

文字式の指導について

立花正男*

(2014年2月10日受理)

Masao TACHIBANA

Instruction of Literal Expressions

1 はじめに

平成24年度全国学力・学習状況調査の中学校数学B1の問題に「数学的な結果の事象に即した解釈 (ISS とひまわり7号)」の問題がある。この問題の正答率は11.8%であり、他の問題と比べても極めて低い。この結果について考察し、どのような指導が必要であるかについて検討することが必要である。

そこで、本稿においては、この問題の内容についての教科書での取り扱いを調べる。そして、この問題に関連した指導の実践事例を紹介し、その授業の考察を行う。

2 問題の分析

本稿で取り上げる全国調査の問題は、次の頁の図1である。なお、この問題には(1)の問題もあるが、ここでは、本稿に関わる(2)だけを示した。また、図2には、解答類型とその類型ごとの結果を示した。

この問題は、「ISS とひまわり7号の軌道の長さの差を求める計算を基に、軌道の長さの差が地球の半径の値に関係なく決まることの理由を説明できるかどうかをみるものである。」ここでは、「ISS とひまわり7号の軌道の長さの差を求める計算を事象に即して解釈することを通して、成り立つ事柄を判断し、その理由を数学的な表現を用

いて説明すること」が求められる。

結果は、正答率は、11.8%であり、「軌道の長さの差は、地球の半径の値によって決まる。」を選択した解答類型8の反応率は、53.9%である。これは、計算の途中で、使っていた文字がなくなるということについて、生徒が十分に解釈できていないということを示す結果となった。

生徒が、問題の趣旨を理解しているかどうかを検討して見る必要がある。

3 特定の課題の調査の結果

今回の問題と同じ趣旨で出題している問題が特定の課題の調査にある。特定の課題の調査は国立教育政策研究所が中学校第3学年は平成17年1月、小学校第4学年～中学校第2学年は平成17年2月に調査したものである。

この調査の問題に、図3のような問題がある。図4が解答類型である。

この問題は、中学校第1学年から第3学年まで共通して出された問題の中の1つである。この問題の出題の意図は、次の通りである。「この問題は、2つの円の円周の長さの和について成り立つ性質を、特定の数値での計算から帰納的に予想し、その性質が一般的に成り立つことを説明している生徒の解答を示し、その説明を読んで文字を用いることの意味を理解することができるかを調

* 岩手大学教育学部

べる。」ものである。図5は中学第1学年から第3学年の調査結果である。

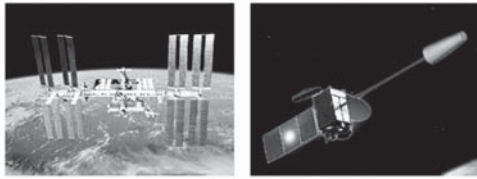
また、特定の課題では、調査終了後に問題に関わる質問紙調査を実施している。質問紙調査とその結果を図6に示す。

それぞれの学年の正答率が、1年20.7%、2年

23.0%、3年38.6%であり、正答率はよくなかった。また、質問紙調査では、「文字aが答えにないことは、点Cが線分AB上のどこにあっても2つの円の円周の和はいつでも 10π cmになることです。あなたは、このことがわかりますか。」という質問に第1学年で50.5%、第2学年で51.2%、第3学年で37.5%が「いいえ」と解答している。今回の全国調査で、ア「軌道の長さの差は、地球の半径の値によって決まる」と解答した生徒が53.9%だった結果と近い結果になっていることに注目したい。

図1 「ISSとひまわり7号の問題」

1 下の表は、国際宇宙ステーション(ISS)と気象衛星ひまわり7号についての情報です。



国際宇宙ステーション(ISS) 気象衛星ひまわり7号

	ISS	ひまわり7号
全長	約108.5 m × 約72.8 m (サッカーのフィールドと同じくらい)	約30 m
地表からの高さ(高度)	約400 km	約35800 km
地球の周りを1周するときにかかる時間	約1.5時間	約24時間

次の(1)、(2)の各問いに答えなさい。

(2) 人工衛星が地球の周りを通る道すじのことを軌道きどうといいます。ISSとひまわり7号が地球を1周するときの軌道の長さの差は、次のように求めることができます。

右の図のように、地球を半径 r km の球、人工衛星の軌道を円とすると、ISSの軌道の半径は $(r + 400)$ km、軌道の長さは $2\pi(r + 400)$ km となります。

ひまわり7号の軌道の長さも同じように考えると、2つの人工衛星の軌道の長さの差は、次のように計算できます。

$$\begin{aligned} & 2\pi(r + 35800) - 2\pi(r + 400) \\ &= 2\pi r + 2\pi \times 35800 - 2\pi r - 2\pi \times 400 \\ &= 2\pi \times 35800 - 2\pi \times 400 \\ &= 2\pi \times (35800 - 400) \\ &= 2\pi \times 35400 \\ &= 70800\pi \end{aligned}$$

このように、2つの人工衛星の軌道の長さの差は約 70800π km であることが分かります。

上の [] からは、この軌道の長さの差について、さらに分かることがあります。下のア、イの中から正しいものを1つ選びなさい。また、それが正しいことの理由を説明しなさい。

ア 軌道の長さの差は、地球の半径の値によって決まる。

イ 軌道の長さの差は、地球の半径の値に関係なく決まる。

図2 「解答類型及び結果」

問題番号	解答類型	反応率 (%)	正答
1	(2) (正答の条件) イを選択し、次の(a)、(b)のいずれかについて記述しているもの。 (a) 軌道の長さの差を求める計算過程で、 r (地球の半径) の項が消去されること。 (b) 軌道の長さの差を表す式 70800π に、 r (地球の半径) が含まれていないこと。 (正答例) 例1 軌道の長さの差を計算する過程で、 r の項がなくなるので、軌道の長さの差は、地球の半径の値に関係なく決まる。(解答類型1) 例2 軌道の長さの差を表す式の 70800π には r が含まれていないので、軌道の長さの差は、地球の半径の値に関係なく決まる。(解答類型3)		
1	イを (結論がなくてもよい、以下同様。)	7.8	◎
2	(a) について、計算過程に着目していることについての記述が十分でなく、 r の項が消去されることについて記述しているもの	1.0	○
3	(b) について記述しているもの	2.8	◎
4	(b) について、計算結果に着目していることについての記述が十分でなく、 r が含まれていないことについて記述しているもの	0.1	○
5	(a)、(b) についての記述はないが、軌道の長さの差や地球の半径に着目して記述しているもの	16.2	
6	選択肢イに当たる事柄のみを記述しているもの	0.2	
7	上記以外の解答、または無解答	13.5	
8	アを選択しているもの	53.9	
9	上記以外の解答	0.1	
0	無解答	4.4	
正答率		11.8	

図3 特定の課題の調査の問題

12 松本さんは、直線上に2点A, Bを、 $AB = 10\text{ cm}$ となるようにとりました。

図1, 図2のように、点Cが線分AB上を動くとき、線分AC, CBを直径とする2つの円の円周の長さの和について調べようとしています。

次の問いに答えなさい。ただし、円周率は π とします。

図1

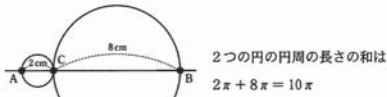


図2

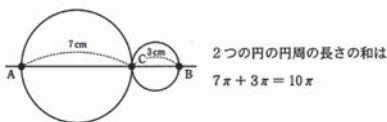
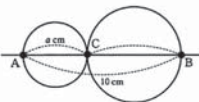


図1, 図2の場合について計算するとどちらも、2つの円の円周の長さの和が $10\pi\text{ cm}$ になりました。

これらのことから松本さんは、他の場合も $10\pi\text{ cm}$ になるのではないかと予想し、それを文字式を使って調べることになりました。

松本さんは、線分ACの長さを $a\text{ cm}$ として、次のように計算しました。



松本さんの計算

線分ACの長さは $a\text{ cm}$ だから、線分CBの長さは $(10 - a)\text{ cm}$ と表すことができるので、2つの円の円周の長さの和を計算すると $10\pi\text{ cm}$ になる。

$$\begin{aligned} & a\pi + (10 - a)\pi \\ &= a\pi + 10\pi - a\pi \\ &= 10\pi \end{aligned} \quad \text{答え } 10\pi\text{ cm}$$

松本さんの計算では、線分ACの長さを $a\text{ cm}$ としたのに、答えの「 $10\pi\text{ cm}$ 」に文字 a がありません。このことから、2つの円の円周の長さについてどんなことが分かりますか。分かることを の中に書きなさい。

図4 解答類型

問題番号	解答類型	転記する番号	転記する欄の番号
12	2つの円の円周の長さの和は、線分ACの長さ $a\text{ cm}$ に関係せず、いつでも $10\pi\text{ cm}$ になると解答しているもの	1	22
	2つの円の円周の長さの和は、点Cの位置に関係せず、いつでも $10\pi\text{ cm}$ になると解答しているもの	2	
	上記1, 2以外で、「2つの円の円周の長さの和は、線分ABを直径とする円の円周の長さに等しい」と解答しているもの	3	
	2つの円の円周の長さの和は変わらない(一定である、同じ)など説明が不十分な解答をしているもの	4	
	計算すると 10π になると解答しているもの	5	
	a (または $a\pi$)が消えると解答しているもの	6	
	「分からない」「何となく」など数学に関係がない理由が書かれているもの	7	
	上記以外の解答	9	
	無解答	10	

図5 調査結果

転記する番号	1年	2年	3年
	II 12	I 11	II 5
1	5.8	8.3	16.9
2	1.8	2.0	2.4
3	3.2	2.9	9.9
4	9.9	9.8	9.3
5	0.9	1.6	3.8
6	4.2	3.3	3.7
7	5.9	5.4	4.5
8	3.4	1.5	0.8
9	29.0	20.4	23.2
0	35.9	44.7	25.4
通過率	20.7	23.0	38.6

図6 質問紙調査の内容とその結果

(1) この問題の答えをあなたは書きましたか。また、その答えが正しいという自信がありますか。

- 1 答えを書き、その答えに自信がある
- 2 答えを書いたけれども、その答えに自信がない
- 3 答えは出したけれども、その答えに自信がないので書かなかった
- 4 問題を読んだけれども、答えを出せなかった
- 5 問題を読んだけれども、問題の意味が分からなかった
- 6 問題に取り組まなかった

(2) 文字 a が答えにないことは、点Cが線分AB上のどこにあっても2つの円の円周の和はいつでも $10\pi\text{ cm}$ になることです。あなたは、このことが分かりますか。

- 1 はい
- 2 いいえ

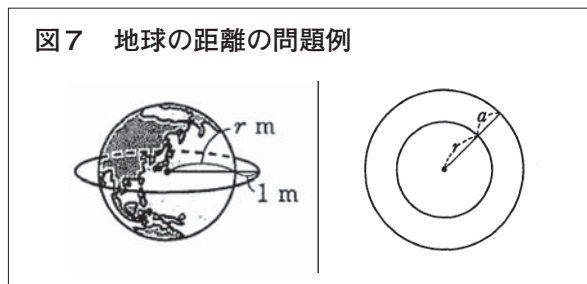
(1)	1年 設問 1 2	2年 設問 7	3年 設問 9
1	10.0	9.7	18.7
2	47.8	41.8	50.8
3	4.6	4.5	3.4
4	17.6	22.8	13.7
5	10.5	10.8	7.2
6	8.8	10.1	5.8
(2)			
1	48.8	48.3	62.2
2	50.5	51.2	37.5

4 教科書の分析

平成24年度全国調査の「ISSの問題」や平成17年度の特定の課題の「2つの円」の問題のように結果に文字がないときにどのような意味があるのかということについて、現在中学校で使用されている7社の教科書の第2学年の「文字と式」の章では、どのような内容を取り上げているかについて調べた。なお、ここで取り上げているとカウントしたのは、本文（例題等）、練習問題（章の問題、巻末問題の含む）、コラムで扱っている場合とした。

図7のように「地表から1m離れたら、赤道の長さよりどのくらい長くなるだろう？」や「大きい円と小さい円の円周の差はいくらか？」などの問題を扱っているのは6社である。

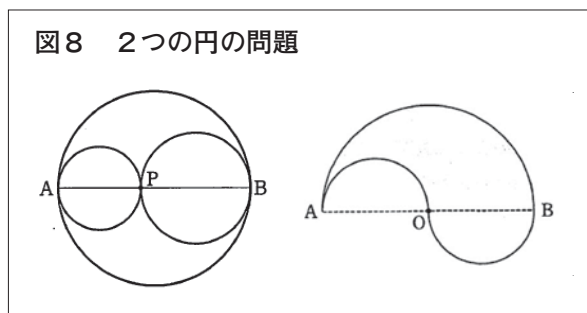
図7 地球の距離の問題例



その中で導入や例題などで扱っているのは、3社であり、それ以外はコラムや巻末で扱っている。

図8のように「円や半円の長さを問題」を扱っているのは、6社である。

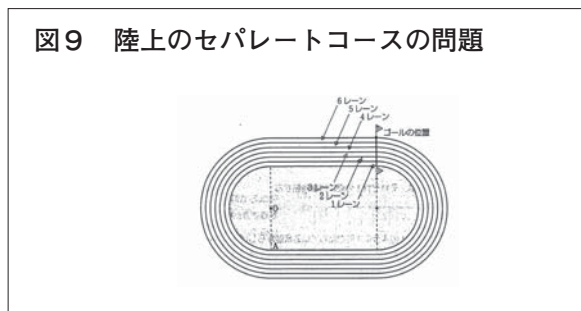
図8 2つの円の問題



その中で例題で扱っているのが1社であり、例題のあとの問題として扱っているのが1社である。そのほかの4社は章の問題、コラム、巻末の問題として扱っている。

図9のように「陸上のセパレートコースの問題」を扱っているのは、3社である。

図9 陸上のセパレートコースの問題



その中で導入として扱っているのが1社である。そのほかの2社はコラム、巻末の問題として扱っている。

このように各教科書会社では、「2つの円の円周の差を求める問題」や「2つの小さい円の円周の長さ」と大きい円の円周の長さが等しいことを求める問題」など、2つの円の円周と半径を関係に着目した問題を取り上げている場合があるが、多くの問題では、それを計算することに重きが置かれているようである。また、図形の外角の和を求めることはどの教科書でも扱っているが、 n が消えることについての指導より、結果が360度になることに重点があるようである。つまり生徒は、計算の途中で文字が消えることについてそれがどのような意味であるかについてはあまり学習していないのではないかと思われる。これでは、生徒の立場にたつていうと、ISSの問題などで答えを聞いた生徒は「そんなこと聞いたことないよ」ということになってしまうと思われる。

計算して結果を求めることはもちろん大切なことであるが、その文字がどのような意味があるかについて意図的に指導していくことが必要である。その中で特に結果に使っていた文字がなくなるとはどのような意味があるかについて生徒に考えさせる機会を作り指導することが大切である。

5 授業実践

ここでは、答えに使っていた文字が消えることはどのような意味があるのかを考えさせる授業の実践例を以下に示すことにする。

- 授業者と生徒は初めての対面である。
- 授業者は自己紹介を兼ねて一人一人に自分の名刺を渡した。
- その名刺には、名前はもちろんであるが、表に3087の数か印字してある。
- また、名刺の裏には、
1 2 3 4, 2 3 4 5, 3 4 5 6,
4 5 6 7, 5 6 7 8, 6 7 8 9
の6つの数のうちにどれかが印字されている。
- 名刺をもらった生徒たちには、授業者は「何か質問がありませんか？」と質問した。
- すかさず1人の生徒が、「3087は何の数ですか」と質問した。
- 授業者は、「3087と名刺の裏に印刷してある数をたしてごらん。」と言った。
- 生徒はそれぞれ計算している。
 $1\ 2\ 3\ 4 + 3\ 0\ 8\ 7 = 4\ 3\ 2\ 1$
 $2\ 3\ 4\ 5 + 3\ 0\ 8\ 7 = 5\ 4\ 3\ 2$
 $3\ 4\ 5\ 6 + 3\ 0\ 8\ 7 = 6\ 5\ 4\ 3$
 $4\ 5\ 6\ 7 + 3\ 0\ 8\ 7 = 7\ 6\ 5\ 4$
 $5\ 6\ 7\ 8 + 3\ 0\ 8\ 7 = 8\ 7\ 6\ 5$
 $6\ 7\ 8\ 9 + 3\ 0\ 8\ 7 = 9\ 8\ 7\ 6$
- 授業者は、上記のような生徒が計算した結果を板書した。
- 「この計算した結果を見てどう思いますか。」と授業者が生徒に投げかけた。
- 生徒からの反応がいまいちであった。
- ここで生徒が、感動するだろうと予想していた授業者は、肩透かしをくらったように、「**ここは感動するところですよ**」と思わず生徒に言った。
- そして、授業者が生徒に、「今どのようなことが起こったかを文に表してごらん」と指示した。

- どのように表現してよいか分からない生徒が多くいたが、
- ある生徒が「1 2 3 4や2 3 4 5のような4桁の整数に3 0 8 7をたすと、4 3 2 1や5 4 3 2のような整数になる」という表現をした。それを授業者は黒板に書いた。
- この表現は曖昧であったが、「・・・のような」という表現が気になることを伝えたが、直さないまま授業は進んだ。
- そして、授業者は「このあとどのようなことを考えますか。」と質問した。
- 生徒からは
「どうして?」, 「本当?」,
「いつでも?」
ということが出された。
- 授業者は、そのような疑問が生徒から出てきたことを褒め、数学ではそのように自ら問いを持つことが大切であることを伝えた。
- そして、授業者は「ところで、いつでも」というのはどういうことですかと質問した。
- 生徒からは、「今は連続しているけど、連続していない場合は」と「4桁ではない、3桁や5桁ではなるのか」が出された。
- 生徒は、この2つの問いについて取り組んでいった。
- 先ず、最初に連続していない数を確認した。自分の家の電話番号で計算してみようということなり、それぞれが計算した。
 $2\ 5\ 8\ 9 + 3\ 0\ 8\ 7 = 5\ 6\ 7\ 6$
などとなり、前と違う結果があることが確認された。
- 連続してしている整数でないことをだめと言うことが分かりました。
- 次は3桁や5桁の場合はどうだろうかという課題に進みます。
- 授業者は、「3桁や5桁の場合を考える場合はどうすればいいですか。」と質問した。
- 3桁や5桁の数に3087を足しても、同じような結果にならないことから、3桁や5桁に4桁の3087と同じ役割をする整数があ

- るのだろうかという問いが生まれた。
- そこで、板書に
「3087はどのようにして求められるか」という問いをかけた。
$$1234 + 3087 = 4321$$

$$2345 + 3087 = 5432 \quad \text{なので}$$

$$3087 = 4321 - 1234 \quad \text{や}$$

$$3087 = 5432 - 2345 \quad \text{となる。}$$
 - 授業者が「ということは？」と言ったら生徒は一斉に計算を始めた。次のような計算を各自がそれぞれ取り組んでいた。
 - 3桁の場合

$$321 - 123 = 198$$

$$432 - 234 = 198 \dots$$
 確認すると

$$345 + 198 = 543$$
 - 5桁の場合

$$54321 - 12345 = 41976$$
 確認すると

$$23456 + 41976 = 65432$$
 - 黑板には、上記の例を板書した。
 - ここは、本時の本来の目的ではなかったのに、急ぎ足で進んだ。
 - ここから、本時の授業のねらいに入ることになる。
 - 授業者は、「それでは、3桁や5桁の場合は分かったので、もう一つの課題である『どうして？』を考えることにしましょう」と生徒に投げかけた。
 - 生徒に「どのようにして説明すればいいですか」と質問したら、
 - 生徒は「文字式」で行うと答えた。
 - そこで、「どこをどのように文字式にしますか」といったら生徒からは反応はなかった。
 - そこで、授業者は今学習していることを数学的に表現し直してみようとあって、生徒と一緒に文章を作ることとした。ここは教師主導であった。
 - まず、連続する4つの数字で整数を作ります。(例えば、1, 2, 3, 4の4つの数字を使い

- ます。)
- そのうちの最大値(大きい順にならべた整数)から最小値(小さい順にならべた整数)をひくと、答えは3087になる。
 - 文字式でこのことを表してみると連続する数字のうち、一番小さい数字をnとすると、
最大値の千の位の数字は $n+3$
 百の位の数字は $n+2$
 十の位の数字は $n+1$
 一の位の数字は n
 だから最大値の整数は

$$1000(n+3) + 100(n+2) + 10(n+1) + n$$

$$= 1111n + 3210$$
最小値の千の位の数字は n
 百の位の数字は $n+1$
 十の位の数字は $n+2$
 一の位の数字は $n+3$
 だから最小値の整数は

$$1000n + 100(n+1) + 10(n+2) + n + 3$$

$$= 1111n + 123$$
 ということは、
 「最大値 - 最小値」は

$$(1111n + 3210) - (1111n + 123)$$

$$= 1111n + 3210 - 1111n - 123$$

$$= 3210 - 123$$

$$= 3087$$
 - ここで、ある生徒が「nが消えた」と本時の目的に迫ることをつぶやいた。
 - そこで、授業者は「答えからnがないということはどのようなことを意味しますか」という本時の核心の部分を質問した。
 - この質問について、多くの生徒は何を質問されているのかが理解できない様子で「ぼかん」とした表情をしていた。
 - あせった授業者は、文字式の計算をした結果をもう一度生徒と、一緒に振り返り、「答えにnがなくなった」ということを強調した。
 - 再度、「どのような意味がありますか。」と質問したら、数人の生徒が挙手をした。

- ある生徒を指名した。
「『nに関係なく、答えは3087になる』と
いうことです。」と答えた。
- 授業者は「『nに関係ない』ということは、
違う表現をするとどうということですか。」と
質問すると、
- 違う生徒が「『すべての場合に成り立つ』と
いうことです」と答えた。
- 授業者は、次のようにまとめた。
「計算した結果、答えに最初使っていたnが
ないということは、答えにはnは関係ない」
ということでした。
- 授業者は、「最初はnを使っていたのに、答
えにnがないということもあり、そのことに
は意味がある」ということを伝え、生徒たち
本時のがんばりを賞賛した。
- 既に時間が過ぎていたが、蛇足として
4桁のとき
 $3210 - 123 = 3087$
になったことから、「3桁や5桁の場合は予
想できますか。」と質問したら、
- ある1人の生徒が
3桁は $210 - 12 = 198$
5桁は $43210 - 1234 = 41976$
となるとすかさず答えた。
- 周りの生徒はあっけにとられていたが、既に
授業時間が過ぎていたので、このように一つ
のこの結果に基づいて予想することも大切
であることを伝え、授業を終了した。

6 授業の分析

今回授業をした中学校の第2学年には、3クラスがあった、授業終了後、数学の担当の先生にお願いして、授業のクラス（1組）と授業をしていないクラス（2組、3組）に全国学力・学習状況調査のISSの問題の(2)のみを調査してもらった。

その結果は図10のようであった。

この結果を分析するために、授業をしていない2組と3組（授業無群）の結果をまとめて、授業

図10 調査結果

	正解		不正解		合計
	イを選択		アを選択		
	理由○	理由×			
1組 授業有	11 (28.2%)	9 (23.1%)	19 (48.7%)	39	
2組 授業無	5 (13.2%)	17 (44.7%)	16 (42.1%)	38	
3組 授業無	4 (10.5%)	11 (28.9%)	23 (60.5%)	38	

をしたクラスの1組（授業有群）と比較することとする。選択肢アとイを選んだ生徒の人数と理由を含めて正解か不正解かの2つで結果をまとめた。

(1) 選択肢の結果について

選択でアとイを選択した生徒についての結果についてカイ二乗検定を行った。イが正解である。

「カイ二乗検定の結果」(実測値, (期待値))

	イを選択	アを選択
授業有群	20, (19.330)	19, (19.670)
授業無群	37, (37.670)	39, (38.330)

2つの群について、「イを選択した生徒」と「アを選択した生徒」の状況についてカイ二乗検定を行った結果、2つの群に有意差はなかった

($\chi^2(1) = 0.004, ns$)。

つまり、地球の半径に関係あるか、関係ないかということについて、アとイ（イが正解）の反応は、授業のクラスも、授業していないクラスにも差がないということである。全国調査や特定の課題の結果と同じように約5割の生徒が関係あるという選択肢を選択してことに注目したい。

今回の授業では、nが消えることについての解釈について効果的な結果が出すことができなかった。

(2) 理由の記述の結果

理由を含めて、「正解した生徒」と「不正解の生徒」をまとめると次のようになる。なお、不正解の中にはイを選択したが、理由の記述が不正解なものアを選択して不正解のもの両方が含まれている。この結果についてカイ二乗検定を行っ

た。

「カイ二乗検定の結果」(実測値, (期待値))

	正解	不正解
授業有群	11, (6.290)	28, (32.710)
授業無群	9, (13.710)	76, (71.290)

2つの群について, 理由も含めて正解と不正解の状況についてカイ二乗検定を行った結果, 2つの群の間に有意差があった ($\chi^2(1) = 4.900$, $p < .05$)。

イを選択できた生徒が, 理由を書くということについては, ある程度効果があったと言える。しかし, 理由をかける生徒が相対的に多いとは言えないので, さらにこの指導について検討を加える必要を感じる。

7 考察

全国学力・学習状況調査や特定の課題についての調査結果で約5割の生徒が計算結果から文字がなくなることについての解釈が十分でないことが指摘されていた。今回の実践でも同じ結果が出た。今回の実践では, 正しい選択をできる生徒が理由をかけるようになるという可能性を示すことができたが, 文字がなくなることの意味を理解できない約5割の生徒を理解の状況は前の結果と変わらなかった。計算の結果から文字がなくなることについての解釈は, 多くの生徒にとって難しい課題であることが再確認できた。これからの指導においては, 生徒の困難点を指導者が把握し, 意図的に教えていくことが大切である。そのためには, 教科書でも積極的にこのような内容を明示的に取り上げることが必要であると考え。今後さらに, この指導においてどのような工夫が必要であるかを検討をしたいと思う。

参考・引用文献

- 文部科学省・国立教育政策研究所(2012) 平成24年度全国学力・学習状況調査【中学校】報告書
 国立教育政策研究所(2006) 特定の課題に関する調査(算数・数学)調査結果(小学校・中学校)
 藤井 齊亮ほか(2011) 新しい数学2 東京書籍株式会社
 岡本 和夫ほか(2011) 未来にひろがる数学2 株式会社振興出版社啓林館
 相馬 一彦ほか(2011) 数学の世界2年 大日本図書株式会社
 一松 信ほか(2011) 中学校数学2 学校図書株式会社
 澤田 利夫ほか(2011) 中学数学2 教育出版株式会社
 重松 敬一ほか(2011) 中学数学2 日本文教出版株式会社
 岡部 恒治ほか(2011) 中学校数学2 数研出版株式会社