一般補間公式と補間係数

石　川　栄　助

On the General Formula for Interpolation and the Coefficient of Interpolation

Eisuke Ishikawa

§ 0　はしがき

補間法は多くの数学に比べて比較的最近の発達に属しているが，階差を用いる補間公式に次のものがある．

$$N \equiv u_0 + \binom{\theta}{1}\Delta_0 + \binom{\theta}{2}\Delta_0^2 + \binom{\theta}{3}\Delta_0^3 + \binom{\theta}{4}\Delta_0^4 + \binom{\theta}{5}\Delta_0^5 + \cdots\cdots \tag{0.1}$$

(Gregory-Newton の第一公式)

$$N' \equiv u_0 + \binom{\theta}{1}\Delta_{-1} + \binom{1+\theta}{2}\Delta_{-2}^2 + \binom{2+\theta}{3}\Delta_{-3}^3 + \binom{3+\theta}{4}\Delta_{-4}^4 + \binom{4+\theta}{5}\Delta_{-5}^5 + \cdots\cdots \tag{0.2}$$

(Gregory-Newton の第二公式)

$$G \equiv u_0 + \binom{\theta}{1}\Delta_0 + \binom{\theta}{2}\Delta_{-1}^2 + \binom{1+\theta}{3}\Delta_{-1}^3 + \binom{1+\theta}{4}\Delta_{-2}^4 + \binom{2+\theta}{5}\Delta_{-2}^5 + \cdots\cdots \tag{0.3}$$

(Gauss の第一公式)

$$G' \equiv u_0 + \binom{\theta}{1}\Delta_{-1} + \binom{1+\theta}{2}\Delta_{-1}^2 + \binom{1+\theta}{3}\Delta_{-2}^3 + \binom{2+\theta}{4}\Delta_{-2}^4 + \binom{2+\theta}{5}\Delta_{-3}^5 + \cdots\cdots \tag{0.4}$$

(Gauss の第二公式)

$$E \equiv u_0 + \binom{\theta}{1}\Delta_0 + \binom{1+\theta}{3}\Delta_0^2 - \binom{\theta}{3}\Delta_{-1}^2 + \binom{2+\theta}{5}\Delta_{-1}^4 - \binom{1+\theta}{5}\Delta_{-2}^4 + \cdots\cdots \tag{0.5}$$

(Everett の公式)

$$B \equiv u_0 + \binom{\theta}{1}\Delta_0 + \frac{1}{2}\binom{\theta}{2}\left(\Delta_{-1}^2 + \Delta_0^2\right) + \frac{1}{3!}\theta(\theta-1)(\theta-\tfrac{1}{2})\Delta_{-1}^3 + \frac{1}{2}\binom{1+\theta}{4}\left(\Delta_{-2}^4 + \Delta_{-1}^4\right) + \cdots \tag{0.6}$$

(Bessel の公式)

$$S \equiv u_0 + \frac{1}{2}\binom{\theta}{1}\left(\Delta_0 + \Delta_{-1}\right) + \frac{1}{2!}\theta^2\Delta_{-1}^2 + \frac{1}{2}\binom{1+\theta}{3}\left(\Delta_{-1}^3 + \Delta_{-2}^3\right) + \frac{1}{4!}\theta^2(\theta^2-1)\Delta_{-2}^4 + \cdots \tag{0.7}$$

(Stirling の公式)

更に石田保士氏(1)は器械的に補間公式系：

$X_\infty, \cdots\cdots, X_3, X_2, X_1, X_0, \mathfrak{X}_0, \mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \cdots\cdots, \mathfrak{X}_\infty$

を提案した．又補間係数に関するものにLagrangeや石田保士等の研究がある．筆者は以上の諸公式を統一するために，**出発数列**を土台に**変補間公式**を考え，石田氏の公式系 $X_\infty, \cdots\cdots, \mathfrak{X}_\infty$ をも含めて一般化を試みた．

§1　定補間公式

等差数列：　$x_i = x_0 + ih \quad (i = 0, 1, 2, \cdots\cdots, n)$

に対応する連続函数 $f(x_i)$ の値を u_i とおき，u_a を起点とする r **次階差**（difference of n-th order）$\overset{r}{\Delta}_a$ $(r=0, 1, \cdots\cdots, n)$ を求めた時，もしも $\overset{n}{\Delta}_a$ が一定ならば Gregory-Newton の第一補間公式を拡張して次の公式を得る．

定理1　$\overset{n}{\Delta}_a$ が一定ならば

$$u_{a+(b+\theta)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{b+\theta}{i} \overset{i}{\Delta}_a \qquad \cdots\cdots (1.1)$$

ここに a を**起点番号**，$(b+\theta)$ を起点 a からの級間単位 h による**補間距離**，b を起点 a よりの**補間番号**と名ずける．$u_{a+(b+\theta)}$ の値は上式により n, a, b, θ が定まれば確定する．上の公式を **n次の定補間公式**と名ずけよう．起点 a に関せず $\overset{n}{\Delta}_a$ が一定ならば，明らかに次の等式が成立する．

定理2　$\overset{n}{\Delta}_a$ が一定ならば

$$u_{a+(b+\theta)} = u_{a+b+(\theta)} = u_{0+(a+b+\theta)} \qquad \cdots\cdots (1.2)$$

上の定理によつて（1.1）式は**補外の公式**（extrapolation）として適用出来る．

註1　多くの補間は $\overset{n}{\Delta}_a$ を一定と見做して補間値を計算している．

§2　補間係数

定理1の補間公式（1.1）を展開し，右辺を函数値 u で表わせば，

$$u_{a+(b+\theta)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{b+\theta}{i} \binom{n-b-\theta}{n-i} u_{a+i} \qquad \cdots\cdots (2.1)$$

今　$$\binom{b+\theta}{i} \binom{n-b-\theta}{n-i} = C_i(n, b)_\theta \qquad \cdots\cdots (2.2)$$

とおけば，（2.1）式は次の様になる．即ち

定理3　$\overset{n}{\Delta}_a$ が一定ならば，定補間公式（1.1）は；

$$u_{a+(b+\theta)} = \sum_{i=0}^{n} C_i(n, b)_\theta \, u_{a+i} \qquad \cdots\cdots (2.3)$$

（2.2）式の $C_i(n, b)_\theta$ を**補間係数**と呼んでいる．第一表は n, b, θ を与えての補間係数値である．

註2　石田氏は n 次の補間係数を　$C_i(n+1, -b)$ の形で示している(1)．（註3参照）

第1表　補　間　係　数　表

$C_i(n, b)_\theta$ の 表

n	b	φ	(0.9)	(0.8)	(0.7)	(0.6)	(0.5)	(0.4)	(0.3)	(0.2)	(0.1)
		i＼θ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
2	0	0	.855	.720	.595	.480	,375	.280	.195	.120	.055
		1	.190	.360	.510	.640	.750	.840	.910	.960	.990
		2	− .045	−0.080	− .105	− .120	− .125	− .120	− .105	− .080	− .045
3	0	0	.826	.672	.536	.416	.312	.224	.150	.088	.038
		1	.276	.504	.688	.832	.938	1,008	1.046	1.056	1.040
		2	− .130	− .224	− .284	− .312	− .312	− .288	− .242	− .176	− .094
		3	.028	.048	.060	.064	.062	.056	.046	.032	.016
	1	0	− .028	− .048	− .060	− .064	− .062				
		1	.940	.864	.774	.672	.562				
		2	.104	.216	.332	.448	.562				
		3	− .016	− .032	− .046	− .056	− .062				
4	0	0	.806	.638	.495	.374	0,273	.190	.123	.070	.030
		1	.358	.638	.849	.998	1.094	1.142	1.151	1.126	1.074
		2	− .255	− .426	− .524	− .562	− .547	− .490	− .398	− .282	− .146
		3	.111	.182	.220	.230	.219	.190	.150	.102	.051
		4	− .021	− .034	− .040	− .042	− .039	− .034	− .026	− .018	− .009
	1	0	− .021	− .034	− .040	− .042	− .039	− .034	− .026	− .018	− .009
		1	.909	.806	.696	.582	.469	.358	.254	.158	.073
		2	.152	.302	.448	.582	.703	.806	.890	.950	.988
		3	− .048	− .090	− .123	− .146	− .156	− .154	− .137	− .106	− .060
		4	.008	.014	.019	.022	.023	.022	.019	.014	.008
5	0	0	.790	.612	.466	.344	.246	.168	.106	.059	.024
		1	.439	.766	.998	1.148	1.230	1.257	1.237	1.183	1.101
		2	− .416	− .681	− .822	− .861	− .820	− .718	− .571	− .394	− .200
		3	.272	.438	.517	.530	.492	.419	.323	.215	.105
		4	− .101	− .161	− .189	− .191	− .176	− .148	− .112	− .074	− .036
		5	.016	.026	.030	.030	.027	.023	.017	.011	.005
	1	0	− .016	− .026	− .030	− .030	− .027	− .023	− .017	− .011	− ,005
		1	.886	.766	.644	.524	.410	.304	.210	.127	.057
		2	.197	.383	.552	.699	.820	.914	.978	1.014	1.020
		3	− .093	− .170	− .227	− .262	− 273	− .261	− .226	− .169	− .093
		4	.031	.055	.072	.081	.082	.076	.064	.046	.024
		5	− .005	− .008	− .010	− .012	− .012	− .011	− .009	− .006	− .003
	2	0	.005	.008	.010	.012	.012				
		1	− .043	− .074	− .092	− .100	− .098				
		2	.955	.887	.801	.699	.586				
		3	.106	.222	.343	.466	.586				
		4	− .025	− .049	− .071	− .087	− .098				
		5	.003	.006	.009	.011	.012				

n	b	φ	(0.9)	(0.8)	(0.7)	(0.6)	(0.5)	(0.4)	(0.3)	(0.2)	(0.1)
		i \ θ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
6	0	0	.777	.592	.442	.321	.226	.151	.094	.051	.021
		1	.518	.889	1.137	1.286	1.354	1.357	1.312	1.230	1.123
		2	− .613	− .987	−1.171	−1.206	−1.128	− .969	− .757	− .513	− .255
		3	.536	.846	.983	.989	.902	.754	.570	.373	.178
		4	− .299	− .468	− .538	− .536	− .483	− .399	− .298	− .192	− .091
		5	.095	.148	.169	.168	.150	.123	.092	.059	.027
		6	− .013	− .020	− .023	− .023	− .021	− .017	− .012	− .008	− .004
	1	0	− .013	− .020	− .023	− .023	− .021	− .017	− .012	− .008	− .004
		1	.869	.735	.605	.482	.369	.268	.180	.106	.046
		2	.241	.460	.649	.804	.923	1.005	1.052	1.064	1.046
		3	− .152	− .272	− .356	− .402	− .410	− .383	− .324	− .237	− .127
		4	.075	.131	.168	.185	.185	.168	.137	.097	.050
		5	− .022	− .039	− .049	− .054	− .053	− .047	− .038	− .027	− .013
		6	.003	.005	.006	.007	.007	.006	.005	.003	.002
	2	0	.003	.005	.006	.007	.007	.006	.005	.003	.002
		1	− .034	− .056	− .068	− .072	− .068	− .059	− .047	− .032	− .016
		2	.931	.843	.741	.629	.513	.396	.283	.177	.082
		3	.138	.281	.423	.559	.684	.792	.881	.946	.986
		4	− .049	− .094	− .131	− .157	− .171	− .170	− .152	− .118	− .067
		5	.013	.024	.033	.039	.041	.040	.034	.026	.141
		6	− .002	− .003	− .004	− .005	− .005	− .005	− .004	− .003	− .002
7	0	0	.765	.576	.423	.303	.209	.138	.084	.045	.018
		1	.595	1.007	1.270	1.415	1.466	1.448	1.377	1.271	1.142
		2	− .846	−1.343	−1.569	−1.591	−1.466	−1.241	− .954	− .636	− .311
		3	.924	1.439	1.646	1.632	1.466	1.206	.898	.578	.272
		4	− .687	−1.060	−1.201	−1.179	−1.047	− .852	− .626	− .397	− .184
		5	.328	.504	.568	.554	.489	.395	.288	.182	.084
		6	− .091	− .139	− .156	− .152	− .133	.107	− .078	− .049	− .022
		7	.011	.017	.019	.018	.016	.013	.009	.006	.003
	1	0	− .011	− .017	− .019	− .018	− .016	− .013	− .009	− .006	− .003
		1	.854	.711	.575	.450	.338	.241	.159	.092	.040
		2	.285	.533	.739	.900	1.015	1.086	1.115	1.107	1.067
		3	− .225	− .395	− .507	− .563	− .564	− .517	− .429	− .308	− .162
		4	.147	.254	.319	.346	.338	.302	.242	.168	.085
		5	− .066	− .112	− .140	− .150	− .145	− .128	− .101	− .069	− .034
		6	.017	.030	.037	.039	.038	.033	.026	.018	.009
		7	− .002	.004	− .004	− .005	− .004	− .004	− .003	− .002	− 001
	2	0	.002	.004	.004	.005	.004	.004	.003	.002	.001
		1	− .028	− .045	− .054	− .055	− .051	− .044	− .033	− .022	.011
		2	.912	.809	.696	.579	.461	.349	.243	.149	.067
		3	.169	.337	.497	.643	.769	.871	.947	.993	1.011
		4	− .080	− .150	− .205	− .241	− .256	− .249	− .218	− .166	− .092
		5	.031	.058	.077	.089	.092	.087	.074	.054	.029

		ϕ	(0.9)	(0.8)	(0.7)	(0.6)	(0.5)	(0.4)	(0.3)	(0.2)	(0.1)
n	b	$i \diagdown \theta$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
7	2	6	− .008	− .014	− .019	− .021	− .022	− .021	− .017	− .012	− .007
		7	.001	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.001	.001
	3	0	− .001	− .002	− .002	− .002	− .002				
		1	.009	.016	.021	.024	.024				
		2	− .052	− .090	− .113	− .122	− .120				
		3	.962	.899	.815	.713	.598				
		4	.107	.225	.349	.475	.598				
		5	− .030	− .060	− .086	− .107	− .120				
		6	.007	.013	.018	.022	.024				
		7	− .001	− .001	− .002	− .002	− .002				

§ 3 標準定補間公式

資料が $n+1$ 個，ある時の n 次の定補間の起点には $a=0$ が採られる．仮定により Δ_0^n が一定であるから (1.1) 式が成立し，次の定理を得る．

定 理 4 $u_0, u_1, \cdots\cdots, u_b, \cdots\cdots, u_n$ に於ける補間 $\mathcal{U}_{(b+\theta)}$ の値は，次の通りである．

$$\mathcal{U}_{(b+\theta)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{b+\theta}{i} \Delta_0^i = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{C}_i\,(n,\,b)_\theta\ \mathcal{U}_N \qquad \cdots\cdots (3.1)$$

この補間式を**標準定補間公式**とよぶ事にする．．

系 4.1 上式に於て特に $b=0$ とおけば，

$$\mathcal{U}_{(\theta)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{\theta}{i} \Delta_0^i = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{C}_i\,(n,\,o)_\theta\ \mathcal{U}_i \qquad \cdots\cdots (3.2)$$

これは Gregory-Newton の第一補間公式 (0.1) である．

系 4.2 (1.1) 式に於て $a = -b$ とおけば

$$\mathcal{U}_{-b+(\theta)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{b+\theta}{i} \Delta_{-b}^i = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{C}_i\,(n,-b)\ \mathcal{U}_{-b+i} \qquad \cdots\cdots (3.3)$$

これは内容的に石田氏の補間式と同一である．Δ_a^n が一定ならば，勿論 (3.1) 式の標準定補間公式と同値である．

註 3 石田氏の補間係数を $\mathrm{C}'_i\,(n,-b)_\theta$，(2.2) 式の補間係数を $\mathrm{C}_i\,(n,\,b)_\theta$ とおけば，この係数の間に次の関係がある．

$$\mathrm{C}'_i\,(n+1,-b)_\theta = \mathrm{C}_i\,(n,\,b)_\theta \qquad \cdots\cdots (3.4)$$

例 函数列： $u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4$ を知つて $u_{1\cdot 6}$ の値を求めるには標準定補間式 (3.1) に於て $n=4,\ b=1,\ \theta=0.6$ とおき

$$\mathcal{U}_{1\cdot 6} = \sum_{i=0}^{4} \mathrm{C}_i\,(4,\,1)_{0\cdot 6}\ \mathcal{U}_i$$

として第一表を利用し，　$C_0(4,\ 1)_{0.6}$，$C_1(4,\ 1)_{0.6}$，　$C_2(4,\ 1)_{0.6}$ ……を求めて計算する．(表の使用は次節参照)

§4　反　転　補　間　公　式

函数列：　$u_0,\ u_1,\ u_2,\ \cdots\cdots,\ u_n$　を逆に排列したものを，

$$v_0,\ v_1,\ v_2,\ \cdots\cdots,\ v_n \quad (v_i = u_{n-i})$$

とし，v_a を起点とする第 i 次階差を ∇^i_a；　$1-\theta=\phi$，　$\beta=n-b-1$ とおけば，次の定理を得る．

定理 5　函数列 $v_i = u_{n-i}$ ならば，補間値 $\mathcal{U}_{(b+\theta)}$ は，

$$\mathcal{U}_{(b+\theta)} = \mathcal{V}_{(\beta+\phi)} = \sum_{i=0}^{n}\binom{\phi+\beta}{i}\nabla^i_0 = \sum_{i=0}^{n} C_i(n,\ \beta)_\phi\ v_i \qquad \cdots\cdots (4.1)$$

即ち　$\mathcal{U}_{(b+\theta)}$ の値は函数列 $\mathcal{V}$ の定補間として得る．
上の公式を $\mathcal{U}_{(b+\theta)}$ の**反転補間公式**とよぶ事にする．
$\mathcal{U}_{(b+\theta)}$，$\mathcal{V}_{(\beta+\phi)}$ の夫々の補間係数は $C_i(n,\ b)_\theta$，　$C_i(n,\ \beta)_\phi$ であつて同形であるから共に第一表が利用出来る．故に第一表の補間番号 b は反転法を利用すれば

$$0 \leqq b \leqq \frac{n-1}{2} \qquad \cdots\cdots (4.2)$$

従つて第一表は約半分節約する事が出来た．

(4.1) 式を変形すれば次の式を得る．

$$\mathcal{U}_{(b+\theta)} = \mathcal{V}_{n-b+(-\theta)} = \sum_{i=0}^{n}\binom{-\theta}{i}\nabla^i_{n-b} = \sum_{i=0}^{n}\binom{i+\theta-1}{i}\Delta^i_{b-i} \qquad \cdots\cdots$$

依つて次の定理を得る．

定理 6　$$\mathcal{U}_{(b+\theta)} = \sum_{i=0}^{n}\binom{i+\theta-1}{i}\Delta^i_{b-i} \qquad \cdots\cdots (4.3)$$

系 6.1　上式に於て $b=0$ とおけば

$$\mathcal{U}_{(\theta)} = \sum_{i=0}^{n}\binom{i+\theta-1}{i}\Delta^i_{-i} \qquad \cdots\cdots (4.4)$$

これが Gregory-Newton の第二補間公式 (0.2) である．従つて (4.3) 式は Gregory-Newton の第二補間公式の拡張と考えてよい．(4.3) 式に於て $b=1,\ 2,\ \cdots\cdots$ とおけば，新しい補間公式を得る事明らかである．

註 4　(4.3) 式に於ける起点番号や補間番号は項数が進むにつれ逐次変動する．この様な補間公式を**変補間公式**と呼び次節に於て研究する．

§5　変補間公式と補間係数

数列：

$$\left.\begin{array}{ll} (a_i) & (i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n) \\ a_i - a_{i-1} = 1 \text{ 又は } 0 & (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n) \end{array}\right\} \qquad \cdots\cdots (5.1)$$

なる二項 a_{i-1}，a_i を次の様に用いた補間公式：

$$\mathcal{U}_{-a_i+(a_{i-1}+\theta)} = \sum_{i=1}^{n}\binom{a_{i-1}+\theta}{i}\Delta^i_{a_i-i} \qquad \cdots\cdots (5.2)$$

が考えられる時，数学帰納法によつて次の等式が成立する．

$$\mathcal{U}_{-a_i+(a_{i-1}+\theta)} = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{C}_i\,(n,\ a_n)_\theta\ \mathcal{U}_{-a_n+i} \qquad \cdots\cdots (5.3)$$

依つて次の定理を得る．

定理 7　補間公式：

$$\mathcal{U}_{-a_i+(a_{i-1}+\theta)} = \sum_{i=1}^{n} \binom{a_{i-1}+\theta}{i} \Delta^{i}_{-a_i}$$

に於て　$a_i - a_{i-1} = 1$ 又は 0　$(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ ならば

$$\mathcal{U}_{-a_i+(a_{i-1}+\theta)} = \sum_{i=1}^{n} \binom{a_{i-1}+\theta}{i} \Delta^{i}_{-a_i} = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{C}_i\,(n,\ a_n)_\theta\ \mathcal{U}_{-a_n+i} \qquad \cdots\cdots (5.4)$$

この場合 (5.4) 式を**変補間公式**といい，数列 (5.1) を**変補間式の出発数列**，(5.1) 式を**変補間式の條件**とよぶ事にする．

(5.4) 式の右辺に示される様に，変補間公式の補間係数は第一表によつて求める事が出来る．

§0 に於て掲げた既存の補間公式は上の公式の特殊の場合として演繹される．

§ 6　補間公式系と変補間公式

(5.1) 式を満足する数列 (a_i) は無数にあるが，既存の補間公式 (5.4) の特殊の場合として導きたい．次の4つの場合について考察する．

(i)　$a_i \equiv b$　の時

(5.4) 式は次の様になる．

$$\mathcal{U}_{-b+(b+\theta)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{b+\theta}{i} \Delta^{i}_{-b} \qquad \cdots\cdots (6.1)$$

これは定補間公式 (3.3) 式である．特に $b=0$ とおいたのが Gregory-Newton の第一補間公式である．

(ii)　$a_i \equiv i-b$ の時は（但し　$i-b<0$ の時 $a_i=0$ とする）

この場合の変補間公式系を N'_b で表わせば

$$\mathrm{N}'_b = \mathcal{U}_{b-i+(-b+i+\theta-1)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{-b+i-1+\theta}{i} \Delta^{i}_{b-i} \qquad \cdots\cdots (6.2)$$

特に $b=0$，$b=1$ とおけば N'_0 は Gregory-Newton の第二補間公式であり，N'_1 は石田氏が器械的に求めた $\mathfrak{X}_\infty$ 式である．既ち

$$\mathrm{N}'_0 = \mathcal{U}_{-i+(i-1+\theta)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{i-1+\theta}{i} \Delta^{i}_{-i} \qquad \cdots\cdots (6.3)$$

$$\mathrm{N}'_1 = \mathcal{U}_{1-i+(i-2+\theta)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{i-2+\theta}{i} \Delta^{i}_{1-i} \qquad \cdots\cdots (6.4)$$

同様に N'_2，N'_3 …… 等の公式を形式的に考える事が出来る．この公式系を Gregory-Newton の第二補間公式系と呼ぶ事にする．

註 5　(4.4) 式は N'_0 の拡張である．

(iii)　$a_i \equiv \left[\frac{i-b}{2}\right]$ の時（但し $i-b<0$ の時 $a_i=0$ とする）　$\frac{i-b}{2}$ の整数値を $\left[\frac{i-b}{2}\right]$ で表わし，出発数列 (a_i)（$i=0, 1, 2, \cdots\cdots, n$）を，　$a_i \equiv \left[\frac{i-b}{2}\right]$ にとつた変補間公式系を Gauss の補間公式系列と名ずけ G_b（$b=\cdots\cdots,-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots$）で表わせば，$G_0$, G_{-1} は Gauss の第一，第二，補間公式 G, G′ 式：(0.3), (0.4) 式である．又 G_3, G_2, G_1, G_0, G_{-1} は夫々石田氏の X_3, X_2, X_1, X_0, $\mathfrak{X}_0$ に当つている．特に重要な G_0, G_{-1}, G_1 は次の通りである．

$$G_0 \equiv u_0 + \binom{\theta}{1}\Delta_0 + \binom{\theta}{2}\Delta^2_{-1} + \binom{1+\theta}{3}\Delta^3_{-1} + \binom{1+\theta}{4}\Delta^4_{-2} + \binom{2+\theta}{5}\Delta^5_{-2} + \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (6.5)$$

$$G_{-1} \equiv u_0 + \binom{\theta}{1}\Delta_{-1} + \binom{1+\theta}{2}\Delta^2_{-1} + \binom{1+\theta}{3}\Delta^3_{-2} + \binom{2+\theta}{4}\Delta^4_{-2} + \binom{2+\theta}{5}\Delta^5_{-3} + \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (6.6)$$

$$G_1 \equiv u_0 + \binom{\theta}{1}\Delta_0 + \binom{\theta}{2}\Delta^2_{0} + \binom{\theta}{3}\Delta^3_{-1} + \binom{1+\theta}{4}\Delta^4_{-1} + \binom{1+\theta}{5}\Delta^5_{-2} + \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (6.7)$$

(iv)　石田氏の補間公式系

器械的に求めた広範な石田氏の補間公式系及び N_0' を次の様に並べる．

$$X_\infty, \cdots\cdots, X_3,\ X_2,\ X_1,\ X_0,\ \mathfrak{X}_0,\ \mathfrak{X}_1,\ \mathfrak{X}_2, \cdots\cdots,\ \mathfrak{X}_\infty,\ N_0' \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (6.8)$$

これらの出発数列 (a_i) は次表の通りであつて，悉く (5.1) 式を満足するから，公式系 (6.8) は変補間公式として (5.4) 式に統一する事が出来る．

第2表　補　間　公　式　系

公　式　系	出　發　数　列　：　(a_i)	一　般　項　a_i
$X_\infty = N$	0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, …………	0
$X_3 = G_3$	0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, …………	$\left[\frac{i-3}{2}\right]$
$X_2 = G_2$	0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, …………	$\left[\frac{i-2}{2}\right]$
$X_1 = G_1$	0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, …………	$\left[\frac{i-1}{2}\right]$
$X_0 = G_0$	0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, …………	$\left[\frac{i}{2}\right]$
$\mathfrak{X}_0 = G_{-1}$	0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, …………	$\left[\frac{i+1}{2}\right]$
$\mathfrak{X}_1$	0, 0, 1, 2, 3, 3, 4, …………	
$\mathfrak{X}_2$	0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, …………	
$\mathfrak{X}_\infty = N_1'$	0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, …………	$i-1$
N_0'	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, …………	i

即ち石田の公式は器械的なものであるが，変補間公式の特段のものとして基礎ずける事が出来た．なお上表に於てみられる様に $\mathfrak{X}_0$, $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_2$, $\mathfrak{X}_\infty$ の公式系の記号は再考を要す．

§7　平　均　補　間　公　式

Bessel, Stirling, Everett の公式 B, S, E は以下に述べる様に Gauss 系の公式 G_0, G_1, G_{-1} 等によつて表現されるので**平均補間公式**とよんでいる．

(1) **Bessel Stirling の公式**

§ 0　に掲げた Bessel Stirling の公式 B, S は次の様に書く事が出来る.

$$
\begin{aligned}
2\,\mathrm{B} &= \left\{ u_0 + \binom{\theta}{1}\Delta_0 + \binom{\theta}{2}\Delta_0^2 + \binom{\theta}{3}\Delta_{-1}^3 + \binom{1+\theta}{4}\Delta_{-1}^4 + \binom{1+\theta}{5}\Delta_{-2}^5 + \cdots\cdots \right\} \\
&+ \left\{ u_0 + \binom{\theta}{1}\Delta_0 + \binom{\theta}{2}\Delta_{-1}^2 + \binom{1+\theta}{3}\Delta_{-1}^3 + \binom{1+\theta}{4}\Delta_{-2}^4 + \binom{2+\theta}{5}\Delta_{-2}^5 + \cdots\cdots \right\} \\
&= \mathrm{G}_1 + \mathrm{G}_0 \\
2\,\mathrm{S} &= \left\{ u_0 + \binom{\theta}{1}\Delta_0 + \binom{\theta}{2}\Delta_{-1}^2 + \binom{1+\theta}{3}\Delta_{-1}^3 + \binom{1+\theta}{4}\Delta_{-2}^4 + \binom{2+\theta}{5}\Delta_{-2}^5 + \cdots\cdots \right\} \\
&+ \left\{ u_0 + \binom{\theta}{1}\Delta_{-1} + \binom{1+\theta}{2}\Delta_{-1}^2 + \binom{1+\theta}{3}\Delta_{-2}^3 + \binom{2+\theta}{4}\Delta_{-2}^4 + \binom{2+\theta}{5}\Delta_{-3}^5 + \cdots\cdots \right\} \\
&= \mathrm{G}_0 + \mathrm{G}_{-1}
\end{aligned}
$$

依つて次の石田氏の定理を得る.

定理 8　Bessel, Stirling の公式を B, S ; Gauss 系の公式を G_1, G_0, G_{-1} とおけば，次の関係が成立する.

$$
\mathrm{B} = \frac{\mathrm{G}_1 + \mathrm{G}_0}{2}, \qquad \mathrm{S} = \frac{\mathrm{G}_0 + \mathrm{G}_{-1}}{2} \qquad \cdots\cdots (7.1)
$$

この定理は石田氏によつて見出されたので，石田の定理と名ずける.

(2) **Everett の公式**

§ 0　に掲げた Everett の公式 E は：

$$
\mathrm{E} = \sum_{i=0}^{m} \binom{\theta+i}{2i+1} \Delta_{1-i}^{2i} - \sum_{i=0}^{m} \binom{i+\theta-1}{2i} \Delta_{-i}^{2i} \qquad \cdots\cdots (7.2)
$$

これは又次の様に表現出来る.

$$
\mathrm{E} = \sum_{i=0}^{m} \binom{\theta+i}{2i+1} \Delta_{1-i}^{2i} + \sum_{i=0}^{m} \binom{i+\phi}{2i+1} \Delta_{-i}^{2i} \qquad \cdots\cdots (7.2)'
$$

(7.2) 式と Gauss の第一公式 G_0 との関係を求めてみよう．今 Gauss の第一公式 G_0 ; (6.5) 式の各項を 2 項ずつまとめてみる．即ち

$$
\mathrm{G}_0 = \left\{ u_0 + \binom{\theta}{1}\Delta_0 \right\} + \left\{ \binom{\theta}{2}\Delta_{-1}^2 + \binom{1+\theta}{3}\Delta_{-1}^3 \right\} + \left\{ \binom{1+\theta}{4}\Delta_{-2}^4 + \binom{2+\theta}{5}\Delta_{-2}^5 \right\} + \cdots\cdots
$$

これを簡単のために　$\mathrm{T}_0 + \mathrm{T}_1 + \mathrm{T}_2 + \cdots\cdots$,　とおけば

$$
\mathrm{T}_i = \binom{\theta+i-1}{2i} \Delta_{-i}^{2i} + \binom{\theta+i}{2i+1} \Delta_{-i}^{2i+1} = \binom{\theta+i}{2i+1} \Delta_{-i+1}^{2i} - \binom{\theta+i-1}{2i+1} \Delta_{-i}^{2i}
$$

これは (7.2) 式 ; E の一般項である．従つて E 及び G_0 の第 n 次の公式を $\mathrm{E}(n)$, $\mathrm{G}_0(n)$ とおけば，次の定理を得る.

定理 9　　$\mathrm{E}\,(2m) = \mathrm{G}_0\,(2m+1)$ 　　$\cdots\cdots (7.3)$

同様に次の補間公式 ;

$$
\mathrm{E}' = \sum_{i=0}^{m} \binom{\theta+i}{2i} \Delta_{-i+1}^{2i-1} - \sum_{i=0}^{m} \binom{\theta+i-1}{2i} \Delta_{-i}^{2i-1} \qquad \cdots\cdots (7.4)
$$

を考える時，次の定理を得る.

定理 10　　$E'(2m-1) = G_0(2m)$ ………………………………… (7.5)

定理9即ち (7.3) 式は石田氏の結果である．又 (7.4) 式即ち E′ 式をEverett の第二補間公式と呼びたい．しかし E 及び E′ は G_0 によつて表現出来るから副次的公式と考えてよい．

(3) 平均補間公式間の関係

公式 E, B, S は悉く Gauss 系の公式より導かれるので Gauss 系の公式 G_1, G_0, G_{-1} の一般性質を明らかにしておくのも無駄でない．

Gauss 系の公式は変補間公式 (5.4) 式の特段の場合であるから Gauss 系の n 次の補間公式を $G(n)$ とおけば (5.4) 式より

$$G(n) = \sum_{i=0}^{n} C_i(n, a_n)_\theta\, u_{-a_n+i} \quad \cdots\cdots (7.6)$$

ここに $G(n)$ は a_n と n の値によつて定まる．

もしも　$n = 2m$ ならば

$$G_0 : \ a_n = \left[\frac{2m}{2}\right] = m \ , \qquad G_{-1} : \ a_n = \left[\frac{2m+1}{2}\right] = m$$

$n = 2m+1$　ならば

$$G_0 : \ a_n = \left[\frac{2m+1}{2}\right] = m \ , \qquad G_1 : \ a_n = \left[\frac{2m+1-1}{2}\right] = m$$

依つて石田氏の求めた次の定理を得る．

定理 11　$G_0(2m) = G_{-1}(2m)$,　　$G_0(2m+1) = G_1(2m+1)$ ………… (7.7)

系 i　$B(2m+1) = G_0(2m+1) = G_1(2m+1) = E(2m)$ ………… (7.8)

系 ii　$S(2m) = G_0(2m) = G_{-1}(2m) = E'(2m-1)$ ………… (7.9)

以上によつて既存の公式 N, N′, G, G′, B, S, E は悉く変補間公式 (5.4) の特段の場合として導かれた．

要　　約

(1) 函数列 : $u_0, u_1, \cdots\cdots, u_n$ に於て補間値 $u_{a+b+\theta}$ は Δ_a^n が一定ならば

$$u_{a+(b+\theta)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{b+\theta}{i} \Delta_a^i = \sum_{i=0}^{n} C_i(n, b)_\theta\, u_{a+i}$$

ここに $C_i(n, b)_\theta$ を補間係数と名ずけ，その値を第一表にまとめた．

ここに $a = 0$ とおけば Gregory-Newton の第一公式を得る．

(2) Δ_a^n が一定なる時，反転の考えから

$$u_{(b+\theta)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{i+\theta-1}{i} \Delta_{b-i}^i$$

$b = 0$ とおいたのが Gregory-Newton の第二公式である．

(3) もしも補間公式 :

$$u_{-a_i+(a_i-1+\theta)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{a_i-1+\theta}{i} \Delta_{-a_i+i}^i \qquad (a_i - a_{i-1} = 1 \text{ 又は } 0)$$

があるならば，次が成立する．

$$u_{-a_i+(a_{i-1}+\theta)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{a_n+\theta}{i} \binom{n-a_n-\theta}{n-i} u_{-a_n+i}$$

この補間公式を変補間公式と名ずける．

$a_i = b$	ならば	Gregory-Newton の第一公式	N
$a_i = i$	〃	Gregory-Newton の第二公式	$N' = N'_0$
$a_i = \left[\frac{i}{2}\right]$	〃	Gauss の第一公式	$G = G_0$
$a_i = \left[\frac{i+1}{2}\right]$	〃	Gauss の第二公式	$G' = G_{-1}$
$a_i = \left[\frac{i-1}{2}\right]$	〃	石田氏の X_1	$X_1 = G_1$

又

$$\frac{G_1+G_0}{2} = B \qquad \text{(Bessel の公式)}$$

$$\frac{G_0+G_{-1}}{2} = S \qquad \text{(Stirling の公式)}$$

(4) Everett の公式は次の様に表わされる．

$$E = \sum_{i=0}^{m} \left\{ \binom{\theta+i}{2i+1} \Delta^{2i}_{1-i} - \binom{i+\theta-1}{2i} \Delta^{2i}_{-i} \right\} \qquad \text{(Everett の第一公式とよぶ)}$$

$$E' = \sum_{i=0}^{m} \left\{ \binom{\theta+i}{2i} \Delta^{2i-1}_{1-i} - \binom{i+\theta-1}{2i} \Delta^{2i-1}_{-i} \right\} \qquad \text{(Everett の第二公式とよぶ)}$$

n 次の補間公式を夫々 $E(n)$, $E'(n)$, $G_0(n)$, …… 等と表わせば，次の関係式が成立する．

$$G_0(2m) = G_{-1}(2m) = S(2m) = E'(2m-1)$$

$$G_0(2m+1) = G_1(2m+1) = B(2m+1) = E(2m).$$

参　考　文　献

(1) 石田保士：補間係數表 (1953)
(2) 福田武雄：差分法 (1948)
(3) 林桂一：内挿法と數値計算 (1943)
(4) 林五郎；泉信一：應用數學 (1953)
(5) Whittaker and Robinson : Calculus of observations (1924)
(6) 石川榮助：補間公式の基礎（科學 Vol. 25 No, 5 1955）

Summary

(1) *Definite interpolation.*

Let the series be $x_i = x_0 + ih$ $(i=0, 1, \cdots\cdots, n)$ and let $u_i = f(x_i)$. Then we proceed to investigate a method of finding $u_{a+(b+\theta)}$, when a certain number of the terms u_0, u_1, $\cdots\cdots$, u_n are given.

The required term is obtained from the formula

$$u_{(a+b+\theta)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{b+\theta}{i} \Delta_a^i \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

where Δ_a^i is difference of *i-th* order of u_a.

This formula is called a definite interpolation, and the expression (1) may be used to the formula for extrapolation.

In the expression (1), let $C_i(n, b)_\theta$ be $\binom{\theta+b}{i}\binom{n-b-\theta}{n-i}$ then the formula (1) be written as follows :

$$u_{a+(b+\theta)} = \sum_{i=0}^{n} C_i(n, b)_\theta \, u_{a+i}$$

$C_i(n, b)_\theta$ is named the coefficient of interpolation, and the values of $C_i(n, b)_\theta$ are shown in the table I.

(2) *Formula for interpolation by inversion.*

Let $v_i = u_{n-i}$, $a=0$, $1-\theta=\varphi$ and $\beta=n-b-1$

then we have the relations that.

$$u_{(b+\theta)} = v_{(\beta+\phi)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{\phi+\beta}{i} \nabla_0^i = \sum_{i=0}^{n} C_i(n, \beta)_\phi \, v_i$$

or

$$u_{(b+\theta)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{i+\theta-1}{i} \Delta_{b-i}^i \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

where ∇_0^i = i—th order of difference of v_0

In the expression (2) if $b=0$ the equation (2) be comes

$$u_{(\theta)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{i+\theta-1}{i} \Delta_{-i}^i$$

(Gregory-Newtons second forumla)

(3) *Varied interpolation.*

Suppose that the formula for interpolation is

$$\left.\begin{aligned} u_{-a_i+(a_{i-1}+\theta)} &= \sum_{i=0}^{n} \binom{a_{i-1}+\theta}{i} \Delta_{-a_i}^i \\ a_i - a_{i-1} &= 1 \text{ or } 0 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3)$$

We have the relation

$$u_{-a_i+(a_{i-1}+\theta)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{a_{i-1}+\theta}{i} \Delta_{-a_i}^i = \sum_{i=0}^{n} C_i(n, a_n)_\theta \, u_{-a_n+i} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (4)$$

In the special case when the series (a_i) are as follows that, we have the following results :

case I. If $a_i = b$, the expression (4) is follows :

$$\mathcal{U}_{-b+(b+\theta)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{b+\theta}{i} \Delta_{-b}^{i}$$

and if b = 0 that is

$$\mathcal{U}_{(\theta)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{\theta}{i} \Delta_{0}^{i} .$$

(Gregory-Newton's first formula)

Case II. If $a_i = i - b$, let N'_b denote the expression (4), then the expression is

$$N'_b = \mathcal{U}_{b-i+(i-b-1+\theta)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{-b+i-1+\theta}{i} \Delta_{b-i}^{i}$$

put $b = 0$, than $N'_0 = \sum_{i=0}^{n} \binom{-1+\theta+i}{i} \Delta_{-i}^{i}$

(Gregory-Newton's second formula)

put $b = 1$, than $N'_1 = \sum_{i=0}^{n} \binom{\theta+i-2}{i} \Delta_{1-i}^{i}$

(Ishidas : $\mathfrak{X}_\infty$)

Case. III. If $a_i = \left[\frac{i-b}{2}\right]$, let G_b denote the formula (4).

Where $\left[\frac{i-b}{2}\right]$ is the greatest integer contained in $\frac{i-b}{2}$.

put $b = 0$, than G_0 = first formula of Gauss

put $b = -1$, than G_{-1} = second formula of Gauss

put $b = 1$, than G_1 = X_1 by Ishida's formula

and $\frac{G_1+G_0}{2} = B$ (Bessel's formula)

$\frac{G_0+G_{-1}}{2} = S$ (Stirling's formula)

(4) *Mean interpolation.*

Let E and E' are denote Everett's formnla :

therefore $$E = \sum_{i=0}^{m} \left\{ \binom{\theta+i}{2i+1} \Delta_{1-i}^{2i} - \binom{\theta+i-1}{2i+1} \Delta_{-i}^{2i} \right\}$$

and $$E' = \sum_{i=0}^{m} \left\{ \binom{\theta+i}{2i} \Delta_{1-i}^{2i-1} - \binom{\theta+i-1}{2i} \Delta_{-i}^{2i-1} \right\}$$

Now let $E(n)$ be denote Everett's formula of n—th order, and so on. Then we have the following relations by Ishida.

$$E(2m) = G_0(2m+1) = G_1(2m+1) = B(2m+1)$$
$$E'(2m-1) = G_0(2m) = G_{-1}(2m) = S(2m) .$$