数学科における中高接続を意識した教材の開発

―「連続する自然数の和」の問題の発展的扱いを通して―

中　村　好　則*

（2013年３月５日受理）

Yoshinori NAKAMURA

Development of Teaching Materials for Connecting Junior High and High School Mathematics
― Evolutional Treatment about the Problem of Consecutive Sum ―

１　はじめに

平成24年度より中学校では新学習指導要領が完全実施され，高校でも数学科は学年進行で先行実施された。新学習指導要領では，スパイラルによる教育課程の編成や学び直しの機会の設定など，学習内容の確実な定着と学びの連続性が強調されている。実際，平成20年１月の中央教育審議会答申の中で，算数・数学科の改善の基本方針について「数量や図形などに関する基礎的・基本的な知識・技能の確実な定着を図ることの重要性とそのための改善の方向として，発達や学年の段階に応じた反復（スパイラル）による教育課程により，理解の広がりや深まりなど学習の進歩が感じられるようにする」ことが述べられている(注1)。さらに，学習指導要領解説においては「今回の改訂では，学校や生徒の実態等に応じて義務教育段階の学習内容の確実な定着を図るための指導を行うことを指導計画の作成に当たって配慮すべき事項として新たに示し，高等学校段階の学習に円滑に移行できるようにすることを重視している」ことを述べている（文部科学省2009，p.71）。高校の数学指導において，中学校から高校へのスムーズな接続が期待されており，そのための中高接続を意識した教材の開発は喫緊の検討課題である。

そこで，本研究では，中学校の教材として取り扱われている「連続する自然数の和」の問題を，中高接続を意識した教材として検討し，その教材を活用した指導の有効性を考察する。そのために，まず「連続する自然数の和」の問題と，それと関連した問題について，中学校と高校の教科書，全国学力・学習状況調査での出題内容とその結果，大学入試問題を検討する。次に，中高接続を意識した教材として「連続する自然数の和」の問題の発展的扱いを提案し，その教材を活用した指導の有効性を考察する。

２　「連続する自然数の和」の問題

１）教科書に見る「連続する自然数の和」の問題

（１）中学校教科書

「連続する自然数の和」の問題は，中学校の第２学年の「式の計算（式の活用）」で扱われている。例えば，以下に３種類の教科書で扱われている問題を図１から図３に示す。図１と図２の問題は，連続する自然数の和の性質がすでに問題文の中で示され，その性質を文字を使って証明する問題である。どちらの問題も連続する自然数の和の個数は異なるが，与えられた個数に対する性質（例えば，３つの連続した自然数の和は３の倍数にな

＊岩手大学教育学部

るという性質など）を示すものであり，各自然数がもつ連続する自然数の和についての性質（例えば，1以外の奇数の約数の個数だけ，連続した自然数で表す方法があることなど）を探究する扱いではない。図３の問題は，連続する自然数の個数の異なる和について，その性質を調べる問題であり，先の２つの問題よりは発展的な扱いである。しかし，調べる性質として求められているものは，暗黙的ではあるが「連続する自然数の和は何の倍数になっているか」という点であり，先の２つの問題と同じである。図１の「連続する３つの自然数の和」の問題の解答例を以下に示す。図２と図３の問題についても，同様に連続する自然数を自然数nを用いて表し，連続する自然数の和の性質を証明できる。

連続する３つの自然数の和は３の倍数であることを，文字式を使って説明しなさい。

図１　中学校数学2〔学校図書（一松ら2011）〕

５つの続いた自然数の和は５の倍数になります。このわけを，文字を使って説明しなさい。

図２　新しい数学２〔東京書籍（藤井ら2011）〕

連続するいくつかの自然数の和には，どのような性質があるかを調べてみよう。まず，連続する３つの自然数の和について考えてみましょう。 次に，連続する３つの自然数の和のほかに，連続する５つの自然数の和と連続する４つの自然数の和について考えてみましょう。

図３　中学数学２〔教育出版（澤田ら2011）〕

＜図１の解答例＞

連続する自然数をn，n+1，n+2（nは自然数）とおくと，連続する３つの自然数の和は，

$$n+(n+1)+(n+2)=3(n+1)$$

nは自然数なので，n+1も自然数。

よって，3(n+1)は３の倍数となる。

（2）高校教科書

高校では，数学Ａの「整数の性質」において，自然数の性質について学ぶ。しかし，多くの教科書では「連続する自然数の和」ではなく「連続する自然数の積」が問題（図４，図５，図６）として扱われている。図４の問題の解答例は以下の通りである。和が積になるとその証明は場合分けが必要となり難しくなる。

nを自然数とする。次のことを証明せよ。 (1) n，n+1，n+2のいずれかは３の倍数である。 (2) n(n+1)(n+2)は６の倍数である。

図４　数学Ａ〔数研出版（大島ら2011）〕

(1) 連続する２つの整数の積は２の倍数であることを証明せよ。 (2) 連続する３つの整数の積は６の倍数であることを証明せよ。

図５　数学Ａ〔第一学習社（長谷川ら2011）〕

(1) nを整数とするとき，n^2-nは２の倍数であることを示してみよう。 (2) nを整数とするとき，n^3-nは６の倍数であることを証明せよ。

図６　数学Ａ〔啓林館（高橋ら2011）〕

＜図４の解答例＞

(1)　自然数nは，n=3k，n=3k+1，n=3k+2（kは自然数）のいずれかで表すことができる。

n=3k　ならば，nが３の倍数

n=3k+1　ならば，n+2が３の倍数

n=3k+2　ならば，n+1が３の倍数

よって，n，n+1，n+2のいずれかは３の倍数。

(2)　n(n+1)(n+2)が６の倍数であることを示すには，２の倍数かつ３の倍数であることを示せばよい。

(1)より，n(n+1)(n+2)は３の倍数であるから，２の倍数であることを示せばよい。

自然数nは，n=2k，n=2k+1（kは自然数）のいずれかで表すことができるから，

n=2kのとき，$n(n+1)(n+2)=2k(2k+1)(2k+2)$
$=4k(k+1)(2k+1)$

n=2k+1のと，$n(n+1)(n+2)=(2k+1)(2k+2)(2k+3)$
$=2(2k+1)(2k+2)(2k+3)$

よって，n(n+1)(n+2) は２の倍数である。

２）全国学力・学習状況調査での出題と結果

「連続する自然数の和」の問題は，全国学力・学習状況調査の中学校Ｂ問題（対象は中学校３年生）で出題されている。平成24年度（図７）と平成23年度（図８），平成19年度（図９）に「連続する３つの自然数の和」の問題，平成22年度に「連続する３つの奇数の和」の問題，平成21年度に「３つの連続する自然数の和」の変形問題，平成20年度に「２桁の自然数の和」の問題が出題されている。

平成24年度全国学力・学習状況調査報告書[注2]によると，設問(1)（図10）の結果は，正答率が38.8％で，事柄が成り立つ理由を示された方針に基づいて説明することに課題があることが述べられている。また，設問(2)（図11）の結果は，正答率が57.0％であり，発展的に考え予想した事柄を説明することに課題があることが述べられている。特に，設問(1)は教科書でも取り扱われている問題であり，しかも説明するための方針が示さているにもかかわらず，約４割の生徒しかできていない。これらの課題を残したまま中学校から高校へ進学している可能性があり，スパイラルと学び直しの観点からも，この教材を高校において扱うことが必要と考える。だだし，発達段階なども考慮すると，発展的に扱うことが重要である。

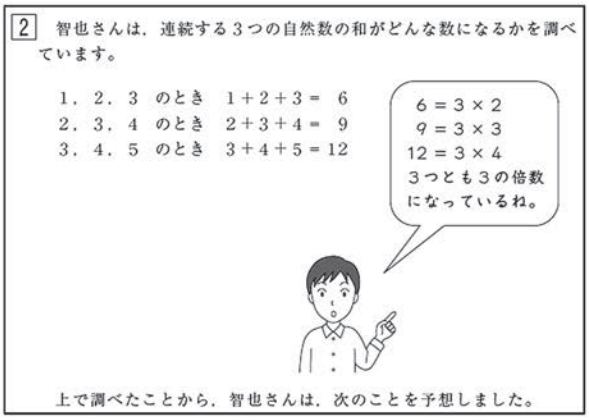

図７　学力・学習状況調査（H24）[注2]

2　健一さんは，連続する３つの自然数について，それらの和がどんな数になるかを調べています。

1，2，3　のとき　1＋2＋3＝ 6＝2×3
4，5，6　のとき　4＋5＋6＝15＝5×3
6，7，8　のとき　6＋7＋8＝21＝7×3

健一さんは，これらの結果から次のことを予想しました。

図８　学力・学習状況調査（H23）[注2]

2　太郎さんは，連続する３つの自然数の和がどんな数になるかを調べています。

1，2，3　のとき，　1＋2＋3＝ 6
2，3，4　のとき，　2＋3＋4＝ 9
3，4，5　のとき，　3＋4＋5＝12

これらの結果から，連続する３つの自然数の和は３の倍数になることを予想し，この予想が正しいことを下のように説明しました。

図９　学力・学習状況調査（H19）[注2]

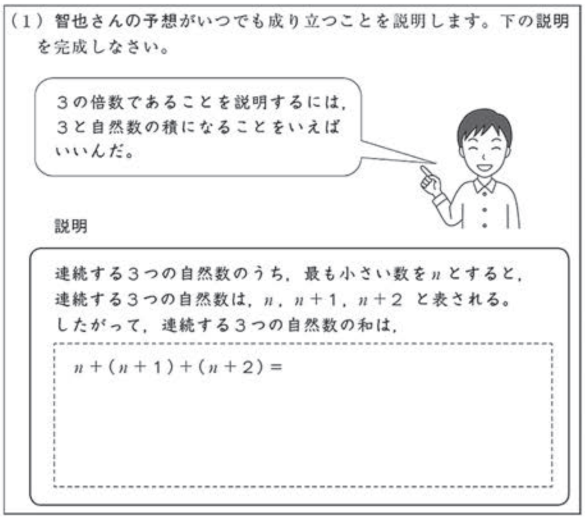

図10　平成24年度の設問（1）[注2]

（2）智也さんは，連続する３つの自然数を，連続する３つの偶数に変えたとき，その和がどんな数になるかを考えてみたいと思い，いくつかの場合を調べました。

2，4，6　のとき　2＋4＋6＝12
8，10，12　のとき　8＋10＋12＝30
20，22，24　のとき　20＋22＋24＝66
⋮　　⋮

連続する３つの偶数の和は，どんな数になると予想できますか。前ページの智也さんの予想の書き方のように「〜〜は，……になる。」という形で書きなさい。

図11　平成24年度の設問（2）[注2]

3）大学入試に見る「連続する自然数の和」問題

「連続する自然数の和」の問題と，それに関連する問題は，大学入試においても扱われている（図12，図13，図14）。しかし，前節までの考察では，中学校では多くの教科書で扱われていながら，高校の教科書においては「連続する自然数の和」に関する問題は扱われず，「連続する自然数の積」が扱われていることが明らかとなった。しかも，全国学力・学習状況調査では，「連続する自然数の和」の問題の正答率は低く，課題があることが指摘されている。以下に，「連続する自然数の和」に関する大学入試問題（図12，図13，図14）とこれらの問題の解答例を示す。

いくつかの連続な自然数の和が1000であるとき，この連続な自然数を求めよ。

図12　山形大学　人文　1989（安田2003）

連続した自然数の組（500, 501, 502, 503）は，そこに並んだすべての数の総和が 2006 になるものである。500 + 501 + 502 + 503 = 2006 このように 2 個以上の連続した自然数の組で，そこに並んだすべての数の総和が 2006 になるものをすべて求めなさい。ただし，必要ならば，次のように素因数分解できることを利用してよい。 2006 = 2 × 17 × 59

図13　慶応大学　看護医療　2006 (注3)

正の整数の組（a,b）で a 以上 b 以下の整数の総和が 500 となるものをすべて求めよ。ただし a < b とする。

図14　大阪大学　人文　1999 (注3)

＜図12の解答例＞

連続する自然数を m，m+1，…，m+n（n+1個）とすると，

$$m+(m+1)+\cdots+(m+n)=1000$$
$$m(n+1)+(1+\cdots+n)=2^3\cdot 5^3$$
$$m(n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)=2^3\cdot 5^3$$
$$(n+1)(2m+n)=2^4\cdot 5^3$$

$(n+1)+(2m+n)=2(m+n)+1$ であるから，$(n+1)$ と $(2m+n)$ のどちらか一方は奇数である。

従って，2^4 は $(n+1)$ か $(2m+n)$ のどちらか一方である。

$$(2m+n)\geqq n+1\geqq 2$$

$(2m+n,n+1)=(125,16),(80,25),(400,5)$

これらを解くと，

$(m,n)=(55,15),(28,24),(198,4)$

従って，

1000=198+199+200+201+202　（５個）
=28+29+30+…+50+51+52（25個）
=55+56+57+…+68+69+70（16個）

＜図13の解答例＞

整数 a から整数 b までの和は，初項 a，末項 b，公差 1 の等差数列の和と考えると，

$$\frac{(a+b)(b-a+1)}{2}=2006=2\times 17\times 59$$

$(a+b)(b-a+1)=4012=2^2\times 17\times 59$

$(a+b)+(b-a+1)=2b+1$ であるから，

$(a+b)$ と $(b-a+1)$ のどちらか一方は奇数である。

$a+b>b-a+1\neq 1$

$(a+b,b-a+1)=(1000,4),(236,17),(68,59)$

これらを解くと，

$(a,b)=(500,503),(110,126),(5,63)$

従って

2006=500+501+502+503（４個）
=110+111+112+…+124+125+126（17個）
=5+6+7+…+61+62+63（59個）

＜図14の解答例＞

図13の解答例と同様に考えると，

$$(a+b)(b-a+1)=2\times 500=2^3\times 5^3$$

だから，

$(a+b,b-a+1)=(200,5),(40,25),(125,8)$

これらを解くと，

$(a,b)=(98,102),(8,32),(59,66)$

従って，

500=98+99+100+101+102（5個）
=8+9+10+…+30+31+32（25個）
=59+60+61+…+64+65+66（8個）

このように「連続する自然数の和」の問題は，高校の教科書では直接は取り扱われないが，大学入試問題として出題されており，高校の教材として検討する必要がある。

３　「連続する自然数の和」の問題の発展的扱い

「連続する自然数の和」の問題については，飯島（2000）や森原（2004），岩知道ら（2012）が検討している。飯島（2000）は，「連続する自然数の和」の問題から得られる豊富な事実や観察結果が生徒の多様な探究活動を促すことを大学生を対象とした事例研究から明らかにしている。また，森原（2004）は，図12の大学入試問題からの発展として「連続する自然数の和」の問題を検討している。しかし，それらの研究では，その教材の扱いや検討はどちらも中高接続に焦点を当てたものではない。また，岩知道ら（2012）は中高一貫した指導の教材として取り上げてはいるが，その扱いは与えられた幾つかの自然数について，何通りの連続した自然数の和で表せるかを課題とし，具体物を操作することで解決を図るものであり，本研究での発展的扱いとは異なる。そこで，本研究では，中高接続を意識した教材として「連続する自然数の和」の問題の発展的扱いを提案する。以下では，その指導展開例を検討する。

＜指導展開例＞

①課題提示

連続する数の和として，30までの数を表そう。どんな規則があるだろうか。例えば，

3=1+2，15 =7+8 =4+5+6 =1+2+3+4+5

②個別解決

各自で30までの自然数を連続する自然数の和で表す。30までの自然数を連続する自然数の和で表すと以下のようになる。何名かの生徒に黒板に書いてもらい確認する。

1=×
2=×
3=1+2
4=×
5=2+3
6=1+2+3
7=3+4
8=×
9=4+5
　=2+3+4
10=1+2+3+4
11=5+6
12=3+4+5
13=6+7
14=2+3+4+5
15=7+8
　=4+5+6
　=1+2+3+4+5
16=×
17=8+9
18=5+6+7
　=3+4+5+6
19=9+10
20=2+3+4+5+6
21=10+11
　=6+7+8
　=1+2+3+4+5+6
22=4+5+6+7
23=11+12
24=7+8+9
25=12+13
　=3+4+5+6+7
26=5+6+7+8
27=13+14
　=8+9+10
　=2+3+4+5+6+7
28=1+2+3+4+5+6+7
29=14+15
30=9+10+11
　=6+7+8+9
　=4+5+6+7+8

③グループ活動

②の結果を観察し，規則性や性質などをできるだけ多く見つけ，各グループで探究したいことを相談し整理する。例えば，次のような数に着目し，規則性や性質などを発見することが期待できる。

（a）連続する自然数の和で表せない数
（b）連続する２つの自然数で表せる数
（c）連続する３つの自然数で表せる数
（d）連続する４つの自然数で表せる数
（e）連続するｋ個の自然数で表せる数
（f）１種類の連続する自然数の和で表せる数
（g）２種類の連続する自然数の和で表せる数
（h）３種類の連続する自然数の和で表せる数
（i）ｋ種類の連続する自然数の和で表せる数

これらのことから，最終的に次のことをクラス全体で探究課題に取り上げることを目標とする。

（j）自然数Ｎは何通りの連続する自然数の和で表せるか。

④全体発表

グループごとに探究した結果を発表する。中学校の学習内容で解決できるものがある一方，高校の学習内容が必要なものもある。以下には期待する発表例を示す。

(a) 連続する自然数の和で表されない数は,

$1=\times$, $2=\times$, $4=\times$, $8=\times$, $16=\times$

である。これより2^nで表される数は連続する自然数の和では表すことができないことが予想される。証明を背理法で行う。

2^nの数をn個の連続する数の和として表せたとすると,

$$2^n=k+(k+1)+\cdots+(k+n-1)$$
$$=kn+\{1+\cdots+(n-1)\}$$
$$=kn+\frac{n(n-1)}{2}$$
$$=\frac{n(2k-1+n)}{2}$$

$2k-1$が奇数であるから, nと$2k-1+n$は奇数と偶数が異なる。よって, $\frac{n(2k-1+n)}{2}$は奇数の因子を持つこととなり, 従って, 2^nが奇数の因子を持つことになり矛盾。ゆえに, 2^nの数は連続する自然数の和として表せない (Sylvesterの定理)。

(b) 連続する２つの自然数の和で表される数は,

$3=1+2$,　$7=3+4$,　$11=5+6$,
$5=2+3$,　$9=4+5$,　$\cdots$

である。１以外の奇数は連続する２つの自然数の和で表すことができる (逆に連続する２つ自然数の和は奇数である) ことが予想できる。証明は, 奇数を$2k+1$ ($k=1,\cdots$) とすると,

$$2k+1=k+(k+1)$$

また, ３を初項とする公差２の等差数列$\{a_n^2\}$は,

$$\{a_n^2\}=3+2(n-1)$$
$$=2n+1$$
$$=n+(n+1) \quad (n\geqq 1)$$

となり, 連続する２つの自然数の和で表すことができる。

(c) 連続する３つの自然数の和で表される数は,

$6=1+2+3$,　$12=3+4+5$,　$18=5+6+7$,
$9=2+3+4$,　$15=4+5+6$,　$\cdots$

である。連続する３つの自然数の和として表せる自然数は, ６を初項として３とびの数 (６以上の３の倍数) であることが予想できる。証明は,

$$k+(k+1)+(k+2)=3(k+1),\quad k=1,\cdots$$

また, ６を初項とする公差３の等差数列$\{a_n^3\}$は,

$$\{a_n^3\}=6+3(n-1)$$
$$=3n+3$$
$$=n+(n+1)+(n+2) \quad (n\geqq 1)$$

となり, 連続する３つの自然数の和で表すことができる。

(d) 連続する４つの自然数の和で表される数は,

$10=1+2+3+4$,　$22=4+5+6+7$,
$14=2+3+4+5$,　$26=5+6+7+8$,
$18=3+4+5+6$,　$\cdots$

である。連続する４つの自然数の和として表せる自然数は, 10を初項として４とびの数 (２の倍数) であることが予想できる。証明は,

$$k+(k+1)+(k+2)+(k+3)=4(k+1)+2,\quad k=1,\cdots$$

また, 10を初項とする公差４の等差数列$\{a_n^4\}$は,

$$\{a_n^4\}=10+4(n-1)$$
$$=4n+6$$
$$=n+(n+1)+(n+2)+(n+3) \quad (n\geqq 1)$$

となり, 連続する４つの自然数の和で表すことができる。

(e) 連続するk個の自然数の和で表される数は, $\frac{k(k+1)}{2}$を初項としてkとびの数である。

$$n+(n+1)+(n+2)+\cdots+(n+k-1)$$
$$=kn+(1+2+\cdots+k-1)$$
$$=\frac{k(k+1)}{2}+k(n-1)=\{a_n^k\}$$

(f) １種類の連続する自然数の和で表せる数は,

$3=1+2$,　$10=1+2+3+4$,　$14=2+3+4+5$,
$5=2+3$,　$11=5+6$,　$17=8+9$,
$6=1+2+3$,　$12=3+4+5$,　$19=9+10$,
$7=3+4$,　$13=6+7$,　$\cdots$

である。これらを素因数分解すると

$3=3$,　$10=2\cdot 5$,　$14=2\cdot 7$,

5=5,　11=11,　17=17,
6=2・3,　$12=2^2\cdot 3$,　19=19,
7=7,　13=13,　・・・

これらの自然数に含まれる因数の中に，奇素数が１つだけ含まれる。

(g)　２種類の連続する自然数の和で表せる数は，

9=4+5=2+3+4
18=5+6+7=3+4+5+6
25=12+13=3+4+5+6+7

である。これらを素因数分解すると，

$9=3^2$,　$18=2\cdot 3^2$,　$25=5^2$

これらの自然数に含まれる因数の中に，奇素数の２乗が１つだけ含まれる。

(h)　３種類の連続する自然数の和で表せる数は，

15=7+8=4+5+6=1+2+3+4+5
21=10+11=6+7+8=1+2+3+4+5+6
27=13+14=8+9+10=2+3+4+5+6+7
30=9+10+11=6+7+8+9=4+5+6+7+8

である。これらを素因数分解すると，

$15=3\cdot 5$,　$21=3\cdot 7$,　$27=3^3$,　$30=2\cdot 3\cdot 5$

これら自然数に含まれる因数の中に，２つの奇素数の積もしくは奇素数の３乗が含まれる。

(i) は，(j) を証明することでその性質が分かるので，(j) について検討する。そこで，自然数Ｎは何通りの連続する自然数の和で表されるかについては，(f)，(g)，(h) を参考にしながら，自然数Ｎを素因数分解し，その約数と連続する自然数で表す方法の数に着目して規則性を調べると，以下のことが予想できる。

(j') 自然数Ｎを連続な自然数の和で表す方法の数はその自然数の１以外の奇数の約数の個数である。

(a) より，自然数Ｎが奇数の因数を持たなければ，連続した自然数の和で表すことはできないことが分かっているので，この証明を (j'1)，(j'2)，(j'3) に分けて示す。

(j'1) 自然数Ｎが奇数の因数を持つと，連続した自然数の和となる。

＜ (j'1) の証明＞

自然数Ｎが奇数 m(m ≧3) を持つとすると，

$$
\begin{aligned}
N&=am \qquad m=2k+1,\ k\geqq 1\\
&=a(2k+1)\\
&=\underbrace{(a-k)+\cdots+(a-1)}_{k\text{個}}+\underbrace{a}_{1\text{個}}+\underbrace{(a+1)+\cdots+(a+k)}_{k\text{個}}\quad (2k+1\text{個})
\end{aligned}
$$

a ＞ k ならば，(2k+1) 個の連続した自然数の和となる。

a ≦ k ならば，0と絶対値が等しい正の数，負の数を消して，2a 個の連続した自然数の和になる。

例えば，18は1,2,3,6,9,18の６個の約数を持つが，１以外の奇数の約数は，３と９の２個なので，

$$
\begin{aligned}
18&=6\times 3\\
&=6+6+6\\
&=(6-1)+6+(6+1)\\
&=5+6+7
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
18&=2\times 9\\
&=2+2+2+2+2+2+2+2+2\\
&=(2-4)+(2-3)+(2-2)+(2-1)+2\\
&\qquad +(2+1)+(2+2)+(2+3)+(2+4)\\
&=(-2)+(-1)+0+1+2+3+4+5+6\\
&=3+4+5+6
\end{aligned}
$$

(j'2) 自然数Ｎが奇数個の連続する自然数の和で表すことができたとすると，奇数の因数を持つ。

＜ (j'2) の証明＞

$$
\begin{aligned}
N&=a+(a+1)+(a+2)+\cdots+(a+2k) \qquad (2k+1\text{個})\\
&=a(2k+1)+(1+2+\cdots+2k)\\
&=a(2k+1)+\sum_{n=1}^{2k} n\\
&=a(2k+1)+\frac{1}{2}\cdot 2k(2k+1)\\
&=(2k+1)(a+k)
\end{aligned}
$$

(j'3) 自然数Nが偶数個の連続する自然数の和で表すことができたとすると奇数の因数を持つ。

＜ (j'3) の証明＞

$$
\begin{aligned}
N&=a+(a+1)+(a+2)+\cdots+(a+2k-1) \qquad (2k\text{ 個})\\
&=2ka+(1+2+\cdots+2k-1)\\
&=2ka+\sum_{n=1}^{2k-1} n\\
&=2ka+\frac{1}{2}\cdot 2k(2k-1)\\
&=k(2a+2k-1)=k\{2(a+k)-1\}
\end{aligned}
$$

⑤まとめ

発表された規則性や性質は，大学入試問題の解決にも活用できることを知る。例えば，図10，図11，図12の大学入試問題を (j'1) の証明で用いた考え方を使い，自然数が持つ1以外の奇数の約数に着目して考えると，以下のような別解を得る。このように考えると，大学入試問題でも中学校数学までの内容でも解法可能である。

＜図12の別解＞

1000の約数は，

$1,2,4,\underline{5},8,10,\underline{25},40,100,\underline{125},200,250,500,1000$

1000の約数のうち１以外の奇数は３個

$$
\begin{aligned}
1000&=200\times 5\\
&=(200-2)+(200-1)+200+(200+1)+(200+2)\\
&=198+199+200+201+202 \text{（5個）}\\
1000&=40\times 25\\
&=(40-12)+\cdots+(40-1)+40+(40+1)+\cdots+(40+12)\\
&=28+29+30+\cdots+50+51+52 \text{（25個）}\\
1000&=8\times 125\\
&=(8-62)+\cdots+(8-1)+8+(8+1)+\cdots+(8+62)\\
&=55+56+57+\cdots+68+69+70 \text{（16個）}
\end{aligned}
$$

＜図13の別解＞

2006の約数は，

$1,2,\underline{17},34,\underline{59},118,\underline{1003},2006$

2006の約数のうち１以外の奇数は３個

$$
\begin{aligned}
2006&=2\times 1003\\
&=(2-501)+\cdots+(2-1)+2+(2+1)+\cdots+(2+501)\\
&=500+501+502+503 \text{（4個）}\\
2006&=34\times 59\\
&=(34-29)+\cdots+(34-1)+34+(34+1)+\cdots+(34+29)\\
&=5+6+7+\cdots+61+62+63 \text{（59個）}\\
2006&=118\times 17\\
&=(118-8)+\cdots+(118-1)+118+(118+1)+\cdots+(118+8)\\
&=110+111+112+\cdots+124+125+126 \text{（17個）}
\end{aligned}
$$

＜図14の別解＞

500の約数は，

$1,2,4,\underline{5},10,20,\underline{25},50,100,\underline{125},250,500$

500の約数のうち１以外の奇数は３個

$$
\begin{aligned}
500&=4\times 125\\
&=(4-62)+\cdots+(4-1)+4+(4+1)+\cdots+(4+62)\\
&=59+60+61+62+63+64+65+66 \text{（8個）}\\
500&=20\times 25\\
&=(20-12)+\cdots+(20-1)+20+(20+1)+\cdots+(20+12)\\
&=8+9+10+\cdots+30+31+32 \text{（25個）}\\
500&=100\times 5\\
&=(100-2)+(100-1)+100+(100+1)+(100+2)\\
&=98+99+100+101+102 \text{（5個）}
\end{aligned}
$$

４　「連続数自然数の和」の問題の発展的扱いの有効性

前節まで「連続する自然数の和」の問題について，中学校と高校の教科書の取り扱いを調べ，大学入試問題での出題問題を検討した。また，全国学力・学習状況調査における「連続する自然数の和」の問題の結果を検討した。これらをもとに,「連続する自然数の和」の問題の発展的扱いを提案し，指導展開例を考察した。その結果，「連続する自然数の和」の問題の発展的扱いでは，以下の有効

性が示唆される。

(1)　多様な探究活動の促進

「連続する自然数の和」の問題の発展的扱いでは，多様な規則や性質（(a) から (j) など）を観察することができ，生徒の多様な探究活動を促進することが可能である。このことについては，飯島（2000）も「多様な観察可能な事実が多様な数学的探究を生む」ことを述べている。多様な規則や性質の中には，中学校での既習事項で探究できるものから，高校の内容を必要とするものまで含まれ，生徒の既習事項に応じた探究が可能である。

(2)　中学校の既習事項と高校の学習内容の関連付け

「連続する自然数の和」の問題は，中学校第2学年「数と式」領域の「文字を用いた式でとらえ説明できること」で扱われている。「連続する自然数の和」の問題の発展的扱いでは，中学校での既習事項に加えて，高校の数学Ａ「整数の性質」，数学Ｂ「数列」，数学Ⅰ「数と式」の集合の単元（背理法による証明）での学習内容を活用して問題を考察するため，中学校の既習事項と高校の学習内容の関連付けが可能である。

(3)　学習の広がりと深まりの感得と数学的な理解の促進

「連続する自然数の和」の問題を中学校で学習し，さらに高校において，その問題を発展的に扱うことで，既習事項の捉え直しができ「連続する自然数の和」の問題について学習の広がりと深まりを感得することができ，数学的な理解を促進するものと考える。また，大学入試問題を高校の学習内容を活用して解くだけでなく，「連続する自然数の和」の問題を発展に扱うことで，大学入試問題を中学校の学習内容でも解決することができるようになり，これらの問題に対する数学的な理解が促進されるものと考える。

５　まとめと課題

本研究では，「連続する自然数の和」の問題について検討してきた結果，中学校では与えられた連続する個数ごとの性質（３個や５個の場合等）について学び，高校では直接学ぶ機会はなく，「連続する自然数の積」について学習することが明らかとなった。また，全国学力・学習状況調査では「連続する自然数の和」の問題の理解について課題があることが指摘されていた。そこで，「連続する自然数の和」の問題を中高接続を意識した教材として発展的扱いの指導展開例を提案し考察した結果，(1) 多様な探究活動の促進，(2) 中学校の既習事項と高校の学習内容の関連付け，(3) 学習の広がりと深まりの感得と数学的な理解の促進の有効性があることが示唆された。これらの有効性が中学校から高校への数学学習のスムーズな接続を促すものと考える。

高校の数学科の目標は，「数学的活動を通して，数学における基本的な概念や原理・法則の体系的な理解を深め，事象を数学的に考察し表現する能力を高め，創造性の基礎を培うとともに，数学のよさを認識し，それらを積極的に活用して数学的論拠に基づいて判断する態度を育てる」ことである。この目標にある創造性の基礎とは，知的好奇心，豊かな感性，健全な批判力，直観力，洞察力，論理的な思考力，想像力，根気強く考え続ける力などである（文部科学省2009）。「連続する自然数の和」の問題の発展的扱いは，多様な探究活動や学習の広がりと深まりの感得などの有効性が，生徒の知的好奇心を高め，直観力や洞察力，想像力などの思考力などを育成し，創造性の基礎を築くためにも有効な教材と考える。

今後は，高校において「連続する自然数の和」の問題の発展的扱いの実践を行い，その効果を具体的に検証することと，中高接続を意識した教材をさらに開発することが課題である。

注記

（1）　幼稚園，小学校，中学校，高等学校及び特別支援学校の学習指導要領等の改善について（中央教育審議会答申），http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chukyo/chukyo0/toushin/__icsFiles/afieldfile/2009/05/12/1216828_1.pdf（2012年11月14日参照）

（2） 国立教育政策研究所教育課程研究センター「全国学力・学習状況調査」，http://www.nier.go.jp/kaihatsu/zenkokugakuryoku.html（2012年11月７日参照）

（3） Izumi の数学，http://izu-mix.com/math/exam/keiou/2006_2.html（2012年11月７日参照）

参考・引用文献

藤井斉亮他40名（2011）新しい数学２，東京書籍.

長谷川考志他20名（2011）高等学校数学 A，第一学習社.

一松信他30名（2011）中学校数学２，学校図書.

飯島康之（2000）連続する自然数の和の問題に関する数学的探求の多様性について－意思決定との関わりからの考察－，科教研報24(6)，21－26.

岩知道秀樹，岩崎秀樹，杉野本勇気，大滝孝治（2012）中等教育を一貫する論証指導の意義と課題（5），一貫性の意識化に向けた一つの試み，第45回数学教育論文発表会論文集，89－94.

文部科学省（2008）中学校学習指導要領解説数学編（平成20年９月），教育出版.

文部科学省（2009）高等学校学習指導要領解説数学編（平成21年12月），実教出版.

森原則男（2004）自然数を連続な自然数の和で表す，シグマジャーナル No.28，文英堂，25－30.

大島利雄他12名（2011）数学 A，数研出版.

澤田利夫他23名（2011）中学数学２，教育出版.

高橋陽一郎他33名（2011）詳説数学 A，啓林館.

安田亨（2003）入試数学伝説の良問100－良い問題で良い解法を学ぶ－，講談社.