

大学微積分教材の事例研究

中嶋文雄*・廣田佳大**

(平成15年3月17日受理)

Fumio NAKAJIMA and Yoshitomo HIROTA

Study of mathematical examples for the university calculus

はじめに

本稿は平成14年度岩手大学教育学部教授中嶋文雄による微積分学の講義及び数学科4年次学生廣田佳大の卒業研究、カオスとフラクタル、のなかで発見的に得られたいくつかの数学的結果の報告である。第一章では二重積分の応用例である曲面積の定義において、通常の大学のテキストでは説明が不十分と思われる点に対しその補足を試みたものである。第二章では上記卒業研究の結果から次の三点について述べたものである。

- (1) 三平方の定理の樹
- (2) シムソン線の存在の解析幾何学的証明
- (3) シムソン線の族の包絡線のコンピューター実験

これら数学的事項が内容的にすべて既知なものばかりであることは想像に難くない。しかし重要な事はこれらが教育の場で、教官と学生の創意工夫により自己充足的に発見されたものであるという点である。

第一章 曲面積

周知のように3次元空間における曲面は $x-y$ 平面上にある領域 D とその上で定義された関数 $z=f(x,y)$ によって構成される。その曲面積は次のようにして定義される。まず D を $x-y$ 平面における有限個の微小な長方形に細分する(ただし D の境界については若干の注意を必要とする)。次にこの長方形の任意の一つを σ とし、 σ の各点を通り z 軸に平行な直線から成る立体を考え、この立体が σ 上の曲面の任意の一点での接平面から切り取る平行四辺形を σ' とする。 $|\sigma'|$ を σ' の面積とし $|\sigma'|$ の総和をとる。次に D の分割を無限に細かくするとき、前述の総和が一定の極限值に収束すれば、この極限値を以って曲面積と定める。このとき曲面積の公式の導出のため σ と σ' のなす角を

$$0 \leq \gamma < \frac{\pi}{2} \text{ とするとき}$$

* 岩手大学教育学部

** 岩手大学教育学部

$$|\sigma'| \cos \gamma = |\sigma| \quad (1)$$

を証明する必要がある。著者の知るいくつかの教科書の中で、この点を比較的丁寧に書いたものに[1]がある。そこではまず、 σ' の一辺が $x-y$ 平面に平行である場合に(1)を証明する。次に一般の σ' に対しては、 σ' を更に $x-y$ 平面に平行な一辺を持つ長方形の集合で近似し、この長方形に対し(1)が成立しているのを、近似を限り無く改良していき、この極限操作の結果、(1)を成立せしめているのである。この定義では極限操作が2回行われているが、後半の極限操作を行わずに、(1)を直載的に証明してしまう方が、筋道として判り易いように思われる。実際、この事は高校数学の空間ベクトルの知識で以下のように可能である。

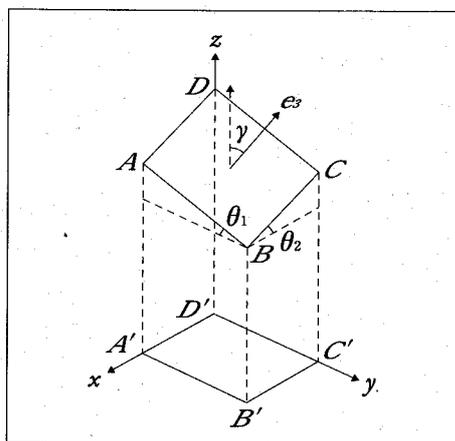


図1

図1を参照する。四角形 $ABCD$ は σ' を表し、四角形 $A'B'C'D'$ は長方形で σ を表すものとする。便宜上、 $AB=BC=1$ とする。ベクトル \overrightarrow{BA} を e_1 で、ベクトル \overrightarrow{BC} を e_2 で表し、 $ABCD$ の法線単位ベクトルを e_3 で表す。 e_1 と \overrightarrow{BA} のなす角を θ_1 、 e_2 と \overrightarrow{BC} のなす角を θ_2 と表すと、

$$e_1 = (0, \cos \theta_1, \sin \theta_1), e_2 = (\cos \theta_2, 0, \sin \theta_2), e_3 = (-a \tan \theta_2, -a \tan \theta_1, a), a = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta_1 + \tan^2 \theta_2}}$$

e_1 と e_2 のなす角は、 e_1 と e_2 の内積によって $\cos \theta_3 = \sin \theta_1 \sin \theta_2$ として求められる。 $ABCD$ の面積は $\sin \theta_3$ 、 $A'B'C'D'$ の面積は $\cos \theta_1 \cos \theta_2$ である。従って、

$$\frac{|\sigma'|}{|\sigma|} = \frac{\sin \theta_3}{\cos \theta_1 \cos \theta_2}$$

γ は e_3 と z 軸のなす角であるので、 $\cos \gamma = a$ である。

よって、

$$\frac{\sin \theta_3}{\cos \theta_1 \cos \theta_2} = \sqrt{1 + \tan^2 \theta_1 + \tan^2 \theta_2} \quad (2)$$

を示せばよい。(2)の両辺を2乗して $\sin^2 \theta_3 = 1 - \cos^2 \theta_3 = 1 - (\sin \theta_1)^2 (\sin \theta_2)^2$ を用いると(2)は

$$\frac{1}{(\cos \theta_1)^2 (\cos \theta_2)^2} - (\tan \theta_1)^2 (\tan \theta_2)^2 = 1 + \tan^2 \theta_1 + \tan^2 \theta_2$$

となる。これは

$$\frac{1}{(\cos \theta_1)^2 (\cos \theta_2)^2} = (1 + \tan^2 \theta_1) (1 + \tan^2 \theta_2)$$

と同値である。よって(1)は成立する。

第二章

(1) 三平方の定理の樹

中学校数学の第3学年の教科書には参考図としてであるが、三平方の定理の応用としてフラクタルの例が載っている [2]。

平面上に任意に正方形を考えそれを出発点として図2及び図3の様にしてフラクタル集合が構成される。それを三平方の定理の樹と呼ぶ。

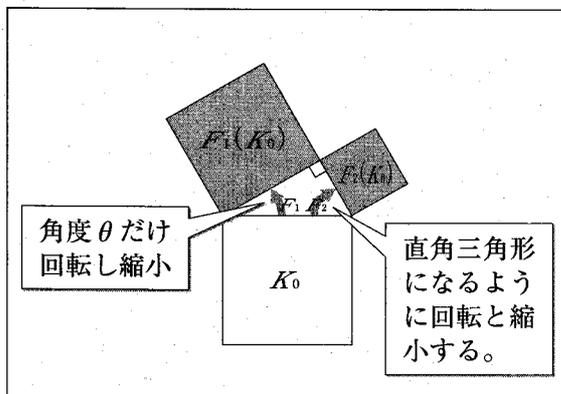


図2

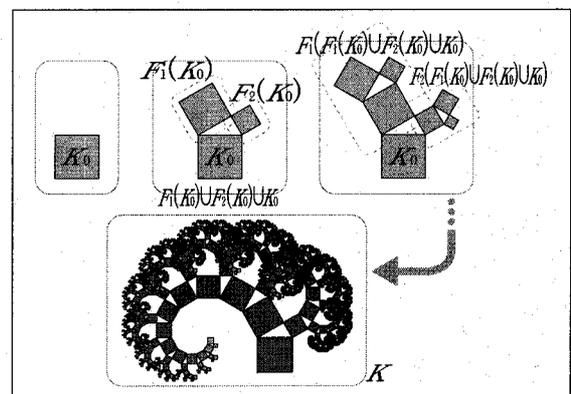


図3

出発点となる正方形を K_0 とし自然数 $n \geq 1$ に対して

$$K_n = F_1(K_{n-1}) \cup F_2(K_{n-1}) \cup K_0 \text{ と置くと } K = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \text{ が三平方の定理の樹である。}$$

定理 K は有界集合である。

証明 K_0 を図4の様にとる。ただし一辺の長さを a とする。又、 $0 < \theta \leq \frac{\pi}{4}$ と仮定する。このとき

K_n の任意の小正方形の頂点 $P(x, y)$ は前述の構成方法より

$$|x| \leq a \left(\sum_{i=0}^n \cos^i \theta \right)$$

$$|y| \leq a \left(\sum_{i=0}^n \cos^i \theta \right)$$

となる。よって

$$|x| \leq \frac{a}{1-\cos\theta}, |y| \leq \frac{a}{1-\cos\theta}$$

である。これは K の有界性を示している。

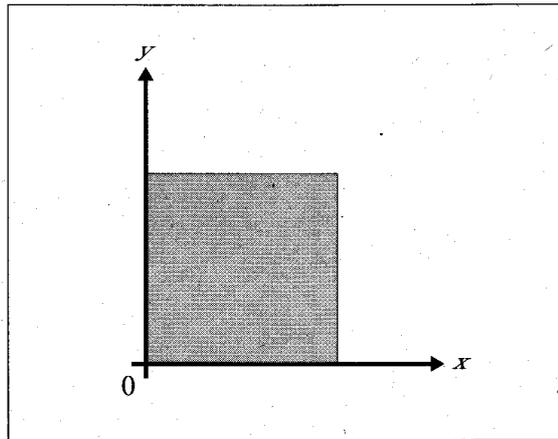


図 4

(2) シムソン線

三角形 ABC とその外接円上にある任意の点 P から直線 AB , BC , CA に引いた垂線の足をそれぞれ D , E , F とすると, D , E , F は一直線上に存在する (図 5 を参照)。この直線をシムソン線という。シムソン線の存在のための証明は円周角の性質を用いる幾何学的方法が一般的である ([3] を参照)。ここでは, あえて解析幾何学的な別証明を試みる。

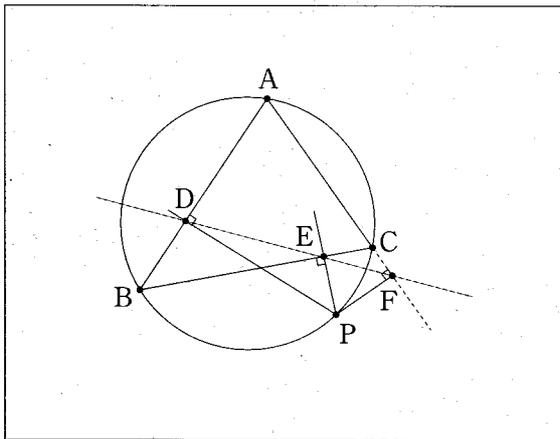


図 5

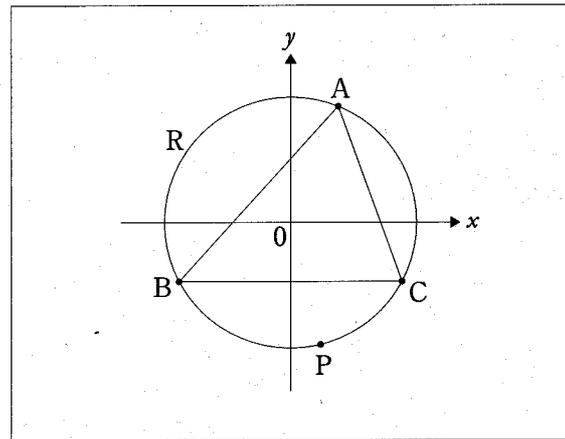


図 6

まず $\triangle ABC$ とその外接円 R を考え, R 上の任意の点を P とする。円 R の半径は 1 とし, 中心は $x-y$ 座標平面の原点とする。すると 4 点 A, B, C, P はそれぞれ $(\cos A, \sin A)$, $(\cos B, \sin B)$, $(\cos C, \sin C)$, $(\cos P, \sin P)$, ただし, と置ける (図 6 を参照)。そのとき, 点 D, E, F の座標は次の通りである ([4] を参照)。

$$\text{点D} \left(\frac{\cos A + \cos B - \cos(A+B-P) + \cos P}{2}, \frac{\sin A + \sin B - \sin(A+B-P) + \sin P}{2} \right)$$

$$\text{点E} \left(\frac{\cos B + \cos C - \cos(B+C-P) + \cos P}{2}, \frac{\sin B + \sin C - \sin(B+C-P) + \sin P}{2} \right)$$

$$\text{点F} \left(\frac{\cos C + \cos A - \cos(C+A-P) + \cos P}{2}, \frac{\sin C + \sin A - \sin(C+A-P) + \sin P}{2} \right)$$

直線DEの式は $(x_E - x_D)(y - y_D) = (y_E - y_D)(x - x_D)$ であるので、

$(x_E - x_D)(y_F - y_D) - (x_F - x_D)(y_E - y_D) = 0$ が成り立てば点Fは直線DE上に存在したことになる。

$$x_E - x_D = 2 \sin \frac{C-A}{2} \cos \frac{A+B+C-P}{2} \sin \frac{B-P}{2}$$

$$y_F - y_D = 2 \sin \frac{C-B}{2} \sin \frac{A+B+C-P}{2} \sin \frac{A-P}{2}$$

$$x_F - x_D = 2 \sin \frac{C-B}{2} \cos \frac{A+B+C-P}{2} \sin \frac{A-P}{2}$$

$$y_E - y_D = 2 \sin \frac{C-A}{2} \sin \frac{A+B+C-P}{2} \sin \frac{B-P}{2}$$

以上より、

$$\begin{aligned} (x_E - x_D)(y_F - y_D) &= \left(2 \sin \frac{C-A}{2} \cos \frac{A+B+C-P}{2} \sin \frac{B-P}{2} \right) \left(2 \sin \frac{C-B}{2} \sin \frac{A+B+C-P}{2} \sin \frac{A-P}{2} \right) \\ &= 4 \sin \frac{C-A}{2} \sin \frac{C-B}{2} \sin \frac{B-P}{2} \sin \frac{A-P}{2} \sin \frac{A+B+C-P}{2} \cos \frac{A+B+C-P}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x_F - x_D)(y_E - y_D) &= \left(2 \sin \frac{C-B}{2} \cos \frac{A+B+C-P}{2} \sin \frac{A-P}{2} \right) \left(2 \sin \frac{C-A}{2} \sin \frac{A+B+C-P}{2} \sin \frac{B-P}{2} \right) \\ &= 4 \sin \frac{C-A}{2} \sin \frac{C-B}{2} \sin \frac{B-P}{2} \sin \frac{A-P}{2} \sin \frac{A+B+C-P}{2} \cos \frac{A+B+C-P}{2} \end{aligned}$$

$$\text{よって、} (x_E - x_D)(y_F - y_D) - (x_F - x_D)(y_E - y_D) = 0$$

∴ 3点D, E, Fは一直線上に存在する。(証明終)

(3) シムソン線の包絡線

(2)において三角形ABCとその外接円を固定し、点Pをこの円周上で動かすとシムソン線の族が得られる。この族の包絡線はハイポサイクロイド曲線になることが知られている。ここでは三角形ABCがその外接円を変えない場合に、三角形ABCの形状に対応して包絡線の位置が変化する様子をコンピュータグラフィックスによって確かめる(以下の図7~図10を参照)。

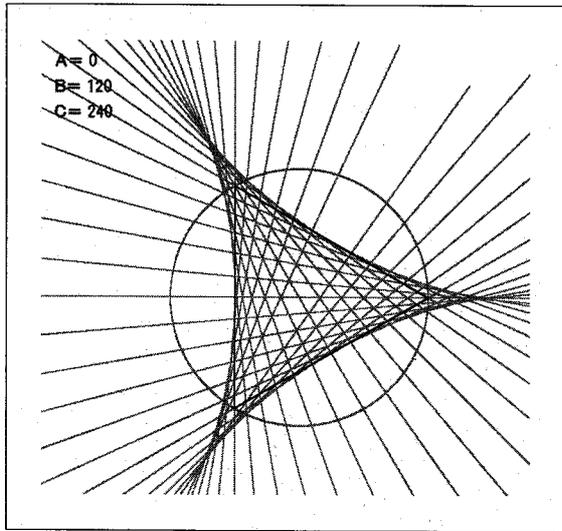


図 7

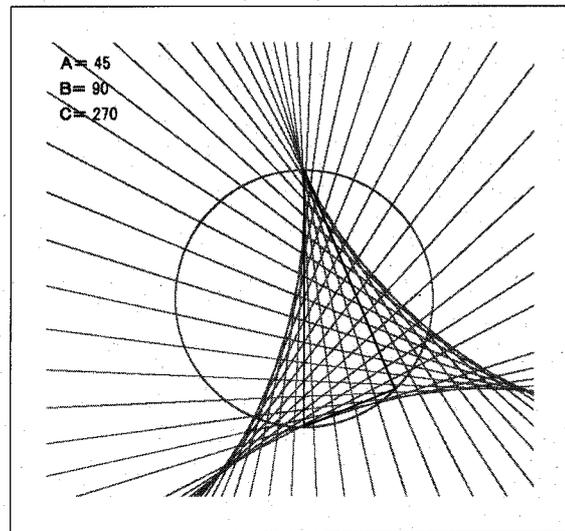


図 8

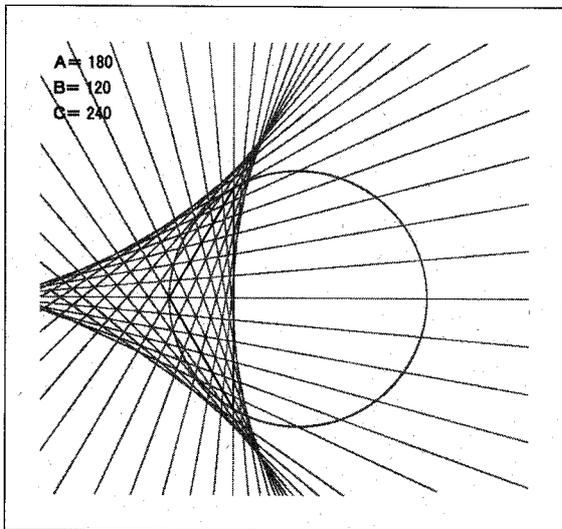


図 9

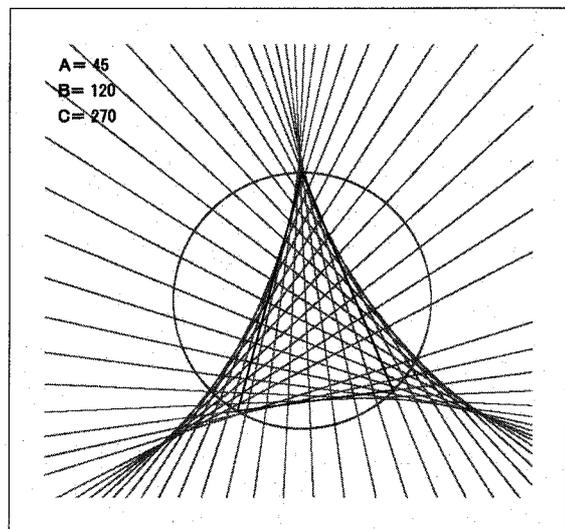


図10

参考文献

- [1] 栗田稔著, 新講微分積分学, 学術図書, 1971, p210.
- [2] 東京書籍, 新しい数学3, 平成8年.
- [3] 矢野健太郎, 幾何の有名な定理, 共立出版.
- [4] 廣田佳大, 岩手大学教育学部数学科卒業論文, カオスとフラクタル, 2003年3月17日.