

■ 論文 ■

球の体積・表面積公式：中学生対象の数学 教材パソコンソフト開発とその授業の実際

佐伯卓也*

(1990年1月20日受理)

Takuya SAEKI

Volume and Surface Area of Spheres : Personal Computerized
Development and Practical Use of Teaching
Materials for Junior High School Students

中学生のための、球の体積の公式と球の表面積の公式を区分求積法で求める教材、パソコン・ディスプレイのグラフィック表示を利用してアプローチする教材ソフトを、4年次学生のコンピュータ教育をかねて、開発を指導し、実際に中学1年の生徒の協力による学生先生の授業で、実践的研究をした。結果は、この内容での授業は成立し、そのうえ、おおむね成功的な授業であったと言える結果をえた。

【キーワード】 中学校数学、パソコンの教育利用、C.A.I、球の体積、球の表面積、教師教育

0 はじめに

区分求積法を用いてのパソコン教材の開発は何度か試みて実践し、そのつど結果を公表して来た(佐伯、1986, 1987, 1988、佐伯他、1986)。特に、今回は中学1年生対象の球の体積と表面積の求積問題を取り上げた。この教材は指導要領にはない“ふくらまし教材”であり、パソコンを利用することにより、中学1年の生徒にも理解できる教材を開発しようという試みである。本研究はプレサービス教師教育をかねているので、昭和63年度佐伯

*岩手大学教育学部数学科

研所属学生の鈴木秀之・藤田剣両君にパソコン教材開発を、および授業は附属中学校の協力を得て、マイクロクラスのマイクロティーチング形式で実践してもらった。

授業のテスト用具による評価は IWAT（学習者の認知構造の測定のために開発した用具の岩手式言語連想テスト：佐伯、1981）と PCSD-S（中学生・高校生のパソコンに対する態度測定用具の一種：佐伯、1985）を用いて行った。この結果は、ほぼ成功的な授業となった。授業観察、プロトコル、そして、生徒のアンケート等による結果もおおむね好意的な結果であった。

ところで、筆者の進めているパソコン教材を利用した授業は、一応「非 CAI 的授業」（Non-CAI mode Teaching=NCT）として位置付けられて来た（佐伯、1988）。これは授業文節モデルを簡単に①提示、②受容、③反応・応答、④評価、⑤KR、で示すと①だけを主としてパソコン（ソフトを含めて）が行い、④、⑤は原則として“なまみ”の教師が行うスタイルの授業であり、①から⑤まで主としてパソコンが担当する CAI と区別するために導入した概念である。一方、最近になり教育現場ではパソコンの設置が進み、しかもそれらは LAN 化されているのが多くなって来た。このような教室で筆者の言うパソコン利用の授業を進める時、CAI ソフトの一部をそのまま利用するが、なまみの教師も授業文節の評価・KR 段階も含めて適宜に各段階を担当するスタイルの授業が考えられて来た。つまり、CAI の授業時の児童生徒の疲労に配慮し、教師の伝統的な教授行動も入る余地が十分にある一部分には CAI ソフトも生かされるパソコン利用の授業である。筆者はこのスタイルの授業をマイクロティーチングの用語にならって、一応“マイクロ CAI”（micro-CAI）と呼ぶことを提案している。このように考えることにより、パソコン利用の授業は分類すると① CAI、②マイクロ CAI そして③ NCT の 3 種類になるようである。これらの実際のスタイルは① CAI は単独で用いられることが多いが、場合により、②マイクロ CAI に移行したり、②マイクロ CAI と③ NCT を併用する、と言うように必ずしも一つの方法を通して 1 単位時間の授業が行われないうに見える。一応この分類に従うと本研究は③ NCT と言うことになる。

授業の計画や基本的なオーガナイズは筆者が当たり、パソコンソフトの開発は主として協力者の学生、藤田剣・鈴木秀之があたり、授業は藤田剣が担当した。また、授業は附属中学校で、1 年の生徒を対象に行った。

1 中学 1 年生に対する球の体積・表面積の教材

現行の指導要領に基づく教科書での扱いは次のようになっている。ある教科書の記述をそのまま引用すると、球の体積と球の表面積については

球の体積は、その球がちょうど入る円柱の体積の $\frac{2}{3}$ である、ということがわかっている。

球の表面積は、その球がちょうど入る円柱の側面積に等しい、ということがわかっている。

となっている。ここで出てくる「～ということがわかっている。」と書いてあるだけでは、生徒の納得は難しいと思う。そこで同指導書を見ると

すい体の体積、球の体積及び表面積を求める式を中学校段階で数学的に導くことは困難である。そこで、どのようにすれば求積できるかを考えさせ、模型を用いたり、実験したりして、求積の式が生徒に納得のいく形で指導することが大切である。

として、二三の実験例等を載せている程度である。これでは数学教育でよく言われる意味的理解や外的理解の段階には達しないであろう。本研究では、本単元意味的理解を求めて、区分求積法を利用し、パソコンを用いてアプローチを試みた。次にその概略を記す。

対象が中学1年生と言うことで、区分求積法で使う三平方の定理、したがって平方根は用いることができない。ここで、いつでも用いる方法だが、「長さを測る」と言って、実際には測らず、パソコンに平方根を計算させて提示する方法をとった。

さて、球の体積を求める時、上半分について考え、それを2倍して求積することになるが、いつものように、内接円柱の近似と、外接円柱の近似から、「はさみうち方」により、分割を細かくして行って、その極限として球の体積を求めようとするものである。なお、極限に行くと全く問題にならないが、途中の分割の説明では、分割が奇数個の場合と偶数個の場合では最大半径の円柱が1個あるか2個あるかの違いが生ずるし、図も異なることにも注意がいる。図1は奇数個の場合の内接円柱、図2は偶数個の場合の外接円柱を示してい

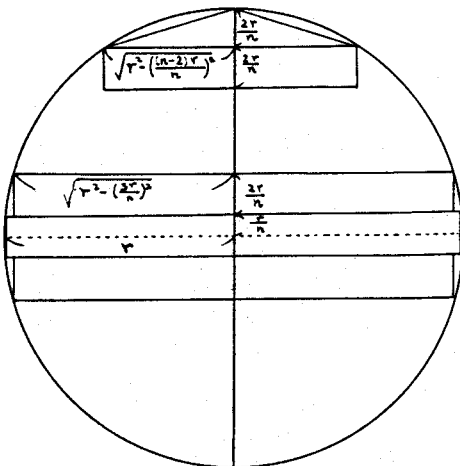


図1 奇数個内接円柱の場合

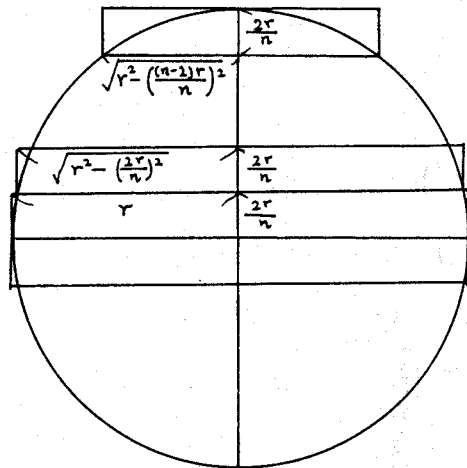


図2 偶数個外接円柱の場合

る。内接の場合の上と下の極は円すい形である。しかしこれは極限移行の時は無視してよい。また、中学生に理解させるポイントは「はさみうち法」で、これを任意の分割数の画面をパソコングラフィックで示し、画面から直感的にもって行くことである。

次に球の表面積について考える。球の表面を経線と緯線によって分割し、その両極以外の1区画を台形で近似し、極の部分は三角形で近似する(図3)。これらの面積の総和は球の表面積を近似しているから、この分割を多くして極限までもっていくと

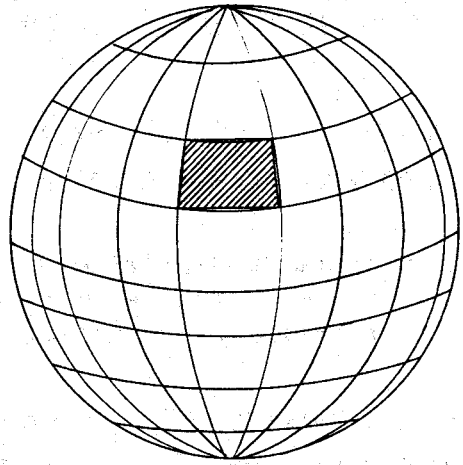


図3 台形近似の説明図

球の表面積に達するわけである。この方法だと、経線方向にはいくら細かくしても面積の和に変わりはないが、緯線方向では細かくすればする程、球の表面積に近づくことが計算で確かめられる(藤田、1989)。また、この場合は「はさみうち法」は用いないでもよい。

次にパソコンソフトの概略を記すと

- (I) メニュー 【100~400】(行番号が100から400までの意味、以下同様)
- (II) 球の体積 (半径10に固定) 【1000~7970】
- (III) 球の体積 (半径は生徒の希望で可変) 【1000~3980】
- (IV) 球の表面積 【1000~4200】

となっており、メニューはランダムアクセスが可能である。また、生徒に対する説明のためパソコンの一時停止が必要である。これは INKEY\$ のサブルーチンを作っておき、必要な都度どこからでも呼び出して利用していることは、前のソフトと同様である。

2 授業の実際

学習指導案と学習プリントを準備して授業実践に入った。授業は1988(昭和63)年12月13日(火)16時30分から附属中学校教室で1単位時間で行われた。対象生徒は附属中学校1年選抜組で、男子8名、女子4名、合計12名である。授業立案で特に留意した点は、区分積法の先行研究では、対象が中学2年生であったが、今回は1年であるということで、数学的な用語の使用等に特に配慮した。つまり、未習の用語は一度に出すことは避ける、とか、内接、外接等の用語はあまり表面に出さない、とかの配慮である。次に、学習指導案を示す。授業者は藤田剣である。

1 単 元 名 球の体積・表面積

2 本時の指導

- (1) ねらい
- ・球を細かく切断してできた円柱や円すいの体積を集めることにより、近似的に球の体積を求められる、ことを理解できる。
 - ・球の表面を細かく切断してできた台形や三角形の面積を集めることにより、近似的に球の表面積を求められる、ことを理解できる。

(2) 展 開

段階	学習内容	学習活動	時間	指導上の留意点	教材教具
導 入	円柱・円すいの体積	1. 円柱・円すいの体積の求め方を確認する。 ・円柱の体積＝半径×半径×高さ＝底面積×高さ ・円すいの体積×半径×半径×円周率×高さ÷3 ＝底面積×高さ÷3	5分	・本時の展開の基礎となるのできちんと想起させる。	黒板 プリント
	課題提起	2. 本時の学習内容を把握する。 球の体積・表面積を求めよう		・パソコン画面の表題をみせ本時の学習課題を認識させる。	パソコン
展	球の体積の求め方	3. 区分球積法を用いた球の体積の求め方を知る。 (1)球が4分割された立体画面を見る。 (2)球を円柱と円すいに分割した画面を見る。 (3)球を細かく分割し、円柱と円すいの体積を求めることにより、近似的に球の体積を求められることを知る。	10分	・球を分割する場合、内接するものと、外接するものの2種類できることをパソコン画面により理解させる。 ・細かく分割すればするほど球と円柱の隙間が小さくなることを視覚的にとらえさせる。 ・生徒から何分割にするか言わせるが、細分割し過ぎると時間がかかることを知らせておく。	パソコン
		4. 区分球積法により球の体積法により球の体積を求める。 (1)半径が10cmの球を4分割して、円柱と円すいに分け、体積を求める。 ・各自で計算する。 ・パソコンに表示された値を見て、自分が出した答えを確認する。 (2)半径が10cmの球を細かく分け、体積を求める。 ・パソコンに計算代行させ細分割していけば、内接外接ともに一定の値に近づいていくことを知る。	15分	・それぞれの円柱・円すいの底面積の半径が何cmになるかをおさえた上で計算させる。 ・実際に計算することにより、分割の仕方や内接と外接を明確にさせる。 ・机間巡視 ・生徒から何分割にするか言わせるが、15分割を上限として、それ以上については一覧表（計算結果のみを示したパソコン画面）を見せる。	プリント パソコン

開		5. 球の体積の公式を導き出す。 ・球の体積 $=4.188 \times (\text{半径})^3 = \frac{4}{3} \times \text{円周率} \times (\text{半径})^3$	5分	・球の体積は半径の3乗に比例することを知らせる。 4で得た半径10cmの球の体積(4188.7)を利用する。	黒板又はパソコン
		6. 半径10cm以外の球についても同じことが言えることを確かめる。 (1)半径の値を変えて、パソコンで体積を求める。 (2)球の体積公式に半径の数値を代入して球の体積を計算する。 (3)(1)、(2)を比べる。	5分	・違った大きさの球についても確かめることにより、区分球積法による体積の求め方を一般化して把握させる。 ・数値を生徒から出させる。	パソコン プリント
	球の表面積の求め方	7. 球の表面積についても区分球積法で求められることを知る。 (1)球の表面を縦に8分割、横に4分割した画面に見る。 (2)その1区画を台形または三角形に見立てることを知る。 (3)台形と三角形の面積をパソコンに計算代行させ、一定の値に近づいていくことを知る。 (4)球の表面積の公式を知る ・球の表面積 $=4 \times \text{円周率} \times (\text{半径})^2$	5分	・球の表面積を求める過程をパソコン画面を見せながら説明する。	パソコン
終 結	まとめ	8. 本時の授業をふり返り、球の体積、表面積の公式をまとめる。 ・球の体積 $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ ・球の表面積 $S = 4 \pi r^2$	5分	・黒板に公式をまとめる。 ・参考資料(プリント)を渡し、江戸時代の数学者達も区分球積法を用いていたことを紹介する。	黒板 資料(プリント)

学習プリント類は略す。

このような準備の上で授業が実施された。授業は、その前後に行ったテストも含めて全体がVTRに録画して、後の授業研究に資料として残した。また、このVTRのテープを元にして、プロトコールを作成し、授業の分析に利用した。授業の時間は55分かかった。

3 授業の評価

評価用具はIWAT(岩手式言語連想テスト)とPCSD-Sによった。まず、IWATについて触れる。初めにキーワードの選定であるが、本実践は教科書によらない「ふくらまし教材」による授業であるから、授業の目標命題から選ぶことになる。その命題を示そう。

下線部分がキーワードである。

1. 球の体積は、半径の3乗と円周率の積に $\frac{4}{3}$ を掛けたものである。
2. 球の表面積は、半径の2乗と円周率の積に4を掛けたものである。
3. 球の体積は、内接円柱群と外接円柱群によって近似できる。
4. 球の表面積は、三角形と台形によって近似できる。

これらの命題群からキーワードを選ぶわけだが、キーワードの数は12になり少し多すぎるがあえてキーワードにした。キーワード番号は① $\frac{3}{4}$ 、②円周率、③4、④球の体積、⑤球の表面積、⑥半径の3乗、⑦台形、⑧半径の2乗、⑨内接円柱群、⑩近似、⑪三角形、⑫外接円柱群、となっている。次に本時の授業内容の内容構造図を図4で示す。これをもとに、IWATが作成された。IWATは様式1と2があるが、ここでは様式1の用具を用いてテストした。事前・事後の結果をもとにP-Pグラフを作成した(図5)。

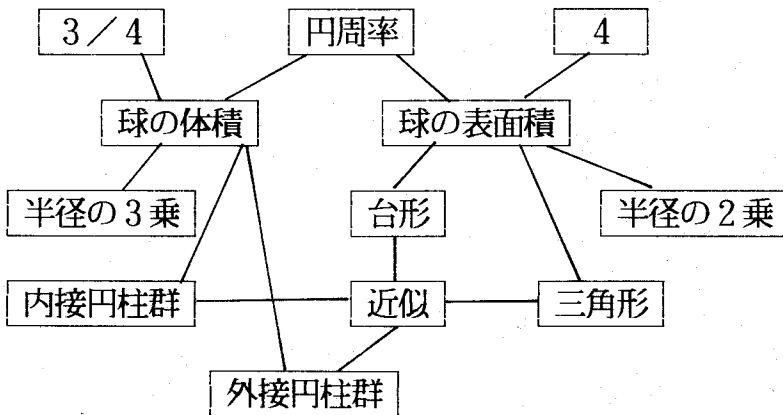


図4 内容構造図

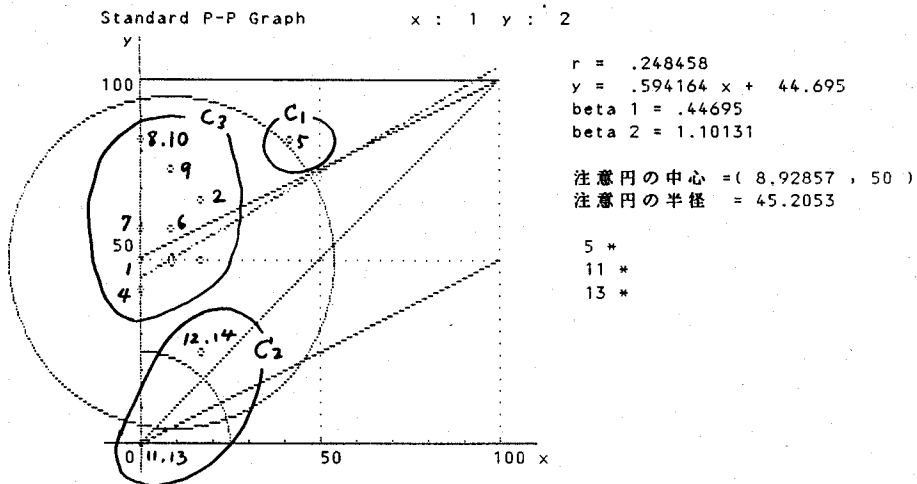


図5 本時のP-Pグラフ

図5のP-PグラフのパターンはⅡ型であること、変容係数 β_1 、 β_2 のうち β_2 が特に大きかったことから、本時の授業は成功的であった、と判定できる。

次にPCSD-Sであるが、これは筆者が高校生・中学生対象のパソコン経験者のパソコンへの態度を測定するために開発した、10個の2極形容詞対からなる7点のSD尺度である(佐伯、1985)。このデータからSDプロフィールを作ると先行研究と同じような変容になったことだけを述べて、ここでは態度変容が研究の目標ではないので深入りは避ける。

4 考 察

前に一度触れたが現行の学習指導要領では、中学校数学1学年における球の体積や表面積のところは、公式を提示するが、「球の体積は、その球がちょうど入る円柱の体積の $\frac{2}{3}$ であることがわかっている」等の表現のように、「～がわかっている」となっているから生徒はそれを天下りの覚えなければいけない、式の扱いになってしまう。このため生徒は、何か割り切れない気持ちをもったまま、公式の機械的な暗記学習になってしまい、意味的な理解には程遠いと言える。これは現在の中学校数学教育目標である、意味的な、そして外的理解の立場からは、例外的な扱いと言える。このような単元をパソコンと言うツールを使うことにより、生徒に意味的な理解をさせること、つまり、生徒に納得のいく、数学的思考の必然的な帰結として得られるというような、数学独自の筋道の明確な線の上で理解させることが、可能か否かを目標において本研究は計画した。この観点に立つと、一応目標が達成された、と言える。このとき数学的思考の背景になったのは「区分求積法」「はさみうち法」そして「極限移行」の考えである。この極限の扱いは、パソコングラフィックの性質により極めて自然にいくものである。これらの事項は、すべてパソコンにより、達せられることになった。ここでまた、筆者の研究室に、球の体積・表面積の単元が、パソコン利用で意味的な学習が成り立つ事実が追加され、そのためのパソコンソフトそしてその授業技術も研究室のデータとして加わったことになる。

一方、今回の研究に協力してくれた中学生にとっては、高校に進学した時、さらに大学に進学した時、らためて学習するものである。このような単元をあえてここで経験したことは、竹之内(1985)の言う後々の洞察のために、というパソコンの利用法であり、実際彼らが進学して同じことが出て来たとき効果を発揮するものと考えられる。

(謝辞) 本研究は、昭和63年度文部省科学研究費補助金(一般研究(B))課題番号63450098)の一部を利用して戴いた。ここに研究費補助金に対し感謝の意を表する。

また、本研究遂行に際しては、岩手大学教育学部附属中学校副校長渋谷次男、数学科の工藤 保、今野吉章、沢山和則の諸先生方に大変お世話になったことをここに記し、感謝の意を表する。

参考文献

- 藤田 剣 (1989) パソコン利用による教材開発と実践的研究——切断による球の体積・表面積公式の導入、岩手大学教育学部昭和63年度卒論
- 佐伯卓也 (1981) 言語連想テスト (I 式) の処理——WAテストP-Pグラフ分析、日本教科教育学会誌、6巻3号、195-199。
- 佐伯卓也 (1985) パーソナルコンピュータに対する態度を測定するSD尺度の開発、日本教科教育学会誌、10、73-78。
- 佐伯卓也 (1986) 中学生におけるパソコンによる区分求積法の指導例、日本教育工学会第2回大会論文集、161-162。
- 佐伯卓也 (1987) 普通教室におけるパソコン利用の授業について(1)——区分求積法による面積関数、東北・北陸数学教育基礎研報告、15、1-8。
- 佐伯卓也 (1988) 数学における非CAI的授業の実践的研究——円錐の体積、岩手大学教育学部教育工学研究、10、1-8。
- 佐伯卓也・阿部チエリ・黒沢真由美・佐々木明子 (1986) パソコン教材としてのふくらまし教材の開発とその授業の研究(3)——面積関数・中学生の積分へのアプローチ、東北数学教育学会年報、18、17-30。
- 鈴木秀之 (1989) パソコン利用による教材開発と授業実践——区分求積法による球の体積・表面積へのアプローチ、岩手大学教育学部昭和63年度卒論
- 竹之内脩 (1985) 教育工学と数学教育、竹之内脩編：コンピュータと数学 6、コンピュータと数学教育、26-30。