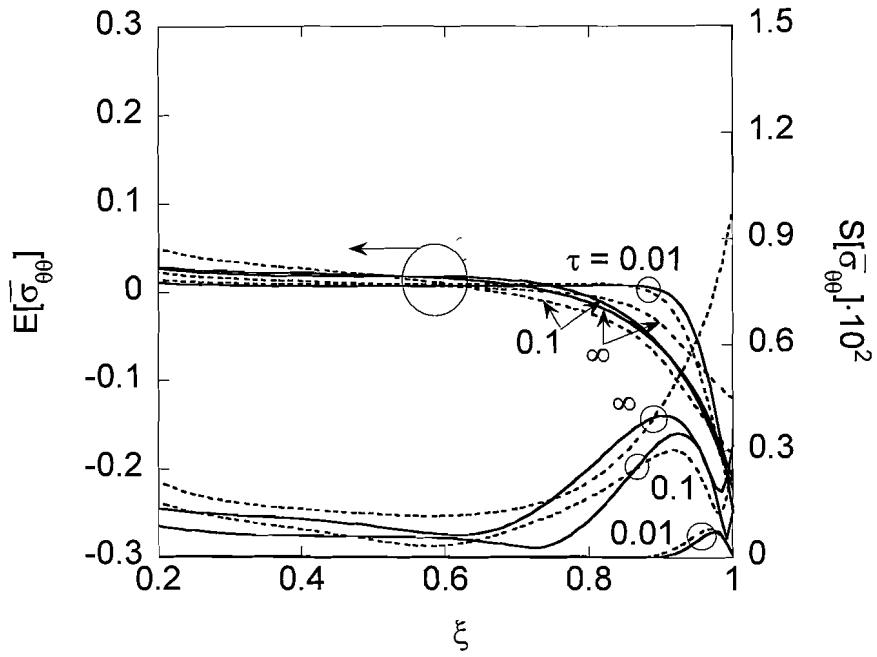
Fig. 5·7 The transient distribution of the statistics of the dimensionless radial stress with $y = -0.5$ for $N = 0.3$ (solid lines) and $N = 3$ (dashed lines), for (a) $m = 0.01$, (b) $m = 0.1$ and (c) $m = 1$

図5・8a-cはそれぞれ、 $m = 0.01, 0.1, 1$ とした場合の無次元円周方向応力 $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ の平均と標準偏差を示している。半径方向応力の場合と同様に、①標準偏差は時間とともに増加する②標準偏差に及ぼす材料組成分布の影響も時間とともに大きくなる③標準偏差の変化レンジは m の値の増加につれて縮小傾向にある—ことが図から読みとれる。標準偏差の最大値は m が大きい場合、加熱面近傍に現れるのに対し、 m が小さい場合は側面上に現れている。 $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ の標準偏差の最大値が $\bar{\sigma}_r$ のそれよりも約5~12倍大きいことは注目し値する。組成がセラミックリッチよりもセラミックプアな場合において、熱応力が温度のバラツキに対してより敏感に応答することは、半径方向応力と共通である。

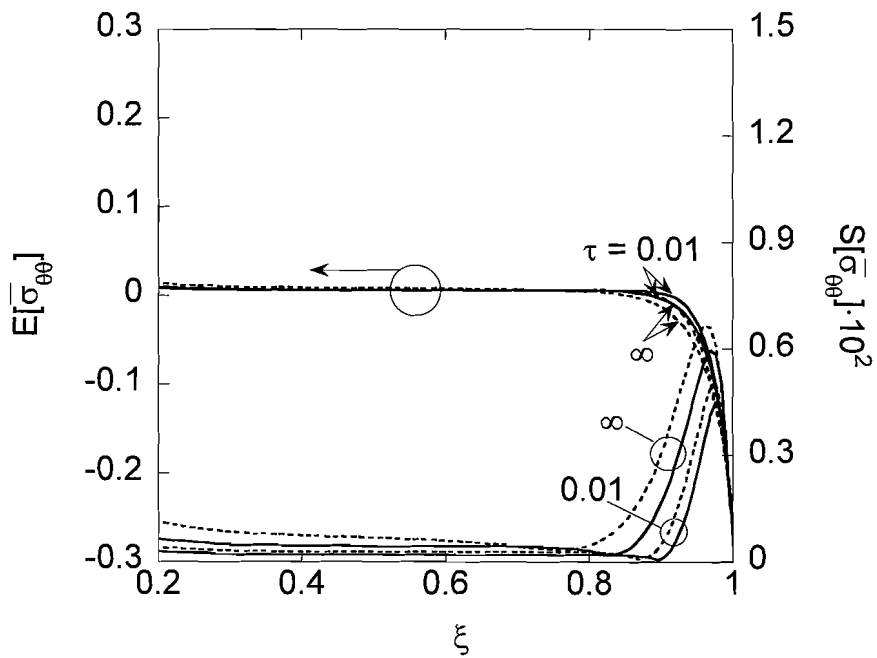


(a)

Continued on the next page



(b)



(c)

Fig. 5-8 The transient distribution of the statistics of the dimensionless tangential stress with $y = -0.5$ for $N = 0.3$ (solid lines) and $N = 3$ (dashed lines), for (a) $m = 0.01$, (b) $m = 0.1$ and (c) $m = 1$

図5-9は、 $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ の標準偏差に及ぼす熱伝達率の変動係数の影響について示したものである。内径・外径上での標準偏差は変動係数と比例関係にある一方、中央半径近傍($\xi \approx 0.6$)では変動係数が増加しても $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ の標準偏差は低いままである。しかしながら、変動係数を変化させても $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ の標準偏差分布の形状は著しく変化せず、この傾向は材料組成パラメータ N とは無関係に確認された。

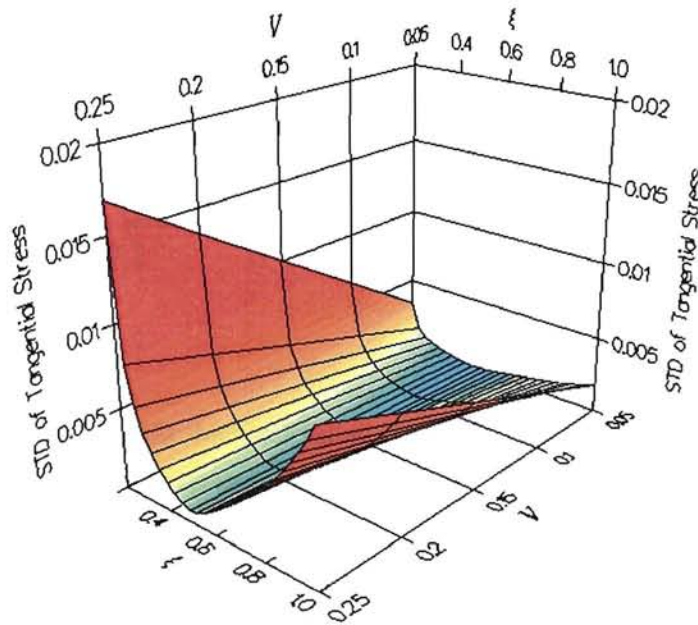


Fig. 5-9 Relationship between the standard deviation of $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ and the COV of heat transfer coefficients, V , for $y = -0.5, N = 0.3, m = 0.01$ and $\tau = \infty$

5.5.6 板厚変化の影響

最後に、温度と熱応力の統計量に及ぼす円板の板厚変化の影響について考察する。図5-10-5-12はそれぞれ、定常時における温度、半径方向応力、円周方向応力の平均と標準偏差を示したものであり、式(5.1)中の y をパラメータにとっている。図5-10に示されるように、 y が減少する、すなわち半径方向への板厚減少量が大きくなるにつれて、円板の温度は低下している。また、 y の減少は円板内の広い領域で標準偏差も低下させるが、加熱面近傍では逆に標準偏差の増加をもたらしている。熱応力についても同様に、 y が減少するにつれて標準偏差は低下している（図5-11, 5-12）。さらに、温度、熱応力のどちらに関しても、セラミックプア FGM の統計量はセラミックリッチ FGM のそれ以上に板厚変化の影響を受けやすい傾向にある。

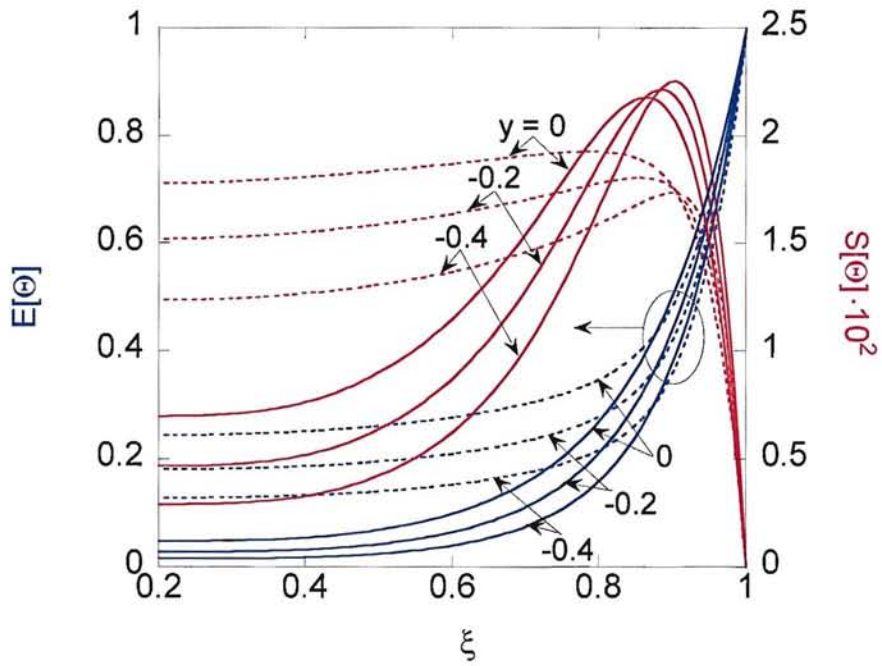


Fig. 5-10 The effect of the disc thickness variation on the mean and standard deviation of the steady-state dimensionless temperature with $m = 0.1$ for $N = 0.3$ (solid lines) and $N = 3$ (dashed lines)

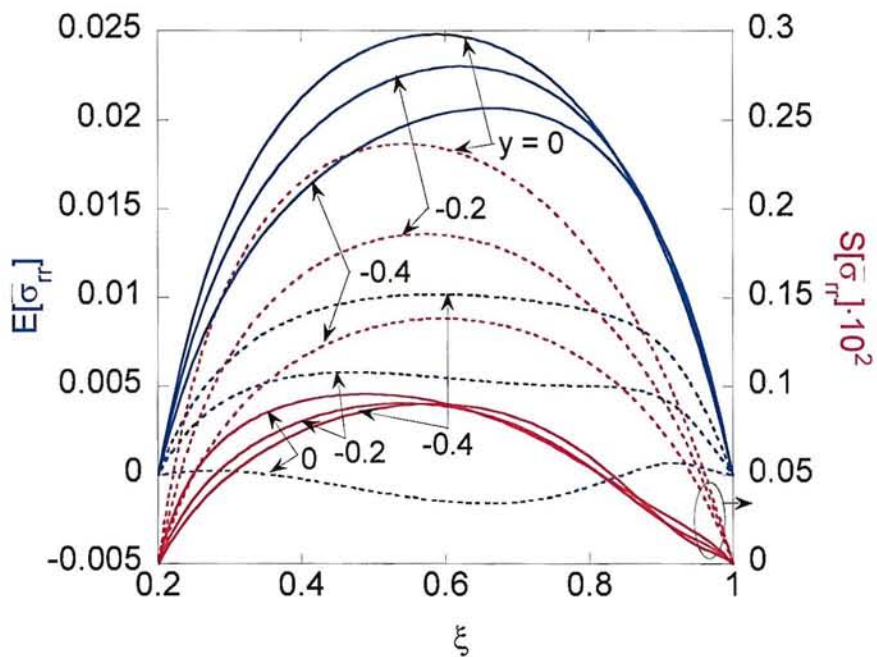


Fig. 5-11 The effect of the disc thickness variation on the mean and standard deviation of the steady-state dimensionless radial stress with $m = 0.1$ for $N = 0.3$ (solid lines) and $N = 3$ (dashed lines)

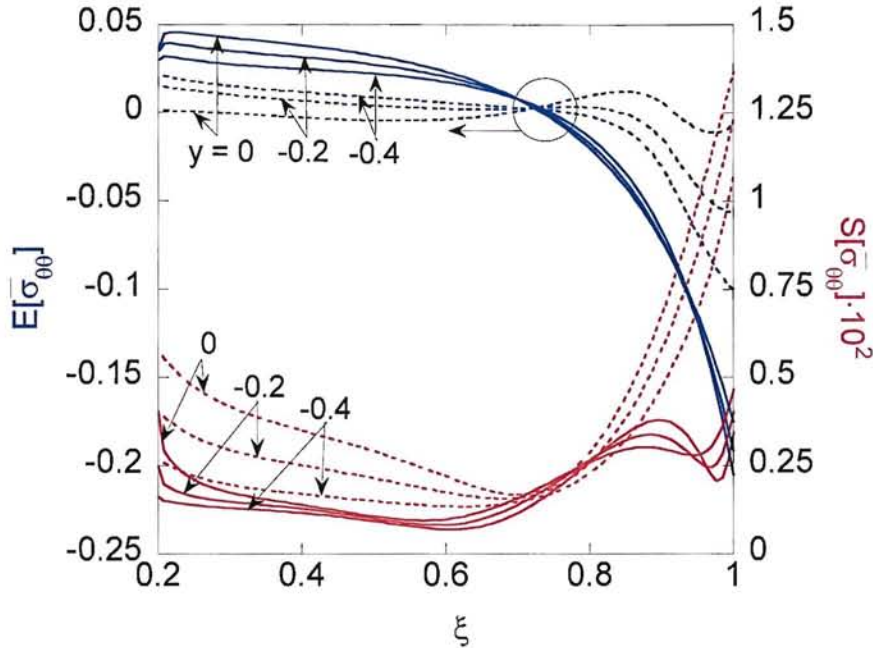


Fig. 5.12 The effect of the disc thickness variation on the mean and standard deviation of the steady-state dimensionless tangential stress with $m = 0.1$ for $N = 0.3$ (solid lines) and $N = 3$ (dashed lines)

5.6 結 言

表面の熱伝達率が空間的にランダムな FGM 変厚中空円板が、決定論的な温度をもつ周囲媒体から軸対称加熱される場合の確率論的熱伝導・熱応力問題を解析した。熱伝達率のランダム性が確率場としてモデル化できるという条件の下で、円板の温度と熱応力の二次統計量（平均と標準偏差）を、決定論的の温度および熱応力に対する近似解析解を用いたモンテカルロ・シミュレーションにより評価した。上記の近似解析解は Vodicka の手法とヤング率の区分的ベキ乗関数近似を利用して導出した。数値計算は、熱伝達率の平均が半径方向へ増加し、かつ熱伝達率の変動係数が面内で一定の場合について、二種類の異なる傾斜組成分布を有する PSZ/SUS410 系 FGM 中空円板に対して行った。熱伝達率の平均の大きさ、構成材料の体積分率分布、および板厚の変化が温度と熱応力の統計量に及ぼす影響について考察した。

得られた主な結論を以下にまとめる。

1. 温度の平均と標準偏差は時間とともに増加し、標準偏差に及ぼす材料組成分布の影響も増大する。また、温度の標準偏差分布は極大値をもち、その値はセラミックコア FGM よりもセラミックリッチ FGM の方が大きい。一般に、熱伝達率と温度の間で標準偏差の分布は定性的に一致しない。
2. 半径方向応力の平均は必ずしも時間とともに増加しないが、その標準偏差は時間経過につれて必ず増加し、標準偏差に及ぼす材料組成分布の影響も時間とともに増大する。温度場とは

異なり、標準偏差の最大値は、セラミックリッチ FGM よりもセラミックプア FGM において大きくなる傾向にある。一方、円周方向応力の標準偏差がもつ特徴は、上記の半径方向応力の標準偏差の特徴と一致するが、値そのものは半径方向応力の標準偏差と比較して非常に大きい。

3. 半径方向へ板厚が減少する円板は、等厚円板と比較して、その熱応力場が熱伝達率のランダム性の影響を受けにくいため、ロバスト性の向上が期待できる。

セラミック/金属からなる二相組織 FGM の熱応力破壊を抑制するには、その主原因であるセラミックの体積分率が高い高温側での引張応力をいかに緩和するかがキーとなる。このような意味から、熱応力緩和型 FGM の傾斜組成として一般に、「セラミックリッチな組成」が決定論的熱応力解析に基づき採用されている。結論 2 は、セラミックリッチな FGM はランダムな熱伝達率によって引き起こされる熱応力のバラツキを効果的に抑制できることを示唆している。したがって、FGM の材料設計を行う際、その組成分布をセラミックリッチな分布とすることが決定論的な見地からも確率論的な見地からも望ましいといえる。

第6章 総括

本論文は、スペースプレーンや高温ガスタービン、原子炉などのように、高度の安全性が要求される高温構造体の信頼性評価に資することを目的として、熱負荷条件や物性値などに不確定性を含む不均質体の温度・熱応力の統計量を数理解析的に評価する方法について論じたものである。その中でも特に、不均質体の熱応力に対する確率論的評価手法の開発は、熱応力緩和型 FGM の宇宙機への適用が検討されている今日において重要課題であり、本論文の産業界への貢献が期待されるところである。

第1章では、本研究の社会的背景と工学的意義および目的を示し、関係する既往の研究について整理した。また、本研究の根底にある概念である「確率過程」と「確率場」について、その基礎事項を概説した。

第2章では、ランダム変動する温度をもつ周囲媒体から対流加熱を受ける FGM 無限平板の確率論的熱伝導および熱応力問題を解析し、PSZ と SUS304 からなる FGM 無限平板が、ホワイトノイズと定常マルコフ過程で表現される周囲媒体温度により片面ランダム加熱される場合について数値計算を行い、傾斜組成と温度・熱応力の二乗平均との関係を考察した。その結果、以下の結論を得た。

- ①決定論的熱応力解析に基づいて最適化された組成分布は、ランダム加熱を受ける FGM 無限平板の熱応力変動の大きさと変動領域の広さからみて最適な組成分布とはいえず、傾斜組成をセラミックリッチな組成とすることで板厚全域にわたって熱応力変動を効果的に抑制できる。
- ②熱負荷に含まれる低周波成分の割合が高くなるほど、温度変動は FGM の組成分布の種類によらず大きくなる。
- ③熱負荷の周波数スペクトル特性が熱応力変動に及ぼす影響は、組成分布の種類によって変化する。

第3章では、初期温度が空間的にランダム分布している FGM 無限平板の非定常熱伝導問題と熱応力問題について論じた。PSZ/SUS304 系 FGM 無限平板の初期温度がホワイトノイズと一様マルコフ確率場で与えられる場合に対して数値計算を行い、傾斜組成の相違が温度と熱応力の二乗平均に及ぼす影響について考察した。その結果、以下の結論を得た。

- ①初期温度の確率場モデルに係わらず、温度の二乗平均値はセラミックの体積分率を増すと大きくなり、熱応力の二乗平均値は逆にセラミックの体積分率を低くすると大きくなる。
- ②初期温度がホワイトノイズと一様マルコフ確率場の場合において、温度および熱応力の二乗平均値は時間の経過とともに減少し、それらの分布傾向は熱移動開始直後の極めて短時間を

除いて、両確率場モデル間で類似している。

- ③熱応力の二乗平均値は、初期温度がホワイトノイズの場合、経過時間の短い時に平板内部で大きな値を示し、その後ある時刻から平板表面で最大値をとるが、初期温度がマルコフ確率場の場合は、常に平板表面に最大値が現れる。
- ④初期温度分布の空間周波数特性が広帯域になるにつれ、ランダム性の影響は速く減衰する。

第4章では、物性値の不確定性を考慮した FGM 無限平板の確率論的熱伝導問題と熱応力問題について、熱伝導率と線膨張係数が確率場で与えられる場合の温度および熱応力の統計量（平均と標準偏差）を、モンテカルロ・シミュレーション法（4.2節）と摂動法（4.3節）により定量的に明らかにした。また、物性値のばらつき特性が異なる複数の PSZ/SUS304 傾斜機能平板が片面を対流加熱される場合について数値計算し、傾斜組成分布、加熱面のピオー数、物性値の相関パラメータの違いが温度と熱応力の標準偏差に及ぼす影響を検討した。その結果、以下の結論を得た。

- ①温度と熱応力の標準偏差は時間とともに増加する。
- ②物性値のバラツキが大きい位置が加熱面に近いほど、また加熱面のピオー数が大きいほど、温度と熱応力の標準偏差は大きくなる。
- ③熱応力のバラツキは物性値のバラツキと定性的に必ずしも一致しない。
- ④FGM の構成材料そのものの物性値がばらつく場合、および物性値が FGM 固有の微視構造に基づいてばらつく場合、Ceramic-rich 組成は熱応力の平均、標準偏差のどちらも効果的に低減できる。
- ⑤熱伝導率の自己相関性が強いと温度の標準偏差は大きくなり、線膨張係数の自己相関性が強いと熱応力の標準偏差は小さくなる。また、熱伝導率と線膨張係数との間に相互相関が存在する場合、存在しない場合と比べて熱応力の標準偏差は低下する。

第5章では、非円筒面の熱伝達率が空間的にランダムな FGM 円板の確率論的熱伝導問題および熱応力問題について論じた。半径方向に厚さが変化する FGM 変厚中空円板の温度と熱応力の二次統計量をモンテカルロ・シミュレーションにより定量的に評価した。熱伝達率の平均が半径方向へ増加し、かつ熱伝達率の変動係数が面内で一定の場合について、二種類の異なる傾斜組成分布を有する PSZ/SUS410 系 FGM 円板に対して数値計算を行い、熱伝達率の平均の大きさ、構成材料の体積分率分布および板厚の変化が、温度と熱応力の統計量に及ぼす影響について考察した。その結果、以下の結論を得た。

- ①温度の平均と標準偏差は時間とともに増加し、それに合わせて標準偏差に及ぼす材料組成分布の影響も増大する。
- ②一般に、熱伝達率の標準偏差分布と温度のそれとは定性的に一致しない。
- ③温度と同様、熱応力の標準偏差は時間の経過につれて必ず増加し、標準偏差に及ぼす材料組成分布の影響も時間とともに増大する。
- ④熱応力の標準偏差は半径方向応力よりも円周方向応力において、またセラミックリッチ FGM

よりもセラミックプア FGM において大きくなる傾向にある。

- ⑤半径方向へ板厚が減少する円板は、一様厚円板と比較して、その熱応力場が熱伝達率のランダム性の影響を受けにくいいため、ロバスト性の向上が期待できる。

以上、本論文では確率変動量の種類に応じて問題を場合分けし、各章で個別に温度と熱応力の統計量について考察した。実際問題として、FGM はその製造プロセスの性格上、物性値に不確定性を必ず含む。したがって、FGM の各種物理問題を解析する際には物性値の不確定性を考慮することは必須である。一方、その他のパラメータを確率量と見なすか否かは想定している使用環境による。たとえば、熱負荷条件に無視できない不確定性が存在するならば、そのランダムな熱負荷に起因する温度・熱応力の統計量と物性値の不確定性に起因した統計量の双方を考慮して、システム全体としての最終的な統計量を評価する必要がある。

最後に、本研究に関する「今後の課題と展開」について述べ、本論を閉じる。

- (i) 従来から、ランダム加熱を受ける物体の熱伝導・熱弾性解析に関する研究では、定常過程のみが対象とされていたため、熱的境界条件として与える時間関数が地震動のように非定常な確率過程である場合には、区分的に定常な区間を仮定し、区間ごとに定常過程として解析を行い、それから各区間を再びつなぎあわせるといった工夫が必要であった。実際の操業中において、構造体（特に FGM の使用が検討されている先進構造体）が定常確率過程として扱うには難のある熱的負荷にさらされる場合は少なくない。このことから、従来の定常確率過程論の枠組みの中で扱われた上記解析を、非定常確率過程に対して拡張することが必要であろう。
- (ii) FGM の物性値に含まれる不確定性は、構成材料そのものの物性値のバラツキや FGM 固有の複雑な微視構造のバラツキに起因すると考えられる。そのため、複数の構成材料が混合状態にある微視的な組織に注目し、そのマイクロなスケールにおけるパラメータ（構成材料の物性値の他に、例えば、分散粒子の形状やサイズ、ネットワーク構造における材料同士のからまり具合など）を確率量とみなした「マイクロメカニクスに基づく確率論的研究」も残された課題の一つであろう。均質化法や重畳メッシュ法などに代表されるマルチスケール解析法と確率有限要素法を組み合わせることで、この種の解析が可能になると思われる。
- (iii) 厳密に考えると、物体表面の熱伝達率は、その影響因子の多さから空間的にも時間的にも変動するものである。第5章および付録 D では、熱伝達率の空間的な変動にのみ注目し、時間的には不変であるとして確率論的解析を行った。今後は、熱伝達率を時空間確率過程（確率過程と確率場を合わせたもの）としてモデル化し、時間的なランダム性の影響を考慮して温度と熱応力の統計量を評価することが課題となろう。
- (iv) 宇宙往還機の機体材料として FGM を使用する場合、1500K 以上もの温度落差にさらされるこ

とになるため、部分的には塑性変形する可能性が大いにあり得る。したがって、本論文で示された弾性域での議論を塑性域まで発展させるため、熱弾塑性挙動に関する同様な確率論的研究を行うことも、実際の FGM 構造体の信頼設計の観点からは重要であろう。

参考文献

- (1) 宮田寛・飯島史郎・大島亮一郎・阿部俊夫・久松暢・浜松照秀 (1988) 高温機器の構造要素へのセラミックス利用技術. *機論 A*, **54**, 1700-1708.
- (2) Hutchinson, D. E. and Norton, M. P. (1986) Applicability of stochastic process theory to heat conduction in solids with random temperature fields. *Appl. Energ.*, **22**, 241-269.
- (3) Nakamura, T. and Fujii, K. (2006) Probabilistic transient thermal analysis of an atmospheric reentry vehicle structure. *Aero. Sci. Tech.*, **10**, 346-354.
- (4) Samuels, J. C. (1966) Heat conduction in solids with random external temperatures and/or random internal heat generation. *Int. J. Heat Mass Tran.*, **9**, 301-314.
- (5) Parkus, H. (1962) Thermal stresses in bodies with random surface temperature. *ZAMM*, **42**, 499-507.
- (6) Poterasu, V. F., Tanaka, K. and Sugano, Y. (1994) Stochastic FEM Formulation of Thermoelastic Behavior in Functionally Gradient Materials. 東京都立科学技術大学紀要, 83-88.
- (7) Gaikovich, K. (1996) Stochastic approach to the results of simultaneous solution of emission transfer and thermal conductivity equations. *Radiophys. Quantum Electronics*, **39**, 273-281.
- (8) Gaikovich, K. P. (1996) Stochastic Theory of Temperature Distribution and Thermal Emission of Half-Space with Random Time-Dependent Surface Temperature. *IEEE Trans. Geosci. Rem. Sens.*, **34**, 582-587.
- (9) Gaikovich, K. (1997) Correlation theory of the thermal regime and thermal radiation of a medium with random boundary conditions. *Radiophys. Quantum Electronics*, **40**, 395-407.
- (10) Moskalenko, V. N. (1968) Random temperature fields in plates and shells. *Int. Appl. Mech.*, **4**, 6-9.
- (11) Novichkov, Y. N. and Butko, A. M. (1979) Investigation of random temperature fields in two-layer plates with the use of the Monte Carlo method. *Int. Appl. Mech.*, **15**, 160-165.
- (12) Hung, H. M. (1969) Heat Transfer of Thin Fins with Stochastic Root Temperature. *J. Heat Tran.*, **91**, 129-134.
- (13) Heller, R. A. (1976) Temperature response of an infinitely thick slab to random surface temperatures. *Mech. Res. Comm.*, **3**, 379-385.
- (14) Madera, A. G. (1993) Modelling of stochastic heat transfer in a solid. *Appl. Math. Model.*, **17**, 664-668.
- (15) Yoshimura, T. and Campo, A. (1981) Extended surface heat rejection accounting for stochastic sink temperatures. *AIAA Journal*, **19**, 221-225.
- (16) Nicolai, B. M. and Baerdemaeker, J. D. (1992) Simulation of heat transfer in foods with stochastic initial and boundary conditions. *Trans. IChemE Part C*, **70**, 78-82.
- (17) 天田重庚 (1982) ランダムな境界温度を有する物体の熱応力. *材料*, **31**, 251-257.

- (18) Zeman, J. (1965) Locally and temporally random distributed temperature and stress fields: part I. *Acta Mech.*, **1**, 194-211.
- (19) 田中泰明・鶴井明・豊田倫子 (1994) ランダム温度変動下でのピーク応力による疲労き裂進展寿命分布. *材料*, **43**, 68-74.
- (20) Heller, R. A. (1976) Thermal stress as a narrow-band random load. *Proc. ASCE J. Eng. Mech. Div.*, **102**, 787-805.
- (21) Klevtsov, I. (1994) Random Thermal Stress Oscillations and Fatigue Life Estimation for Steam Generator Tubes. *J. Pressure Vessel Technol.*, **116**, 110-114.
- (22) Zeman, J. L. (1966) A method for the solution of stochastic problems in linear thermoelasticity and heat conduction. *Int. J. Solids Struct.*, **2**, 581-589.
- (23) Zeman, J. L. (1965) Locally and temporally random distributed temperature and stress fields: part II. *Acta Mech.*, **1**, 371-385.
- (24) Miller, A. G. (1980) Crack propagation due to random thermal fluctuations: Effect of temporal incoherence. *Int. J. Pres. Ves. Pip.*, **8**, 15-24.
- (25) Madera, A. G. (1993) Method of analysis of stochastic nonstationary heat conduction equations. *J. Eng. Phys. Thermophys.*, **64**, 195-201.
- (26) 菅野良弘・木元順一 (1988) ランダムな加熱を受ける不均質板の熱応力解析. *機論 A*, **54**, 1993-1999.
- (27) 菅野良弘・木元順一 (1991) 不均質中空円板の非軸対称熱応力の確率論的解析. *機論 A*, **57**, 845-851.
- (28) Ahmadi, G. (1974) Heat conduction in solids with random initial conditions. *J. Heat Tran.*, **96**, 474-477.
- (29) Grigorkiv, V. S., Okunenko, V. N. and Timofeev, Y. A. (1982) Heat conduction in solids with finite rate of diffusion of heat and initial conditions in the form of random functions. *J. Eng. Phys.*, **42**, 61-63.
- (30) Val'kovskaya, V. I. and Lenyuk, M. P. (1996) Stochastic Nonstationary Temperature Fields in a Solid Circular-Cylindrical Two-Layer Plate. *J. Math. Sci.*, **79**, 1483-1487.
- (31) Tasaka, S. (1985) Non-stationary statistical solutions of a class of random diffusion equations: analytical and numerical considerations. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **21**, 1097-1113.
- (32) Keller, J. B., Papanicolaou, G. C. and Weilenmann, J. (1978) Heat conduction in a one-dimensional random medium. *Comm. Pure Appl. Math.*, **31**, 583-592.
- (33) Ahmadi, G. (1978) On functional methods for studying heat conduction in solids with random conductivity. *Letter Heat Mass Tran.*, **5**, 167-173.
- (34) Drewniak, J. (1985) Boundary elements for random heat conduction problems. *Eng. Anal.*, **2**, 168-170.
- (35) Fox, R. F. and Barakat, R. (1978) Heat conduction in a random medium. *J. Stat. Phys.*, **18**,

- 171-178.
- (36) 中村秀明・浜田純夫 (1994) 材料の不確定性を考慮したコンクリート構造物の熱伝導有限要素解析. 土木論, 71-80.
- (37) Emery, A. F. (2001) High order perturbation analysis of stochastic thermal systems with correlated uncertain properties. *J. Heat Tran.*, **123**, 390-398.
- (38) Ahmadi, G. (1978) A perturbation method for studying heat conduction in solid with random conductivity. *J. Appl. Mech.*, **45**, 933-934.
- (39) Tzou, D. Y. (1988) Stochastic analysis of temperature distribution in a solid with random heat conductivity. *J. Heat Tran.*, **110**, 23-29.
- (40) Chen, Y. M. and Tien, C. L. (1967) Penetration of temperature waves in a random medium. *J. Math. Phys.*, **46**, 188-194.
- (41) Tanaka, K., Horie, T. and Sekiya, T. (1979) Mean temperature field variations in heterogeneous media. *Acta Mech.*, **32**, 153-164.
- (42) Manolis, G. D. and Shaw, R. P. (1996) Boundary integral formulation for 2D and 3D thermal problems exhibiting a linearly varying stochastic conductivity. *Comput. Mech.*, **17**, 406-417.
- (43) Kaminski, M. and Hien, T. D. (1999) Stochastic finite element modeling of transient heat transfer in layered composites. *Int. Comm. Heat Mass Tran.*, **26**, 801-810.
- (44) Srivastava, K. and Singh, R. N. (1999) A stochastic model to quantify the steady-state crustal geotherms subject to uncertainties in thermal conductivity. *Geophys. J. Int.*, **138**, 895-899.
- (45) Srivastava, K. (2005) Modelling the variability of heat flow due to the random thermal conductivity of the crust. *Geophys. J. Int.*, **160**, 776-782.
- (46) Nicolai, B. M., Scheerlinck, N., Verboven, P. and Baerdemaeker, J. D. (2000) Stochastic perturbation analysis of thermal food processes with random field parameters. *Transactions of the ASAE*, **43**, 131-138.
- (47) 谷周一・中桐滋・鈴木敬子・東野恒之 (1987) CFRP 積層平板における熱変形と熱応力の確率有限要素解析 繊維配向角が不確定的な場合. 機論 A, **53**, 1197-1202.
- (48) Kotulski, Z. (1984) One-dimensional thermoelastic wave in solid with randomly fluctuating coefficient of linear expansion. *Arch. Mech.*, **36**, 499-514.
- (49) 会田八重・吉川弘道 (1999) 力学的確率場におけるマスコンクリートの温度応力解析とひび割れ発生確率. 土木論, 43-54.
- (50) Smith, C. O. (1984) Probabilistic design criteria for cylinders and spheres under thermal stresses. *J. Vib. Acoust. Stress Reliab. Des.*, **106**, 523-528.
- (51) Nakamura, H., Hamada, S., Tanimoto, T. and Miyamoto, A. (1999) Estimation of Thermal Crack Resistance for Mass Concrete Structures with Uncertain Material Properties. *ACI Struct. J.*, **96**, 509.
- (52) Sluzalec, A. (2000) Thermoelastic analysis in random conditions. *J. Therm. Stresses*, **23**, 131-141.

- (53) Barrett, P. R. (1975) Stochastic thermal stress analysis of clad cylindrical fuel elements. *Nucl. Eng. Des.*, **35**, 41-58.
- (54) 菅野良弘・千葉良一・菅野敏広 (2006) 物性値の不確定性を考慮した不均質平板の熱弾性問題の確率論的解析. *機論 A*, **72**, 247-254.
- (55) Ferrante, F. J. and Graham-Brady, L. L. (2005) Stochastic simulation of non-Gaussian/non-stationary properties in a functionally graded plate. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **194**, 1675-1692.
- (56) Madera, A. G. (1996) Heat transfer from an extended surface at a stochastic heat-transfer coefficient and stochastic environmental temperature. *Int. J. Eng. Sci.*, **34**, 1093-1099.
- (57) Kuznetsov, A. V. (1996) Stochastic modeling of heating of a one-dimensional porous slab by a flow of incompressible fluid. *Acta Mech.*, **114**, 39-50.
- (58) 森昌彦・近藤充 (1993) 熱伝達係数の不確かさを考慮した温度および熱応力解析. *機論 A*, **59**, 1514-1518.
- (59) 石川昌明 (1999) 不規則な熱ふく射を考慮した拘束条件下の熱弾性モデルとシミュレーションによる挙動解析について. *電情論 A*, **J82-A**, 972-979.
- (60) 石川昌明 (1997) 不規則入力をもつ厳密な熱伝導モデルについて. *システム制御情報学会論文誌*, **10**, 556-562.
- (61) Srivastava, K. and Singh, R. N. (1998) A model for temperature variations in sedimentary basins due to random radiogenic heat sources. *Geophys. J. Int.*, **135**, 727-730.
- (62) Clarke, N. S. (1984) Heat diffusion in random laminates. *Q. J. Mech. Appl. Math.*, **37**, 195-230.
- (63) 森昌彦・鶴飼修・近藤充 (1990) 不確かさを持つ薄肉圧力容器の確率有限要素法解析. *機論 A*, **56**, 1455-1460.
- (64) Shvets, R. N. and Eleiko, V. I. (1977) Stochastic temperature stresses in a cylinder with a rough surface. *Sov. Appl. Mech.*, **13**, 1209-1213.
- (65) Heller, R. A. and Thangjitham, S. (1987) Probabilistic methods in thermal stress analysis, In *Thermal Stresses* (Hetnarski, R. B., Ed.) pp 190-268, Elsevier Science Publishers, New York.
- (66) Emery, A. F. (2004) Solving stochastic heat transfer problems. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, **28**, 279-291.
- (67) 星谷勝・石井清 (2003) 構造物の信頼性設計法, 鹿島出版会, 東京.
- (68) Pradlwarter, H. J., Schueller, G. I., Koutsourelakis, P. S. and Charmpis, D. C. (2007) Application of line sampling simulation method to reliability benchmark problems. *Struct. Saf.*, **29**, 208-221.
- (69) Au, S. K., Ching, J. and Beck, J. L. (2007) Application of subset simulation methods to reliability benchmark problems. *Struct. Saf.*, **29**, 183-193.
- (70) 星谷勝 (1984) 確率論手法による構造解析, 鹿島出版会, 東京.
- (71) 小倉久直 (1998) 確率過程入門, 森北出版, 東京.
- (72) 島川貴司・宇野昌嘉・高松茂・毛利憲介・武浩司・宮下卓也・高橋由紀夫・三浦直樹 (1991)

- 高速増殖炉におけるサーマルストライピング下のき裂進展評価法の開発. 川崎重工技報, **110**, 55-63.
- (73) Chiba, R. and Sugano, Y. (2007) Stochastic thermoelastic problem of a functionally graded plate under random temperature load. *Arch. Appl. Mech.*, **77**, 215-227.
- (74) 菅野良弘・佐藤恵一・須見尚文 (1997) 区分的線形不均質性近似による傾斜機能平板の非定常温度場の解析解. 機論 A, **63**, 378-384.
- (75) Sugano, Y. (1987) An expression for transient thermal stress in a nonhomogeneous plate with temperature variation through thickness. *Ing. Arch.*, **57**, 147-156.
- (76) 荒木信幸・牧野敦・石黒達男・三原純 (1991) 非定常加熱時の多層試料内温度応答の解析解. 機論 B, **57**, 4235-4240.
- (77) 石黒達男・牧野敦・野田直剛・荒木信幸 (1992) 熱物性値が分布する物質の非定常温度応答 傾斜機能材料の温度応答における近似解の有用性. 機論 B, **58**, 3690-3696.
- (78) 牧野敦・荒木信幸・北嶋英俊・大橋賢太郎 (1994) ステップ状部分加熱による傾斜機能材料の非定常温度応答. 機論 B, **60**, 4200-4206.
- (79) 菅野良弘・菅野敏広・千葉良一 (2002) ランダム変動する境界温度をもつ傾斜機能積層平板の熱変形と熱応力の確率論的研究. 機論 A, **68**, 1588-1593.
- (80) 松下聡 (1997) 遺伝的アルゴリズムによる傾斜機能材料平板の最適材料組成設計の研究, 岩手大学大学院工学研究科.
- (81) Tanaka, K., Tanaka, Y., Watanabe, H., Poterasu, V. F. and Sugano, Y. (1993) An improved solution to thermoelastic material design in functionally gradient materials: Scheme to reduce thermal stresses. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **109**, 377-389.
- (82) 菅野良弘・森下博之・田中喜久昭 (1993) 任意の不均質性と加熱を有する傾斜機能平板の非定常熱応力の解析解 ファジィ推論による物性値を用いた場合. 機論 A, **59**, 2666-2673.
- (83) 笠原直人 (2000) 流体温度ゆらぎに対する接液構造物の周波数応答関数. 日本機械学会第 13 回計算力学講演会講演論文集, 229-230.
- (84) Ko, W. L. (1988) Solution accuracies of finite element reentry heat transfer and thermal stress analyses of space shuttle orbiter. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **25**, 517-543.
- (85) 菅野良弘・千葉良一 (2002) ランダムな初期温度をもつ傾斜機能平板の温度と熱応力の確率論的解析. 材料, **51**, 653-658.
- (86) Vodicka, V. (1955) Linear heat conduction in laminated bodies. *Math. Nachr.*, **14**, 47-55.
- (87) 菅野道夫 (1988) ファジィ制御, 日刊工業新聞社, 東京.
- (88) Miyamoto, Y., Kaysser, W. A., Rabin, B. H., Kawasaki, A. and R.G., F. (1999) *Functionally graded materials: design, processing and applications*, Kluwer Academic, Boston.
- (89) Sampath, S., Smith, W. C., Jewett, T. J. and Kim, H. (1999) Synthesis and characterization of grading profiles in plasma sprayed NiCrAlY-Zirconia FGMs *Mater. Sci. Forum*, **308-311**, 383-388.
- (90) Aihara, T., Kaji, M. and Igarashi, T. (1990) Numerical analysis of compositional distribution

- change in metal/Carbide functionally gradient material by thermal diffusion, In *1st International Symposium on FGM* (Yamanouchi, M., Koizumi, M., Hirai, T. and Shiota, I., Eds.) pp 39-43, Sendai, Japan.
- (91) 中桐滋・久田俊明 (1985) 確率有限要素法入門, 培風館, 東京.
- (92) Kitipornchai, S., Yang, J. and Liew, K. M. (2006) Random vibration of the functionally graded laminates in thermal environments. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **195**, 1075-1095.
- (93) Yang, J., Liew, K. M. and Kitipornchai, S. (2005) Stochastic analysis of compositionally graded plates with system randomness under static loading. *Int. J. Mech. Sci.*, **47**, 1519-1541.
- (94) 千葉良一・菅野良弘 (2004) モンテカルロシミュレーション法による物性値に不確定性をもつ傾斜機能平板の確率論的熱弾性問題の解析. *材料*, **53**, 967-973.
- (95) Chiba, R. and Sugano, Y. (2008) Stochastic analysis of a thermoelastic problem in functionally graded plates with uncertain material properties. *Arch. Appl. Mech.*, **78**, 749-764.
- (96) 星谷勝・千葉利晃 (1975) 弾性せん断ばりの自由振動に与える不確定要因の影響. *土木論*, **234**, 23-31.
- (97) Real, M. V., Filho, A. C. and Maestrini, S. R. (2003) Response variability in reinforced concrete structures with uncertain geometrical and material properties. *Nucl. Eng. Des.*, **226**, 205-220.
- (98) 西村昭 (1969) 鋼材の機械的性質のばらつきについて. *JSSC*, **5**, 68-75.
- (99) 傾斜機能材料研究会編 (1993) 傾斜機能材料, 工業調査会, 東京.
- (100) Olcer, N. Y. (1968) Theory of unsteady heat conduction in multicomponent finite regions. *Ing. Arch.*, **36**, 285-293.
- (101) Mikhailov, M. D. (1973) General solutions of the coupled diffusion equations. *Int. J. Eng. Sci.*, **11**, 235-241.
- (102) Ozisik, M. N. (1980) *Heat conduction*, A Wiley-Interscience publication, New York.
- (103) Chiba, R. and Sugano, Y. (2005) Stochastic thermal stresses in a functionally graded plate with uncertain material properties by Monte Carlo simulation method and material composition design, In *6th International Congress on Thermal Stresses* (Ziegler, F., Heuer, R. and Adam, C., Eds.) pp 61-64, Vienna, Austria.
- (104) Rahman, S. and Chakraborty, A. (2007) A stochastic micromechanical model for elastic properties of functionally graded materials. *Mech. Mater.*, **39**, 548-563.
- (105) 福谷和久・豊島史郎・豊秀喜・山本淳 (2003) 石英系光ファイバ素線紡糸過程における素線外径変動の摂動解法による数値計算. *機論 C*, **69**, 2403-2410.
- (106) 小河昭紀・祖父江靖 (1985) 航空用ガスタービンディスクの非定常熱応力. 第13回ガスタービン定期講演会講演論文集, 151-155.
- (107) Prasad, R. C., Karmeshu and Bharadwaj, K. K. (2002) Stochastic modeling of heat exchanger response to data uncertainties. *Appl. Math. Model.*, **26**, 715-726.
- (108) Chiba, R. (2007) Stochastic thermal stresses in an annular disc with spatially random heat transfer

- coefficients on upper and lower surfaces. *Acta Mech.*, **194**, 67-82.
- (109) Chiba, R. Stochastic thermal stresses in an FGM annular disc of variable thickness with spatially random heat transfer coefficients. *Meccanica*, in press.
- (110) Chiba, R. (2009) Stochastic heat conduction analysis of a functionally graded annular disc with spatially random heat transfer coefficients. *Appl. Math. Model.*, **33**, 507-523.
- (111) Sugano, Y., Kimoto, J. and Ootsubo, H. (1990) An analytical solution for a plane thermoelastic problem in nonhomogeneous multiply connected regions (2nd report, Transient thermal stresses in nonhomogeneous hollow circular plates of variable thickness subjected to asymmetric heating). *Trans. Jpn Soc. Mech. Eng.*, **56A**, 2145-2151.
- (112) 菅野良弘・千葉良一・広瀬宏一 (2001) 熱伝達率の任意な変化を考慮した円板の非定常温度と熱応力の解析解. *機論 A*, **67**, 542-548.
- (113) Sugano, Y., Chiba, R., Hirose, K. and Takahashi, K. (2004) Material design for reduction of thermal stress in a functionally graded material rotating disk. *JSME Int. J. Series A*, **47**, 189-197.
- (114) 千葉良一・泉正明・菅野良弘 (2007) 平行平板間の層流強制対流熱伝達問題の近似解析解. *機論 B*, **73**, 1220-1228.
- (115) Chiba, R., Izumi, M. and Sugano, Y. (2008) An analytical solution to non-axisymmetric heat transfer with viscous dissipation for non-Newtonian fluids in laminar forced flow. *Arch. Appl. Mech.*, **78**, 61-74.
- (116) Zenkour, A. M. (2006) Steady-state thermoelastic analysis of a functionally graded rotating annular disk. *Int. J. Struct. Stabil. Dynam.*, **6**, 559-574.
- (117) Brown, A. and Markland, E. (1964) Temperature distribution in cooled turbine disks. *Int. J. Heat Mass Tran.*, **7**, 327-332.
- (118) 渡辺正紀・向井喜彦 (1981) ステンレス鋼の溶接, 日刊工業新聞社, 東京.
- (119) 加藤康司・前川一郎・小野陽 (1995) 機械材料学, 朝倉書店, 東京.
- (120) Dorfman, L. A. (1963) *Hydrodynamic resistance and the heat loss of rotating solids*, Oliver and Boyd, Edinburgh London.
- (121) Nowinski, J. L. (1978) *Theory of thermoelasticity with applications*, Sijthoff & Noordhoff International Publishers, Alphen aan den Rijn.
- (122) Chiba, R. and Sugano, Y. Thermal stresses in bodies with random initial temperature distribution. *Math Mech Solid*, in press.
- (123) Newland, D. E. (1975) *An Introduction to Random Vibrations and Spectral Analysis*, Longman, London, New York.
- (124) Carslaw, H. S. and Jaeger, J. C. (1986) *Conduction of Heat in Solids* 2nd ed. ed., Clarendon Press, Oxford.
- (125) Boley, B. A. and Weiner, J. H. (1997) *Theory of thermal stresses*, Dover Publications, New York.
- (126) Nowacki, W. (1962) *Thermoelasticity*, Pergamon Press, Oxford.

- (127) 竹内洋一郎・野田直剛 (1989) 熱応力, 日新出版, 東京.
- (128) Wu, S. S. (1997) Analysis on transient thermal stresses in an annular fin. *J. Therm. Stresses*, **20**, 591-616.
- (129) Tuluszka, E. (1980) Temperature distribution and thermal stresses in a rotating turbine disk for various starting conditions. *Arch. Mech. Eng.*, **27**, 3-24.
- (130) 松田憲明・熊谷岩雄 (1980) タービンロータの起動時の熱応力解析. 九州電力総合研究所研究期報, **53**, 65-71.
- (131) Cho, C. and Ahn, S. (2002) Transient thermoelastic analysis of disk brake using the fast Fourier transform and finite element method. *J. Therm. Stresses*, **25**, 215-243.
- (132) Choi, J. H. and Lee, I. (2003) Transient thermoelastic analysis of disk brakes in frictional contact. *J. Therm. Stresses*, **26**, 223-244.
- (133) Noda, N. and Sumi, N. (1979) Application of the five-elementary-functions method to transient thermal-stress problems in multiply connected orthotropic regions. *J. Therm. Stresses*, **2**, 491-511.
- (134) Sugano, Y. (1990) An analytical solution for a plane thermal stress problem in nonhomogeneous multiply connected regions; unaxisymmetric steady-state thermal stresses in a nonhomogeneous hollow circular plate. *JSME Int. J. Series A*, **33**, 136-144.
- (135) 菅野良弘・明石幸治 (1989) 不均質円板の非軸対称非定常熱応力の解析解. 機論 A, **55**, 89-95.
- (136) 菅野良弘・大坪裕行・木元順一 (1990) 不均質多重連結領域の平面熱応力問題の解析解 第2報, 変厚中空円板の非軸対称非定常熱応力. 機論 A, **56**, 2145-2151.
- (137) Takeuti, Y. and Noda, N. (1977) Plane thermoelastic problem in a multiply connected orthotropic body. *J. Appl. Mech.*, **44**, 431-436.
- (138) Callioglou, H. (2004) Stress analysis of an orthotropic rotating disc under thermal loading. *J. Reinforc. Plast. Compos.*, **23**, 1859-1867.
- (139) Parida, J. and Das, A. K. (1972) Thermal stresses in a thin circular disc of orthotropic material due to an instantaneous point heat source. *Acta Mech.*, **13**, 205-214.
- (140) Parkes, E. W. (1976) Thermal stresses in anisotropic discs. *Int. J. Mech. Sci.*, **18**, 5-10.
- (141) Sayman, O. (2004) Thermal stress analysis in an aluminium metal-matrix orthotropic disc. *J. Reinforc. Plast. Compos.*, **23**, 1473-1479.
- (142) Tutuncu, N. (1997) Thermoelastic analysis of polar-anisotropic circular plates. *J. Eng. Mech.*, **123**, 1104-1106.
- (143) Vigdergauz, S. and Givoli, D. (1999) Thermoelastic stresses in a cylinder or disk with cubic anisotropy. *Int. J. Solids Struct.*, **36**, 2109-2125.
- (144) Behcet, D. (2004) Elastic-plastic thermal stress analysis of an aluminum metal-matrix composite disc under uniform temperature distribution. *Sci. Eng. Compos. Mater.*, **11**, 293-.
- (145) Mack, W. and Gamer, U. (1983) Stress distribution in an elastic plastic disk subjected to a circular

- heat source. *J. Therm. Stresses*, **6**, 323-336.
- (146) Hosseini Kordkheili, S. A. and Naghdabadi, R. (2007) Thermoelastic analysis of a functionally graded rotating disk. *Compos. Struct.*, **79**, 508-516.
- (147) Bakhshi, M., Bagri, A. and Eslami, M. (2006) Coupled thermoelasticity of functionally graded disk. *Mech. Adv. Mater. Struct.*, **13**, 219-225.
- (148) Hirose, K., Yokoyama, T., Hara, S. and Ouchi, M. (1997) Convection heat transfer on horizontal isothermal heated rotating disk, In *4th World Conference on Experimental Heat Transfer, Fluid Mechanics and Thermodynamics* (Giot, M., Mayinger, F. and Celata, G. P., Eds.) pp 2151-2158, Edizioni ETS, Brussels, Belgium.
- (149) 広瀬宏一・大内雅樹・横山孝男 (1995) 水平な等温加熱回転円板上の熱流動解析. *機論 B*, **61**, 3770-3775.
- (150) 稲室隆二・藤田一作・荻野文丸 (2000) 加熱回転円板上の非定常熱流動現象の三次元数値解析. *機論 B*, **66**, 1660-1666.
- (151) Sugano, Y. (1983) Transient thermal stresses in a rectangular plate due to variation of heat-transfer coefficients on upper and lower surfaces. *Int. J. Eng. Sci.*, **21**, 1203-1214.
- (152) Chen, P. Y. P. (1988) Transient thermal stresses in a rectangular plate due to nonuniform heat transfer coefficients. *J. Therm. Stresses*, **11**, 115-125.
- (153) Lee, H. L., Yang, Y. C. and Chu, S. S. (2002) Transient thermoelastic analysis of an annular fin with coupling effect and variable heat transfer coefficient. *J. Therm. Stresses*, **25**, 1105-1120.
- (154) Eraslan, A. N. and Akis, T. (2003) On the Elastic-Plastic Deformation of a Rotating Disk Subjected to a Radial Temperature Gradient. *Mech. Based Des. Struct. Mach.*, **31**, 529-561.
- (155) Eraslan, A. N. and Kartal, M. E. (2005) Stress distributions in cooling fins of variable thickness with and without rotation. *J. Therm. Stresses*, **28**, 861-883.
- (156) 菅野良弘・千葉良一・廣瀬宏一 (2004) 回転円板の熱応力緩和を目指した熱伝達率分布の遺伝的アルゴリズムによる最適化. *機論 A*, **70**, 1440-1446.
- (157) Mokheimer, E. M. A. (2002) Performance of annular fins with different profiles subject to variable heat transfer coefficient. *Int. J. Heat Mass Tran.*, **45**, 3631-3642.
- (158) Barrow, H. (1986) Theoretical solution for the temperature in a straight fin with variable surface heat transfer coefficient. *Heat Recovery Systems*, **6**, 465-468.
- (159) Heggs, P. J., Ingham, D. B. and Manzoor, M. (1981) The effects of nonuniform heat transfer from an annular fin of triangular profile. *J. Heat Tran.*, **103**, 184-185.
- (160) Lenyuk, M. P., Bukatar, M. I. and Shelyag, L. K. (1976) Random thermal stresses in an elastic half-space. *Int. Appl. Mech.*, **12**, 452-458.
- (161) Lenyuk, M. P. and Shelyag, L. K. (1978) Stress state of symmetric elastic body under random thermal perturbations. *Int. Appl. Mech.*, **14**, 1137-1142.
- (162) Ibragimov, M. K., Merkulov, V. I. and Subbotin, V. I. (1966) Random thermoelastic stresses

produced in a wall by temperature pulsations. *Atomic Energy*, **21**, 1223-1225.

- (163) Tu, R., Shen, Q., Hua, J. S., Zhang, L. M. and Yuan, R. Z. (1997) Fabrication of Al-Cu system with functionally graded density profiles, In *Functionally graded materials 1996* (Shiota, I. and Miyamoto, Y., Eds.) pp 307-312, Elsevier Science, Amsterdam.
- (164) 上村誠一・野田泰稔・篠原嘉一・渡辺義見 編 (2003) 傾斜機能材料の開発と応用, シーエムシー出版, 東京.

付録 A

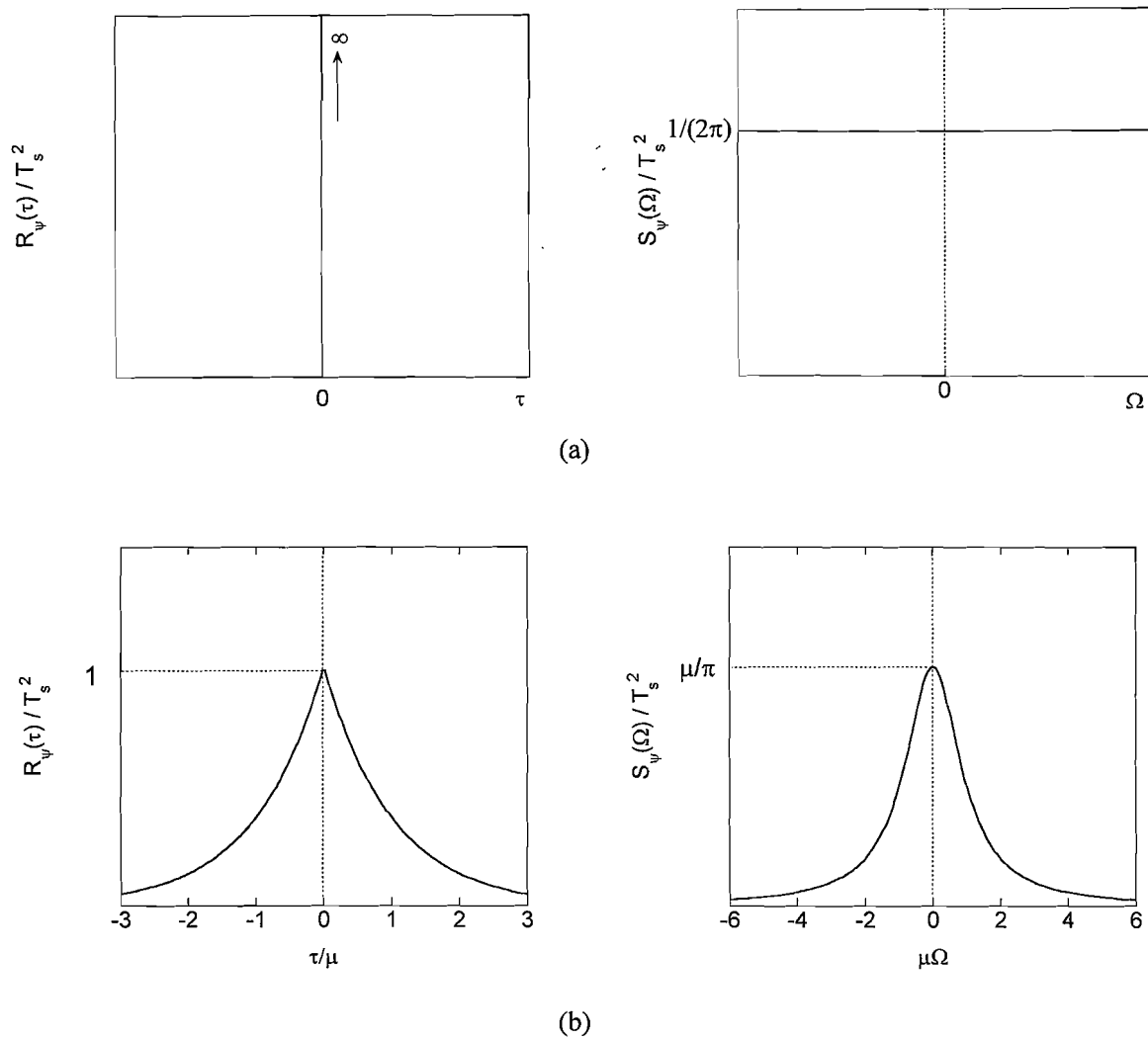


Fig. A.1 Autocorrelation functions and power spectrum densities for (a) white noise and (b) Markov process

付録 B

球状粒子分散型複合材料の物性値は、Mori-Tanaka の理論⁽⁸¹⁾に基づき次式により決定される。

$$\begin{aligned}
 K^C &= K_m + \frac{\xi(K_p - K_m)(3K_m + 4G_m)}{3K_m + 4G_m + 3(1-\xi)(K_p - K_m)}, \\
 G^C &= G_m + \frac{\xi(G_p - G_m)5G_m(3K_m + 4G_m)}{5G_m(3K_m + 4G_m) + 6(1-\xi)(K_m + 2G_m)(G_p - G_m)}, \\
 \alpha^C &= \xi\alpha_p + (1-\xi)\alpha_m + \frac{\xi(1-\xi)(\alpha_p - \alpha_m)(K_p - K_m)}{\frac{3K_p K_m}{4G_m} + \xi K_p + (1-\xi)K_m}, \\
 \lambda^C &= \lambda_m + \frac{3\xi\lambda_m(\lambda_p - \lambda_m)}{3\lambda_m + (1-\xi)(\lambda_p - \lambda_m)}, \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (B.1)
 \end{aligned}$$

ここで、 K ：体積弾性係数、 G ：横弾性係数、 α ：線膨張係数、 λ ：熱伝導率、 E ：ヤング率、 ν ：ポアソン比である。また、 ξ は球状粒子の体積分率、下添え字 p, m はそれぞれ球状粒子と母相の物性値を意味し、上添え字 C は複合材料の物性値^{*}を意味する。

熱応力緩和型 FGM においては、一般的に冷却側では母相が金属で球状粒子がセラミック、高温側では母相がセラミックで球状粒子が金属という構成になっており、その中間部分でそれらの関係が反転している。構成材料の体積分率が 0.3~0.7 の中間層においては、マイクロ組織がネットワーク構造となり、球状粒子と母相の区別が曖昧である。そこで Fuzzy 推論法⁽⁸⁷⁾により、球状粒子と母相の識別の曖昧性を考慮して、次式により各材料特性を算出した。

$$M(M_M, M_C, y_M, y_C) = \frac{M_M y_M + M_C y_C}{y_M + y_C} \quad (B.2)$$

ここで、 M_M, M_C は熱伝導率、ヤング率などの各材料特性について、それぞれ母相を金属、分散粒子をセラミックと設定したものと、その逆の母相をセラミック、分散粒子を金属とした場合の Mori-Tanaka の理論から算出される材料特性である。また、 y_M, y_C はそれぞれセラミックの体積分率により決定される金属とセラミックの「母相への適合度（満足度）[†]」である。ここでは、セラミックの体積分率 ξ_C が $0.3 < \xi_C < 0.7$ の範囲にある中間層において、図 B-1 に示すような線形変化するメンバシップ関数を採用することで、母相と球状粒子との区別の曖昧性を考慮して物性値を算出する。セラミックの体積分率が 0.5 の位置で母相と球状粒子を単純に入れ替えたものは、入れ替えの前後で Mori-Tanaka の理論から算出された物性値が不連続になるが、本 Fuzzy 推論法を用いることで、体積分率の変化に対して物性値が連続になる。

* 複合材料の巨視的な（マクロな）物性値のこと。

† 二つの集合“球状粒子”と“母相”があり、あるセラミックの体積分率値に対して「金属がどれだけ“母相”に属するか」の度合いを表すメンバシップ関数が y_M 、「セラミックがどれだけ“母相”に属するか」の度合いを表すメンバシップ関数が y_C である。

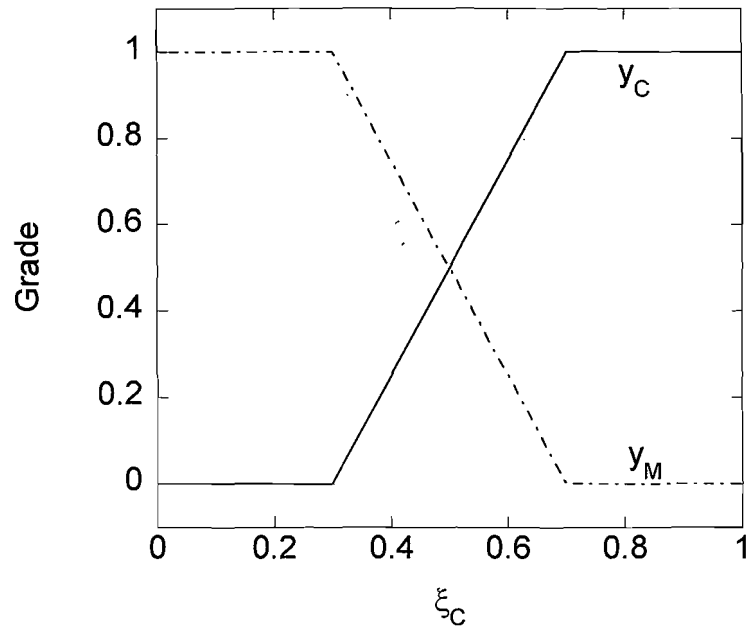


Fig. B-1 Membership functions

付録C ランダムな初期温度をもつ均質体の熱応力

1 緒言

一般に決定論的に取り扱われている温度場でも、厳密に考えれば何らかのランダムな因子の影響が存在する場合が多い。たとえば、①材料の不均質性に起因する物理的特性のランダム性②物体内部におけるランダムな熱発生③物体に作用する熱負荷のランダム変動④初期温度のランダム性⑤物体形状のランダム性—などが考えられる。このように注目している系の中にランダム、すなわち確率で表される量が存在する問題は、一般に確率論手法を用いて解析され、主に振動学の分野で深く研究されてきた。しかし、それらに比べると、この手法を固体の熱伝導や、それに伴う熱応力の問題に応用した研究は少ない。

Samuels⁽⁴⁾は確率論手法を用いた熱伝導解析の先駆的研究として、時間的にランダムな表面温度と時空間的にランダム変動する内部熱発生をもつ平板と球について解析を行った。表面温度のような熱的境界条件がランダムな場合を取り扱った研究はその他に^(7-10, 13)などがある。その後、物体の熱伝導率が空間的、あるいは時間的にランダムな場合の熱伝導問題が Fox と Barakat⁽³⁵⁾, Ahmadi⁽³⁸⁾, Keller⁽³²⁾, Tzou⁽³⁹⁾によって研究された。彼らは解析手法として摂動法を採用した。また、Ahmadi⁽²⁸⁾は初期温度がランダムな場合について検討を行い、時間とともに徐々に温度のランダム性が減衰することを示した。この研究は後に Grigorkiv ら⁽²⁹⁾によって非フーリエ熱伝導の立場からも行われている。複合領域内の熱伝導を確率的に解析したものとしては、時空間的にランダムな熱発生をもち、かつ初期温度もランダムな二層円板を対象としたもの⁽³⁰⁾や、二層平板のランダムな温度場をモンテカルロ法により解析したもの⁽¹¹⁾などがある。Hutchinson ら⁽²⁾は、種々のランダムな条件下における固体内の熱伝導を解析した論文をレビューし、各解析手法の数値計算への適用性について検討した。

一方、ランダム熱応力に関する研究を最初に行ったのは Parkus⁽⁵⁾である。彼は半無限体の熱弾性問題を確率論手法を用いて解析した。Heller⁽²⁰⁾はコンクリート柱を心材にもつ鋼管の表面温度が狭帯域確率過程で表される問題を解析した。また、Barret⁽⁵³⁾は原子炉燃料棒の形状ランダム性、および材料の熱的・機械的性質のランダム性を考慮して熱応力の解析を行った。さらに、天田⁽¹⁷⁾は平板、球、円柱の表面温度が時間的にランダム変動している場合について、温度と熱応力の確率論的解析を行った。ランダム熱応力の解析に応用された確率論手法を詳しく解説した書籍^(65, 121)も出版されている。しかし、物体の初期温度にランダム性が存在する場合の熱応力挙動に関しては、筆者の知る限り明らかにされていないようである。

そこで、本付録⁽¹²²⁾では Ahmadi⁽²⁸⁾の研究を熱応力場まで拡張させることで、初期温度が一様確率場である7種の単純な幾何形状をもつ均質体（無限平板、無限帯板、中空球、球かをもつ無限体、無限円筒、中空円板、円柱穴を有する無限体）について、温度と熱応力の自己相関関数を解析的に導出した。また具体的な計算例として、初期温度がホワイトノイズで与えられた場合について温度と熱応力の二乗平均を計算し、それらの非定常挙動を明らかにした。

2 一般理論

物体の初期温度 T_0 が n 次元空間 G 内にランダム分布している場合、すなわち、 n 次元の確率場を考える。この場合、初期条件は次式で与えられる。

$$T(t, \mathbf{x}) = T_0(\mathbf{x}; \varpi) \quad \mathbf{x} \in G \quad \text{at } t = 0 \quad (\text{C.1})$$

ここで、 T は温度、 \mathbf{x} は空間 G に属する位置ベクトル、 t は時間、 ϖ は確率変数を表す。物体内の温度 T とそれに伴って生じた熱応力 σ_{kl} は ϖ の関数となることから、一般に $T(t, \mathbf{x}; \varpi)$ 、 $\sigma_{kl}(t, \mathbf{x}; \varpi)$ と書ける。今、統計量として重要なのは平均値と自己相関関数である。期待値演算子 $E[\cdot]$ を用いて、温度の自己相関関数 R_T は次のように定義される。

$$R_T(t, \mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{a}) = E[T(t, \mathbf{x}; \varpi) \cdot T(t, \mathbf{x} + \mathbf{a}; \varpi)] \quad (\text{C.2})$$

ただし、 \mathbf{a} は任意の空間距離である。応力 σ_{kl} の自己相関関数 $R_{\sigma_{kl}}$ は、 $\sigma_{kl} = f_{kl}(T)$ なる関係を用いると

$$R_{\sigma_{kl}}(t, \mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{a}) = E[f_{kl}[T(t, \mathbf{x}; \varpi)] \cdot f_{kl}[T(t, \mathbf{x} + \mathbf{a}; \varpi)]] \quad (\text{C.3})$$

のように与えられる⁽¹²³⁾。また、温度と応力の二乗平均は次式で表される。

$$E[T^2(t, \mathbf{x}; \varpi)] = R_T(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}), \quad E[\sigma_{kl}^2(t, \mathbf{x}; \varpi)] = R_{\sigma_{kl}}(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}) \quad (\text{C.4})$$

温度と応力のスペクトル密度は、式(C.2)、(C.3)で表されるそれぞれの自己相関関数を Wiener-Khinchin の式⁽⁷¹⁾に代入することにより

$$S_i(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_G R_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{a}) \exp[-j\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{a}] d\mathbf{a}, \quad i = T \text{ or } \sigma_{kl} \quad (\text{C.5})$$

にて与えられる。ここで、 j は虚数、 $\boldsymbol{\omega}$ は n 次元の空間周波数ベクトル、 $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{a}$ はベクトル内積を表す。

弱一様確率場*を仮定すると、自己相関関数は位置座標とは無関係に空間距離のみの関数、すなわち

$$R_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{a}) = R_i(t, \mathbf{a}), \quad i = T \text{ or } \sigma_{kl} \quad (\text{C.6})$$

となり、スペクトル密度を表す式(C.5)も次式のように簡単化される。

* 広義の一様確率場ともいう。場所移動のもとで相関関数が不変である特徴をもつ。これに対し、場所移動のもとで確率分布が不変である場合を強（狭義の）一様確率場という。それぞれ、確率過程の弱定常過程と強定常過程に対応する。1.6.2節を参照のこと。

$$S_i(t, \boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_G R_i(t, \mathbf{a}) \exp[-j\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{a}] d\mathbf{a}, \quad i = T \text{ or } \sigma_{kl} \quad (\text{C.7})$$

温度場の自己相関関数が満足する微分方程式は、熱伝導の基礎式よりも複雑な形をとる⁽²⁸⁾。それゆえ、自己相関関数の微分方程式を直接解くよりも、式(C.1)の初期条件を用いて熱伝導方程式を解き、これから自己相関関数を組み立てる方が簡単である⁽⁴⁾。

3 解析

3.1 無限平板および無限帯板

図 C-1 のように、 $E[T_0] = 0^*$ なるランダムな初期温度をもつ厚さ b の無限平板および厚さ $2h$ で幅 b の無限帯板を考える。 $r = a, b$ の面は温度は 0^\dagger に保持されている。無限帯板に関して、 $z = \pm h$ の面から温度 0^\dagger の周囲媒体へ熱放散があるとし、その面の熱伝達率を一定値 η で与える。温度が r 軸方向にのみ変化する場合、熱伝導の基礎式は次のようになる。

$$\frac{1}{\kappa} \frac{\partial T(t, r; \varpi)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T(t, r; \varpi)}{\partial r^2} + \frac{s}{r} \frac{\partial T(t, r; \varpi)}{\partial r} - C \frac{\eta}{h\lambda} T(t, r; \varpi) \quad (\text{C.8})$$

ただし、 κ は熱拡散率、 λ は熱伝導率であり、定数 s と C は表 C-1 に与えられている。

Table C-1 Parameters used in Eqs. (C.8), (C.11) and (C.12)

Geometry	s	p	C	A_1	B_1	A_2	B_2	$G_m(r)$
Plate	0	0	0					
Strip	0	0	1	$\frac{2}{(b-a)r^p}$	$\frac{m^2\pi^2}{(b-a)^2}$	$\frac{4}{(b-a)^2(r_1r_2)^p}$	$\frac{(m^2+n^2)\pi^2}{(b-a)^2}$	$\sin\left[\frac{m\pi(r-a)}{b-a}\right]$
Sphere	2	1	0					
Cylinder	1	1	0	$\frac{\pi^2}{2}$	γ_m^2	$\frac{\pi^4}{4}$	$\gamma_m^2 + \gamma_n^2$	Eq. (C.35)
Disc	1	1	1	$\frac{\pi^2}{2}$		$\frac{\pi^4}{4}$		

* $E[T_0] \neq 0$ ならば、 $T_0(x) \rightarrow T_0(x) - E[T_0]$ とおけば平均値0の場合に帰着するから、一般性を失うことなく $E[T_0] = 0$ として議論を行うことができる。

† 問題の線形性より、これらの仮定は解析の一般性を失わせない。

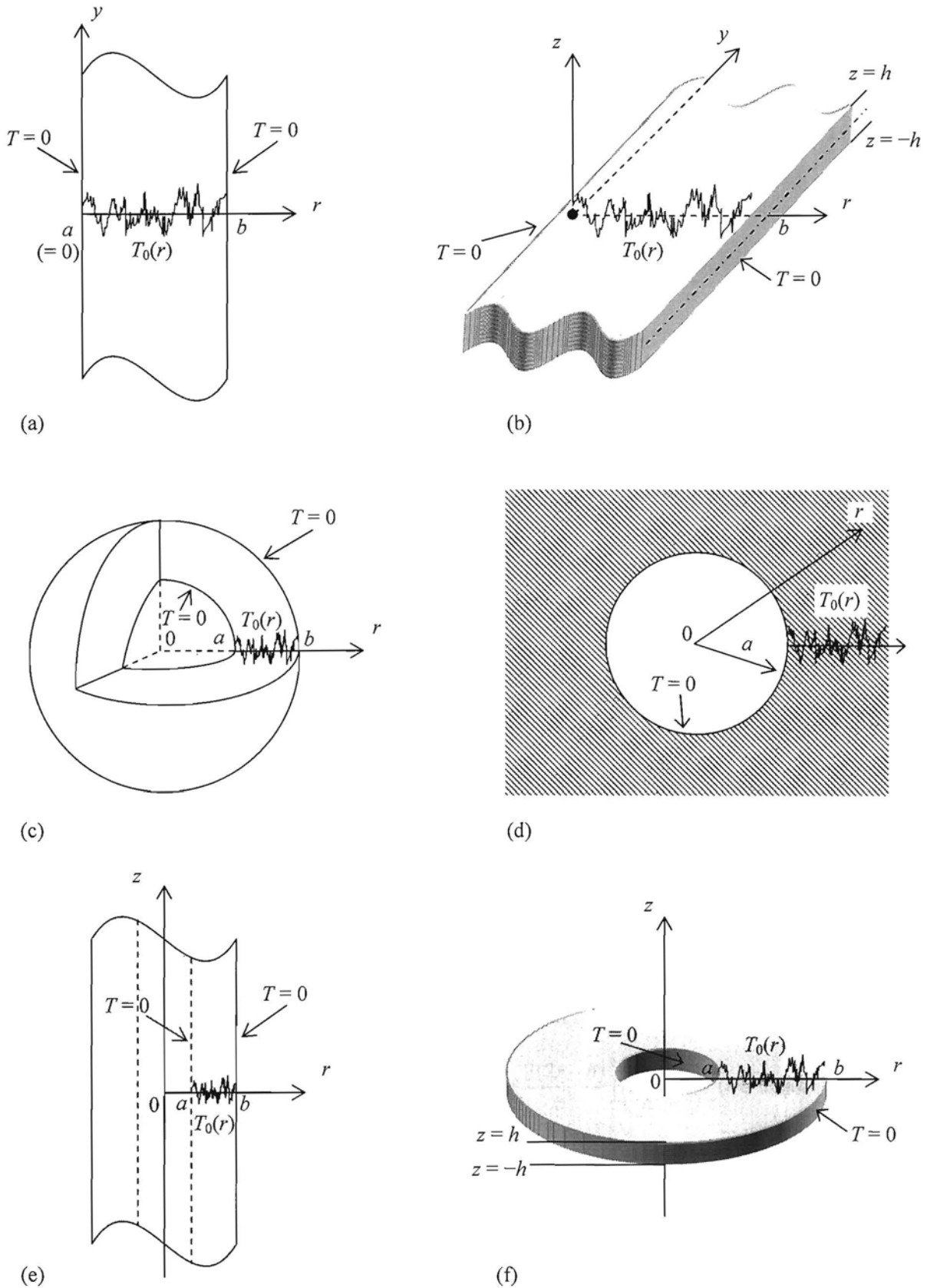


Fig. C-1 Analytical models and coordinate systems for (a) an infinite plate, (b) an infinite strip, (c) a hollow sphere, (d) an infinite body with a spherical cavity, (e) an infinite hollow cylinder and (f) an annular disc

境界条件は

$$T(t, r) = 0 \quad \text{at } r = a, b \quad (\text{C.9})$$

にて与えられる。また、初期条件は次式で与えられる。

$$T(t, r; \varpi) = T_0(r; \varpi) \quad \text{at } t = 0 \quad (\text{C.10})$$

式(C.8)–(C.10)の解は次式のように導出されている⁽¹²⁴⁾。

$$T(t, r; \varpi) = A_1 \exp\left[-C \frac{\eta\kappa}{h\lambda} t\right] \sum_{m=1}^{\infty} G_m(r) e^{-B_m \kappa t} \int_a^b \xi^p T_0(\xi; \varpi) G_m(\xi) d\xi \quad (\text{C.11})$$

ここで $A_1, B_1, G_m(r), p$ は表 C.1 に与えられている。付録 C を通して T_0 を広義の一樣確率場と仮定しているため、温度の自己相関関数 R_T は次式のように導出される。

$$R_T(t, r_1, r_2) = A_2 \exp\left[-C \frac{2\eta\kappa}{h\lambda} t\right] \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} G_m(r_1) G_n(r_2) \exp[-B_2 \kappa t] \int_a^b \int_a^b (\xi_1 \xi_2)^p R_{T_0}(\xi_2 - \xi_1) G_m(\xi_1) G_n(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \quad (\text{C.12})$$

ただし、 r_1, r_2 は任意の座標値であり、 $R_{T_0}(\cdot)$ は T_0 の自己相関関数である。定数 A_2, B_2 に関しては表 C.1 を参照のこと。一方、温度のスペクトル密度 S_T は次式で表される。

$$S_i(t, r, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b R_i(t, r, r + \beta) \exp[-j\omega\beta] d\beta, \quad i = T \quad (\text{C.13})$$

力学的境界条件として、平板の両表面および帯板の表面に外力が作用しないものとするれば、式(C.11)の温度分布によって生じる y 軸方向の応力 σ_y は次式のように得られる⁽¹²⁵⁾。

$$\sigma_y(t, r; \varpi) = \frac{E\alpha}{(1-\nu)^{1-C}} \left[-T(t, r; \varpi) + \frac{1}{b} \int_0^b T(t, \xi; \varpi) d\xi + \frac{3(2r-b)}{b^2} \int_0^b \left(\frac{2\xi}{b} - 1 \right) T(t, \xi; \varpi) d\xi \right] \quad (\text{C.14})$$

ここで、 E はヤング率、 α は線膨張係数、 ν はポアソン比である。式(C.11)を用いれば、応力の自己相関関数 R_{σ_y} が次のように導出される。

$$R_{\sigma_y}(t, r_1, r_2) = \left[\frac{E\alpha}{(1-\nu)^{1-C}} \right]^2 \left[R_T(t, r_1, r_2) - \frac{V_1(t, r_1)}{b} - \frac{3(2r_2-b)}{b^2} V_2(t, r_1) - \frac{V_1(t, r_2)}{b} + \frac{W_{11}(t)}{b^2} \right. \\ \left. + \frac{3(2r_2-b)}{b^3} W_{12}(t) - \frac{3(2r_1-b)}{b^2} V_2(t, r_2) + \frac{3(2r_1-b)}{b^3} W_{21}(t) + \frac{9(2r_1-b)(2r_2-b)}{b^4} W_{22}(t) \right] \quad (\text{C.15})$$

ここで,

$$V_i(t, r) = \frac{4}{b^2} e^{-\frac{2C\eta\kappa}{h\lambda}t} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} G_m(r) I_{in} e^{-\frac{(m^2+n^2)\pi^2\kappa t}{b^2}} \int_0^b \int_0^b R_{T_0}(\xi_2 - \xi_1) G_m(\xi_1) G_n(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \quad i=1, 2 \quad (\text{C.16})$$

$$W_{ij}(t) = \frac{4}{b^2} e^{-\frac{2C\eta\kappa}{h\lambda}t} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} I_{im} I_{in} e^{-\frac{(m^2+n^2)\pi^2\kappa t}{b^2}} \int_0^b \int_0^b R_{T_0}(\xi_2 - \xi_1) G_m(\xi_1) G_n(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \quad i, j=1, 2 \quad (\text{C.17})$$

$$I_{1n} = \frac{b}{n\pi} [1 - (-1)^n], \quad I_{2n} = -\frac{b}{n\pi} [1 + (-1)^n] \quad (\text{C.18})$$

σ_y のスペクトル密度は $i = \sigma_y$ とした式(C.13)に式(C.15)を代入することで得られる.

3.2 中空球

図C.1のように, $E[T_0] = 0$ なるランダムな初期温度をもつ内半径 a , 外半径 b の中空球を考える. $t > 0$ で $r = a, b$ の境界面が温度 0 に保たれる. 等温面が同心球状に生じるから, 熱伝導方程式は式(C.8)で与えられ, その解は式(C.9), (C.10)の境界条件と初期条件の下で式(C.11)の形に書かれる⁽¹²⁴⁾. さらに, R_T と S_T はそれぞれ式(C.12)と式(C.13)で与えられる.

その温度場の下で生ずる半径方向応力 σ_r と円周方向応力 σ_θ は, $\sigma_r = 0$ at $r = a, b$ という境界条件を考慮して次式のように得られる⁽¹²⁵⁾.

$$\begin{aligned} \sigma_r(t, r; \varpi) &= \frac{2\alpha E}{(a^3 - b^3)(1-\nu)} \left[\frac{a^3}{r^3} \int_r^b T(t, \xi; \varpi) \xi^2 d\xi + \frac{b^3}{r^3} \int_a^r T(t, \xi; \varpi) \xi^2 d\xi - \int_a^b T(t, \xi; \varpi) \xi^2 d\xi \right] \\ \sigma_\theta(t, r; \varpi) &= \frac{\alpha E}{(b^3 - a^3)(1-\nu)} \left[\frac{a^3}{r^3} \int_r^b T(t, \xi; \varpi) \xi^2 d\xi + \frac{b^3}{r^3} \int_a^r T(t, \xi; \varpi) \xi^2 d\xi \right. \\ &\quad \left. + 2 \int_a^b T(t, \xi; \varpi) \xi^2 d\xi - (b^3 - a^3) T(t, r; \varpi) \right] \quad (\text{C.19}) \end{aligned}$$

応力 σ_r, σ_θ の自己相関関数は次式のように導出される.

$$\begin{aligned} R_{\sigma_r}(t, r_1, r_2) &= \left[\frac{2E\alpha}{(a^3 - b^3)(1-\nu)} \right]^2 \left\{ \frac{a^6 U_{33}(t, r_1, r_2)}{r_1^3 r_2^3} + \frac{a^3 b^3}{r_1^3 r_2^3} [U_{23}(t, r_2, r_1) + U_{23}(t, r_1, r_2)] \right. \\ &\quad \left. + \frac{b^6 U_{22}(t, r_1, r_2)}{r_1^3 r_2^3} - b^3 \left[\frac{V_2(t, r_1)}{r_1^3} + \frac{V_2(t, r_2)}{r_2^3} \right] - a^3 \left[\frac{V_3(t, r_1)}{r_1^3} + \frac{V_3(t, r_2)}{r_2^3} \right] + W(t) \right\} \\ R_{\sigma_\theta}(t, r_1, r_2) &= \left[\frac{E\alpha}{(b^3 - a^3)(1-\nu)} \right]^2 \left\{ \frac{a^6 U_{33}(t, r_1, r_2)}{r_1^3 r_2^3} + \frac{a^3 b^3}{r_1^3 r_2^3} [U_{23}(t, r_2, r_1) + U_{23}(t, r_1, r_2)] \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{a^3(b^3-a^3)}{r_1 r_2} \left[\frac{N_3(t, r_2, r_1)}{r_1^2} + \frac{N_3(t, r_1, r_2)}{r_2^2} \right] + \frac{b^6 U_{22}(t, r_1, r_2)}{r_1^3 r_2^3} + 2b^3 \left[\frac{V_2(t, r_1)}{r_1^3} + \frac{V_2(t, r_2)}{r_2^3} \right] \\
& -\frac{b^3(b^3-a^3)}{r_1 r_2} \left[\frac{N_2(t, r_2, r_1)}{r_1^2} + \frac{N_2(t, r_1, r_2)}{r_2^2} \right] + 2a^3 \left[\frac{V_3(t, r_1)}{r_1^3} + \frac{V_3(t, r_2)}{r_2^3} \right] + 4W(t) \\
& -2(b^3-a^3) \left[\frac{Q(t, r_1)}{r_1} + \frac{Q(t, r_2)}{r_2} \right] + (b^3-a^3)^2 R_r(t, r_1, r_2) \} \quad (C.20)
\end{aligned}$$

ここで,

$$U_{ij}(t, x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} I_{im}(x) I_{jn}(y) F_{mn}(t) \quad i, j = 2, 3 \quad (C.21)$$

$$V_i(t, r) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} I_{im} I_{in}(r) F_{mn}(t) \quad i = 2, 3 \quad (C.22)$$

$$W(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} I_{im} I_{in} F_{mn}(t) \quad (C.23)$$

$$Q(t, r) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} G_m(r) I_{in} F_{mn}(t) \quad (C.24)$$

$$N_i(t, x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} G_m(x) I_{in}(y) F_{mn}(t) \quad i = 2, 3 \quad (C.25)$$

$$F_{mn}(t) = \frac{4}{(b-a)^2} \exp \left[-\frac{(m^2+n^2)\pi^2 \kappa t}{(b-a)^2} \right] \int_a^b \int_a^b \xi_1 \xi_2 R_{T_0}(\xi_2 - \xi_1) G_m(\xi_1) G_n(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \quad (C.26)$$

$$I_{1m} = \frac{a-b}{m\pi} [b(-1)^m - a]$$

$$I_{2m}(r) = \frac{a-b}{m^2 \pi^2} \left\{ m\pi r \cos \left[\frac{m\pi(a-r)}{a-b} \right] + (a-b) \sin \left[\frac{m\pi(a-r)}{a-b} \right] - m\pi a \right\}$$

$$I_{3m}(r) = \frac{a-b}{m^2 \pi^2} \left\{ m\pi b (-1)^m - m\pi r \cos \left[\frac{m\pi(a-r)}{a-b} \right] - (a-b) \sin \left[\frac{m\pi(a-r)}{a-b} \right] \right\} \quad (C.27)$$

また, σ_r と σ_θ のスペクトル密度は式(C.20)を $i = \sigma_r, \sigma_\theta$ とした式(C.13)に代入することで得られる.

3.3 球かをもつ無限体

図 C-1 に示すような, $E[T_0] = 0$ を満足するランダムな初期温度をもつ, 内部に半径 a の球かを有する無限体を考える. $t > 0$ において, $r = a$ の境界面は温度 0 に保持される. この場合の熱伝導の基礎式は中空球に対するものと同じである. 初期条件は式(C.10)で与えられ, 境界条件は次式で

与えられる.

$$T(t, r) = 0 \quad \text{at } r = a \quad (\text{C.28})$$

$r > a$ の領域での温度解は⁽¹²⁴⁾

$$T(t, r; \varpi) = \frac{1}{2r\sqrt{\pi\kappa t}} \int_a^\infty \xi T_0(\xi; \varpi) F(t, r, \xi) d\xi \quad (\text{C.29})$$

ここで,

$$F(t, x, y) = \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{4\kappa t}\right] - \exp\left[-\frac{(x+y-2a)^2}{4\kappa t}\right] \quad (\text{C.30})$$

したがって, 温度の自己相関関数を次式のように導出できる.

$$R_T(t, r_1, r_2) = \frac{1}{4\pi\kappa t r_1 r_2} \int_a^\infty \int_a^\infty \xi_1 \xi_2 R_{T_0}(\xi_2 - \xi_1) F(t, r_1, \xi_1) F(t, r_2, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \quad (\text{C.31})$$

温度のスペクトル密度は式(C.31)を $b = \infty$ とした式(C.13)に代入することで得られる.

$r = a$ の面に外力が作用していないとすれば, 式(C.29)の温度場によって生じる半径方向応力 σ_r と円周方向応力 σ_θ は次のように表される⁽¹²⁶⁾.

$$\begin{aligned} \sigma_r(t, r; \varpi) &= -\frac{2\alpha E}{1-\nu} \frac{1}{r^3} \int_a^r \xi^2 T(t, \xi; \varpi) d\xi \\ \sigma_\theta(t, r; \varpi) &= \frac{\alpha E}{1-\nu} \left[\frac{1}{r^3} \int_a^r \xi^2 T(t, \xi; \varpi) d\xi - T(t, r; \varpi) \right] \end{aligned} \quad (\text{C.32})$$

上式を用いて各応力成分の自己相関関数を次のように得る.

$$\begin{aligned} R_{\sigma_r}(t, r_1, r_2) &= \left(\frac{\alpha E}{1-\nu}\right)^2 \frac{1}{r_1^3 r_2^3} \frac{1}{\pi\kappa t} \int_a^\infty \int_a^\infty x_1 x_2 R_{T_0}(x_2 - x_1) G^*(t, r_1, x_1) G^*(t, r_2, x_2) dx_1 dx_2 \\ R_{\sigma_\theta}(t, r_1, r_2) &= \left(\frac{\alpha E}{1-\nu}\right)^2 \left[R_T(t, r_1, r_2) - \frac{P(t, r_1, r_2)}{r_1^3 r_2} - \frac{P(t, r_2, r_1)}{r_1 r_2^3} \right] + \frac{R_{\sigma_r}(t, r_1, r_2)}{4} \end{aligned} \quad (\text{C.33})$$

ここで

$$\begin{aligned} G^*(t, x, y) &= \int_a^x \xi F(t, \xi, y) d\xi \\ P(t, x, y) &= \frac{1}{4\pi\kappa t} \int_a^\infty \int_a^\infty \xi_1 \xi_2 R_{T_0}(\xi_2 - \xi_1) G^*(t, x, \xi_1) F(t, y, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \end{aligned} \quad (\text{C.34})$$

$b = \infty, i = \sigma_r, \sigma_\theta$ とした式(C.13)に式(C.33)を代入すれば, σ_r と σ_θ のスペクトル密度が得られる.

3.4 無限円筒および中空円板

図 C-1 のように, $E[T_0]=0$ なるランダムな初期温度をもつ内半径 a , 外半径 b の無限円筒および厚さ $2h$ の中空円板を考える. $r=a, b$ の表面温度は 0 に保たれている. 中空円板に関して, $z=\pm h$ の面から温度 0 の周囲媒体へ, 一定の熱伝達率 η で熱放散があるとする. 温度分布が半径座標 r のみの関数であれば, この境界値問題は式(C.8)–(C.10)のように定式化され, その解は式(C.11)で与えられる⁽¹²⁴⁾.

$$G_m(r) = \frac{\gamma_m J_0(\gamma_m a)}{\sqrt{J_0^2(\gamma_m a) - J_0^2(\gamma_m b)}} [J_0(\gamma_m r) Y_0(\gamma_m b) - J_0(\gamma_m b) Y_0(\gamma_m r)] \quad (\text{C.35})$$

ここで, $J_k(\cdot)$ と $Y_k(\cdot)$ はそれぞれ k 次の第一種, 第二種ベッセル関数である. 固有値 γ_m は次式を満足する第 m 番目の正根である.

$$J_0(\gamma_m a) Y_0(\gamma_m b) - J_0(\gamma_m b) Y_0(\gamma_m a) = 0 \quad m = 1, 2, \dots, \infty \quad (\text{C.36})$$

温度の自己相関関数は式(C.12)のように導出でき, それを式(C.13)に代入することで温度のスペクトル密度が得られる.

円筒面 (円板の場合は上下端面も含む) に外力が作用していない場合, この温度場の下での非ゼロ応力成分は次のようになる⁽¹²⁵⁾.

$$\begin{aligned} \sigma_r(t, r; \varpi) &= \frac{\alpha E}{(1-\nu)^{1-C} r^2} \left[\frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} \int_a^b \xi T(t, \xi; \varpi) d\xi - \int_a^r \xi T(t, \xi; \varpi) d\xi \right] \\ \sigma_\theta(t, r; \varpi) &= \frac{\alpha E}{(1-\nu)^{1-C} r^2} \left[\frac{r^2 + a^2}{b^2 - a^2} \int_a^b \xi T(t, \xi; \varpi) d\xi + \int_a^r \xi T(t, \xi; \varpi) d\xi - r^2 T(t, r; \varpi) \right] \\ \sigma_z(t, r; \varpi) &= (1-C) \left[\frac{2\alpha E \nu}{(1-\nu)(b^2 - a^2)} \int_a^b \xi T(t, \xi; \varpi) d\xi - \frac{\alpha E}{1-\nu} T(t, r; \varpi) \right] \end{aligned} \quad (\text{C.37})$$

よって, 各応力成分の自己相関関数は次のように導出される.

$$\begin{aligned} R_{\sigma_r}(t, r_1, r_2) &= \left[\frac{\alpha E}{(1-\nu)^{1-C} r_1 r_2} \right]^2 \left[\frac{(r_1^2 - a^2)(r_2^2 - a^2)}{(b^2 - a^2)^2} W(t) - \frac{r_1^2 - a^2}{b^2 - a^2} V(t, r_2) \right. \\ &\quad \left. - \frac{r_2^2 - a^2}{b^2 - a^2} V(t, r_1) + P(t, r_1, r_2) \right] \\ R_{\sigma_\theta}(t, r_1, r_2) &= \left[\frac{\alpha E}{(1-\nu)^{1-C} r_1 r_2} \right]^2 \left[\frac{(r_1^2 + a^2)(r_2^2 + a^2)}{(b^2 - a^2)^2} W(t) + \frac{r_1^2 + a^2}{b^2 - a^2} V(t, r_2) \right. \\ &\quad \left. - \frac{r_1^2 + a^2}{b^2 - a^2} r_2^2 Q(t, r_2) + \frac{r_2^2 + a^2}{b^2 - a^2} V(t, r_1) + P(t, r_1, r_2) - r_2^2 N(t, r_1, r_2) \right] \end{aligned}$$

$$R_{\sigma_z}(t, r_1, r_2) = (1-C) \left\{ \left[\frac{2\alpha E\nu}{(1-\nu)(b^2-a^2)} \right]^2 W(t) - \frac{2\alpha^2 E^2 \nu}{(1-\nu)^2 (b^2-a^2)} [Q(t, r_2) + Q(t, r_1)] \right. \\ \left. - \frac{r_2^2 + a^2}{b^2 - a^2} r_1^2 Q(t, r_1) - r_1^2 N(t, r_2, r_1) + r_1^2 r_2^2 R_T(r_1, r_2, t) \right\} \\ + \left(\frac{\alpha E}{1-\nu} \right)^2 R_T(t, r_1, r_2) \quad (C.38)$$

ここで,

$$W(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} I_{1m} I_{1n} F_{mn}(t) \quad (C.39)$$

$$V(t, r) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} I_{1m} I_{2n}(r) F_{mn}(t) \quad (C.40)$$

$$P(t, x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} I_{2m}(x) I_{2n}(y) F_{mn}(t) \quad (C.41)$$

$$Q(t, r) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} I_{1m} G_n(r) F_{mn}(t) \quad (C.42)$$

$$N(t, x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} I_{2m}(x) G_n(y) F_{mn}(t) \quad (C.43)$$

$$I_{1m} = \frac{J_0(\gamma_m a)}{\sqrt{J_0^2(\gamma_m a) - J_0^2(\gamma_m b)}} \left\{ \frac{2}{\pi \gamma_m} - a [J_1(\gamma_m a) Y_0(\gamma_m b) - J_0(\gamma_m b) Y_1(\gamma_m a)] \right\} \\ I_{2m}(r) = \frac{J_0(\gamma_m a) \{ Y_0(\gamma_m b) [r J_1(\gamma_m r) - a J_1(\gamma_m a)] - J_0(\gamma_m b) [r Y_1(\gamma_m r) - a Y_1(\gamma_m a)] \}}{\sqrt{J_0^2(\gamma_m a) - J_0^2(\gamma_m b)}} \quad (C.44)$$

$$F_{mn}(t) = \frac{\pi^4}{4} \exp \left[-\frac{2C\eta\kappa}{h\lambda} t \right] \exp \left[-(\gamma_m^2 + \gamma_n^2) \kappa t \right] \int_a^b \int_a^b \xi_1 \xi_2 R_{T_0}(\xi_2 - \xi_1) G_m(\xi_1) G_n(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \quad (C.45)$$

応力成分のスペクトル密度は，式(C.13)と同様，式(C.38)にフーリエ変換を施すことで得られる。

3.5 円柱穴を有する無限体

$E[T_0] = 0$ なるランダムな初期温度を有する，半径 a の円柱穴を内部にもつ無限体（図 C-1(d)を参照）を考える． $t > 0$ で円筒面の温度は 0 に保たれる．温度が半径座標 r と時間のみに依存する

ならば、熱伝導方程式は円筒に対するものと同一である。境界条件と初期条件はそれぞれ式(C.28)と式(C.10)で与えられる。 $r > a$ なる領域で、この境界値問題に対する解は⁽¹⁰²⁾

$$T(t, r; \varpi) = \int_0^{\infty} U(t, r, \gamma) \left[\int_a^{\infty} \xi U(t, \xi, \gamma) T_0(\xi; \varpi) d\xi \right] d\gamma \quad (C.46)$$

ただし、

$$U(t, r, \gamma) = \sqrt{\frac{\gamma \exp[-\kappa \gamma^2 t]}{J_0^2(\gamma a) + Y_0^2(\gamma a)}} [J_0(\gamma r) Y_0(\gamma a) - J_0(\gamma a) Y_0(\gamma r)] \quad (C.47)$$

温度の自己相関関数は次式のように導出できる。

$$R_T(t, r_1, r_2) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} U(t, r_1, \gamma_1) U(t, r_2, \gamma_2) \left[\int_a^{\infty} \int_a^{\infty} \xi_1 \xi_2 R_{T_0}(\xi_2 - \xi_1) U(t, \xi_1, \gamma_1) U(t, \xi_2, \gamma_2) d\xi_1 d\xi_2 \right] d\gamma_1 d\gamma_2 \quad (C.48)$$

さらに、温度のスペクトル密度は $b = \infty$ とした式(C.13)に式(C.48)を代入することで得られる。

$r = a$ の面に外力の作用がないとすると、式(C.46)の温度分布に起因する半径方向、円周方向および軸方向の応力は次のように表される⁽¹²⁷⁾。

$$\begin{aligned} \sigma_r(t, r; \Omega) &= -\frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{1}{r^2} \int_a^r \xi T(t, \xi; \varpi) d\xi \\ \sigma_\theta(t, r; \Omega) &= \frac{\alpha E}{1-\nu} \left[\frac{1}{r^2} \int_a^r \xi T(t, \xi; \varpi) d\xi - T(t, r; \varpi) \right] \\ \sigma_z(t, r; \Omega) &= -\frac{\alpha E}{1-\nu} T(t, r; \varpi) \end{aligned} \quad (C.49)$$

各応力成分の自己相関関数は次式のように導出される。

$$\begin{aligned} R_{\sigma_r}(t, r_1, r_2) &= \left(\frac{\alpha E}{1-\nu} \right)^2 \frac{1}{r_1^2 r_2^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} I(r_1, \gamma_1) I(r_2, \gamma_2) F(\gamma_1, \gamma_2) d\gamma_1 d\gamma_2 \\ R_{\sigma_\theta}(t, r_1, r_2) &= R_{\sigma_r}(t, r_1, r_2) + R_{\sigma_z}(t, r_1, r_2) - \left(\frac{\alpha E}{1-\nu} \right)^2 \left[\frac{P(t, r_1, r_2)}{r_1^2} + \frac{P(t, r_2, r_1)}{r_2^2} \right] \\ R_{\sigma_z}(t, r_1, r_2) &= \left(\frac{\alpha E}{1-\nu} \right)^2 R_T(t, r_1, r_2) \end{aligned} \quad (C.50)$$

ここで、

$$F(t, x, y) = \int_a^{\infty} \int_a^{\infty} \xi_1 \xi_2 R_{T_0}(\xi_2 - \xi_1) U(t, \xi_1, x) U(t, \xi_2, y) d\xi_1 d\xi_2 \quad (C.51)$$

$$I(t, r, \gamma) = \sqrt{\frac{\gamma \exp[-\kappa \gamma^2 t]}{J_0^2(\gamma a) + Y_0^2(\gamma a)}} \left\{ \frac{r}{\gamma} [J_1(\gamma r) Y_0(\gamma a) - J_0(\gamma a) Y_1(\gamma r)] - \frac{2}{\pi \gamma^2} \right\} \quad (\text{C.52})$$

$$P(t, x, y) = \int_0^\infty \int_0^\infty I(t, x, \gamma_1) U(t, y, \gamma_2) F(t, \gamma_1, \gamma_2) d\gamma_1 d\gamma_2 \quad (\text{C.53})$$

応力のスペクトル密度は、積分区間が $[a, \infty]$ で $i = \sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$ とした式(C.13)に式(C.50)を代入することで得られる。

4 数値計算結果と考察

数値計算の一例として、無限平板、中空球および球かをもつ無限体を対象に、初期温度がホワイトノイズである場合について計算を行う。この場合、初期温度の自己相関関数は次式にて与えられる。

$$R_{T_0}(r) = T_s \delta(r) \quad (\text{C.54})$$

ただし、 T_s は定数、 $\delta(\cdot)$ は Dirac の delta 関数である。式(C.54)で与えられる初期温度は種々の空間周波数成分を持っている。温度と熱応力の統計的評価のために、ここではそれらの二乗平均に注目する。本計算例では、任意の位置 r において $E[T(t, r)] = 0$ であるため、二乗平均は分散と等しい。温度の二乗平均は式(C.12)と(C.31)において $r_1 = r_2 = r$ とおき、式(C.54)をそれらに代入することで得られる。

解析の一般性を考慮して、次のような無次元量を導入する。

$$\Theta = \frac{T}{T_s}, \quad \zeta = \frac{r}{l}, \quad \tau = \frac{\kappa t}{l^2}, \quad \bar{\sigma}_i = \frac{(1-\nu)\sigma_i}{E\alpha T_s} \quad i = y, r, \theta \quad (\text{C.55})$$

ここで、 l は代表長さであり、無限平板の場合は b を、それ以外の場合は a を用いた。式(C.12)の無限級数は、温度と熱応力の二乗平均値において 4 桁の有効数字を得るため、100 項で近似して計算した (表 C-2, C-3 を参照)。

Table C-2 Relationship between the convergence of $E[\Theta^2]$ in the infinite plate and the number of terms, for $\zeta = 0.5$

ζ	Number of terms				
	10	20	50	100	200
0.0001	9.38463	15.7864	19.9138	19.9471	19.9471
0.001	6.02089	6.30743	6.30783	6.30783	6.30783
0.01	1.99469	1.99469	1.99469	1.99469	1.99469
0.1	0.27782	0.27782	0.27782	0.27782	0.27782

Table C-3 Relationship between the convergence of $E[\bar{\sigma}_y^2]$ and the number of terms, for $\zeta = 0.5$

ζ	Number of terms				
	10	20	50	100	200
0.0001	8.23324	14.7806	18.8817	18.9151	18.9151
0.001	4.90326	5.20652	5.20690	5.20690	5.20690
0.01	0.72522	0.72522	0.72522	0.72522	0.72522
0.1	$3.66851 \cdot 10^{-2}$	$3.66851 \cdot 10^{-2}$	$3.66851 \cdot 10^{-2}$	$3.66851 \cdot 10^{-2}$	$3.66851 \cdot 10^{-2}$

図 C-2 は無限平板の二乗平均温度を無次元座標 ζ に対して描いたものである。この図から、平板は2つの領域に分けられることがわかる。ひとつは、温度のランダム性が時間とともに自然に減衰している領域であり、もう一つは、決定論的な表面温度の影響を受けている領域 (surface temperature affected zone: STAZ) である。前者はグラフが水平な領域であり、その値は $\zeta = 0, 1$ の面が断熱された場合の各時刻における二乗平均値に相当する。後者はグラフが勾配をもつ領域を意味し、その領域は時間とともに平板内を発達していく。Ahmadi⁽²⁸⁾によって報告されているように、温度のランダム性は時間とともに急速に減衰していることが確認できる。板厚中央 ($\zeta = 0.5$) の位置での $E[\theta^2]$ の値は $\tau = 0.0001$ で約 19.9 であり、 $\tau = 0.001$ ではその約 32% である 6.3 にまで減少している。したがって、初期温度のバラツキは熱移動開始直後の温度場に大きく影響し、その影響は時間の経過につれて徐々に弱まる。そして最終的に熱的定常状態に達すると、その影響は完全に消失する⁽²⁸⁾。

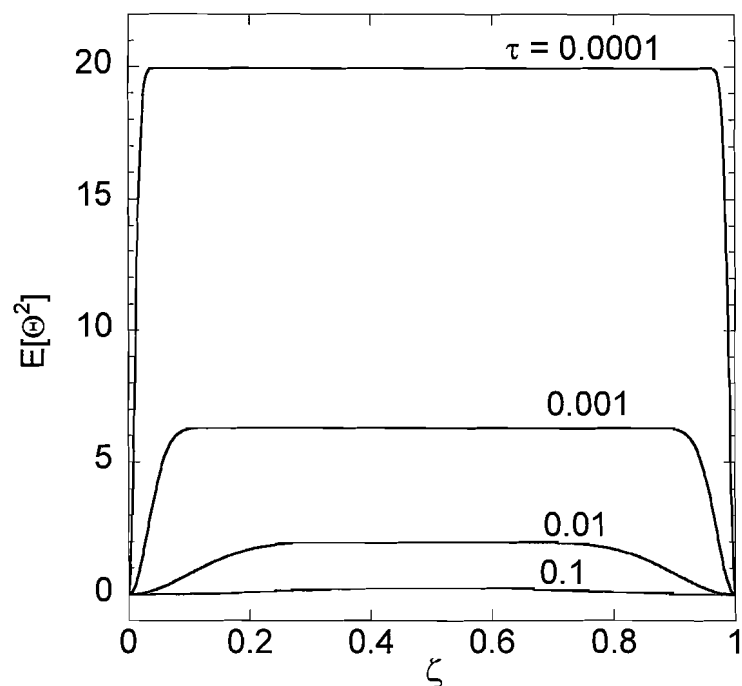


Fig. C-2 Transient behaviour of mean square temperature in an infinite plate

図 C-3 は式(C.15)から得られる二乗平均応力を ζ に対してプロットしたものである。温度場と比較すると、二乗平均値が時間とともに減少する割合がほぼ等しいことがわかる。一方、分布の傾向は二乗平均応力と二乗平均温度とで異なっている。つまり、 $\langle \sigma_y^2 \rangle$ の最大値は \bar{b} が非常に小さい範囲では板厚中央に現れるのに対し、ある程度時間が経過した後では表面に現れる。

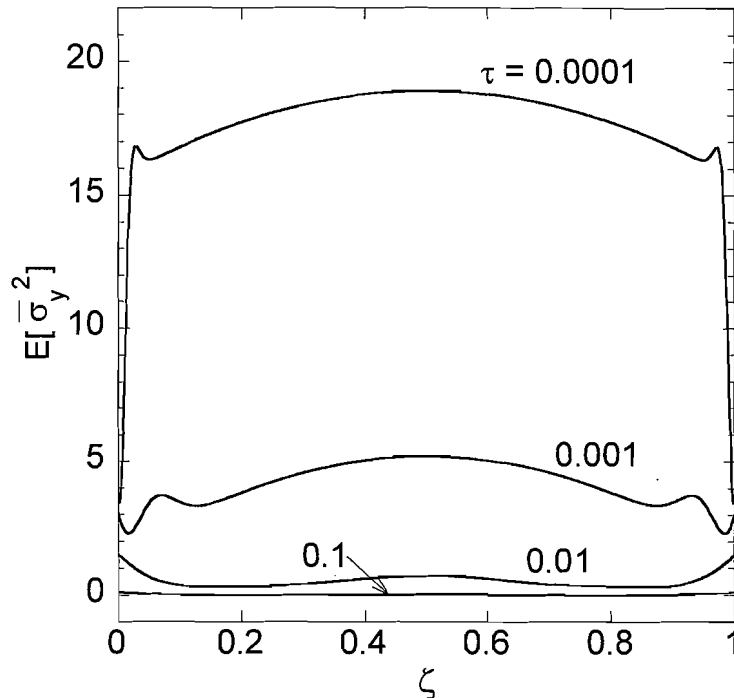


Fig. C-3 Transient behaviour of mean square longitudinal stress in an infinite plate

図 C-4 は中空球の二乗平均温度の空間分布である。二乗平均の最大値は、STAZ が球壁内を完全に発達するまで $\bar{b} (= b/a)$ ，すなわち球の肉厚とは無関係に決まる。また、 \bar{b} が小さいほど STAZ が球壁内を完全発達するのに要する時間は短く、それゆえ、初期温度のランダム性の影響がより早く衰退する。

図 C-5 は円周方向応力の二乗平均分布である。経過時間が小さいときは外半径側よりも内半径側で値が大きく、この傾向は \bar{b} が小さいほど顕著になる。無限平板の場合と同様、ある時刻で $\langle \sigma_\theta^2 \rangle$ の最大値を示す位置が球壁内部から球表面へと変化している。温度とは対照的に、熱応力のランダム性は \bar{b} が小さいほど常に早く減衰している。なお、半径方向応力の二乗平均は円周方向応力のそれのたかだか 20%にすぎないため、ここでは図示を省略した。

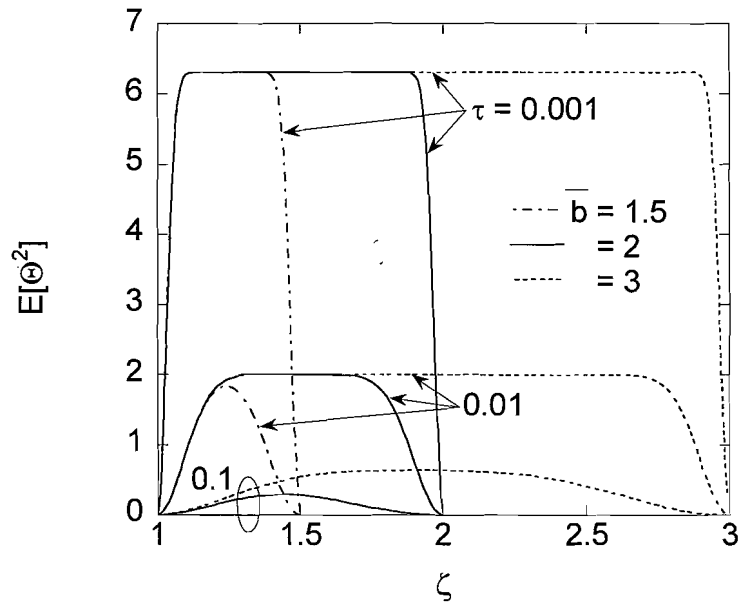


Fig. C-4 Transient behaviour of mean square temperature in a hollow sphere

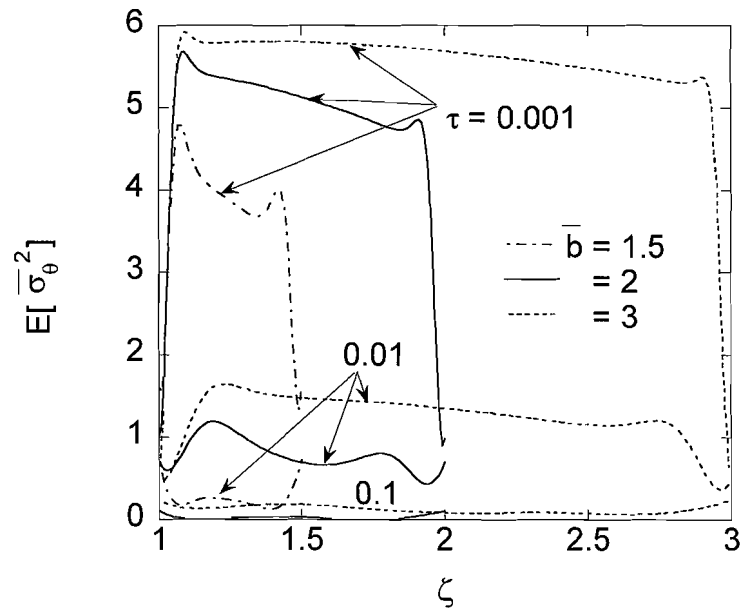


Fig. C-5 Transient behaviour of mean square tangential stress in a hollow sphere

図 C-6 は球かをもつ無限体内の熱応力の二乗平均分布である。半径方向応力の二乗平均は円周方向応力のそれと比較して非常に小さいが、それらの比 $E[\sigma_r^2]/E[\sigma_\theta^2]$ が時間とともに増加していることは興味深い。無限平板や中空球のような有限領域での計算結果でみられた「ピーク位置の変化」は $E[\sigma_\theta^2]$ では見られない。なぜなら、境界上での応力値が 0 に固定されている (式(C.33)),

(C.34)を参照せよ) からである. なお, 円周方向応力の二乗平均は温度のそれ (図示は省略) と定性的にも定量的にも良く似た挙動を示していることが観察された.

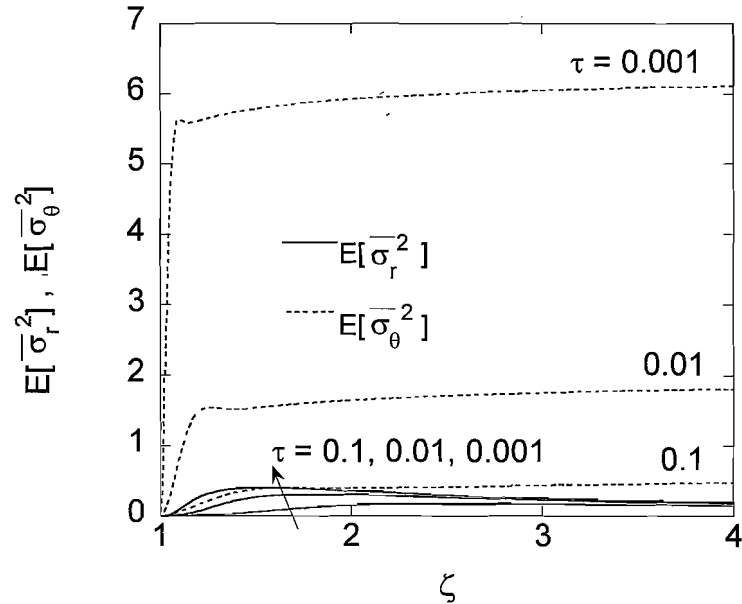


Fig. C-6 Transient behaviour of mean square thermal stresses in an infinite body with a spherical cavity

5 結 言

ランダム分布する初期温度をもつ 7 種類の単純形状の物体に対して, 非定常熱伝導問題と熱応力問題を確率論手法を用いて解析した. 初期温度のランダム性が一様確率場としてモデル化できるという条件の下で, 物体内の非定常温度と熱応力の自己相関関数を陽な形式で得た. 数値計算は, 初期温度がホワイトノイズで与えられる無限平板, 中空球および球かをもつ無限体に対して行い, 温度と熱応力の二乗平均の非定常挙動について検討した.

付録 D 空間的にランダムな熱伝達率を有する均質中空円板の確率論的熱応力解析

1 緒言

円板は最も基本的な形状の一つであるため、放熱フィン⁽¹²⁸⁾やタービンディスク^(129, 130)、ブレーキディスクローター^(131, 132)に代表されるように、工業へ幅広く応用されている。したがって、円板の熱応力問題は、その工業的な重要性から、多重連結領域⁽¹³³⁻¹³⁷⁾、変厚円板^(129, 136)、異方性体^(133, 137-143)、弾塑性体^(144, 145)、傾斜機能材料(FGM)のような不均質体^(116, 134-136, 146, 147)に至るまで解析されている。しかし、解析上の困難さを理由に、大半の研究において「円板表面が断熱されている」もしくは「面内で様な熱伝達率によって熱放散が生じる」との仮定を導入している。

熱的環境下にある種々の物体表面における熱伝達率は、その周囲媒体の運動や物体の形状、物体表面の凹凸を含む表面性状などによって大きく変化するのが現実である。例えば、広瀬ら^(148, 149)と稲室ら⁽¹⁵⁰⁾は実験と数値解析により、回転円板の表面における熱伝達率の空間分布が回転数とともに複雑に変化することを明らかにした。このような熱伝達率の空間的変化が熱応力場に及ぼす影響は、帯板、平板、円板のように、単位体積当たりの伝熱面積が大きい物体ほど顕著であることは明らかである。

物体内の温度や熱応力分布を周囲媒体への熱放散を考慮に入れて評価・予測する際、熱伝達率は最も不確定なパラメータであることも事実である⁽⁵⁷⁾。これは上述したように、熱伝達率は非常に多くの影響因子を持つためであり、同一条件下にもかかわらず様々な熱伝達率の経験式が存在することからも納得できよう。また、タービンディスクの熱伝達率は、ディスクの回転数、シュラウドおよび隣接ディスクの有無とその間隔、冷却空気速度、冷却空気流れのパターンなど多くの影響を受け、さらにその影響は非線形で変化も激しいため、熱伝達率を正確に予測することは非常に困難である⁽¹⁰⁶⁾との報告もある。このように熱伝達率の予測値に不確定性が内在している以上、これを確率量として扱い、物体の温度や熱応力を統計的に処理するのが合理的であろう。

一般に、熱伝達率の空間的変化は熱応力分布に大きく影響することが知られている。Sugano⁽¹⁵¹⁾とChen⁽¹⁵²⁾は表面の熱伝達率が一方向に変化する長方形板の非定常熱応力を解析し、熱伝達率の空間的変化が熱応力場に大きな影響を与えることを示した。その後、Leeら⁽¹⁵³⁾は半径方向に熱伝達率が変化する環状フィンの非定常連成熱弾性について、またSuganoら⁽¹¹³⁾は円板表面の熱伝達率の空間的変化を考慮したFGM回転円板の材料設計について論じた。さらに、Eraslanら^(154, 155)は半径方向への熱伝達率の変化を考慮して回転円板の弾塑性応力解析を行った。加熱円板に生じる定常熱応力を最小化するような熱伝達率の空間分布を求めた研究⁽¹⁵⁶⁾も報告されている。しかし、上記いずれの研究においても熱伝達率に含まれる不確定性は考慮されておらず、熱伝達率は確定量として取り扱われている。

これまでに報告されている、熱伝達率の空間的または時間的ランダム性を考慮した熱伝導・熱応力問題に関する確率論的研究は5.1節にまとめられている。しかしながら、ランダムな熱伝達率を有する弾性体の熱応力に対する解析的研究は、著者の知る限り報告されていないようである。

そこで本付録⁽¹⁰⁸⁾では、表面における熱伝達率が空間的にランダムな中空円板が、その側面(円

筒面)に確定的な軸対称熱負荷を受ける場合の温度と熱応力の二次統計量(平均と分散)を解析的に導出した。熱伝達率は半径方向に任意に変化し、ランダムな振幅で平均値まわりをランダムにばらつく、すなわち確率場であるとする。モデル化された解析対象の円板を、各層内で一様かつランダムな熱伝達率をもつ環状層の積層体で近似し、一種の積分変換法に相当する Vodicka の手法⁽⁸⁶⁾と摂動法を適用することで統計量の解析解を得た。なお、ここで提案する解析手法は熱伝達率の変化が一方向的である限り、中実円板や帯板、長方形板にも応用できる。

また、環状フィンを模擬して数値計算を行い、ランダムな熱伝達率の平均が①円板表面上で一定の場合②径方向に線形変化する場合一について、その平均の大きさと空間的变化および熱伝達率の空間的相関性が温度と熱応力の統計量に及ぼす影響について考察した。さらに、モンテカルロ・シミュレーションからの結果と比較することで、導出した解析解の妥当性を確認するとともに、その適用範囲を検証した。

2 解析モデル

図 D・1 に示すような、内半径 a 、外半径 b 、板厚 d (ただし、 $d/b \ll 1$) をもち、非円筒面(上下表面)の熱伝達率が半径方向座標 r の任意関数 $\eta(r)$ 、 $\chi(r)$ で与えられる中空円板を考える。円板の上下表面はそれぞれ $T_u(r,t)$ 、 $T_l(r,t)$ なる温度の周囲媒体と接している。円板は等方均質弾性体であり、その物性値(熱伝導率 λ 、密度 ρ 、比熱 c 、ヤング率 E 、ポアソン比 ν 、線膨張係数 α) は確定的で一定値とする。しかしながら、 $\eta(r)$ 、 $\chi(r)$ には確率場としてモデル化できるランダム性が含まれているものとする。この場合、円板内に熱発生/熱吸収が存在せず、温度が半径方向にのみ変化するならば、この中空円板に対する非定常熱伝導方程式は次式で表される。

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) - \frac{\eta(r, \omega_1)}{d} [T - T_u(r, t)] - \frac{\chi(r, \omega_2)}{d} [T - T_l(r, t)] \quad (D.1)$$

ここで、 $T, t, \{\omega_1, \omega_2\}$ はそれぞれ温度、時間、および確率変数である。熱伝達率の任意の空間的变化に対して式(D.1)の厳密解を得ることは非常に困難である。そこで、図 D・1 のように円板を半径方向に n 分割し、各領域で熱伝達率を相異なるランダム定数 $\eta_i, \chi_i (i = 1, 2, \dots, n)$ と近似する。つまり、連続的な確率場を離散的な確率場へと変換する。円板の初期温度は $T_0(r)$ とし、ある時刻から円板内・外側面の周囲媒体の温度が、それぞれ $T_a(t)$ 、 $T_b(t)$ になるものとする。また、側面上の熱伝達率は ψ_a と ψ_b で与える。 n 領域に分割された円板の仮想界面座標値は $r_i (i = 1, 2, \dots, n-1)$ である。さらに、円板に外力は一切作用していないものとする。

確率量を有する物体の熱伝導問題を考えるにあたり、以下のような仮定を導入する。

(i) 確率量 η_i と $\chi_i (i = 1, 2, \dots, n)$ は、確定量 H_i, G_i と小さな確率変動量 h_i, g_i との和で与えられるものとする。すなわち、

$$\eta_i = H_i + h_i = H_i + \sum_{j=1}^n h_j \delta_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (D.2)$$

$$\chi_i = G_i + g_i = G_i + \sum_{j=1}^n g_j \delta_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (\text{D.3})$$

ここに H_i, G_i はそれぞれ η_i, χ_i の平均を意味する定数, h_i, g_i は平均値 0 でその変動量は H_i, G_i に比べて十分に小さいとする. また, δ_{ij} はクロネッカー・デルタである.

(ii) 確率変動量 h_i, g_i の相関係数は次のような指数関数で与える.

$$\rho_{hh}^*(p, q) = \frac{E[h_p h_q]}{S[h_p] \cdot S[h_q]} = \exp(-B_1 |\varrho_p - \varrho_q|), \quad p, q = 1, 2, \dots, n \quad (\text{D.4})$$

$$\rho_{gg}^*(p, q) = \frac{E[g_p g_q]}{S[g_p] \cdot S[g_q]} = \exp(-B_2 |\varrho_p - \varrho_q|), \quad p, q = 1, 2, \dots, n \quad (\text{D.5})$$

$$\rho_{hg}^*(p, q) = \frac{E[h_p g_q]}{S[h_p] \cdot S[g_q]} = C_1 \cdot \exp(-B_3 |\varrho_p - \varrho_q|), \quad p, q = 1, 2, \dots, n \quad (\text{D.6})$$

ここで, $E[\]$ と $S[\]$ はそれぞれ期待値と標準偏差を表す. また, ϱ_p は第 p 領域の中央半径であり, $\varrho_p = (r_p + r_{p-1})/2$ と定義される. B_i ($i = 1, 2, 3$) は相関性の強さによって決定される正の定数であり, C_1 は同様に相関性の強さを表すが -1 から 1 の間の定数である. 式(D.4)–(D.6)はそれぞれ, 上面の熱伝達率の自己相関性, 下面の熱伝達率の自己相関性, 上下面の熱伝達率の相互相関性を表している. なお, 本付録で提案する解析手法を用いる限り, $\rho_{hh}^*, \rho_{gg}^*, \rho_{hg}^*$ の関数形は必ずしも指数関数に制限される必要はなく, 任意の関数形が許容される.

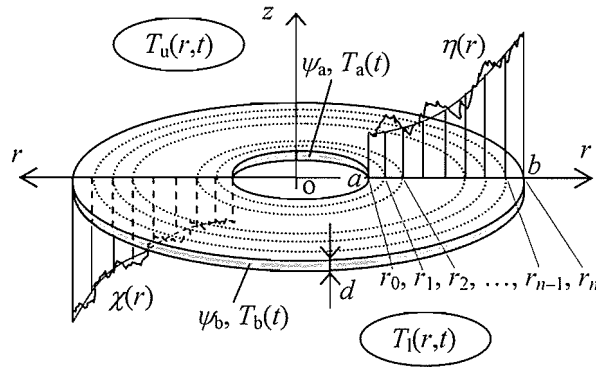


Fig. D-1 Physical model and coordinate system for an annular disc

3 解析

3.1 温度場

図 D-1 に示される複合中空円板の非定常熱伝導問題は, 式(D.2), (D.3)を考慮すると次のように

定式化される.

$$\rho c \frac{\partial T_i}{\partial t} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_i}{\partial r} \right) - \frac{H_i + h_i}{d} [T_i - T_u(r, t)] - \frac{G_i + g_i}{d} [T_i - T_l(r, t)],$$

$$i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{D.7})$$

$$T_i = T_0(r), \quad \text{at } t = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{D.8})$$

$$\lambda \frac{\partial T_1}{\partial r} - \psi_a [T_1 - T_a(t)] = 0, \quad \text{at } r = r_0 = a \quad (\text{D.9})$$

$$\lambda \frac{\partial T_n}{\partial r} + \psi_b [T_n - T_b(t)] = 0, \quad \text{at } r = r_n = b \quad (\text{D.10})$$

$$T_i = T_{i+1}, \quad \text{at } r = r_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (\text{D.11})$$

$$\frac{\partial T_i}{\partial r} = \frac{\partial T_{i+1}}{\partial r}, \quad \text{at } r = r_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (\text{D.12})$$

式(D.7)中の h_i と g_i ($i = 1, 2, \dots, n$) が確率量であるため, 温度場は決定論的に評価できず, 統計的に評価しなければならない. 仮定(i)において $S[h_i]/H_i, S[g_i]/G_i \ll 1$ であるから, 式(D.7)–(D.12)の方程式系の解法として摂動法が利用できる. そこで, 温度の統計量としてその平均と分散を摂動法により解析的に導出する. 式(D.7)–(D.12)に対する解を h_s, g_s ($s = 1, 2, \dots, n$) について摂動展開すれば

$$T_i(r, t) = T_{i0}(r, t) + \sum_{x=1}^{\infty} \sum_{s=1}^n [T_{i1xs}(r, t) h_s^x + T_{i2xs}(r, t) g_s^x] \quad (\text{D.13})$$

h_s, g_s の二次以上の項を無視することで, 次式のような線形化を行う. これは近似解を与えることになり, η_i, χ_i の変動係数 $S[h_i]/H_i, S[g_i]/G_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) が十分に小さい場合に良い精度が得られる.

$$T_i(r, t) \cong T_{i0}(r, t) + \sum_{s=1}^n [T_{i1s}(r, t) h_s + T_{i2s}(r, t) g_s] \quad (\text{D.14})$$

式(D.14)を式(D.7)–(D.12)に代入し, h_s, g_s の各次数について等置すると, 0 次の方程式系と h_s, g_s の各 1 次の方程式系が得られる.

3.1.1 0 次の方程式系

0 次の方程式系は次のように表される.

$$\frac{1}{\kappa} \frac{\partial T_{i0}}{\partial t} = \frac{\partial^2 T_{i0}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{i0}}{\partial r} - \frac{T_{i0}}{\lambda d} (H_i + G_i) + \frac{Q_i(r, t)}{\lambda}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{D.15})$$

$$T_{i0} = T_0(r), \quad \text{at } t = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{D.16})$$

$$\lambda \frac{\partial T_{i0}}{\partial r} - \psi_a [T_{i0} - T_a(t)] = 0, \quad \text{at } r = r_0 = a \quad (\text{D.17})$$

$$\lambda \frac{\partial T_{n0}}{\partial r} + \psi_b [T_{n0} - T_b(t)] = 0, \quad \text{at } r = r_n = b \quad (\text{D.18})$$

$$T_{i0} = T_{(i+1)0}, \quad \text{at } r = r_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (\text{D.19})$$

$$\frac{\partial T_{i0}}{\partial r} = \frac{\partial T_{(i+1)0}}{\partial r}, \quad \text{at } r = r_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (\text{D.20})$$

ここで、 κ は熱拡散率、 $Q(r,t) = [H_i T_u(r,t) + G_i T_l(r,t)]/d$ である。

本付録では、一種の積分変換法である Vodicka の手法を用いて式(D.15)–(D.20)の解を求める。この手法は複合領域の非定常熱伝導問題を簡便に解析できるため、任意の熱伝達率の変化を有する円板⁽¹¹²⁾や傾斜機能材料のような不均質体⁽¹¹³⁾の非定常温度場の解析に応用されている。この手法の詳細については文献⁽⁸⁶⁾を参照のこと。この Vodicka の手法によれば、解は次式のように得られる。

$$T_{i0}(r,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \phi_m(t) X_{im}(r) + \sum_{j=1}^2 L_{ij}(r) P_j(t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{D.21})$$

ただし、

$$L_{ij}(r) = C_{ij} I_0 \left(\sqrt{\frac{H_i + G_i}{\lambda d}} r \right) + D_{ij} K_0 \left(\sqrt{\frac{H_i + G_i}{\lambda d}} r \right), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2 \quad (\text{D.22})$$

$$P_1(t) = -T_a(t), \quad P_2(t) = T_b(t) \quad (\text{D.23})$$

ここで、 $I_0(\cdot)$ と $K_0(\cdot)$ はそれぞれ0次の第一種、第二種変形ベッセル関数である。式(D.22)に含まれる定数 C_{ij} 、 D_{ij} は次の関係式より得られる。

$$\lambda \frac{dL_{11}(a)}{dr} - \psi_a L_{11}(a) = \psi_a, \quad \lambda \frac{dL_{n1}(b)}{dr} + \psi_b L_{n1}(b) = 0, \quad (\text{D.24})$$

$$L_{i1}(r_i) = L_{(i+1)1}(r_i), \quad \frac{dL_{i1}(r_i)}{dr} = \frac{dL_{(i+1)1}(r_i)}{dr}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$\lambda \frac{dL_{12}(a)}{dr} - \psi_a L_{12}(a) = 0, \quad \lambda \frac{dL_{n2}(b)}{dr} + \psi_b L_{n2}(b) = \psi_b,$$

$$L_{i2}(r_i) = L_{(i+1)2}(r_i), \quad \frac{dL_{i2}(r_i)}{dr} = \frac{dL_{(i+1)2}(r_i)}{dr}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (\text{D.25})$$

$X_{im}(r)$ は式(D.15), 式(D.17)–(D.20)に対応した固有値問題の解で, 次式で与えられる.

$$X_{im}(r) = A_{im}J_0(\beta_{im}r) + B_{im}Y_0(\beta_{im}r) \quad (\text{D.26})$$

ただし

$$\beta_{im} = \sqrt{\frac{\gamma_m^2}{\kappa} - \frac{H_i + G_i}{\lambda d}} \quad (\text{D.27})$$

ここで, $J_0(\cdot)$ と $Y_0(\cdot)$ はそれぞれ0次の第一種, 第二種ベッセル関数, γ_m は固有値である. 式(D.26), (D.27)は $\gamma_m^2/\kappa > (H_i + G_i)/(\lambda d)$ の場合にのみ有効で, $\gamma_m^2/\kappa < (H_i + G_i)/(\lambda d)$ と $\gamma_m^2/\kappa = (H_i + G_i)/(\lambda d)$ の場合はそれぞれ, 式(D.26)の代わりに次のものを用いる.

$$X_{im}(r) = A_{im}I_0(\beta_{im}^*r) + B_{im}K_0(\beta_{im}^*r) \quad \text{for } \frac{\gamma_m^2}{\kappa} - \frac{(H_i + G_i)}{\lambda d} < 0 \quad (\text{D.26}')$$

ただし,

$$\beta_{im}^* = \sqrt{\frac{H_i + G_i}{\lambda d} - \frac{\gamma_m^2}{\kappa}}, \quad (\text{D.27}')$$

$$X_{im}(r) = A_{im} \ln r + B_{im} \quad \text{for } \frac{\gamma_m^2}{\kappa} - \frac{(H_i + G_i)}{\lambda d} = 0 \quad (\text{D.26}'')$$

未知定数 A_{im}, B_{im} の決定に必要な条件式は, 式(D.21)–(D.27)を式(D.17)–(D.20)に代入することで次式のように得られる.

$$\lambda \frac{dX_{1m}(a)}{dr} - \psi_a X_{1m}(a) = 0, \quad \lambda \frac{dX_{nm}(b)}{dr} + \psi_b X_{nm}(b) = 0,$$

$$X_{im}(r_i) = X_{(i+1)m}(r_i), \quad \frac{dX_{im}(r_i)}{dr} = \frac{dX_{(i+1)m}(r_i)}{dr}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (\text{D.28})$$

固有値 γ_m ($m = 1, 2, \dots$)は, 未知係数 A_{im}, B_{im} が 0 以外の解をもつための条件から決定でき, 次式の超越方程式の正根として得られる.

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 \cdots \mathbf{E}_{n-1} \cdot \mathbf{a} = 0 \quad (\text{D.29})$$

ここで

$$\mathbf{G} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \beta_{1m} J_1(\beta_{1m} r_0) + \frac{\psi_a}{\lambda} J_0(\beta_{1m} r_0) & \beta_{1m} Y_1(\beta_{1m} r_0) + \frac{\psi_a}{\lambda} Y_0(\beta_{1m} r_0) \\ -\beta_{1m}^* I_1(\beta_{1m}^* r_0) + \frac{\psi_a}{\lambda} I_0(\beta_{1m}^* r_0) & \beta_{1m}^* K_1(\beta_{1m}^* r_0) + \frac{\psi_a}{\lambda} K_0(\beta_{1m}^* r_0) \\ \frac{1}{r_0} - \frac{\psi_a}{\lambda} \ln r_0 & -\frac{\psi_a}{\lambda} \end{bmatrix} & \text{for } \frac{\gamma_m^2}{\kappa} - \frac{(H_1 + G_1)}{\lambda d} \begin{cases} > 0 \\ < 0 \\ = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{C}_i \cdot \mathbf{D}_{i+1},$$

$$\mathbf{C}_i = \begin{cases} \begin{bmatrix} -\beta_{im} Y_1(\beta_{im} r_i) & -Y_0(\beta_{im} r_i) \\ \beta_{im} J_1(\beta_{im} r_i) & J_0(\beta_{im} r_i) \\ -\beta_{im}^* K_1(\beta_{im}^* r_i) & -K_0(\beta_{im}^* r_i) \\ -\beta_{im}^* I_1(\beta_{im}^* r_i) & I_0(\beta_{im}^* r_i) \\ 0 & -1 \\ -\frac{1}{r_i} & \ln r_i \end{bmatrix} & \text{for } \frac{\gamma_m^2}{\kappa} - \frac{(H_i + G_i)}{\lambda d} \begin{cases} > 0 \\ < 0 \\ = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\mathbf{D}_{i+1} = \begin{cases} \begin{bmatrix} J_0[\beta_{(i+1)m} r_i] & Y_0[\beta_{(i+1)m} r_i] \\ -\beta_{(i+1)m} J_1[\beta_{(i+1)m} r_i] & -\beta_{(i+1)m} Y_1[\beta_{(i+1)m} r_i] \\ I_0[\beta_{(i+1)m}^* r_i] & K_0[\beta_{(i+1)m}^* r_i] \\ \beta_{(i+1)m}^* I_1[\beta_{(i+1)m}^* r_i] & -\beta_{(i+1)m}^* K_1[\beta_{(i+1)m}^* r_i] \\ \ln r_i & 1 \\ \frac{1}{r_i} & 0 \end{bmatrix}, & \text{for } \frac{\gamma_m^2}{\kappa} - \frac{(H_{i+1} + G_{i+1})}{\lambda d} \begin{cases} > 0 \\ < 0 \\ = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \beta_{nm} Y_1(\beta_{nm} r_n) - \frac{\psi_b}{\lambda} Y_0(\beta_{nm} r_n) \\ -\beta_{nm} J_1(\beta_{nm} r_n) + \frac{\psi_b}{\lambda} J_0(\beta_{nm} r_n) \\ \beta_{nm}^* K_1(\beta_{nm}^* r_n) - \frac{\psi_b}{\lambda} K_0(\beta_{nm}^* r_n) \\ \beta_{nm}^* I_1(\beta_{nm}^* r_n) + \frac{\psi_b}{\lambda} I_0(\beta_{nm}^* r_n) \\ -\frac{\psi_b}{\lambda} \\ \frac{1}{r_n} + \frac{\psi_b}{\lambda} \ln r_n \end{bmatrix}, & \text{for } \frac{\gamma_m^2}{\kappa} - \frac{(H_n + G_n)}{\lambda d} \begin{cases} > 0 \\ < 0 \\ = 0 \end{cases} \end{cases} \quad (\text{D.30})$$

ここで、 $J_1(\cdot)$, $Y_1(\cdot)$ はそれぞれ1次の第一種、第二種ベッセル関数であり、 $I_1(\cdot)$, $K_1(\cdot)$ はそれぞれ1次の第一種、第二種変形ベッセル関数である。式(D.29), (D.30)から明らかなように、超越方程式は γ_m の値に応じて変化する。したがって、固有値の探索には十分注意を払う必要がある*。

関数 $\phi_m(t)$ は次のように表される。

$$\phi_m(t) = \exp(-\gamma_m^2 t) \left\{ f_m + \int_0^t \exp(\gamma_m^2 \tau) \left[q_m(\tau) - \sum_{j=1}^2 l_{mj} \frac{dP_j(\tau)}{d\tau} \right] d\tau \right\} \quad (D.31)$$

ここで、展開係数 f_m , $q_m(t)$, l_{mj} ($j=1, 2$)は次式で与えられる。

$$f_m = \frac{\sum_{i=1}^n \int_{r_{i-1}}^{r_i} r \left[T_0(r) - \sum_{j=1}^2 L_{ij}(r) P_j(0) \right] X_{im}(r) dr}{\sum_{i=1}^n \int_{r_{i-1}}^{r_i} r [X_{im}(r)]^2 dr}, \quad q_m(t) = \frac{\frac{\kappa}{\lambda} \sum_{i=1}^n \int_{r_{i-1}}^{r_i} r Q_i(r, t) X_{im}(r) dr}{\sum_{i=1}^n \int_{r_{i-1}}^{r_i} r [X_{im}(r)]^2 dr},$$

$$l_{mj} = \frac{\sum_{i=1}^n \int_{r_{i-1}}^{r_i} r L_{ij}(r) X_{im}(r) dr}{\sum_{i=1}^n \int_{r_{i-1}}^{r_i} r [X_{im}(r)]^2 dr}, \quad j=1, 2 \quad (D.32)$$

3.1.2 h_s と g_s ($s=1, 2, \dots, n$)の1次の方程式系

h_s の1次の方程式系は次のように得られる。

$$\frac{1}{\kappa} \frac{\partial T_{ils}}{\partial t} = \frac{\partial^2 T_{ils}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{ils}}{\partial r} - \frac{T_{ils}}{\lambda d} (H_i + G_i) - \frac{T_{i0}(r, t) - T_u(r, t)}{\lambda d} \delta_{is}, \quad i, s=1, 2, \dots, n \quad (D.33)$$

$$T_{ils} = 0, \quad \text{at } t=0, \quad i, s=1, 2, \dots, n \quad (D.34)$$

$$\lambda \frac{\partial T_{1is}}{\partial r} - \psi_a T_{1is} = 0, \quad \text{at } r=r_0=a, \quad s=1, 2, \dots, n \quad (D.35)$$

$$\lambda \frac{\partial T_{nls}}{\partial r} + \psi_b T_{nls} = 0, \quad \text{at } r=r_n=b, \quad s=1, 2, \dots, n \quad (D.36)$$

$$T_{ils} = T_{(i+1)ls}, \quad \text{at } r=r_i, \quad i=1, 2, \dots, n-1, \quad s=1, 2, \dots, n \quad (D.37)$$

$$\frac{\partial T_{ils}}{\partial r} = \frac{\partial T_{(i+1)ls}}{\partial r}, \quad \text{at } r=r_i, \quad i=1, 2, \dots, n-1, \quad s=1, 2, \dots, n \quad (D.38)$$

* 式(D.29)の超越方程式を $f(\gamma)=0$ とおくと、 f は γ に対して不連続な関数である。したがって、固有値の探索アルゴリズムに二分法を採用すると、固有値が正しく得られない場合がある。

また, g_s の 1 次の方程式系は次のように得られる.

$$\frac{1}{\kappa} \frac{\partial T_{i2s}}{\partial t} = \frac{\partial^2 T_{i2s}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{i2s}}{\partial r} - \frac{T_{i2s}}{\lambda d} (H_i + G_i) - \frac{T_{i0}(r,t) - T_{i1}(r,t)}{\lambda d} \delta_{is}, \quad i, s = 1, 2, \dots, n \quad (\text{D.39})$$

$$T_{i2s} = 0, \quad \text{at } t = 0, \quad i, s = 1, 2, \dots, n \quad (\text{D.40})$$

$$\lambda \frac{\partial T_{i2s}}{\partial r} - \psi_a T_{i2s} = 0, \quad \text{at } r = r_0 = a, \quad s = 1, 2, \dots, n \quad (\text{D.41})$$

$$\lambda \frac{\partial T_{i2s}}{\partial r} + \psi_b T_{i2s} = 0, \quad \text{at } r = r_n = b, \quad s = 1, 2, \dots, n \quad (\text{D.42})$$

$$T_{i2s} = T_{(i+1)2s}, \quad \text{at } r = r_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad s = 1, 2, \dots, n \quad (\text{D.43})$$

$$\frac{\partial T_{i2s}}{\partial r} = \frac{\partial T_{(i+1)2s}}{\partial r}, \quad \text{at } r = r_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad s = 1, 2, \dots, n \quad (\text{D.44})$$

式(D.33)–(D.38)および式(D.39)–(D.44)で与えられる方程式系と式(D.15)–(D.20)の 0 次の方程式系を比較すると, 前者 2 つの方程式系は 0 次の方程式系において $T_0 = T_a = T_b = 0$ とおき, $Q_i(r,t)$ をそれぞれ $[T_{i0}(r,t) - T_{0i}] \delta_{is} / d$ と $[T_{i1}(r,t) - T_{0i}] \delta_{is} / d$ で置き換えた場合に相当する. したがって, 解 T_{i1s}, T_{i2s} は 3.1.1 節で述べたのと同じ方法で得ることができる.

3.1.3 温度の平均と分散

式(D.14)の形で表される温度解 T_i を利用することで, 温度の平均と分散が容易に求められる. 仮定(i)より $E[h_s] = E[g_s] = 0$ ($s = 1, 2, \dots, n$) であるから, 温度の平均と分散は次のよう得られる.

$$E[T_i] = T_{i0}(r, t) \quad (\text{D.45})$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[T_i] &= E[T_i^2] - \{E[T_i]\}^2 \\ &= \sum_{s=1}^n \sum_{x=1}^n T_{i1s}(r, t) T_{i1x}(r, t) E[h_s h_x] + 2 \sum_{s=1}^n \sum_{x=1}^n T_{i1s}(r, t) T_{i2x}(r, t) E[h_s g_x] \\ &\quad + \sum_{s=1}^n \sum_{x=1}^n T_{i2s}(r, t) T_{i2x}(r, t) E[g_s g_x] \end{aligned} \quad (\text{D.46})$$

ここで, $\text{Var}[\cdot]$ は分散を意味する. 式(D.46)は式(D.4)–(D.6)を導入することで計算できる. また, 温度の標準偏差 $S[T_i]$ は $\text{Var}[T_i]$ の平方根で与えられる. もし, $s \neq x$ で h_s と h_x が互いに独立で, 同じく g_s と g_x も互いに独立であり, かつ h_s と g_x がいかなる場合でも独立であれば, 式(D.46)は次式のように単純化される.

$$\text{Var}[T_i] = \sum_{s=1}^n \{T_{i1s}^2(r, t) E[h_s^2] + T_{i2s}^2(r, t) E[g_s^2]\} \quad (\text{D.46}')$$

3.2 熱応力場

式(D.14)で与えられる温度場にある中空円板の熱応力は統計的な評価を必要とする。温度分布が半径座標 r のみの関数である，外力の作用していない薄い中空円板（すなわち，平面応力問題）の決定論的熱応力は次式にて与えられる⁽¹²⁵⁾。

$$\sigma_{rr}(r,t) = \frac{\alpha E}{r^2} \left[\frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} \int_a^b T(r,t) r dr - \int_a^r T(r,t) r dr \right] \quad (D.47)$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r,t) = \frac{\alpha E}{r^2} \left[\frac{r^2 + a^2}{b^2 - a^2} \int_a^b T(r,t) r dr + \int_a^r T(r,t) r dr - T(r,t) r^2 \right] \quad (D.48)$$

ここで， σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ はそれぞれ応力の半径方向成分と円周方向成分である。

T_i に含まれるランダム性に起因して中空円板の熱応力もランダムに変化するため，熱応力の統計量として平均と分散を導出する。式(D.45)を考慮すれば， σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ の平均は次のように表される。

$$E[\sigma_{rr}] = \frac{\alpha E}{r^2} \left[\frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} \int_a^b T_{i0}(r,t) r dr - \int_a^r T_{i0}(r,t) r dr \right] \quad (D.49)$$

$$E[\sigma_{\theta\theta}] = \frac{\alpha E}{r^2} \left[\frac{r^2 + a^2}{b^2 - a^2} \int_a^b T_{i0}(r,t) r dr + \int_a^r T_{i0}(r,t) r dr - T_{i0}(r,t) r^2 \right] \quad (D.50)$$

一方，分散は次式のように得られる。

$$\text{Var}[\sigma_{rr}] = \frac{E^2 \alpha^2}{r^4} \left[V_1(r,t) - \frac{2(r^2 - a^2)}{b^2 - a^2} V_2(r,t) + \frac{(r^2 - a^2)^2}{(b^2 - a^2)^2} V_3(t) \right] \quad (D.51)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[\sigma_{\theta\theta}] = \frac{E^2 \alpha^2}{r^4} & \left[V_1(r,t) + \frac{2(r^2 + a^2)}{b^2 - a^2} V_2(r,t) + \frac{(r^2 + a^2)^2}{(b^2 - a^2)^2} V_3(t) \right. \\ & \left. - \frac{2(r^2 + a^2)r^2}{b^2 - a^2} V_4(r,t) - 2r^2 V_5(r,t) + W(r,r,t)r^4 \right] \quad (D.52) \end{aligned}$$

ここで，

$$V_1(r,t) = \int_a^r \int_a^r W(x,y,t) xy dx dy, \quad V_2(r,t) = \int_a^r \int_a^b W(x,y,t) xy dx dy, \quad V_3(t) = \int_a^b \int_a^b W(x,y,t) xy dx dy,$$

$$V_4(r,t) = \int_a^b W(r,x,t) x dx, \quad V_5(r,t) = \int_a^r W(r,x,t) x dx \quad (D.53)$$

$$\begin{aligned} W(x,y,t) = & \sum_{s=1}^n \sum_{k=1}^n T_{i1s}(x,t) T_{i1k}(y,t) E[h_s h_k] + \sum_{s=1}^n \sum_{k=1}^n T_{i1s}(x,t) T_{i2k}(y,t) E[h_s g_k] \\ & + \sum_{s=1}^n \sum_{k=1}^n T_{i1k}(y,t) T_{i2s}(x,t) E[h_k g_s] + \sum_{s=1}^n \sum_{k=1}^n T_{i2s}(x,t) T_{i2k}(y,t) E[g_s g_k] \quad (D.54) \end{aligned}$$

式(D.54)は式(D.4)–(D.6)を導入することで計算できる。また、熱応力の標準偏差 $S[\sigma_{rr}]$, $S[\sigma_{\theta\theta}]$ はそれぞれ $\text{Var}[\sigma_{rr}]$, $\text{Var}[\sigma_{\theta\theta}]$ の平方根で与えられる。もし、 $s \neq k$ で h_s と h_k が互いに独立で、同じく g_s と g_k も互いに独立であり、かつ h_s と g_k がいかなる場合でも独立であれば、式(D.54)は次式のように単純化される。

$$W(x, y, t) = \sum_{s=1}^n T_{i1s}(x, t) T_{i1s}(y, t) E[h_s^2] + \sum_{s=1}^n T_{i2s}(x, t) T_{i2s}(y, t) E[g_s^2] \quad (\text{D.54})'$$

4 数値計算結果と考察

4.1 計算条件の設定

数値計算の一例として、熱交換器の環状フィンを模擬した中空円板を考える。この場合、フィンの根元温度（図 D-1 では T_a に相当）は一定とみなせる⁽¹⁵⁷⁾。解析結果の一般性を考慮して、次の無次元量を導入する。

$$\begin{aligned} \Psi_a &= \frac{\psi_a b}{\lambda}, & \Psi_b &= \frac{\psi_b b}{\lambda}, & \theta_b(\tau) &= \frac{T_b(t)}{T_a}, & \bar{d} &= \frac{d}{b}, & \theta_u(\xi, \tau) &= \frac{T_u(r, t)}{T_a}, \\ \theta_l(\xi, \tau) &= \frac{T_l(r, t)}{T_a}, & \bar{a} &= \frac{a}{b}, & \tau &= \frac{\kappa t}{b^2}, & \xi &= \frac{r}{b}, & \theta_i(\xi, \tau) &= \frac{T_i(r, t)}{T_a}, \\ \theta_0(\xi) &= \frac{T_0(r)}{T_a}, & \bar{\sigma}_{rr} &= \frac{\sigma_{rr}}{E\alpha T_a}, & \bar{\sigma}_{\theta\theta} &= \frac{\sigma_{\theta\theta}}{E\alpha T_a}, & \bar{H}_i &= \frac{H_i b}{\lambda}, & \bar{G}_i &= \frac{G_i b}{\lambda}, \\ \bar{h}_i &= \frac{h_i b}{\lambda}, & \bar{g}_i &= \frac{g_i b}{\lambda} \end{aligned} \quad (\text{D.55})$$

円板の上下面で熱伝達率の平均は互いに等しいとし、その空間分布として以下に述べる二種類を考える。一つめは、熱伝達率の平均が円板表面にわたり一様な場合である。二つめは、平均が半径方向に線形増加する場合であり、これは実際の環状フィン表面の熱伝達率分布の第一近似となり得る^(158, 159)。後者の場合の熱伝達率は無次元表記で次のように表される。

$$\bar{H}(\xi) = \bar{G}(\xi) = \frac{3m(1+\bar{a})}{(2+\bar{a})(1-\bar{a})}(\xi - \bar{a}) \quad (\text{D.56})$$

ここで、 m は無次元熱伝達率（ビオ一数）の面積平均値を意味する。 \bar{H}_i , \bar{G}_i ($i = 1, 2, \dots, n$) の値は $\xi = (\xi_i + \xi_{i-1})/2$ で定義される各領域の中央半径での $\bar{H}(\xi)$, $\bar{G}(\xi)$ の評価値として得られる。

また、数値計算諸元として次の値を採用する。

$$\begin{aligned} \Psi_a &= \infty, & \Psi_b &= 0, & \bar{d} &= 0.05, & \theta_u &= \theta_l = 0, & \bar{a} &= 0.2, \\ \theta_0 &= 0, & C_1 &= 0, & n &= 20 \end{aligned} \quad (\text{D.57})$$

ここで、 $\xi = 1$ の境界、すなわちフィン先端は断熱されていると仮定した。これは、フィン先端の

面積がフィン放熱面の面積と比べて非常に小さい場合、そこからの熱伝達は無視できる⁽¹⁵³⁾ためである。 n の値はランダムな熱伝達率の空間周波数特性に応じて適切に選択する必要がある。その選択方法の詳細については付録 E にて説明する。本数値計算では、熱伝達率のランダム性は変動係数によって特徴づけられるものと仮定し、それを次のように与える。

$$V = \frac{S[\bar{h}_i]}{\bar{H}_i} = \frac{S[\bar{g}_i]}{\bar{G}_i} = 0.1, 0.2, 0.3 \quad (D.58)$$

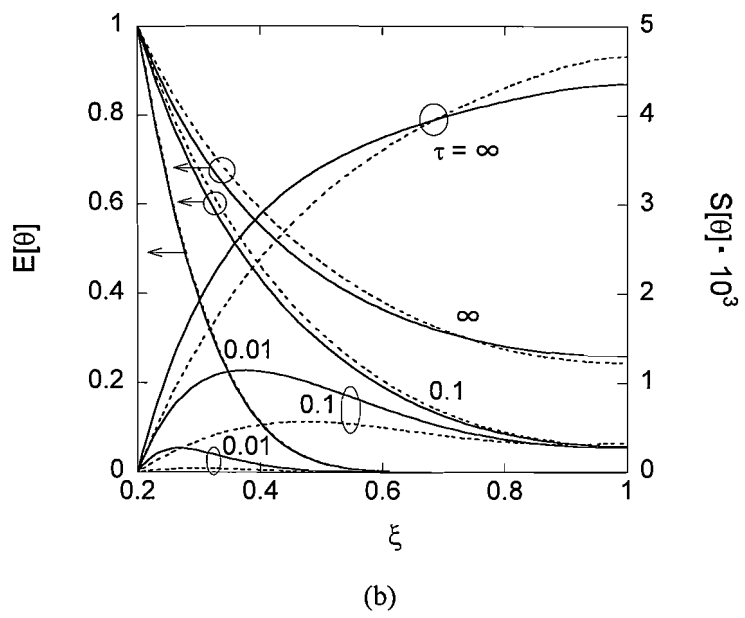
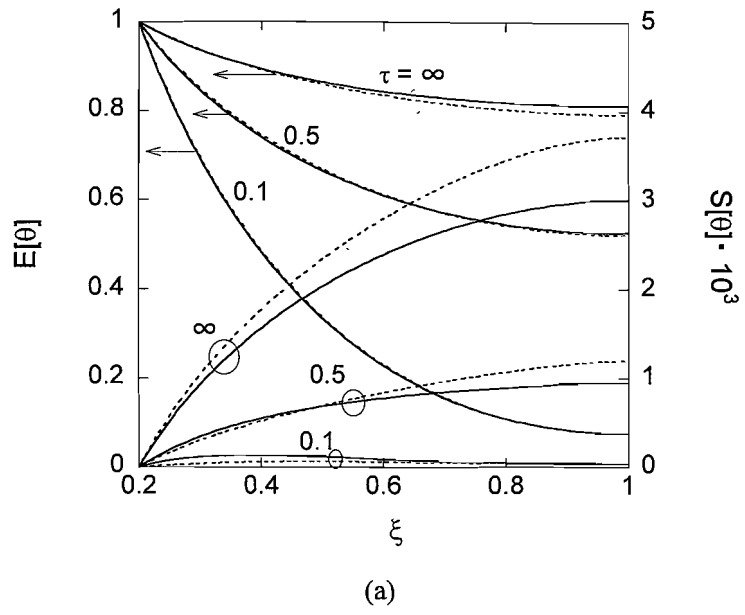
式(D.58)は、ランダムな熱伝達率が正規分布に従うならば、その平均まわりにそれぞれ $\pm 30\%$, $\pm 60\%$, $\pm 90\%$ の範囲でばらつくことを意味する。

式(D.21)に含まれる無限級数は、温度の統計量について有効数字を 4 桁得るために、 $\infty = 50$ と近似して以下の計算を行った。

4.2 温度の二次統計量

はじめに、温度の平均と標準偏差の非定常分布に及ぼす熱伝達率の平均の大きさ、熱伝達率の平均の空間的变化の影響について考察する。図 D-2 (a)-(c)は面積平均熱伝達率 m をそれぞれ 0.01, 0.1, 1 とした場合の温度の平均と標準偏差を示している。ここでは、熱伝達率の自己相関性の影響を排除するため、 $B_1 = B_2 = 100$ とおいている。この場合、 B_1, B_2 の値が大きいため式(D.4), (D.5)で表現される自己相関係数がクロネッカー・デルタ δ_{pq} で近似できる。これは帯域制限されたホワイトノイズ確率場⁽⁷¹⁾に他ならない。図 D-2 (a)-(c)の比較より、以下の特徴を確認できる。① m 値のオーダー、すなわち熱伝達率の標準偏差のオーダー^{*}が 2 桁違うにもかかわらず、温度の標準偏差は同オーダーにある。② 温度の平均に及ぼす熱伝達率の空間的变化による影響は、 m, τ の値が大きいくほど顕著である。③ 温度の標準偏差に及ぼす熱伝達率の空間的变化による影響は、平均に及ぼす影響と比べて大きい。④ 温度の標準偏差は時間とともに増加する。

* 変動係数 $V =$ 一定の条件下では、式(D.58)より、熱伝達率の平均を M オーダ変化させると、熱伝達率の標準偏差も M オーダ変化する。



Continued on the next page

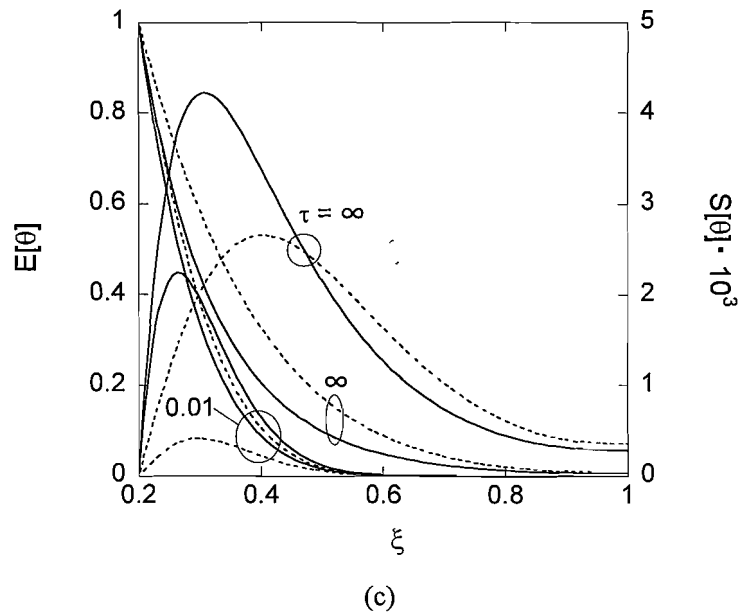
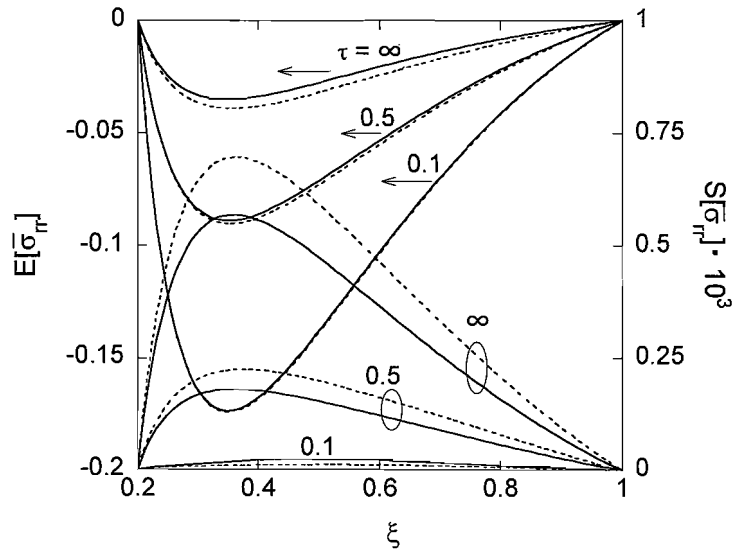


Fig. D-2 The transient distribution of the mean and standard deviation of the dimensionless temperature with $B_1 = B_2 = 100$ and $V = 0.1$ for the case of uniform HTCs, $\bar{H}(\xi) = \bar{G}(\xi) = m$, (solid curves) and HTCs given by Eq. (D.56) (broken curves), for (a) $m = 0.01$, (b) $m = 0.1$ and (c) $m = 1$

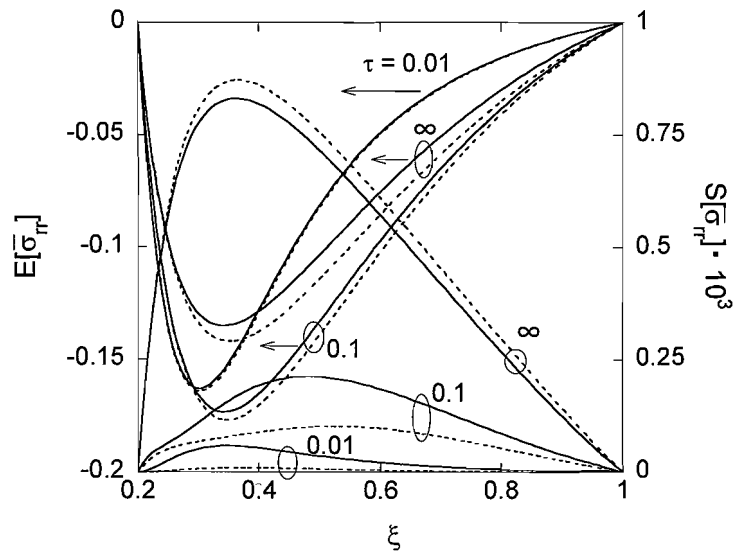
4.3 熱応力の二次統計量

図 D-3 (a)-(c)は $B_1 = B_2 = 100$ で, m がそれぞれ 0.01, 0.1, 1 の場合の半径方向応力の平均と標準偏差を示している. 上記①~④の特徴は半径方向応力に対しても確認できる. 加えて, 大きな圧縮応力を生じている場所で標準偏差が大きい傾向にある. 各時刻における標準偏差の最大値は温度のそれと比較して約 1/5 と小さい.

図 D-4 (a)-(c)は同様に $B_1 = B_2 = 100$ で, m がそれぞれ 0.01, 0.1, 1 の場合の円周方向応力の平均と標準偏差を示している. 上記①~④の特徴は円周方向応力に対しても当てはまる. 各時刻において, 標準偏差の最大値は半径方向応力のその約 3~4 倍の値を示している.



(a)



(b)

Continued on the next page

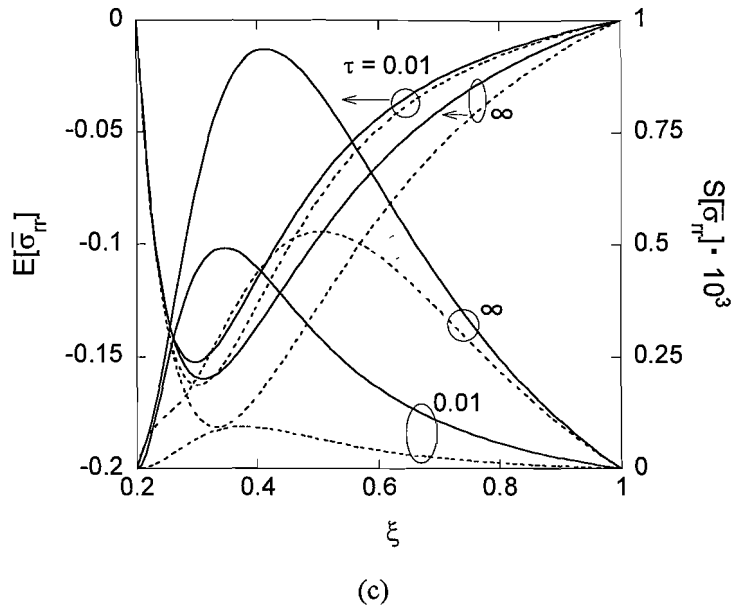
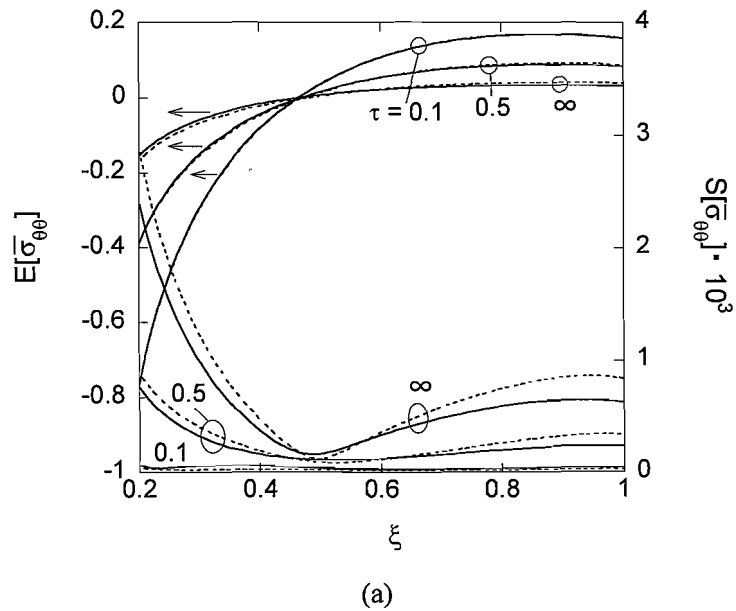
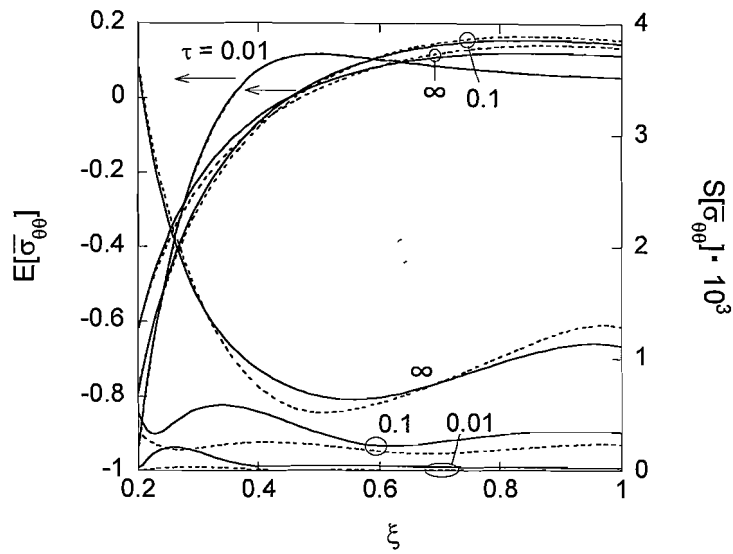


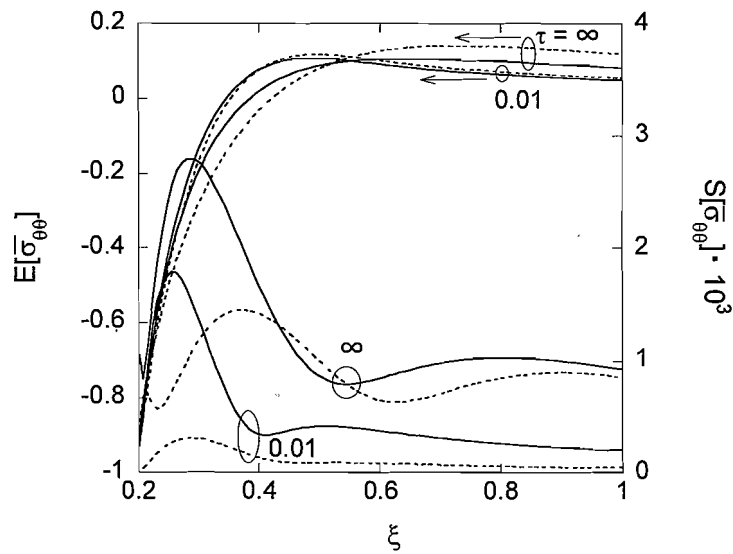
Fig. D-3 The transient distribution of the mean and standard deviation of the dimensionless radial stress with $B_1 = B_2 = 100$ and $V = 0.1$ for the case of uniform HTCs, $\bar{H}(\xi) = \bar{G}(\xi) = m$, (solid curves) and HTCs given by Eq. (D.56) (broken curves), for (a) $m = 0.01$, (b) $m = 0.1$ and (c) $m = 1$



Continued on the next page



(b)



(c)

Fig. D·4 The transient distribution of the mean and standard deviation of the dimensionless tangential stress with $B_1 = B_2 = 100$ and $V = 0.1$ for the case of uniform HTCs, $\bar{H}(\xi) = \bar{G}(\xi) = m$, (solid curves) and HTCs given by Eq. (D.56) (broken curves), for (a) $m = 0.01$, (b) $m = 0.1$ and (c) $m = 1$

4.4 相関強度の影響

次に、温度、半径方向応力、円周方向応力の標準偏差に及ぼす熱伝達率の空間的相関性の影響について考察する。図 D·5–D·7 はそれぞれ、熱伝達率の平均が表面上で一様に 0.01 と与えられた場合の、定常時における温度、半径方向応力、円周方向応力の標準偏差を示している。いずれの図においても、 B_1, B_2 の値が小さいほど標準偏差値が上昇している。 B_1, B_2 が小さいということは、

熱伝達率の自己相関性が強いことを意味する。 $B_1 = B_2 = 0$ では熱伝達率のランダム性は完全相関（非確率場）に相当し、一方 $B_1, B_2 \geq 100$ にとれば、帯域制限されたホワイトノイズとなる。

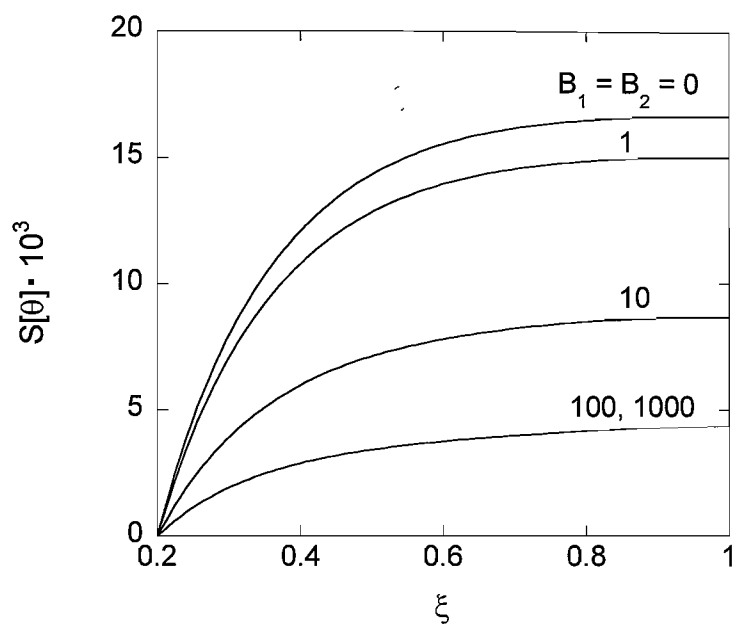


Fig. D-5 The effects of the correlation parameters on the standard deviation of steady-state dimensionless temperature with $V = 0.1$ for the case of uniform HTC's, $\bar{H}(\xi) = \bar{G}(\xi) = 0.1$

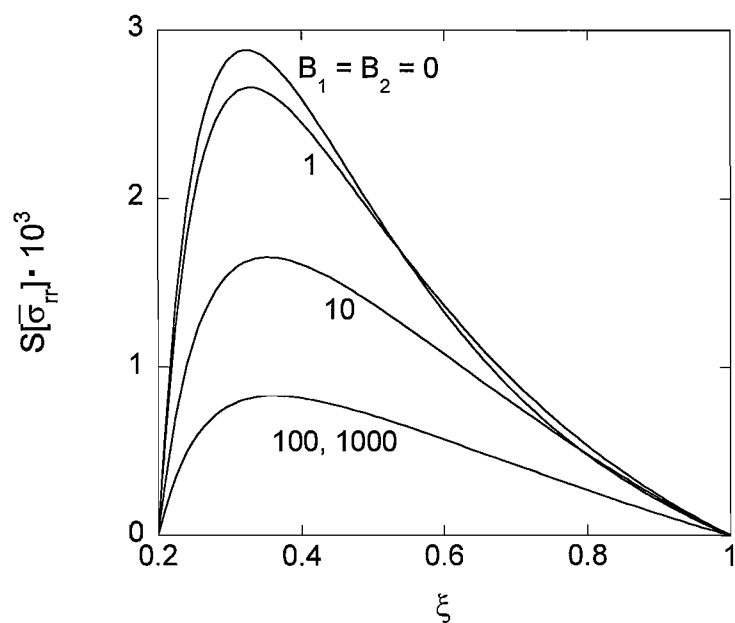


Fig. D-6 The effects of the correlation parameters on the standard deviation of steady-state dimensionless radial stress with $V = 0.1$ for the case of uniform HTC's, $\bar{H}(\xi) = \bar{G}(\xi) = 0.1$

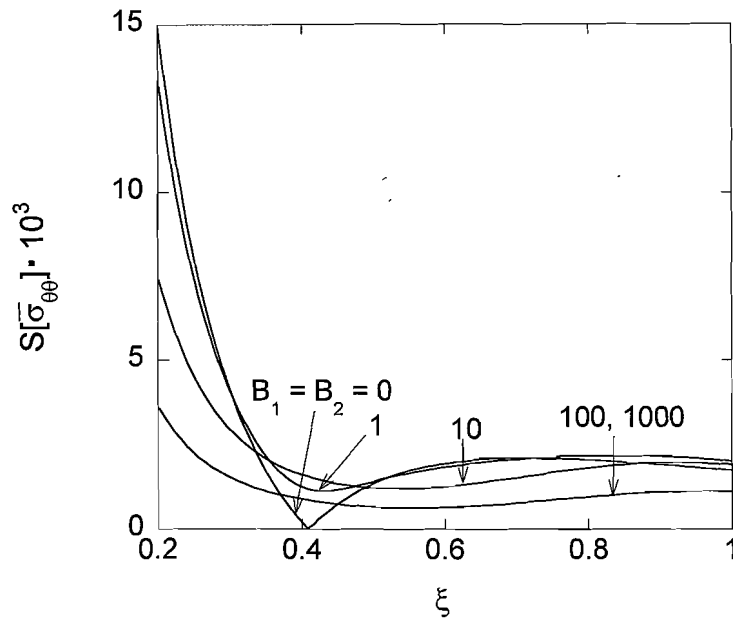
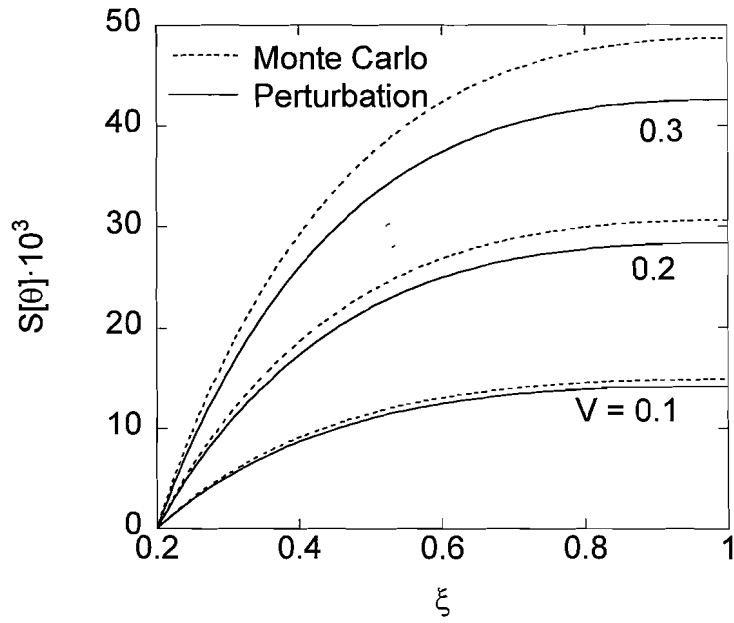


Fig. D-7 The effects of the correlation parameters on the standard deviation of steady-state dimensionless tangential stress with $V = 0.1$ for the case of uniform HTC's, $\bar{H}(\xi) = \bar{G}(\xi) = 0.1$

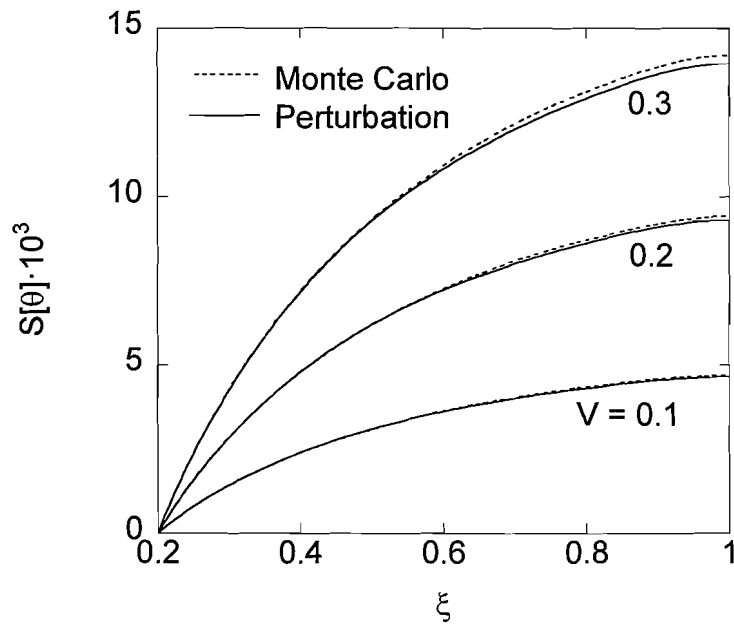
4.5 モンテカルロ・シミュレーションによる結果との比較

導出した1次摂動解の妥当性とその適用範囲を検証するため、サンプル数を1000としたモンテカルロ・シミュレーションを実行し、両者から得られた無次元温度の標準偏差を比較する。図D-8に、定常時における無次元温度の標準偏差を、 V をパラメータにとって比較する。この図より、摂動解は標準偏差を過小評価する傾向がみられ、その過小評価量は V の増加にともない大きくなっている。また、摂動解の精度は熱伝達率の相関強度、すなわち B_1, B_2 の値にも依存している*。図D-8(b)のように、熱伝達率の自己相関性が非常に弱い場合、摂動解とモンテカルロ・シミュレーションによる解との差は $V = 0.3$ でも最大で約3%であり、したがって、一次摂動解は十分実用に耐えうる。しかし図D-8(a)のように、熱伝達率に強い自己相関性が存在する場合、摂動解とモンテカルロ・シミュレーションによる解との差は $V = 0.2$ で最大約8%、 $V = 0.3$ では約15%と無視できない。 V が0.1程度までの範囲では、一次摂動解の使用は熱伝達率の相関強度に係わらず特に問題ないが、熱伝達率が強い自己相関性を持ち、かつ V が0.2を越える場合、より高次の摂動解を用いる必要がある。

* Emery⁽³⁷⁾も、摂動解の精度はランダム変動量の変動係数および相関強度に依存することを指摘している。



(a)



(b)

Fig. D·8 The standard deviations of steady-state dimensionless temperature by the first-order perturbation method (solid curves) and Monte Carlo simulation (broken curves) in the case of HTC's given by Eq. (D.56) with $m = 0.1$ for (a) $B_1 = B_2 = 1$ and (b) $B_1 = B_2 = 100$

5 結 言

非円筒面の熱伝達率が空間的にランダムな中空円板が、その側面（円筒面）に周囲媒体から確定的な軸対称加熱を受ける場合の熱伝導および熱応力問題を確率論的に解析した。熱伝達率のランダム性が確率場としてモデル化できるという条件の下、Vodicka の手法と摂動法を用いて温度と熱応力の二次統計量（平均と分散）を解析的に導出した。数値計算は、熱伝達率の変動係数が面内で一定の下で、熱伝達率の平均が①全表面にわたり一様な場合②半径方向に線形増加する場合—に対して行い、熱伝達率の平均の大きさ、熱伝達率の平均の空間的变化、および熱伝達率の空間的相関強度が及ぼす温度と熱応力の統計量への影響を考察した。また、モンテカルロ・シミュレーションからの結果と比較することで、導出した解析解の妥当性を確認するとともに、その適用範囲を検証した。

得られた主な結論を以下にまとめる。

- (1) 熱伝達率の空間的变化は、温度・熱応力の平均よりも標準偏差に対してより大きく影響する。
- (2) 熱応力の平均は時間とともに必ずしも単調増加しないが、熱応力の標準偏差は時間とともに必ず増加する。
- (3) 円周方向熱応力の標準偏差は半径方向熱応力のそれと比較して 3~4 倍の値を示す。
- (4) 熱伝達率の標準偏差が数オーダ変化しても、温度・熱応力の標準偏差のオーダは変わらない。
- (5) 熱伝達率の空間的相関強度が弱い(周波数スペクトルにおいて高周波成分が支配的になる)と、温度・熱応力の標準偏差は低下する。
- (6) 導出した摂動解の精度は熱伝達率の変動係数および相関強度に依存し、変動係数が大きくなるほど、また相関強度が強くなるほど、解の精度は悪くなる。

本付録で述べた解析手法は、物体表面における熱伝達率が一方向に変化する中実円板、無限帯板、および無限平板にも適用可能である。

付録 E

第 5 章では、熱伝達率の連続的な確率場を離散座標の確率場で近似している。したがって、統計量の精度良い評価のためには、温度解析の際の分割層数 n の選び方が非常に重要となる。連続的確率場の離散化は、ある周波数よりも高い空間周波数成分の情報を連続的確率場が本来もっているランダム性から失わせる（エイリアシング現象）。また、その空間周波数のしきい値は、離散化時のサンプリング周期に依存する。一般的に、離散化された確率場の空間角周波数帯域は次式の Nyquist 帯域で与えられる⁽⁷¹⁾。

$$0 \leq |\omega| \leq \frac{\pi}{\Xi} \quad (\text{E.1})$$

ここで、 Ξ はサンプリング周期、 ω は空間角周波数である。円板を半径方向へ等間隔に層分割した場合、ランダムな熱伝達率 $\eta(r)$ 、 $\chi(r)$ のサンプリング周期は次式で表現される。

$$\Xi = \frac{b-a}{n} \quad (\text{E.2})$$

したがって、式(E.2)を式(E.1)に代入して

$$0 \leq |\omega| \leq \frac{n\pi}{b-a} \quad (\text{E.3})$$

n の値は、熱伝達率の最大空間角周波数が式(E.3)で与えられる Nyquist 帯域内に収まるように選ぶ必要がある。よって、その熱伝達率が非常に低い周波数成分しか含んでいない場合、 n の値は小さくなり得る。しかし、この場合でも n には下限値が存在する。なぜなら、 n を小さくしすぎると、本来半径方向に連続的な「熱伝達率の平均」や「円板の熱的物性値」または「板厚」の変化を、区分的に相異なる一定値で十分に近似できなくなるからである。表 E-1 に、 $m = 0.1$ とした場合の複数の半径位置における定常温度の平均を示す。この表より、 $0.3 \leq N \leq 3$ の範囲で 2 桁の有効数字を得るには、少なくとも 20 分割が必要であることがわかる。もちろん、熱伝達率の平均や円板材料の物性値および板厚の空間勾配がきつくなればなるほど、精度良い解析のためには、より大きな n 値を用いるべきことは言うまでもない。

Table E-1 Comparison of steady-state mean temperatures at some locations for $m = 0.1$ and $y = 0$

ξ	$N = 0.3$			$N = 1$			$N = 3$		
	$n = 10$	$n = 20$	$n = 50$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 50$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 50$
0.2	0.047541	0.047411	0.047374	0.11552	0.11469	0.11445	0.25085	0.24481	0.24320
0.4	0.054022	0.053645	0.053651	0.11995	0.11900	0.11876	0.25842	0.25213	0.25046
0.6	0.098264	0.098241	0.098235	0.14374	0.14293	0.14270	0.28473	0.27785	0.27602
0.8	0.27047	0.26908	0.26912	0.28454	0.28109	0.28113	0.36025	0.34859	0.34677

付録 F

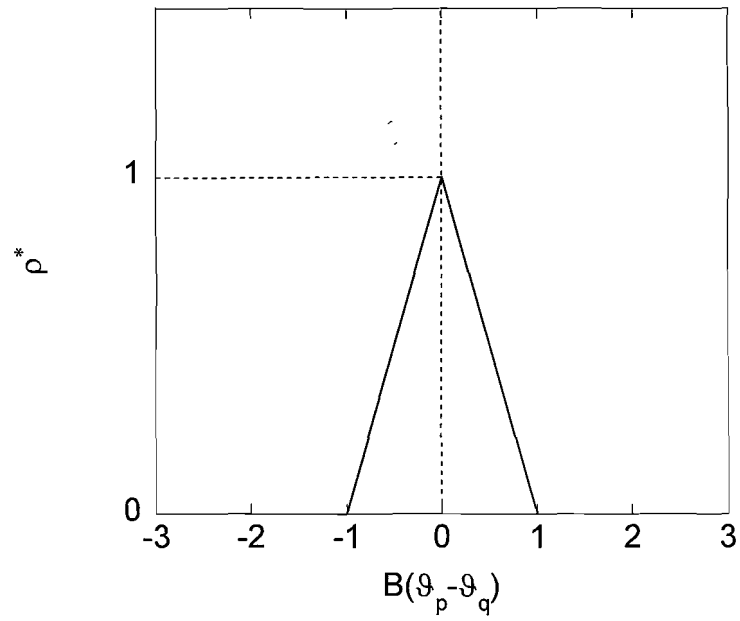


Fig. F-1 A triangular correlation function

付録 G

分割した各層のヤング率を $r \in [r_{j-1}, r_j]$ で $E_j(r) = E_{0j} r^{x_j}$ ($j = 1, 2, \dots, k$) と近似する。この場合、各環状層の両側面においてヤング率の実際の値 $f(r_{j-1}), f(r_j)$ を用いれば、次の条件式を得る。

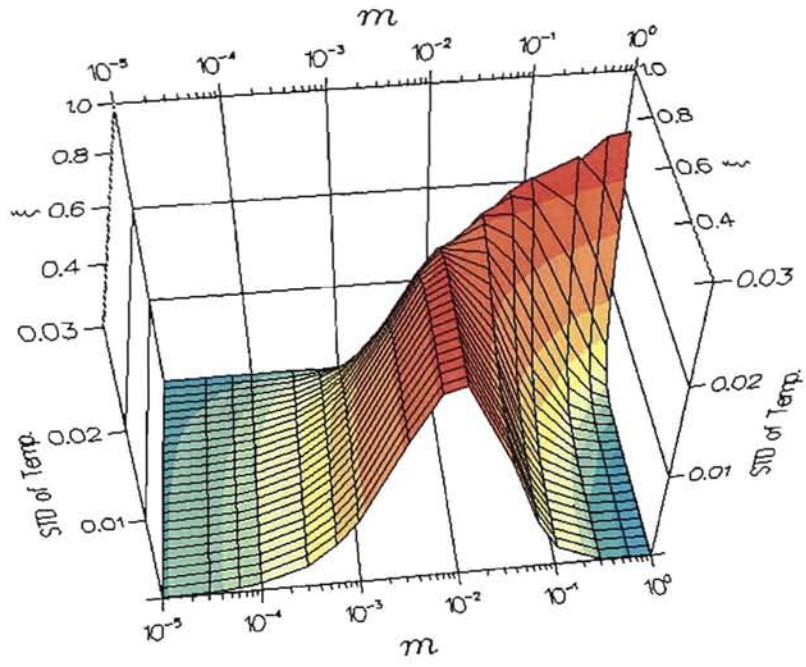
$$f(r_{j-1}) = E_{0j} r_{j-1}^{x_j}, \quad f(r_j) = E_{0j} r_j^{x_j} \quad (G.1)$$

定数 E_{0j}, x_j は式(G.1)から決定でき、結果的に $E_j(r)$ が次式のように得られる。

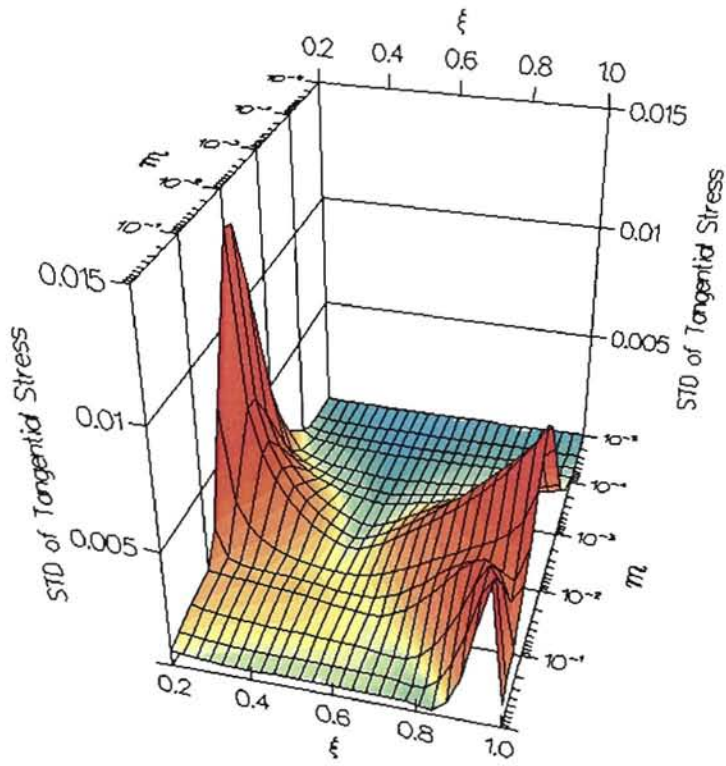
$$E_j(r) = f(r_{j-1}) \left(\frac{r}{r_{j-1}} \right)^{\frac{\ln f(r_j) - \ln f(r_{j-1})}{\ln r_j - \ln r_{j-1}}} \quad \text{or} \quad E_j(r) = f(r_j) \left(\frac{r}{r_j} \right)^{\frac{\ln f(r_j) - \ln f(r_{j-1})}{\ln r_j - \ln r_{j-1}}} \quad (G.2)$$

付録 H

図 H-1 は、定常時の温度と円周方向応力の標準偏差を、式(5.40)の m 、すなわち熱伝達率の全体的大きさを規定するパラメータに対してプロットしたものである。この図より、①内径上ではどちらの標準偏差も $m \approx 0.01$ において極大値を示している② $m > 0.01$ の範囲では、 m の増加につれて高い標準偏差値を示す領域が外径側に絞り込まれていく—ことがわかる。これらの理由は以下の通りである：熱伝達率が非常に小さい場合、円板の温度は熱伝達率の変化に対して極めて敏感になる。しかし、この場合、本計算例では熱伝達率のバラツキを変動係数によって決めているため、熱伝達率の標準偏差も非常に小さくなる。したがって、温度の標準偏差は小さい値をとる。翻って、熱伝達率が非常に大きい場合、式(5.42)に従えばその標準偏差は極めて大きくなる。しかし、温度は加熱面近傍を除いて熱伝達率の変化に対して鈍感である。その結果、この場合もまた温度の標準偏差が小さくなる。よって、温度の標準偏差はそれら 2 つの領域に挟まれた範囲 ($0.001 < m < 0.1$) において高い値を示す。また、その温度の標準偏差の特徴に呼応して、熱応力の標準偏差は $m \approx 0.01$ にて急激に上昇している。



(a)



(b)

Fig. H-1 Standard deviations of (a) temperature and (b) tangential stress for a wide range of m

謝 辞

この研究は、著者が平成12年から現在に至るまでの約9年間にわたり行ったものである。その間、終始ご懇篤なるご指導とご鞭撻を賜りました。岩手大学工学部 菅野良弘教授に深甚なる謝意をささげます。

また、本研究を遂行するにあたり、終始適切なお助言と暖かい激励をいただいた 岩手大学工学部 廣瀬宏一教授ならびに、石巻専修大学理工学部 泉正明教授に厚くお礼申し上げます。

さらに、研究の遂行にあたり、冷暖房機器に関する共同研究を通じて貴重なご教示をいただいた 高砂熱学工業株式会社 総合研究所 谷野正幸博士、庄子喜章氏に深く感謝いたします。

宮城工業高等専門学校 機械工学科 松谷保教授、丹野顯教授、折田寛彦教授ならびに、教育研究技術支援室職員の方々には終始有益なご教示と暖かき激励をいただきましたことをここに記して、厚くお礼申し上げます。

お忙しい中、副査として本論文の審査にあたっていただいた岩手大学工学部 岩崎正二教授ならびに西村文仁准教授には有益なご意見をいただきました。心よりお礼申し上げます。

最後に、学位取得を力強く勧奨してくださいました山形大学工学部 黒田充紀教授ならびに原田英二博士に感謝いたします。

粉雪舞う米沢の自宅にて

平成21年3月 千葉良一

主論文に関する原著論文および口頭発表論文

学術誌論文

- (1) 千葉良一・菅野良弘 (2004) モンテカルロシミュレーション法による物性値に不確定性をもつ傾斜機能平板の確率論的熱弾性問題の解析. 材料, **53**, 967-973.
- (2) Chiba, R. and Sugano, Y. (2007) Stochastic thermoelastic problem of a functionally graded plate under random temperature load. *Arch. Appl. Mech.*, **77**, 215-227.
- (3) Chiba, R. and Sugano, Y. (2008) Stochastic analysis of a thermoelastic problem in functionally graded plates with uncertain material properties. *Arch. Appl. Mech.*, **78**, 749-764.
- (4) Chiba, R. (2009) Stochastic heat conduction analysis of a functionally graded annular disc with spatially random heat transfer coefficients. *Appl. Math. Model.*, **33**, 507-523.
- (5) Chiba, R. (2009) Stochastic thermal stresses in an FGM annular disc of variable thickness with spatially random heat transfer coefficients. *Meccanica*, **44**, in press.

国際会議発表

- (1) Sugano, Y. *, Chiba, R., Kanno, T. and Hoshi, K. (2001) Stochastic thermal stress analysis in functionally graded plates subjected to random surface temperatures, Fourth Int. Cong. Thermal Stresses, pp 357-360, Osaka, Japan.
- (2) Chiba, R. * and Sugano, Y. (2005) Stochastic thermal stresses in a functionally graded plate with uncertain material properties by Monte Carlo simulation method and material composition design, Sixth Int. Cong. Thermal Stresses, pp 61-64, Vienna, Austria.

国内会議発表

- (1) 菅野良弘・千葉良一* (2000. 11) 境界温度がランダム変動する傾斜機能平板の確率論的熱弾性問題の解析. 日本機械学会 第 13 回計算力学講演会, pp 237-238, 豊橋.
- (2) 菅野良弘・千葉良一* (2001. 3) ランダムな初期温度をもつ傾斜機能材料の温度と熱応力. 日本機械学会 東北支部 第 36 期総会・講演会, pp 126-127, 仙台.
- (3) 千葉良一*・菅野良弘 (2001. 11) モンテカルロシミュレーション法による物性値の不確定性をもつ傾斜機能平板の確率論的熱弾性問題の解析. 日本機械学会 第 14 回計算力学講演会, pp 255-256, 札幌.
- (4) 千葉良一*・菅野良弘 (2004. 11) 摂動法による物性値に不確定性をもつ傾斜機能平板の確率論的熱弾性問題の解析. 日本機械学会 第 17 回計算力学講演会, pp 695-696, 仙台.
- (5) 千葉良一* (2007. 9) 空間的にランダムな熱伝達率を有する傾斜機能中空円板の確率論的熱伝導解析. 日本機械学会 東北支部 第 43 期秋季講演会, pp 75-76, 一関.

- (6) 千葉良一* (2007. 10) 空間的にランダムな熱伝達率を有する変厚傾斜機能中空円板の確率論的熱応力解析. 日本機械学会 M&M2007 材料力学カンファレンス, pp 330-331, 東京.