小学校算数教材、中学校数学教材および高校数学教材の事例
－分数の割り算、正負の数の計算、アキレスと亀のパラドックス－

中嶋　文雄※

（2011年３月４日受理）

Fumio Nakajima

Topics of mathematical education— fraction numbers, plus numbers and minus numbers and the paradox of Achilles and a tortoise

１．はじめに

小学校算数において生徒に最もわかりにくい教材の一つは分数同士の割り算であろう。

また中学校数学において同様の教材の一つは正負の数の計算であろうし、高校数学においては極限の概念であろう。本稿で考察された分数計算と正負の数の部分は平成２３年度中に予定される岩手大学教育学部附属小学校、附属中学校におけるそれぞれの模擬授業の準備のための試案であり、また極限概念についての部分は平成２１年度岩手県高等学校数学研究部会において著者が行った講演についてまとめたものである。

２．分数の割り算

ａ，ｂ，ｃ，ｄ　をすべて整数として次の分数の割り算を考える

$$\frac{b}{a} \div \frac{d}{c} = \frac{b}{a} \times \frac{c}{d} \qquad (1)$$

小学生のときの著者の経験からしてもこの結果の呑み込みがうまく行かなかった。

これに対し分数の掛け算

$$\frac{b}{a} \times \frac{d}{c} = \frac{b \times d}{a \times c} \qquad (2)$$

の呑み込みは多くの生徒において容易であろう。これらの生徒の反応の違いはどこからくるのであろうか。数学的にいえば(2)がわかって(1)がわからないということはありえない。

小学校算数教科書［１］の「もの知りコーナー」では(1)の答えのように割る分数 $\frac{d}{c}$ の逆数 $\frac{c}{d}$ をかけるということが述べられている。しかしこの逆数は数学的に高度な代数の概念であり、通常、中学生、高校生でもその理解は容易でないと思われる。

著者が自分自身の経験からして推測するに、おそらく(2)の呑み込みが早いと言うのはこの公式のリズムの良さから来ているのではないかと思う。すなわち、分子は分子同士かけ、分母は分母同士かけるという表現にリズミカルなものを感じる。それに対して(1)の分数の割り算の公式はリズミカルではない。実際、割り算を求めるはずなのに逆数をかけるという掛け算が現れてくる。それでは(1)の割り算の覚え方も(2)のようなリズミカルなものにしてはどうであろうか。例えば、

＊岩手大学　教育学部　数学科

分子は分子同士わり、分母は分母同士わるという風に。実際、この考え方は一部［２］に現れているが、本節ではこの点をより徹底して次のような計算を可とするものである

先ず、割られる分数 $\frac{b}{a}$ と割る分数 $\frac{d}{c}$ の両方を通分してそれぞれ $\frac{bc}{ac}$ と $\frac{ad}{ac}$ を得る。次に分子は分子同士わり、分母は分母同士わる

$$\frac{bc \div ad}{ac \div ac} = \frac{bc \div ad}{1} = bc \div ad = \frac{bc}{ad}$$

これで正答が得られる。すなわちこの割り算の特徴は、生徒にとってすでに学習されている通分の操作を経て、割り算の計算は割り算の中で閉じてしまうことにある。割り算は割られる数と割る数の比の問題なのでその答えからは共通の分数単位となっている $\frac{1}{ac}$ が消えてしまうことはいうまでもない。

３．正負の数の計算

中学校一年数学の教科書［３］において正負の数は実質的に数直線という一次元の世界におけるベクトルとして記述されている。著者はこの教え方にその数学的な正統性を理解しつつも同時にこの教え方で果たして中学生にわかってもらえるであろうかという不安を感じる。いうまでもなく、ベクトルは高校数学の事項であり、また高校生に対するアンケート調査によれば、高校生が数学の中でもっとも不得意と感じる教材の一つである。数年前までの中学校一年の教科書［４］では、トランプのカードを用い、正数は黒のカード、負数は赤のカードで表す教え方の例も述べられているし、実際、岩手県内の中学校によってはこのトランプを教材として用い、教科書のベクトル的指導を避けているところもある。しかしまた、このトランプの教材では正負の数の演算は加法と減法までは有効であるが、掛け算、割り算では行き詰まることは容易に想像される。そして現行の教科書［３］にはこの教え方はもはや記載されていない。一般に正負の数はその加法、減法の教え方、そしてその理解の仕方は比較的容易であるが、問題なのは乗法、除法の教え方、理解の仕方である。すなわち　負数×負数＝正数　、負数÷負数＝正数　の理解が課題なのである。ここで一つ、参考になるのは正負の数を発明したインドの歴史である。古代のインドでは正数を資産と解し負数を負債と解して、負数×負数＝正数を単に負債×負債＝資産と解釈していた。これは恐らく、正負の数を分配の法則に機械的に当てはめた結果をそのまま受け入れていたからであり、この式の現象的意味を考えていなかったのではないだろうか。ならばそれに習って、負数×負数＝正数　をその意味を考えずに単に数のきまりとしてそのまま受け止めてはどうであろうか。 実際、筆者はそのようにして中学校の数学の試験をからくも切り抜けた思い出がある。

今一つの方法は教科書のベクトルの視点を数学的に推し進めることである。今、ある数に正数を加えることは、この数の表す数直線上の位置を例えば右方向へ移動することを表し、それに対し負数を加えることは数直線の反対方向である左方向への移動を表すとする。直線の上ならばその基本的運動は移動に限定されるが、もし運動を平面上に広げて考えるとすれば、回転というもう一つの基本的運動が可能である。そこで、今、ある数に負数－１を掛けることは掛けられる数を表す数直線上のベクトルを原点の周りに180度　反時計回りに回転させることとする。図１は　－１×－１＝＋１　を表している。また、ある数を－１で割ることは－１を掛けることの反対方向の運動とする。すなわち割られる数の表す数直線上のベクトルを原点の周りに180度　時計周りに回転させることとする。

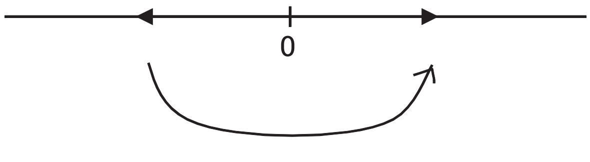

図１

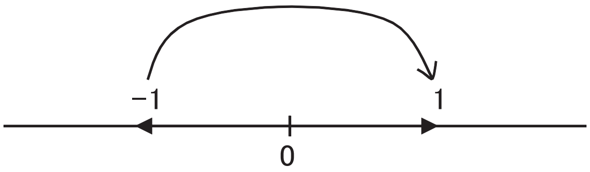

図２

図２は　－１÷－１＝＋１　を表している。この考えは、複素解析学において任意の複素数に虚数単位 i を掛けることは複素平面上においてその複素数の表すベクトルを原点の周りに90度反時計周りに回転させることと、$i \times i = -1$　なので、－１を掛けることは結局180度の回転に相当することと解釈することから導かれる。

著者はこの考え方は中学校数学の図形との関連において不自然とは思わない。例えば、二つの三角形の合同の定義においては、一方を裏返して他方に重ねても良いことになっている。ちょうど右手と左手がこの動作で重なるように。これは実質的に三角形を平面から飛び出さる操作を許容している。一般に、一次元または二次元を対象とする世界の理論的完成のため、これらに対しもう一つ次元の高い世界を過程の段階として導入させざるを得ないのではないだろうか。この三角形の合同の裏返しは［５］の指摘による。

４．極限操作―アキレスと亀のパラドックス―

著者の高校生の時の経験からしても、また著者の行った岩手県内の高等学校におけるアンケート調査によっても、次の式が高校生には直感的に分からないという

$$1 = 0.999\ldots\ldots \qquad (3)$$

確かに、この式の右辺は何をあらわしているのか、そしてそれはなぜ左辺と等しくなるのかという疑問を高校生がいだくのは自然である。

今、図形的に、数直線を思い浮かべ、その上に　0.999...　を目盛ってゆく様を考えるとその先に何か行き着く点が現れることを直感する。しかしいったんこの数直線を離れて無限小数の表記 0.999...　を考えると何か落ち着かない居心地の悪さを感じる。この感じの違いはおそらく前者においては図形と言う私たちの思考から距離を置いたところに対象物を描ききったという安心感と、後者においては止むことの無い思考によって支えられているところの無限小数のもたらす緊張感との違いから来るのではないだろうか。ユークリッドの原論は既に紀元前３世紀頃に完成していたことに比べ、小数は１６世紀になって極めて人工的に考案され、さらにその無限小数の概念に到達したのは１７世紀のニュートンやライプニッツ等による微分積分学の草創のころである。しかしながら、今から2,450年前、当時のギリシャの学者ゼノンはこの無限概念に挑戦した。彼はこの無限概念を有名なアキレスと亀の競争の寓話を用いて次のように表した。俊足のアキレスと歩みののろい亀を競争させたとする。このとき亀を少しでも前方からスタートさえさせれば、いつまで立ってもアキレスは亀に追いつけないと言うのである。なぜならばアキレスが亀の出発点に達したとき亀はもう少し先に進んでいる。次にアキレスが亀のこの到達点に達したとき、やはり亀はもう少し先に進んでいる。そしてこの状況は無限に繰り返される。仮にアキレスの速さは時速20キロメートルで亀の速さはその十分の一の時速２キロメートルとし、亀はアキレスより前方９キロメートルからスタートしたとする。今、この問題を中学生に出したとしたら多くの生徒は一次方程式を立てそれを解くことによりスタートから30分後、すなわち亀が１キロメートル進んだところでアキレスが追いつくと結論するであろう。しかし、もし仮にゼノンのような生徒がいて次のような解答を出したら私たちはそれを正解とすべきであろうか。

最初にアキレスが９キロメートル走り、亀の出発点に着いたとき亀はそこからさらに0.9キロメートル前方にいる。次にアキレスがこの0.9キロメートル走ったときに亀は比例の関係から0.09キロメートル前方にいる。この比例の関係は無限に続き亀の進んだ距離は

$$0.9 + 0.09 + 0.009 + \cdots$$

である。この答案に対し微積分を学んだ私たちはこの無限級数の極限を取り (3) より答えは同じとするであろう。しかしながら微分積分学は実数の連続性という公理を設定してそれに支えられている。この公理は始めに述べたように数直線上の直感を表したものであり、この公理を認めて極限操作が行われている。他方、ゼノンの発問は現代から見れば公理無しの状況でなされていると解釈すべきである。したがって上の極限操作のほかに今一つこの公理を仮定しない立場が可能である。この場合、アキレスが亀に追いつくか否かはどちらとも断定できないと言わざるを得ない。すなわちゼノンの時代の論理はまだ洗練されておらず、アキレスと亀の競争という現象の問題を解くことが出来ないと言わざるを得ない。これに対し、前者の公理を設定した立場はこの論理が現実の問題を解くように洗練されているのである。著者のこの考えは既に［６］に明確に述べられている。

一般に著者も含め、我々が (3) を受け入れることは苦痛であるが、それは同時に微分積分学という実りをわれわれにもたらしてくれた。最後に小学校算数［１］にも掲載されている有名な次の「おかしな話」をその別解として極限操作により解いてみることにより、多少とも自然な解決を得たと感じるのではないだろうか。

「もの知りコーナー」おかしな話

次の話は、どこがおかしいでしょうか。

１７個のあめを３人兄弟で分けることになりました。３人は年齢が離れているので次のように分けることにしました。長男は全体の $\frac{1}{2}$ 、次男には $\frac{1}{3}$ 、三男には $\frac{1}{9}$

しかし、あめは１７個しかないので、そのようには分けられません。そこに、なぞの老人が現れ、あめを１個追加し１８個にしてから、もう一度分けるようにいいました。そうすると、１８× $\frac{1}{2}$ ＝９、 １８× $\frac{1}{3}$ ＝６、１８× $\frac{1}{9}$ ＝２　というように３人にうまく分けられ、しかも　９＋６＋２＝１７　になるので、追加したあめはちゃんとなぞの老人に返すことが出来ました。

［別解］

最初に、１７個のものから長男がその $\frac{1}{2}$ を取り、量として $\frac{17}{2}$ を得て、次男が１７個のものからその $\frac{1}{3}$ を取り $\frac{17}{3}$ を得て、三男は１７個のものから $\frac{1}{9}$ を取り $\frac{17}{9}$ を得る。これを第一回目の分け方とする。すると残りは $\frac{17}{18}$ である。次に第二回目の分け方としてこの残り $\frac{17}{18}$ を長男はその $\frac{1}{2}$ を取り $\frac{17}{36}$ を得て、次男は $\frac{17}{18}$ のその $\frac{1}{3}$ を取り $\frac{17}{54}$ を得て、三男は $\frac{17}{18}$ のその $\frac{1}{9}$ を取り $\frac{17}{162}$ を得る。

この第二回目の残りは $\frac{17}{324}$ である。この分け方を無限に繰り返すとその果てに残りは零になる。そして三人各自の取り分は各段階で常に比例 $\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{9}$ が保たれているのでそれぞれの取り分の総和は９個、６個、２個となる。

参考文献

［１］新しい算数　６　上、東京書籍、平成１７年発行

［２］少数と分数、銀林浩、増島高敬、加川博道、日本評論社、２０１１年発刊

［３］新しい数学１、東京書籍、平成１７年発行

［４］新しい数学１、東京書籍、平成８年発行

［５］総合初等幾何学、(基礎数学講座)、共立出版、寺坂英孝、１９５８年発刊

［６］数学と論理をめぐる不思議な冒険、ジョ

セフ、メイザー　著、松浦俊輔　訳、日経
BP 社、２００６年発刊