岩手大学教育学部附属教育工学センター教育工学研究　第12号　1990　pp. 1-16

■ 論文 ■

カリキュラム開発・研究「分数の生いたち」

駒　林　邦　男*　　狩　原　尚　義**

（1990年１月４日受理）

Kunio Komabayashi and Naoyoshi Karihara

Curriculum Development : "Birth of Fraction"

「１mの⅓も、２m⅓も、りょうほうとも⅓mだ」などと考えている小学生中・高学年の子どもたちが多い。一説によれば、４～５年生の90%がこのように考えている。こうした事態をひき起こしている重要な要因は子どもたちの「分数」の「生活的概念」（ヴィゴツキー）を強化している、教科書における「分数」概念の導入のまずさである。多くの教科書が等分割操作を通して「分数」概念を導入し、意味づけている。われわれは、半端の処理を基本とする、互除法による「分数」概念の導入という観点で作った「授業書」を、岩手県安代町田山小学校（教職員数12、学級数７、児童数177）の４～６年生に教えた。本稿ではこの授業の概要を述べ、授業結果を分析した。

［キーワード］分数、量分数、分割分数、「分数」概念の起源、互除法、半端、「分数」概念の起源の対象-物質的条件、対象的行為、遠山啓、新居信正、ダヴィドフ

I.　子どもの分数理解と教科書の問題点

遠山啓氏は書いている。

「……ドイツ語には "in die Brüche gehen" というコトバがある。これは直訳すると『分数に入る』となるが、本当の意味は「わけがわからなくなる」ということである。それくらいむつかしいとされてきたのが分数なのである。」（『数学入門（上）』、岩波新書、1959, p. 31.）。

「分数に入って」頭がこんがらがってしまうのは日本人も同じである。すでに1973年、新居信正氏は書いていた。

＊岩手大学教育学部教育学科
**岩手県二戸郡安代町田山小学校

「就学率ほぼ百パーセントをほこる日本の子どもたち（５年生）に２ｍのテープを２等分して、そのひとつ分を示し、『これは何ｍか。分数で答えよ』と質問すると、かならず『½ｍ』とこたえる。

つぎに、こんどは１ｍのテープを２等分して、その切れはしひとつを示し、『では、これは何ｍか？』とたずねると、これまた、『½ｍ』と答る。『２ｍの半分は½ｍというのなら、この½ｍは＝100cm のことだ。１ｍの半分も½ｍで、この½ｍは50cmのことだ。同じ½ｍが100ｍになったり50cmになったりして、オカイシではないか』と攻めても、子どもたちは『はじめにもってきたモトの長さが２ｍだったり、１ｍだったりしているだから、½ｍが100cmになったり、50cmになったりしてもかまわない。そんな問題を出す先生のほうがオカシイ』というぐあいに、平気でいなおるのである。」（「おのれの生きザマを授業に賭けるとき」、『ひと』誌、№11, 1973)。

このような事態は、1970年代80年代を通して、日本国中、津々浦々、どこの教室でも起こっていたし*、また90年代に入った現在でも起こっている。

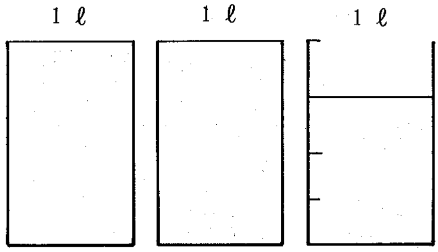
＊例えば、駒林邦男『“落ちこぼし”をどうするか』、明治図書、1977、第一章、同「カリキュラム開発・研究 分数のかけ算」、『地域と大学研究紀要』、No. 4、1982. 参照。

どうして、こうした事態が起きているのか。新居氏は、「このことは『量分数』と『割合分数』がゴッチャクタになっていて、けっきょくは、『分数』について何もわかっていないということだ。」と解釈していた。多くの教科書が割合分数で分数を導入していた当時としては、この指摘が的を射ていた。しかし、割合分数で分数を導入せず、１ｍや１ℓなどの単位量を等分割することで分数を導入する教科書が多くなっている最近では、これと違った解釈が必要である。例えば、『新編 新しい算数 3（上）』（東京書籍）も『新訂 新しい算数 3（上）』も、「1ｍのテープを同じ長さに３つに分けました。分けた１つぶんの長さは何ｍといえばよいでしょうか。」という問いかけで分数を導入している。量分数（½ｍや½ℓという、量を表す分数）の立場に近づいているかのように見える。だが、これは分割分数（ある量をＸ等分した１つ分）での導入である。ところで、いずれの『教師用指導書』の【備考】にも、こう書かれている。「児童の中には、⅓という分数を３等分という分割操作と解してしまうものもいる。これでは数としての分数意識が育ちにくい。それ故、⅓ｍの実長を観察させたり見当をつけたりする作業をとおして量としての分数を理解させ、やがて数としての分数へと展開させる基礎をきずくようにすることが大切である。*」

しかしながら、「⅓ｍの実長を観察させたり見当をつけたりする作業」をやらせれば、分割分数で分数を導入しても分数を「分割操作」と「解」さず、「量として分数を理解させ、やがて数としての分数へと発展させる基礎をきずく」ことができるか。

＊なお、『新訂 新しい算数４（下）』（東京書籍）の単元「11. 分数」は、「やかんに入っている水のかさを、１ℓますではかりました。水のかさは何ℓでしょうか。１ℓにたりないはしたのかさを分数で表しましょう。〈図１〉」（傍点、引用者）という問題から始まっている。

「はした」の量を表す数として分数を理解させせようとしているかに見える。しかし、そうではない。『教師用指導書』の当該ページには、こう朱書されている。「図を見て、やかんの水のかさは2ℓとあと1ℓを4等分した3つ分であることう確かめる。」(下線引用者)。しかも、〈図1〉には、ご覧の通り「はした」の量が既測量で示されている。「4等分した3つ分」で、$\frac{3}{4}$ℓであることは一目瞭然なのである。



〈図1〉

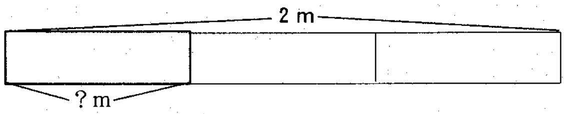
上の問いには否定的に答えなくてはならない。岩手大学教育学部付属小学校4～6年の児童を対象とした調査の結果はこのことの根拠となる（調査対象児童：4年にじ組38人、5年まつ組38人、6年かえで組40人。実施者：村上勉付属小教諭。実施日：それぞれ1989年12月13日2校時、12月14日5校時、12月13日3校時)。

分数の問題

テストではありません。調査です。一度、書いた答えを直す時には消ゴムを使わずエンピツで直してください。終わったら、感想も書いて下さい。

1. 下の図は長さ2mのテープです。これを3等分した1つ分の**長さ**はどれだけか。次のうち、きみが正しいと思うのはどれですか。○をつけてください。**わけ**も書いて下さい。

（ア）$\frac{1}{3}$　（イ）$\frac{2}{3}$m　（ウ）$\frac{1}{3}$m



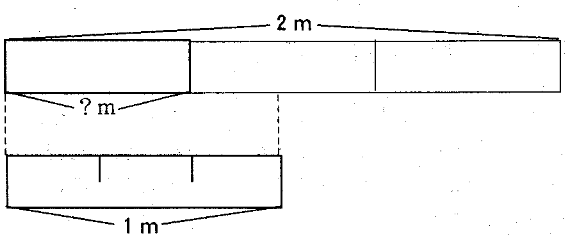
（わけ）--

2. 次の問題をしなさい。
   - ア．半ぱが2つ分でちょうど1ℓになる量は何ℓですか。（　　ℓ）
   - イ．1ℓと、半ぱが4つ分でちょうど1ℓになる量をあわせると、何ℓになりますか。（　　ℓ）
   - ウ．1,000ℓと、半ぱが5つ分でちょうど1ℓになる量をあわせると何ℓになりますか。（　　ℓ）
   - エ．村上先生が飲んだ水の量は1ℓでした。高橋先生は、村上先生よりも半ぱが7つ分でちょうど1ℓになる**量だけおおく**飲みました。高橋先生が飲んだビールの量は何ℓですか。（　　ℓ）

3. 一番の問題をもう1回やろう。

2mのテープを3等分した1つ分の長さは何mですか。図をよく見て答えなさい。

答え（　　m）



問題-1と問題-3の結果は〈表1〉の通りである。

〈表1〉付属小学校．問題-1⇨問題-3の、学年・選択肢別人数（%）

	⅓	⅔m	⅓m	そ の 他
6年	0⇨—	11（28%）⇨15（38%）	29（73%）⇨19（48%）	—⇨6（15%）
5年	1（3%）⇨—	0⇨ 3（ 8%）	37（97%）⇨32（84%）	—⇨3（ 8%）
4年	0⇨—	2（ 5%）⇨ 4（11%）	36（95%）⇨27（71%）	—⇨7（18%）

問題-1で「（ウ）⅓m」を選んだ子どもが圧倒的に多い。その「わけ」の典型例を挙げる。

4年生：「2mを3つにわけて、そのうちひとつをきいているから。」「いくら2mでも、3等分したら、⅓になるし、mをつけたほうが長さがわかる。」

5年生：「3等分の一つ分なので⅓、単位もあるので（ウ）。」

6年生：「2mのものを、3等分（3つにわける）ことで、それの1つ分を出すことだから」「2mを1としてそれぞれを3つにわけた1つ分ということで、⅓で、たんいもつけるから。」

5年生の場合、問題-1の正答者は一人もいない。しかし、同じ誤りでも次の多田君、山田君の例のように「論理的」に「わけ」を書く子どもが出てきている。誤答とはいえ、見事である。

「（ア）［⅓］も本当はあっているのだけれど、単位をつけたほうがいいと思ったので［（ウ）の⅓mに］〇をつけました。<u>（イ）［⅔m］は1つ分の長さなのに2つ分の大きさを表しているから［〇をつけませんでした］</u>」（多田）（［ ］下線は引用者による補足）。

「2mを3つにわけると、3つにわかれてその1つ分が⅓m。その2つ分が⅔で、<u>いまは1つ分の問題だから</u>［（イ）です］。（ア）の［ように］mをつけないと何だかわからなくなるからです。」（山内）。

問題-1で正答の「（イ）⅔m」を選んだ4年の2人のうちの一人の「わけ」は、「アには、mの単位がかいていない。」だけである。もう人一人は「わけ」を何も書いていない。5人年生の正答はゼロである。6年生では正答が多くなっている（11人で、28%）。だが、このことは、問題で問われている分数が量分数であることをこれらの子どもが理解していることを必ずしも示すものではない。問題-1で正答の（イ）を選んだ「わけ」の11例中には、次のようなものが6例ある。「2mだから3等分すると2÷3になり、答えが⅔になる」（川村）。「2÷3をすると⅔mになるから」。つまり、「公式どうり」*の計算によって計算によって正答している（商としての分数）。

* 川村君は、問題-3を初め「⅓」と書き、これをエンピツで消して「⅔」と直している。次の「感想」を書いている。「これをやってみて、［問題］1のわけでは公式どうりだったけど、<u>［問題］3でやってみると、わけがよくわかりました。</u>。かんたんな問題でも、わけをつけてやってみたら、1回まちがえたので直しました」。

補助図を付けた問題-3はどうか。補助図の効果（問題-1と問題-3の正答率の変化）は、4年→5年→6年と大きくなっている（6％→8％→10％)。しかし、いずれの学年でも正答率の増加は微増である。補助図を「よく見」るだけでは既成の「分数」概念からの脱出には不足なのである。

調査結果が示唆しているように、分割分数での導入の場合、どうしても「3等分」とか「2等分」といった分割操作だけが前面に出てくる。子どもの意識はこの操作に集中する。分割分数というのは元々、1mであろうと2mであろうと、もとのおおきさは何でもいいのであるから、いくら「実長を観察させたり見当をつけたりする作業」をやらせても、また、1mを3等分した1つ分が⅓mであることを強調したとしても、子どもの頭の中では、もとのあるものがたまたま「1m」になっただけのこととしか解されないのである。だから、2mを3等分した1つが⅓mになるのは、子どもにとっては当たり前のことなのである。

「2mの⅓も、1mの⅓も、りょうほうとも⅓mだ。」などという誤りを生じさせないないためには、どういう仕方で分数を導入したらよいか。

Ⅱ．授業「分数の生たち」の概要

1. 先行研究——半端の処理を基本とする、互除法による分数の導入

数学教育協議会は、1960年代に、分数の発生的起源*をモデルとして分数を導入することを提案していた**。半端の処理を基本とする、互除法による分数の導入という提案である。⅓mを例にとれば、「1mを3等分した1つ分を⅓mといいます」という分割分数での導入の仕方ではなく、「3つ分でちょうど1mになる半端の長さを⅓といいます」という仕方で導入するのである。

* 「分数や小数は連続量から抽象されたものである。」「連続量を測ると半端があるのが普通であるから、そのとき答えは分数か小数かになる。」（『数学入門（上）』、岩波新書、1959、p. 31.）。

「人間が分離量だけを知って、それですんだ時代には分数や小数は要らなかったはずです。ところが人間の生活がだんだん集団的になり社会が複雑になってくると、どうしても分数、小数が必要になってきます。たとえば20人の人間が集まっていのししを3頭とったとします。配分するためには、3頭を20でわるような計算がどうしても必要になってきます。そうなると1のはんぱが出てきます。こうして連続量の計算には、はんぱを表す数が必要になります。このようにして出てきたのが分数、小数です。

古代の文明国ではどちらが先に出てきたかというと、エジプトなどでは分数が先にでてきています。……しかしバビロニヤは小数が先に出てきています。」（遠山啓『数学の学び方・教え方』、岩波新書、1972、p. 95. なお、森毅『数の現象学』、朝日選書、1989、「分数は古代文化の集大成』の章、参照。

** この提案は、ヴェ・ヴェ・ダヴィドフの次の、「内容的一般化」に基づく教科構成の諸原理と

重要な点で共通性をもっている。

「1．ある教科あるいはその基本部分を組みたてている諸概念は、そのおかげでこれら諸概念が必然的なものとなっているところのそれら概念の起源の、対象－物質的条件の検討を手段として、子どもたちによって習得されなくてはならない（換言すれば、〈レディ・メイド〉の形では概念をあたえない）。

2．一般的、抽象的な性格の知識の習得が、より特殊的な知識を知らせることに先行する。後者の知識は、自分の統一的根拠としての前者の知識から導き出されなくてはならない。この原則は概念の起源の解明という原則から派生したものであり、抽象なものから具体的なものへの上向の要求に対応する。

3．あれこれの概念の対象－物質的な源泉の学習のとき、生徒は何よりも先ず、当該概念の全客体の内容と構造を規定するところの発生的に原初的な普遍的な関連を見つけださなくてはならない。

4．この普遍的関連は独特の対象的、図示的モデル、あるいは記号的モデルの中に再現されなくてはならない。

5．次のような対象的行為――それを介して、子どもたちが教材の中に客体の本質的関連をあばき出し、これをモデルの中に再現でき、つづいてその諸属性を研究できるようになるところの対象行為行為――が、子どもに形成されなくてはならない。

6．子どもたちは、徐々に、適時に、対象的行為から知的プランにおける行為の遂行へと移行しなくてはならない。」(*Davydov V. V., Bidy obobshichenija (Logiko-psixholgisheskie problemy postoroenija uchebnyxh pretmetov). Izd. 《Pedagogika》, 1972, ctr.397-398.* 駒林他訳『教科構成の原理』、明治図書、p. 390～391、1975. 傍点、原文)

現在、この仕方による分数の導入のプログラム、実践例が蓄積されている*。これらの実践はすべて、民間教育研究諸団体によるものである（そのほとんどは、数学教育協議会。なお、仮説実験授業研究会員でもある新居氏作成の授業書「量分数の大きさとその意味」は画期的な業績である)。

* 代表的なものを挙げる。
- 遠山啓監修『わかる　さんすう　4』、麦書房、1967、1978（改訂版).
- 遠山啓責任編集『現代化算数指導法辞典』、明治図書、1968.
- 遠山啓著『算数の探検　3　小数と分数』、k. k. ほるぷ、1973.
- 新居信正「目ざめのよさと、夜明けのすがすがしさを」、『ひと』誌、No. 12, 1973.
- 熊本・八代サークル「互除法による分数の導入」、『数学教室』誌、No. 339, 1980.
- 銀林浩、新居信正『算数と理科の本　25　分数ものがたり』、岩波書店、1981.
- 銀林浩監修『わかる算数指導法辞典』、明治図書、1983.

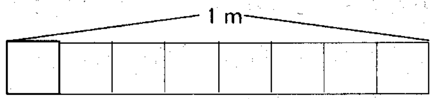
2. 対象児童

岩手県二戸郡安代町田山小学校：4年生（28人)、5年生（26人)、6年生（28人)。

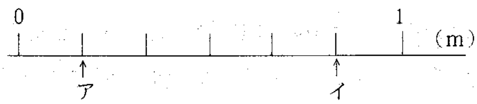
4年での授業に先立って行った事前調査（3年の「分数」単元の復習）の問題と、その結果は次の通りである。

事前調査問題　（　）内は、4年生28人中の正答者数・%

1. □ の長さは何mですか。(21人、75%)



2. 分母が9で、分子が8の分数を書きましょう。(23人、82%)
3. [　] にあてはまる数を書きましょう。
   (1) $\frac{5}{6}\ell$ は $\frac{1}{6}\ell$ の [　] つぶんです。(27人、96%)
   (2) $\frac{1}{4}\ell$ が [　] で1 ℓ になります。(21人、75%)
4. 下の数直線でア、イのめもりは何mをあらわしていますか。
   (ア. 22人、79%)(イ. 22人、79%)



これらの学年の子どもたちの知能、「学力」は、次表の通りである。

〈表2〉学年別、知能・算数「学力」(教研式。検査実施は1988年度)

	知能段階					M	SD	学力段階					M	SD
	1	2	3	4	5			1	2	3	4	5		
4年	4%	29%	32%	36%	0%	49.3	8.6	7%	21%	18%	50%	4%	52.7	10.3
5年	23%	39%	23%	13%	3%	43.0	10.7	6%	32%	29%	26%	6%	49.4	11.6
6年	15%	37%	33%	11%	4%	44.1	9.5	22%	30%	41%	4%	4%	42.6	9.6

〈表2〉から見ると、4年の知能偏差値・算数学力偏差値、5年の算数学力偏差値は普通である。その他はやや低い。

4年の授業は1989年11月11日の3校時、駒林が行った（授業時間は52分間)。次に掲げる「授業書」の「7」の問題をやり終わったところで授業を打ち切った。11月13日、学級担任の土樋和男教諭が「8」の問題のテストをおこなった。

5年の授業は11月16日の4校時、6年の授業は11月22日の4校時の、狩原が行った（狩原は「授業書」作成に協力し、教具を作成した。また、4年での駒林の授業を観察した)。授業時間はそれぞれ40分間、45分間。この時間内で「授業書」をすべてやりきった。

3. 授業の方針、授業書・「分数の生いたち」

1) 授業の方針

数学教育協議会会員の先行諸研究を参考として、次の授業の方針を立てた。

（1）次の4項目を充たすように作成された授業書・「分数の生いたち」に拠って授業

を進める。

（2）分数の「生いたち」（＝ダウィドフのいう「起源」）を教える。このため、「半端」を表す数として分数を導入する。この導入後は、分割分数による意味づけを併用する。これは、分子が1でない分数のときには互除法が複雑なものとなり、1時間の授業では時間不足になると考えたからである。

（3）分数の「起源の対象-物質的条件」を、厚紙で作った未測量のテープ図・［1 d］（1ドボチョン）と名づけた人為的モノサシ（単位）の教具で表し、黒板上で子どもに提示する（なお、子どもたちが使用する「授業書」の中のテープ図には、目盛が付けてある）。

（4）黒板に提示した分数の「起源の対象-物資的条件」を使って、授業者が互除法の「対象的行為」を演示する。1～2名の子どもに黒板の所でこの行為を模倣させる。その後、子どもたちは「授業書」の中の対応する問題を、［1 d］のモノサシと目盛の付いているテープ図とを見較べながら検討し、解決する。これらのことによって、分数発生の「必然性」を子どもが納得できるようにする。

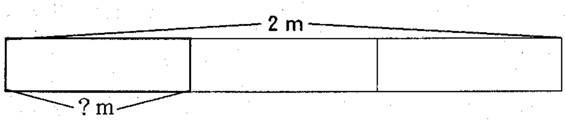
（5）子どもたちが問題感をもって学習を進めるようにする。このために、子どもがまちがいやすい典型的問題を「授業」の冒頭に置く。

2） 授業書・「分数の生いたち」

上記の先行研究、特に、遠山啓著『算数の探検　3　小数と分数』、銀林浩、新居信正『算数理科の本　25　分数ものがたり』を拠り所として作成。

1. 日本全国5年生1,800人につぎの問題をだしました。できた人は、たった180人でした。岩手県二戸郡の田山小学校のきみたちはできるかな？

下の図は長さ2mのテープです。これを3等分した長さはいくらか。

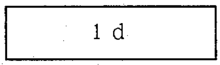


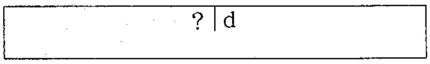
次のうち、きみが正しいと思うものはどれですか。○をつけてください。**わけ**も書いてください。

（ア）$\frac{1}{3}$　（イ）$\frac{2}{3}$m　（ウ）$\frac{1}{3}$m

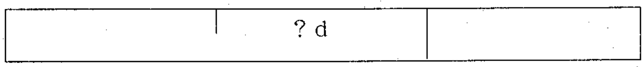
（わけ）

2. 昔むかし、ガバチョ国という国がありました。この国には1 d（1ドボチョン）という単位のモノサシしかありませんでした。このモノサシを使って、下の図テープが何d（ドボチョン）あるか、はかってください。



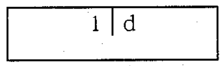
（ア） 

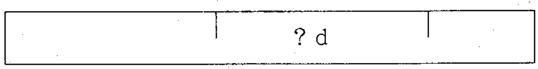
（　d）

（イ） 

（　d）

3.　1 d（1ドボチョン）のモノサシで下の図のテープをはかったら2つ分とれて半ぱがでました。この半ぱもいれてd（ドボチョン）という単位で表したいのです。どうしたらよいでしょうか。きみの考えを書いてください。





（　d）

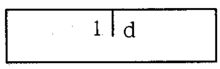
（きみの考え）

ガバチョ国の王様・ハラカリ大王は、

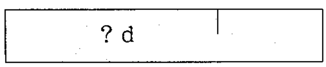
- **半ぱがちょうど2つ分で1 d（ドボチョン）になる量**
- **1 d（ドボチョン）を2つにわけた1つ分の量**

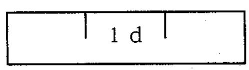
を「2分の1ドボチョン」と呼び「½ d」と書くことにきめた。半ぱの量を分数で表すことにしたのだ。やがて、分数は世界の国ぐにひろがっていった。

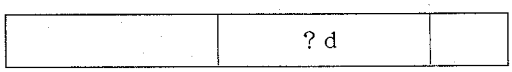
4.　1 d（ドボチョン）のモノサシで次の図のテープの長さをはかりなさい。何d（ドボチョン）ですか。



（　d）

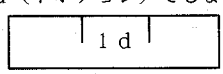
（ア） 

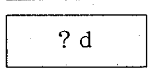


（イ） 

（　d）

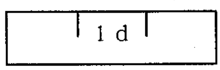
5.　1 d（ドボチョン）のモノサシで、次の図のテープをはかりなさい。何分の何d（ドボチョン）でしょうか。半ぱがちょうど2つ分にも、3つ分にもなりません。どうしたらよいでしょうか。（ヒント：「1 dを2つにわけた1つ分の量は½ d（ドボチョン）」でしたね。では、3つにわけた1つ分は何分の何d（ドボチョン）でしょうか。）

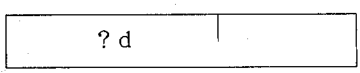




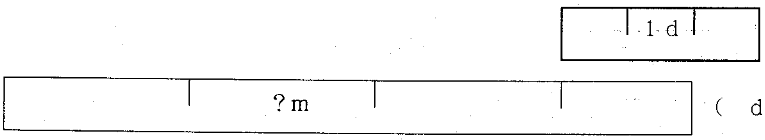
（　d）

6.　1 d（ドボチョン）のモノサシで、次の図のテープをはかりなさい。何d（ドボチョン）ですか。



（ア） 

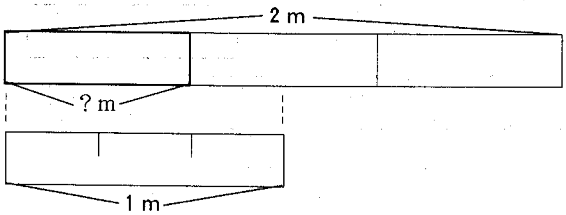
（　d）

（イ）（　d）

7.　最初の問題をもう１回やろう。この問題の長さの単位はｄ（ドボチョン）ではありません。いつも使っているｍ（メートル）です。

２ｍのテープを３等分した１つ分の長さは何ｍですか。図をよく見て答えなさい。

答え（　　ｍ）



8.　次の問題をしなさい。

(1)　半ぱが２つ分でちょうど１ℓになる量は何ℓですか。（　　ℓ）

(2)　１ℓと、半ぱが４つ分でちょど１ℓになる量をあわせると、何ℓになりますか。
（　　ℓ）

(3)　1,000ℓと、半ぱが５つ分でちょうど１ℓになる量をあわせると何ℓになりますか。
（　　ℓ）

(4)　狩原校長先生が飲んだビールの量は１ℓでした。土樋先生は、校長先生よりも半ぱが７つ分でちょうど１ℓになる量だけおおく飲みました。土樋先生が飲んだビールの量は何ℓですか。（　　ℓ）

Ⅲ.　授業の結果、その分析

「授業書」の問題-１の解答結果は〈表３〉の通りである。

〈表３〉問題-1　田山小、学年・選択肢別人数（％）

	(ア)	(イ)	(ウ)
４年（28人）	１（４％）	３（11％）	24（86％）
５年（26人）	１（４％）	１（４％）	24（92％）
６年（28人）	３（11％）	３（11％）	22（79％）

いずれの学年でも、正解の（イ）を選択したものはわずかである。４年と６年の差がなく、５年が落ちこんでいる。正解率は、６年の場合を除いて、付属小と大きい差は見られない（付属小の場合、４年→５年→６年の正答率は５％→０→28％であった)。誤答の傾向も付属小の場合と同様で、（ウ）を選んだものが断然、多い。（ウ）を選択する「わけ」も付属小の場合と同様である（例えば、「？ｍは、２ｍを３とう分した中の一つ分だから。」「２ｍを三つにわけてその一つ分だから⅓ｍだと思う。（ア）も⅓だけどｍのたんい

がついていないので（ウ）にしました。」)。ただし、上記の多田君の「わけ」のように「論理的」に記述された「わけ」はない。

「授業書」の問題-7（付属の場合は問題-3）の解答結果は〈4〉の通りである。

〈表4〉問題-7　田山小・付属小、学年別正解者数（%）

田山小		付属小	
4年（26人）	16（57%）	4年（38人）	4（11%）
5年（26人）	14（54%）	5年（38人）	3（8%）
6年（28人）	27（96%）	6年（40人）	15（38%）

各学年とも、田山小の正解率の方が付属小よりも著しく高い。これは当然である（田山小では授業「分数の生いたち」の授業が行われているのに、付属小では授業は全く行われていないのである)。

付属小との正答率のこの差は明らかに授業効果の現われである。田山小の場合、問題-7の正解率は問題-1のそれと較べ、4年生では46%、5年生では50%、6年生では80%、それぞれ向上している。

以下、田山小、4年での授業結果をいくらか詳しく検討する。

〈表5〉は、与えられたテープ図を［1d］のモノサシと見較べて測る、「授業書」の中の問題（問題-2～問題-6）の正解者数を示したものである（問題-5は、子どもたちはやらなかった)。

〈表5〉田山小4年生（28人)、問題-2～問題-6の正解者数（%）

問題-2		問題-3	問題-4		問題-5	問題-6	
(ア) 28（100%）	(イ) 28（100%）	19（68%）	(ア) 21（75%）	(イ) 18（64%）	—	(ア) 27（96%）	(イ) 24（86%）

問題-3で初めて「ドボチョン」の分数が出てきた。そのためか、正解者は19人にとどまる。内訳は［2.5d］が13人、［2dと½d］が3人、［2d½d］が2人、［2½d］が1人である。正解者の68%が小数で答えている。互除法はまだ習っていないし、帯分数もまだ教えられていないのであるから、これは当然である。

帯分数の書き方、読み方を教えたあと、分数の「発明者・ハラカリ大王」の話をし、分数を「授業書」に従って次のように説明する。

「1ドボチョンのモノサシで測って半端がでたとき、ガバチョ国のハラカリ大王は分数を考え出しました。エジプトの王様も分数を考え出しました。半端を小数で表したのはバビロニヤ人でした。今やった問題で、小数で答えた人はバビロニヤ人の子孫かも知りません。

・半端がちょうど2つ分で1d（ドボチョン）になる量

・1ドボチンを2つわけた1つ分の量

を、[½d] と書き、[二分の一ドボチョン] と読みます。」

問題-4の（ア）の正解者は21人（75%）で、（イ）の正解者は18人（64%）である。（イ）の誤答者10人の内訳は無解答者6人、⅓dが3人、21dが1人である。

問題-5は難しい。今度は単位分数ではない。この問題では、テープ図の方には余りの半端がでない。今までとは逆に、1dのモノサシに出た半端がテープ図の中に幾つ分あるかを調べなくてはならない。1時間という枠の中でこの行為を教えれば、かえって子どもの頭を混乱させかねない。それで、「1d（ドボチョン）を3つにわけた2つ分の量を⅔dという」という分割分数の考え方を、ここで使うことにした。次に、この部分の授業のプロトコールを掲げる。

子どもに問題-5を読ませる。授業者は1dの厚紙（モノサシ）と⅔d（?m）の厚紙を黒板に貼る。「この長さ（⅔の厚紙）を測るんですよ。この長さをね。いいかい。これ、1dより長いか、短いか。」―（一斉に）「短い。」―「目がいいね。これが1dのモノサシだものね。1dに足りないね。一つじゃモノサシの方に半端が出ちゃうし、二つ分だとはみ出ちゃうし。この（?mの厚紙の）長さ、ピッタリ合わないよ。何分の何ドボチョンだろうか。」―「……」―「君たち、こういうのは得意なんじゃなかったけ。畠山君、これ（1dの厚紙）、全部で何ドボチョンだったっけ。」―「1ドボチョンです。」―「そうです。（1dの厚紙に⅓のメモリを2つ入れ、⅓の所を指しながら）ここまでは何ドボチョンですか。」―「⅓ドボチョン。」―「じゃあ、（1dの厚紙の⅓までのところを指しながら）ここまでは。」―「⅔」―「よーし。じゃ、これ（?mの厚紙）は何分の何ドボチョンかな。」―「……」―「これだけだったら何ドボチョンかな」（といって、?m厚紙の半分、つまり⅓d分の長さ指す。）―「⅓dです。」―「これ全部では。」―「⅔です。」―「よーし。できた。これ（?mの厚紙）には、⅓dがいくつありますか。」―「二つです。」―「黒板をよく見てくださいね。これ（?mの厚紙）は、1dを三つにわけた二つ分ですね。では2ページの一番上に太い字で書いてあるところ（ハラカリ大王の話）をもう1回、読んでみてください。」―子どもが読む―「もう一回言うよ。分数ってどういうものかっていうと、半端が1dの中に幾つ入るか、三つパッチリ入ったらその半端の長さは⅓dでしたね。パッチリ入らないとき、そういう場合は1dをいくつに分けたいくつ分かをみればいいのでしたね。」

問題-6の正解率は高い。けれども、本命の問題-7では4年生の正解率は57%であった。問題-6（ア）の正解率より39%、（イ）より29%低い（〈表〉4）。問題-5での分割分数の導入が、「あるものを3つに分けた1つ分が三分の一」とか「三分の一とは、あるものを3等分すること」というような子どもたちの「分数」の生活的概念*を甦らせてしまったのかも知れない。

* 「生活的概念」とは、「子ども自身の生活経験の中から発生する概念」である。つまり、特別の教育（主に、学校での教授・学習）から離れて、他人との日常的コミュニケーションの中で、個人的経験の集積の過程で獲得されてきた自発的概念である（ヴィゴツキー、柴田訳『思考と言語』、下、明治図書、p. 14.）。

考　察

4年～6年での「分数の生いたち」の授業によって、「1mの⅓も2mの⅓も、りょうほうとも⅓mだ。」などと考える子どもは、どの学年でも激減していた。しかし、4、5年では授業後でも40%を超える子どもたちが「分数」の生活的概念から抜け出せないでいる（〈表4〉)。授業のどこに欠陥があるのか。ここで検討する欠陥は次の二つである（第二の欠陥は特に重大である)。

①「半端の処理を基本とする、互除法による分数の導入」の場合のキーコンセプトとして、「授業書」の中で用いられた言語的定式化【「半ぱがちょうど2つ分で1ドボチョンになる量」】が不正確であったこと。

②授業時間の制約のため、子どもたちに互除法の「対象的行為」を十分にやらせて「仕上げ」ず、また、この行為を「知的・観念的行為」（ガルペリン）のレヴェルで形成しなかったこと。

1. 不正確な言語的定式化【「半ぱがちょうど2つ分で1ドボチョンになる量」】

この定式化は日本語として不正確である。「½dとは、半ぱがちょうど2つ分で1ドボチョンになる、その半ぱの量」、もしくは「½dとは、ちょうど2つ分で1ドボチョンになる半ぱの量」が正確である。

この言語的定式化がわかりにくかったためであろう、「調査」のとき、付属小の多くの子どもが「調査」者の村上教諭に質問したそうである（村上教諭は質問に答えなかった)。また「調査」の「感想」の中で5年生38人中10人が、6年生40人中6人が、自分から「半ぱ」のわかりにくさに言及している。6年生の「感想」から例を引こう。

> 「半ぱが5つでなどと、半ぱいう意味がよくわからなく、あまりわかりませんでした。こういう問題は初めてだったのでどういうふうになるのかが知りたいと思いました。」「……半ぱという言葉でやると、はじめは、ピンとこなかったけれど、ちょっとするとわかってよかったです。あと、半ぱという言葉は、よくつかうけど、こういう使い方は、あんまり知らなかったから、おもしろいと思います。」「1番と3番はかんたんだったけれど、2番［半ぱ」の問題］が意味がわからなかった。半ぱとはなんだろうと思った。」「2ばんの問題の意味がよくわからなかったからむずかしかった。」

田山小の4年生の授業感想文には「半ぱ」のわかりにくさについて言及しているものは一つもなかったけれども、事態は付属小の子どもたちの場合と同様であったろう（田山小、5～6年生の場合も同様であったろう)。ちなみに、田山小「授業書」の8番の問題・付属小「調査」の2番の問題（「半端」の問題）の正解者数は〈表6〉の通りである。

〈表６〉「半端」の問題 田山小、付属小、学年別正解者数（％）

	田山４年（27人） 付属４年（38人）	田山５年（26人） 付属５年（38人）	田山６年（28人） 付属６年（40人）
（１）	17（63％） 26（68％）	16（62％） 24（63％）	26（93％） 30（75％）
（２）	8（30％） 4（11％）	11（42％） 20（53％）	19（68％） 18（45％）
（３）	7（26％） 5（13％）	7（27％） 21（55％）	13（46％） 21（53％）
（４）	7（26％） 6（16％）	13（50％） 18（47％）	18（64％） 18（45％）

田山小の場合には、「半端」を扱った授業の後（４年では授業後２日目、５、６年では授業直後）にだされた問題であったのに、（１）を除いた各小問、６年生を除いた各学年とも正解率は低い。

授業を受けなかった付属小の場合（１）を除いた各問、すべての学年で低率であるのは当然である。これらのことは、「半ぱがちょうど２つ分で１ドボチョンになる量」という定式化のまずさを裏がわから照らし出すものである。

2. 不十分な対象的行為

たとえ上記のように「分数」の言語的定式化が不正確であったとしても、子どもたちが実際に自分自身の「対象的行為」（ダヴィドフ）によって、あたえられた量が何ドボチョンであるかを測ったのであったとすれば「分数」の生活的概念から抜け出すことができたにちがいない。もしそうであったとすれば、「授業書」の問題-７には補助図が付けられていたのであるから、仮に「知的・観念的行為」にまではこの「対象的行為」が仕上げられていなかったとしても、子どもたちは補助図を感性的拠所とした「知覚的行為」（ガルペリン、タルイジナ）だけで正解にたどりつけたはずである。

しかし実際の授業はそうでなかった。「授業の方針」は【（４）黒板に提示した分数の「起源の対象-物質的条件」を使って、授業者が互除法の「対象的行為」を演示する。１～２名の子どもに黒板の所でこの行為を模倣させる。その後、子どもたちは「授業書」の中の対応する問題を、「１ｄ」のモノサシと目盛の付いているテープ図とを見較べながら検討し、解決する。】というものであった。実際、授業もこの「方針」通りに行われていた。大多数の子どもたちは、言語的説明を伴った授業者の「対象的行為」を座席で見ていただけであった。このことだけで、子どもたちに「分数発生の『必然性』」を「納得」させることは無理だったのである。

このような知識の表象様式は、ブルーナーの言う“ikonic representation”である。“enactive representation”が欠如している（*Bruner J. S., “Paterns of Growth”.*, 田浦他訳『教授理論の建設』、黎名書房、1966, 第1章参照)。オレンチエフ、ガルペリン、タルイジナなどの「知的行為の多段形成」論のターミノロジーで言えば、「新しい知識の習得の基礎」にある、「物質的行為」あるいは「物質化された行為」(=「対象的行為」) の欠如である*。

子どもたちが授業の中で互除法の「対象的行為」を行わなかったこと、これが、問題一7で4、5年生の正解率が60%に達しなかった主な理由であったのかもしれない。しかし、〈表4〉に示されているように、田山小6年生の正解率は96%と著しく高率である。これは、子どもたちが個別的に対象的行為をおこなったためではない。6年生は学年がより高いということだけでも説明し切れない（〈表2〉学年別、知能・算数「学力」、参照)。なぜか。授業者の狩原は次の「授業メモ」を書いている。

「(6学年での授業は) 5学年での授業よりもていねいに行った。授業の前日、夜、遅くまで6年生の学力対策について、担任と話し合いをした。7名程度の遅進児がいることがわかって授業にのぞんだ。6年生にはこれまで数時間、社会科の授業をしているので、児童全員の名前と顔を知っていた。授業には5年生よりも多くの時間をかけ、特に、遅進児に対して**机間巡視**と**個別指導**をして**理解の状況を確認**しながら進めた。その結果、授業内容がやや定着してと思われる。」(強調は駒林)

この「授業メモ」は、一斉授業において個別指導がいかに重要であるかを示している。が、ここでなされた「個別指導」は何も大袈裟なものではない。「机間巡視」と組み合わさった、日本の教師にとっては伝統的な「個別指導」である。東洋氏の言う「教師の心くばり」**による子どもたちの個人差への応じ方である。このような「個別指導」(=「教師の心くばり」) の欠落が、4～5年での授業の、拙論では検討されなかった第3の欠陥である。この欠陥が、4～5年でのわれわれの授業の主要な欠陥であったのかも知れない。

「知的行為の多段階形成」論によれば、「知識の習得、例えば学校における科学の基本の習得は、同時に、生徒における知的行為の形成過程である。」(Leont'ev A. N., Obuchenie kak problema psikxologii, 《VOPROSY PSIKXOLOGII》, 1957, No. 1.)*。そして、このような知的行為の発生的起源は外的な「物質的行為」あるいは「物質化された行為」である。新しい知識の習得の基礎にはその知識に照応する知的行為が在る。このような知的行為を一挙に形成することはできない。第一段階として、その発生的起源にまで遡って知的行為を心外化し、心外化された対象に対して「物質的行為」あるいは「物質化された行為」を遂行しなくてはならない（Sm. *Gal'perin P. J., Osnovny rezul'taty issledovanii po problemy《formirovanie umstvennykx deistvii i ponijatii》, Izd. MGU., 1965. Talyzina N. F., Upravlenie protsessom ucvoenija znanii, Izd., MGU., 1975.* 駒林邦男『思考の形成と制御――教育サイバネティクス入門』、明治図書、第七章、1975. 同『現代ソビエトの教授・学習諸理論』、明治図書、第VI章、1975. 参照)。

** 東氏は、「個人差に応ずる教育」の「型」として、「完全コース分け方式」・「ルートわけ方式」・「治療教育方式」・「個別学習方式」・「選択科目方式」・「オープン・エデュケーション方式」・「教師の心くばり」の７つをあげ、最後の「教師の心くばり」について次のようにのべている（永野他編『教育学講座 5』、学研、1979. 第Ⅵ章 第一節 1. 個人差の考え方)。

「教師一人に対する生徒が過大でなければ、教師が個人差、適性処遇交互作用などについて十分な理解をもったうえでその観点からの心くばりをすることで、一斉教授的な体制の中でもある程度までは個人差に対応することができる。……個人差についての柔軟で人間的な理解の必要性は、一斉授業の中で教師の心くばりを活かしてゆこうとする場合にさらに重要である。それぞれの生徒のかかえる問題や可能性をよく理解するとともに、それが固定的な偏見にならないようにしなければならない。」

（文責 駒林）（1990.1.3）