

ICT を活用した動的視覚化と発展的探究を取り入れた指導の可能性 —旅人算の問題場面の理解支援に焦点を当てて—

中 村 好 則*

(2015年8月17日受付, 2015年12月25日受理)

1. はじめに

中学校の方程式や関数のグラフの利用等の単元でよく用いられる題材に旅人算がある。旅人算は中学校受験や就職試験等にもよく出題され、生徒にとってはつまずくことも多く、苦手な問題の1つである。その原因として、旅人算では、問題に登場する2つのもの（人や自転車、自動車、列車等）に動きがあり、それらの動く方向や速さ、出発する位置や時刻等も問題によって異なることが考えられる。そのため、生徒にとって問題場면을正しく理解することはそう容易なことではない。このような問題（旅人算）での継続的なつまずきは数学に対する自信や学習意欲の低下にも繋がり、数学嫌いの生徒を増やすことにもなりかねない。旅人算の問題場面の理解支援は中学校の数学指導における重要な検討課題の1つと言える。生徒が旅人算の問題場면을正しく理解し、自立して問題解決ができ、成就感や達成感が得られるようになるための教材や指導法の開発が必要である。

一方、近年、中学校にもICTが整備され、数学指導においてもそれらの活用が期待されている。ICTの機能を有効に活用することで、数学の問題場면을視覚的にしかも動的に提示すること（動的視覚化）や、画面上に描かれた図やグラフ等を操作し問題を発展的に探究する活動（発展的探究）を構成することが可能である。ICTを活用し動的視覚化と発展的探究を数学指導に取り入れることで、多くの生徒が苦手意識を持っている旅人算の問題場面の理解を支援できる可能性がある。

そこで、本研究では、旅人算の問題場面の理解支援に焦点を当て、ICTを活用した動的視覚化と発展的探究を取り入れた指導の可能性を考察する（研究目的）。そのために、まず初めに、旅人算の種類（第2章第1節）、旅人算の中学校の教科書での取り扱い（第2章第2節）、全国学力学習調査の旅人算に関する問題の結果（第2章第3節）、中学生を対象とした旅人算調査の分析結果（第2章第4節）を基に、中学生の旅人算の問題場面の理解の様相を明らかにする。次に、旅人算の問題場面の理解を支援する手立てとして、ICTを活用した動的視覚化と発展的探究を提案し（第3章）、それらを取り入れた指導の可能性を考察する（第4章）。最後に、本研究のまとめと課題を述べる（第5章）。

* 岩手大学教育学部

2. 旅人算とは

1) 旅人算の分類

旅人算とは、広辞苑第五版（新村編1998）によると「算数の問題の一。それぞれの歩く速さを与え、先に出発した人に追いつくまでの時間を求める問題（追いかけ算）、二地点を出発した人が出会うまでの時間を求める問題（出会い算）など」をいう。また、三塚（1991）によると、旅人算は次の5つの類型に分けられる。しかし、旅人算は、次節でも検討するように、算数の問題というよりは、むしろ中学校の数学の題材として、方程式の利用、連立方程式の利用、1次関数のグラフの利用などでよく使われている。

出会い算：二人の人が出会うまでの時間や距離を求める。
追掛算：追いつき算ともいう。後方から追掛けて、追いつき追い越すまでの時間や距離を求める。
周囲算：2人が同じ方向や反対方向に円上を回るときに出会う（追いつく）時間や距離を求める。
通過算：列車がある場所を通過する時間、列車と列車がすれ違う時間、列車が列車を追い越す時間等を求める。
往復算：往きと帰りで速さが違う場合の時間や距離を求める。

図1 旅人算の5つの類型（三塚1991）

2) 中学校教科書に見る旅人算

本節では、中学校の教科書においてどのような旅人算が題材として扱われているかを具体的に検討する。教科書は東京書籍の中学校第1学年から第3学年までを調査した。その結果、(1) 方程式の利用（追掛算：図2，図3），(2) 連立方程式の利用（速さが変化する問題：図4，図5，周囲算：図6），(3) 1次関数のグラフの利用（追掛算：図7，図8），(4) 関数 $y=ax^2$ の利用（追掛算：図9）と多くの単元で取り扱われている。中学校の教科書では、追掛算が多く採り上げられ、速さが変化する問題や周囲算も扱われている。速さが変化する問題は、三塚（1991）の類型にはないが、往復算の変形と考えられ、旅人算の一種と捉えられる。図2から図8の問題は、平成20年度版学習指導要領に対応した教科書（藤井ら 2011）からで、図9は平成10年度版学習指導要領に対応した教科書（杉山ら 2006）からである。本研究では、紙面の都合で詳細については述べないが、他の教科書でも同様に旅人算が同じような単元で題材として取り扱われていた。

(1) 方程式の利用 (中学校第1学年)

例 3 弟は家を出発して学校に向かいました。
その4分後に、兄は家を出発して弟を追いかけました。
弟の歩く速さを毎分50m、兄の歩く速さを毎分70mとすると、兄は家を出発してから何分後に弟に追いつきますか。

図2 追掛算① (中1, p.95)

問 4 姉は9時に家を出発して駅に向かいました。
姉の忘れものに気づいた妹が、9時10分に家を出発して、自転車で姉を追いかけました。
姉の歩く速さを毎分60m、妹の自転車の速さを毎分210mとすると、
妹が姉に追いつくのは、9時何分ですか。

図3 追掛算② (中1, p.96)

(2) 連立方程式の利用 (中学校第2学年)

例 2 Aさんは10時に家を出発して、1200mはなれた駅に向かいました。はじめは毎分50mの速さで歩いていましたが、列車に乗りおくれそうになったので、途中から毎分80mの速さで走ったら、駅には10時18分に着きました。歩いた道のりと走った道のりは、それぞれ何mですか。

図4 速さが変化する問題① (中2, p.46)

問 4 ただしさんは、お兄さんとドライブに出かけました。目的地まで、高速道路は時速80km、ふつうの道路は時速40kmで走り、全体では3時間かかりました。走った道のりが全部で200kmとすると、高速道路とふつうの道路は、それぞれ何kmありましたか。

図5 速さが変化する問題② (中2, p.46)

4 周囲が3600mの池があります。この池を、Aは自転車で、Bは徒歩でまわります。同じところを同時に出発して、反対の方向にまわると15分後に会います。また、同じ方向にまわると、AはBに30分後に追いつきます。A、Bそれぞれの速さは毎分何mですか。

図6 周囲算 (東京書籍 中2, p.50)

(3) 1次関数のグラフの利用 (中学校第2学年)

問 4 ひろこさんは、9時に家を出発し、自転車で12kmはなれた公園まで行きました。左のグラフは、そのときのようすを途中まで表したものです。
(1) 最初は、時速何kmで進みましたか。
(2) 家から6kmの地点で10分間休みました。
そのことをグラフにかき入れなさい。
(3) 10時に公園に着くには、休んだ後は時速何kmで走ればよいですか。

問 5 問4で、ひろこさんは、休み始めてから5分間たったとき、自転車で家から公園に向かって歩いている姉に追いこされましたが、公園には姉と同時に着きました。姉は休まずに一定の速さで走ったとすると、姉が家を出発したのは9時何分と考えられますか。

図7 追掛算③ (中2, p.80)

2 弟が午前10時に家を出発し、自転車でA町まで行き、A町からは歩いてB町に行きました。
右のグラフは、弟が家を出発してからの時間と道のりの関係を表したものです。
このとき、次の間に答えなさい。
(1) 自転車で家からA町まで行ったときの、自転車の時速を求めなさい。
(2) 10時20分に、姉が時速18kmの自転車で家を出発し、弟を追いかけました。姉が弟に追いつく時刻を、グラフをかいて求めなさい。
また、追いつくのは家から何kmの地点か、求めなさい。

1次関数のグラフの利用
◎p.80問4

図8 追掛算④ (中2, p.83)

(4) 関数 $y=ax^2$ の利用 (中学校第3学年)

AさんとBさんは、長さ40mの坂の上から同時におり始めました。Aさんは毎秒4mの速さで、また、Bさんはスケートボードに乗って、こがずに坂をおりています。Bさんは、坂をおり始めてから x 秒間に $\frac{1}{2}x^2$ m進みます。Aさんは、Bさんに何秒後に追いつかれますか。

図9 追掛算⑤ (中3, p.95, p.152 ~ 154)

3) 全国学力学習状況調査の旅人算に関する問題の結果

平成26年度の学力学習状況調査のB問題の6において、旅人算(追掛算)が出題されている(図10)。設問(1)の正答率は63.3%(正答:600-400=200)、誤答で400と解答したのは16.1%、無解答は8.7%であった。この結果に対して「与えられたグラフを事象に即して解釈することに課題がある」ことが指摘されている(文科省等2014, 波線は筆者)。また、設問(2)の正答率は80.1%(正答:ウ)、無解答は2.4%であった。設問(3)の正答率は30.7%、無解答は17.1%であった。設問(3)の正答の条件は、「点A, 点B」と解答し、次の(a), (b)のいずれかについて記述しているものである。

- (a) 点Aと点Bを結んだグラフから、その傾向を読み取る(解答類型1)、
- (b) 点Aと点Bを結んだグラフから、家から駅までの道のりと兄の進んだ時間を読み取り、家から駅までの道のりを兄の進んだ時間でわる(解答類型2)、

この結果に対して「グラフの傾きや交点の意味を事象に即して解釈し、結果を改善して問題を解決する方法を数学的に説明することに課題がある」ことが指摘されている(文科省等2014, 波線は筆者)。また、解説資料(平成26年度)には、学習指導に当たって、以下の3点が述べられている。

- ① 事象を数学的に表現したり、数学的な表現を事象に即して解釈したりすることができるようにする。(対応設問:設問(1), 波線は筆者)
- ② 問題解決の結果を評価し改善することができるようにする(対応設問:設問(2), (3))
- ③ 問題解決のために数学を活用する方法を考え、説明できるようにする(対応設問:設問(3))

これらの結果からは、旅人算の問題場面(事象)を正しく理解しグラフ(数学的表現)に表すことや、グラフ(数学的表現)から問題場面(事象)を想起し解釈・説明することができていないことが分かる。つまり、指導において問題場面(事象)とグラフ(数学的表現)の関連付けができていないことが示唆される。授業において、問題場面(事象)とグラフ(数学的表現)とを意識して関連付けるような活動や教材、指導法を取り入れることが必要と考える。

6 次の問題について、グラフを使って考えます。

問題

家から600m離れた駅に向かって、弟が家を出発し分速60mで歩いています。兄が弟の忘れ物に気づいて、同じ道を追いかけてきました。弟が出発してから6分後に分速100mで追いかけると、兄は弟に追いつくことができますでしょうか。

また、追いつくことができない場合は、どうすれば兄は弟に追いつくことができましたでしょうか。

下の図は、弟が出発してからの時間を x 分、家から駅に向かって進んだ道を y mとして、弟と兄の進むようすを、それぞれ線分OA、線分BCで表したグラフです。

弟と兄の進むようす

次の(1)から(3)までの各問いに答えなさい。

(1) 弟と兄の進むようすから、弟が駅に着くまでに、兄は弟に追いつけないことがわかります。弟が駅に着いたとき、兄は駅まであと何mの地点にいますか。

(2) 兄の出発する時間を変えれば、兄の速さが分速100mのままでも、弟が駅に着いたときに、ちょうど兄が弟に追いつくことができます。このようすを表したグラフを、下のアからエまでの中から1つ選びなさい。

ア

イ

ウ

エ

(3) 兄の速さを変えれば、出発する時間を変えなくても、弟が駅に着いたときに、ちょうど兄が弟に追いつくことができます。このようすをグラフに表すには、弟と兄の進むようすの4点O、A、B、Cのうち、どの2点を結べばよいですか。その2点を書きなさい。また、その2点を結んだグラフから兄の速さを求める方法を説明しなさい。ただし、実際に兄の速さを求める必要はありません。

図10 学力学習状況調査のB問題の6 (平成26年度)

4) 中学生に対する旅人算調査

(1) 調査問題

中学校数学の第1学年と第2学年の教科書(藤井ら2011)から、以下の3題を調査問題(図11)とした。

[1] 方程式の利用 [追掛算] (図2, 中学校第1学年, 東京書籍, p.95)

[2] 連立方程式の利用 [速度が変化する問題] (図4, 中学校第2学年, 東京書籍, p.46)

[3] 1次関数のグラフの利用 [追掛算] (図7, 中学校第2学年, 東京書籍, p.80)

(2) 調査の概要と結果

① 調査対象: 公立中学校 第2学年 生徒 34名×3学級=102名

対象校は調査問題が載っている教科書を使用。

② 調査時期: 平成26年11月下旬(約30分間)

③ 調査結果

調査問題は教科書にある問題であり、すでに既習であるにもかかわらず、問題 [1] [2] ともに約4分の1の生徒しか正答を得ていない(表1)。問題 [1] [2] ともに無答の生徒も3割前後おり、解決が困難な問題だったと言える(表1)。問題 [3] はグラフが与えられていることや小問に分かれているため、問題 [1] [2] に比べ正答率が高かったと考えられる(表1)。表2は問題 [1] の解決方略毎の割合(%)と正誤数(人数)である。中学校で学んだ方程式より

も表（17.6%）や計算のみ（17.6%）を使って解く生徒が多かった。表3は問題 [2] の解決方略毎の割合（%）と正誤数（人数）である。問題 [1] とは異なり方程式のみ（20.6%）や線分図（16.7%）を使って解く生徒が多かった。

[1] 弟は家を出発して学校に向かいました。その4分後に、兄は家を出発して弟を追いかけてきました。弟の歩く速さを毎分50m、兄の歩く速さを毎分70mとすると、兄は家を出発してから何分後に弟に追いつきますか。

[2] Aさんは10時に家を出発して、1200mはなれた駅に向かいました。はじめは毎分50mの速さで歩いていましたが、列車に乗り遅れそうになったので、途中から毎分80mの速さで走ったら、駅には10時18分に着きました。歩いた道のりと走った道のりは、それぞれ何mですか。

[3] ひろこさんは、9時に家を出発し、自転車で12kmはなれた公園まで行きました。右のグラフは、そのときのようすを途中まで表したものです。

① 最初は、時速何 km で進みましたか。

② 家から6kmの地点で10分間休みました。そのことをグラフにかき入れなさい。

③ 10時に公園に着くには、休んだ後は時速何 km で走ればよいですか。

④ ひろこさんは、休み始めてから5分間たったとき、自転車で家から公園に向かっていてる姉に追いこされましたが、公園には姉と同時に着きました。姉は休まずに一定の速さで走ったとすると、姉が家を出発したのは9時何分と考えられますか。

図11 調査問題

表1 調査結果 (単位：%, N=102)

	[1]	[2]	[3] ①	[3] ②	[3] ③	[3] ④
正答	27.5	25.5	52.9	78.4	41.2	60.8
誤答	44.1	38.2	30.4	3.9	29.4	5.9
無答	28.4	36.3	16.7	17.6	29.4	33.3

表2 設問 [1] の解決方略 (単位：%, 人, N=102)

方略	表	計算のみ	方程式のみ	線分図	グラフ	答のみ	その他	無答
割合	17.6	17.6	13.7	2.0	2.0	10.8	7.8	28.4
正答	8	13	4	0	0	3	0	
誤答	10	5	10	2	2	8	8	29

表3 設問 [2] の解決方略 (単位：%, 人, N=102)

方略	表	計算のみ	方程式のみ	線分図	グラフ	答のみ	その他	無答
割合	0	13.7	20.6	16.7	2.0	10.8	0	36.3
正答	0	2	15	1	0	8	0	
誤答	0	12	6	16	2	3	0	37

④ 問題 [1] の誤答分析

線分図を用いた生徒は2名(2.0%)いたがどちらも正答を得ていない。例えば、生徒Aは、4分からの弟の移動距離と兄の移動距離を等しく取っている(図12)。しかし、等しいのは、家からの移動距離である。表を用いた生徒は18名(17.6%)と多いが10名は正答を得ていない。例えば、生徒Bは4分後の兄の位置を0mとすべきところを70mとしている(図13)。このように線分図や表において弟と兄の位置が問題場面とずれている間違いが多く見られ、経過時間毎の弟と兄の位置を正しく捉えることができていないことが分かる。

グラフを用いた生徒は2名(2.0%)いたがどちらも正答を得ていない。例えば、生徒Cは、グラフの概形をある程度正しく描いているが、兄のグラフを表す式のy切片が時間を表しており、経過時間と移動距離との関係を式に正しく表すことができていない(図14)。また、グラフを正確に描くことで正答を得ることもできるが、グラフには目盛りがなく交点を読み取れず、グラフが問題解決の道具としてうまく活用されていない。

方程式のみを用いた生徒は14名(13.7%)いたが10名は正答を得ていない。例えば、生徒Dは、弟の方(図15の方程式の左辺のx)に4分を加えなければならないが、兄の方(図15の方程式の右辺のx)から4分を引いている(図15)。求めなければならないのは、兄が家を出発してからの時間であるが、この方程式で得た解答は弟が家を出発してから兄が追いつくまでの時間である。問題場面では、弟の経過時間と、兄の経過時間の2つの経過時間があり、問題場面の理解ではそのことを意識しなければならない。しかし、図15の解答では「追いつく時間をx分とする」と記述してはいるものの、弟が家を出発してからの時間なのか、兄が家を出発してからの時間なのかが不明であり、2つの経過時間を意識していないことが分かる。

教科書には、線分図(図16)やグラフ(図17)とともに解法が示され、教師もこれらを活用して指導をしている。しかし、実際には、線分図やグラフを活用して問題を解いている生徒(4.0%)は少なかった。表や線分図、グラフを用いて解いている生徒でも問題場면을正しくそれらに反映できていない。無答の生徒も多く、問題場면을正しく理解できていないものと考えられる。その原因として、時間の経過に伴って問題に登場する2人の人物(弟と兄)の位置が変化し、問題場面(経過時間毎の弟と兄の位置関係、弟と兄の経過時間の違い)を正しく捉えることに困難が伴うものと考えられる。

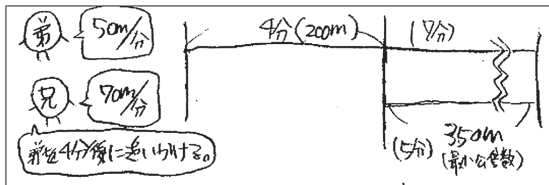


図12 生徒Aの線分図

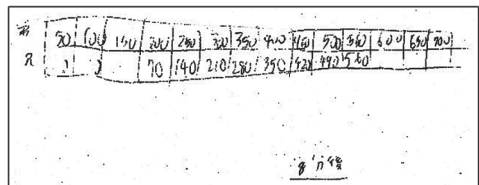


図13 生徒Bの表

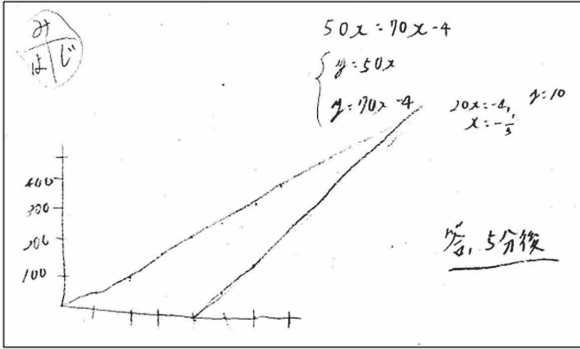


図14 生徒Cのグラフ

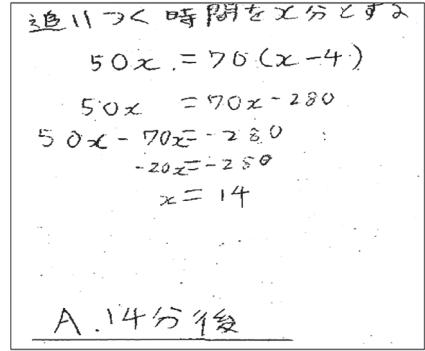


図15 生徒Dの方程式

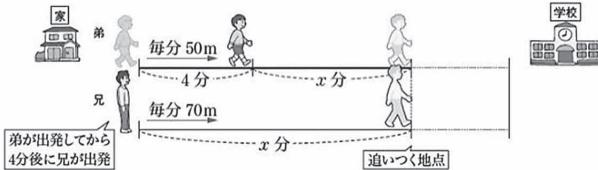


図16 教科書の線分図 (中1, p.95)

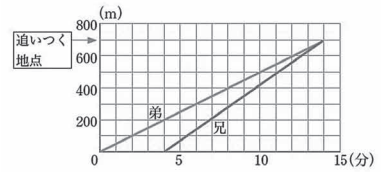


図17 教科書のグラフ (中1, p.95)

⑤ 問題 [2] の誤答分析

問題 [2] の結果は、問題 [1] の結果と比較すると、正答率は低く (25.5%)、無答の割合も多かった (36.3%)。問題に出てくる人物は1人であり、問題 [1] よりも問題場面を把握しやすいものと考えられるが、未知数 (歩いた道のりと走った道のり) が2つになったために難しかったものと考えられる。

線分図は多くの生徒が解決方略として使っている (16.7%) が、線分図を使った生徒のほとんどが正答を得ていない (線分図を用いた生徒のうち 94.1%)。線分図を使った生徒が多かったことは、問題 [2] は登場人物が1名であり1本の線分図で表すことができるからだと考えられる。例えば、生徒Eは図18の線分図を描いているが、計算では全体の移動距離 (1200m) を部分の速さ (50m/秒, 80m/秒) で割っている。線分図はある程度正しく描けているのに、立式に線分図がうまく活かされていない。授業においては、図19の線分図を用いて指導がなされているが、図18の線分図では、未知数 (歩いた道のりと走った道のり) が示されておらず、全体 (全体の移動時間, 全体の移動距離) と部分 (歩いた時間と距離, 走った時間と距離) の関係が線分図からは読み取れない。与えられた数値と未知数との関係が数直線上に表されるように書く必要がある。

グラフを利用して解答した生徒は2名 (2.0%) であったが、どちらも正答を得ていない。例えば、生徒Fは図20のグラフを書いているが、問題 [2] では途中から速さが速くなっていくにもかかわらず、グラフの傾きは前半のグラフよりも緩やかになっており、問題場面の状況がグラフに正しく反映されていない。問題場面を正しく理解していれば、与えられた条件からグラフを活用して正答を得ることも可能である。

方程式のみを用いて解答した生徒は 20.6% おり、最も多く 5人に1人の割合である。しかし、

ICTを活用した動的視覚化と発展的探究を取り入れた指導の可能性

正答を得ていない生徒もいる（方程式で解答した生徒のうち28.6%）。例えば、生徒Gは、距離の関係は正しく式に表すことができているのに、時間の関係を正しく式に表すことができていない（図21）。しかも、計算でも間違えている。

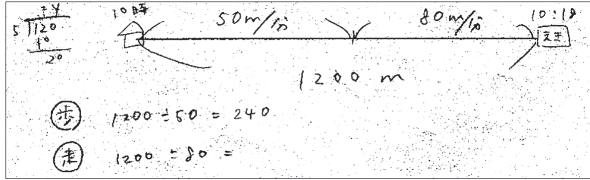


図18 生徒Eの線分図

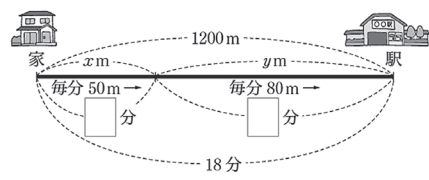


図19 教科書の線分図（中2，p.46）

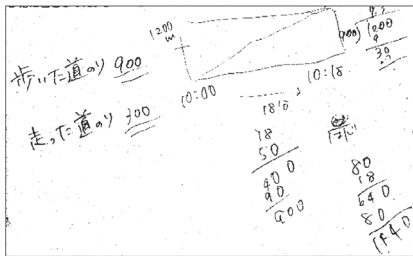


図20 生徒Fのグラフ

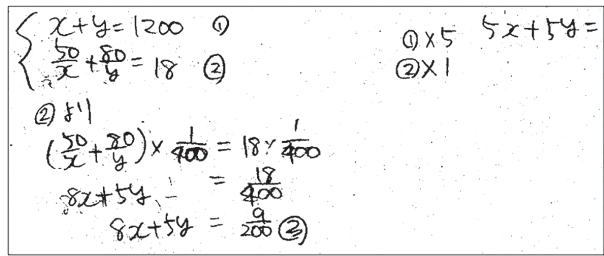


図21 生徒Gの方程式

問題 [1] [2] の誤答分析から、中学生の旅人算の問題場面の理解の様相を以下にまとめる。問題 [1] からは、

- ① 表や数直線において、経過時間毎の弟と兄の位置が問題場面とずれていることから、経過時間毎の弟と兄の位置関係を正しく捉えられていない。
- ② 方程式の立式の状況から、2つの経過時間（弟の経過時間、兄の経過時間）が意識化されていない。
- ③ グラフを正確に描いていないことから、グラフが問題解決の道具として活用されていない。

問題 [2] からは、

- ④ 登場人物が一人で、問題 [1] より線分図を描きやすいと考えられるが、立式にも役立っておらず、正答率も低いことから、未知数が線分図のどの部分にあたるのかを捉えていない。
- ⑤ グラフの直線の傾きが問題の状況を反映していないことから、問題の状況とグラフの意味（傾きの意味）を正しく捉えられていない。

これらのことは、指導において中学生の旅人算の問題場面の理解を支援する観点として重要と考える。以下の章では、登場人物が2名である問題 [1] を中心に考察をする。

3. ICTを活用した動的視覚化と発展的探究

1) ICTを活用した動的視覚化

波平（2012）は「意味の伝達を目的に論理的内容の教育（たとえば数学，工学等）を対象

として、内容の核心部分をコンピュータで視覚化し、論理の展開に従ってこれを視覚的に逐次追っていく（すなわち、動的に視覚化する）教育方法」を動的視覚化とし、この動的視覚化を適切に行えば「含まれる要素間の時間的・空間的な変化、因果の系列、相互関連等が連続的に一望の内に画面上に現れる。すなわち、われわれは論理の総合的な意味を、その動的視覚化により視覚的に悟性を通してほぼ瞬時に理解することができる」と述べている。ここで、悟性とは、「物事を判断し、考える能力。思考力。知性。（小学館新選国語辞典新版1986）」を指している。旅人算の問題場面を動的視覚化することで、前章の中学生旅人算調査の分析結果で示唆された観点の①から⑤を支援し問題場面の理解を促進することができるものとする。そこで、本研究では波平（2012）の動的視覚化を参考に、動的視覚化を「時間の経過に伴って変わる問題場面を逐次視覚化すること」と定義する。

教科書にある線分図やグラフは静的であるが、旅人算の問題に登場する人物には動きがあり、時間の経過に伴う問題場面の变化の様相を十分に表現できていない。ICTを活用して問題場面を動的視覚化した線分図表示やグラフ表示は、時間経過に伴う登場人物の動きの変化を逐次視覚的に表すことができ、生徒の問題場面の理解を支援できるものとする。動的視覚化を図るICTとして、TI-Nspire、GeoGebra、Cabri- II Plus等が考えられるが、本研究では、TI-Nspireを用いて考察する。TI-Nspireは、図形表示やグラフ表示が比較的簡単にできること、パソコン（Windows、Mac）、タブレット、グラフ電卓で使用できることなど、多様な環境で活用できる利点がある。

動的視覚化の具体例を追掛算①（図2）の問題を用いて述べる。図22と図23は、図2の追掛算①の問題をTI-Nspireを用いて動的視覚化したものの1場面である。図22と図23の左図は、線分図表現したもので、それぞれ兄が家を出発した直後（4.1分後）の弟と兄の位置（弟は家から200mを過ぎた所、兄は家の近く）、兄が弟に追いつく直前（弟が家を出発して13.9分後、兄が家を出発して9.9分後）の弟と兄の位置（弟も兄も家からの距離がほぼ同じになる）が視覚的に分かる。しかも、時間経過に伴って逐次変化する弟と兄の位置が順次視覚的に確認できる。つまり、動的視覚化による線分図表示は、経過時間毎に登場人物の位置を線分図上に表したものである。言い換えると、異なる時間毎に弟と兄の位置関係の線分図を多数書いたものと考えることができる。教科書にある線分図（図16）は、弟が出発する場面、4分後の場面、追いつく場面の3場面を同時に表している。弟が出発する場面と出会う場面は、弟と兄が薄く表示されてはいるが、3つの場面の様子をそれぞれ理解することは難しいものと考えられる。それを補足するものとして、動的視覚化による線分図表示が活用できる。また、時間経過に伴って、2つの人物が動くことを見ることで、それぞれの経過時間を意識化することができる。従って、動的視覚化による線分図表示は、前章の観点の①と②に対応した支援となる。

図22と図23の右図は、グラフ表現したもので、経過時間（x軸方向に右に行く）に従って、弟と兄が座標平面表を移動し、軌跡としてグラフを作成していくことで、家からの距離（y軸方向に上に行く）が視覚的に捉えられ、グラフの意味（交点が出会う場所であること、x軸は時間、y軸は距離、グラフの傾きは速さ）が理解できる。つまり、グラフ表示は、ただ単に弟と兄が動いた結果としてのグラフという意味だけではなく、経過時間と共に移動距離をグラフとして動的に表示していくプロセスであるという意味でもある。そうすることで、例えば、5分後の弟と兄の位置は、 $x=5$ を通りy軸に平行な直線上にある弟と兄の位置であることが理解できる。また、時間とともに2つのグラフが同時にできることで、それぞれの経過時間を意識

化することができる。従って、動的視覚化によるグラフ表示は、前章の観点の②と③に対応した支援となる。

同様に、その他の旅人算の問題（図3から図9まで）をそれぞれ動的視覚化したものを本論文末に資料（1）として示す。特に、図6の周囲算の問題では、グラフ表示、線分図表示だけでなく、状況表示も開発した。状況表示は、問題場面と同じような状況（2人が周囲を回る様子）を動的に視覚化したものである。追掛算や出会算等は、線分図表示が問題の状況を表しており、線分図表示が状況表示とも言える。

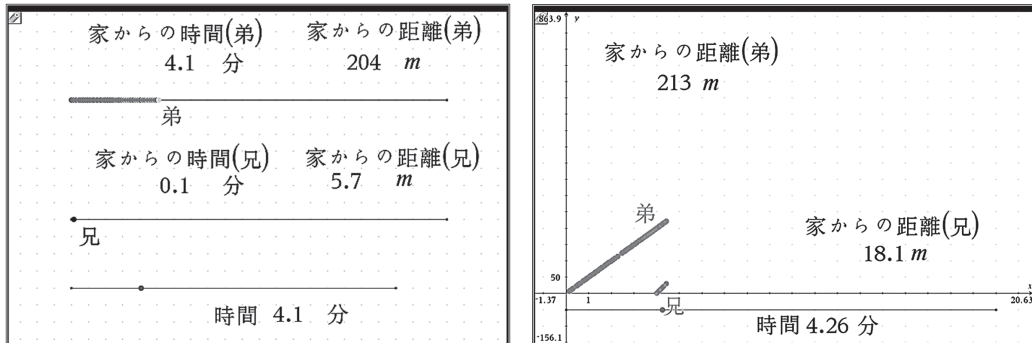


図22 追掛算①（図2）の画面（兄が家を出発した直後）

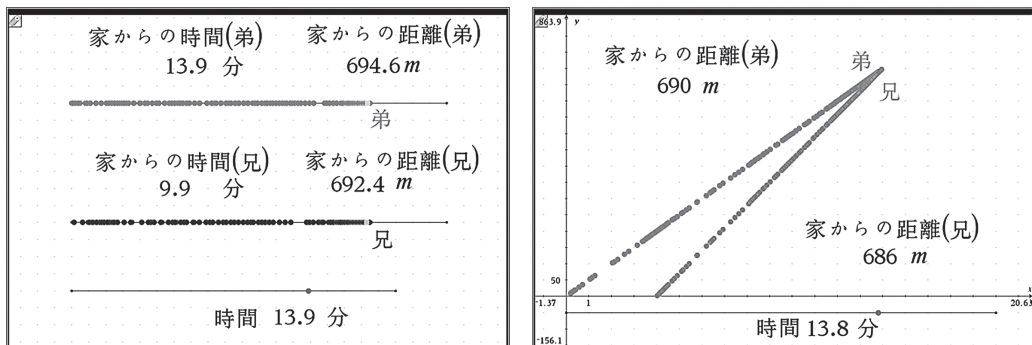


図23 追掛算①（図2）の画面（弟と兄が出会う直前）

2) ICTを活用した発展的探究

ICTを活用して動的視覚化した線分図表示やグラフ表示は、数値やグラフを変えるだけで簡単に弟や兄の動く速さや向き、出発する位置や時刻などを変えることができる。数値やグラフを変えるとどのように問題の状況や解が変わるかを探査することで、線分図やグラフ（数学的表現）を事象（問題場面）に即して解釈する能力が育成されることが期待できる。このように問題の状況（数学的表現）を変えることで、与えられた問題を発展させたり、与えられた問題とは異なる事象の変化に着目して探究したりすることができる。このように与えられた問題をさらに発展させて考える活動を本研究では発展的探究と呼ぶことにする。つまり、本研究では、問題や解法等の発展を意図して探究する活動を発展的探究と定義する。

例えば、図24は、追掛算①（図2）の発展的探究の例である。兄の歩く様子を示すグラフ表

示を図24のように変えると「問題がどう変わるか」や「解答はどう変わるか」を考える。図24の左図は、図23の右図よりも兄の動く傾きが急になり弟と出会う位置も早くなった。この場合、何がどう変わったかを探究する。問題の状況としては、兄の速さが分速70mから分速100mに変わっている。また、兄のグラフは、 $y=70x-280$ から $y=100x-300$ になった。問題としては「弟は家を出発して学校に向かいました。その3分後に、兄は家を出発して弟を追いかけてきました。弟の歩く速さを毎分50m、兄の歩く速さを毎分100mとすると、兄は家を出発してから何分後に弟に追いつきますか(波線が変わったところ)」と変わる。この時の解答は「兄が出発してから3分後」となる。これらのことはグラフ表示から読み取ることができる。

同様に、図24の右図は、兄の動く様子を変えずに弟の動く様子を変えたものである。問題の状況としては、学校から弟が家に向かって分速50mで動いていることになる。弟のグラフは、 $y=50x$ から $y=800-50x$ になる。問題としては「弟は学校を出発して家に向かいました。その4分後に、兄は家を出発して学校に向かいました。弟の歩く速さを毎分50m、兄の歩く速さを毎分70mとすると、兄は家を出発してから何分後に弟に出会えますか(波線が変わったところ)」となり、追掛算から出合算に変わる。この時の解答は「兄が出発してから4分後」となる。これらのことはグラフ表示から読み取ることが可能である。このようにグラフ表示を変えることで、問題の状況を変えることが可能であり、変えたことによって変わるものを視覚的に探究し確認できる。また、その結果を方程式や計算で代数的に確認することができる。これらの活動は、前章の全国学力学習調査の結果で明らかとなった「事象(問題場面)と数学的表現(グラフ)の関連付け」を促進するものと考えられる。

また、兄弟の距離の差は時間とともにどう変わるかを探究するためにICTのグラフや表を活用して考えたものが図25である。図25の左側は、追掛算①の問題において、弟と兄の距離の差を視覚的に表したものである。図25の右上の表は、左の動的な動きに合わせて、自動で、時間と兄弟の距離の差をデータとして取り込み表を作成したものである。図25の右下のグラフは、その表を基に、時間と弟と兄の距離の差をグラフ($y=-20x+200$ は回帰直線を求める機能で自動的に求められる)にしたものである。この結果からは、

$$(\text{追いつくまでの時間}) = (\text{最初の2人の距離の差}) \div (\text{2人の速さの差})$$

の関係があることに気づく。このような発展的探究を通して、新たな解決方法(追掛算の一般的解法)を見出すことが期待できる。

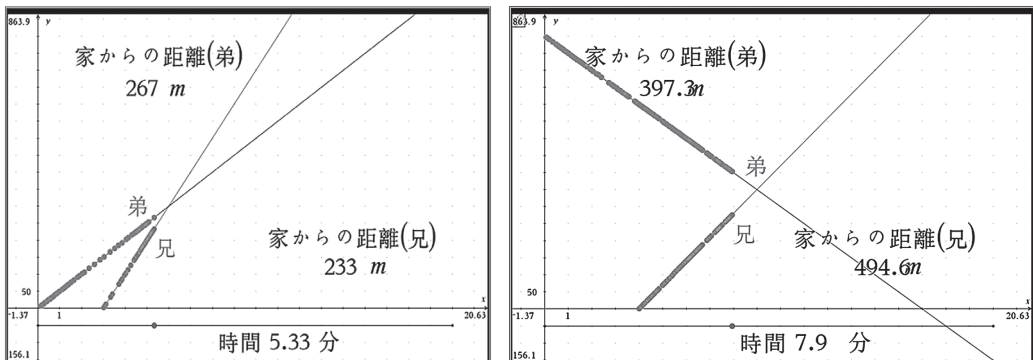


図24 追掛算①(図2)の発展的探究(速さや向きを変える)

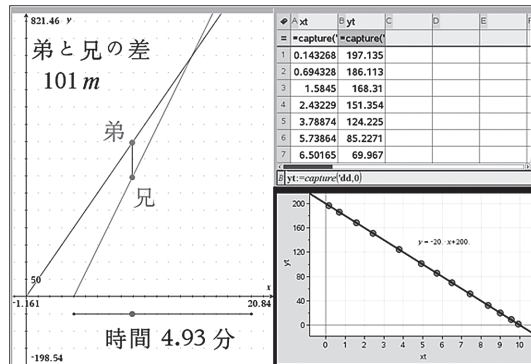


図25 追掛算① (図2) の発展的探究 (時間と兄弟の距離の差の関係)

4. ICTを活用した動的視覚化と発展的探究を取り入れた指導の可能性

本節では、ICTを活用した動的視覚化と発展的探究を取り入れた指導の可能性について考察する。基本的には、①教師による提示（一斉指導）、②生徒主体による活動（グループ学習）の2つの指導が考えられる。学級にパソコンが1台と電子黒板1つの環境であれば①の指導になる。複数のパソコン等（タブレットやグラフ電卓を含む）があれば、②の指導も可能である。①の指導は、従来から行われている教師主導による講義形式の授業で自然に活用でき、前章で見た観点で支援が可能である。②の指導は生徒主体の学習活動が構成でき、さらに問題場面の理解が促進されるものとする。これらの場合、①の指導では動的視覚化、②の指導では発展的探究が主に取り入れられることにある。しかし、動的視覚化と発展的探究は、それぞれが別々に指導に取り入れられるよりは、それぞれの良さを生かしながら両方が指導に取り入れられる方がより効果が期待でき望ましい。

近年「教えて考えさせる授業」が生徒の学ぶ意欲と深い理解を育む授業デザインとして注目されている（市川2013）。実際、中央教育審議会教育課程部会（平成19年1月26日）の教育課程の枠組の改善においても「審議経過報告では、現行の学習指導要領に至るまでのある一時期において、子どもの自主性を強調する余り、教師が指導を躊躇する状況があったのではないかと指摘した。学校教育においては、基礎的・基本的な知識・技能を確実に定着させる上で、教えて考えさせる指導の徹底が重要であることを改めて強調したい（波線は筆者）」と述べられている。生徒が考えるために必要なことはしっかりと指導することが大切であると筆者も考える。市川（2013）はこの「教えて考えさせる授業」の基本的な特徴として「教師からの説明」「理解確認」「理解深化」「自己評価」の4段階をあげている。ICTを活用した動的視覚化と発展的探究を取り入れた指導をこの「教えて考えさせる授業」に位置付けることでより効果的な指導ができる可能性があると考えられる。それは以下の2つの理由による。1つ目は、動的視覚化は「教師からの説明」と「理解確認」の段階で活用できることである。これらの段階では、教材、教具、操作活動などを工夫し教師主導で分かりやすく説明し、生徒との対話や発言などから理解状況を確認することが求められている（市川2013）。旅人算の指導では従来から線分図やグラフなどを活用して説明がなされてきた。しかし、中学生を対象とした調査結果からも分かるよ

うに問題場面の状況を多くの生徒が理解できるように指導できていない状況がある。しかし、第3章の第1節で述べているように動的視覚化は「教師からの説明」と「理解確認」の段階を支援する手立てとして十分に機能するものと考え。2つ目は、発展的探究は「理解深化」の段階で活用できることである。「理解深化」の段階では多くの生徒が誤解しそうな問題や教えられたことを使って考えさせる発展的な課題（理解深化課題，応用・発展的問題）を用意することが必要である（市川2013）。第3章の第2節で述べているように発展的探究はまさにそのような発展的な課題を生徒が主体的に作成可能である。このように ICT を活用した動的視覚化と発展的探究を取り入れた指導は「教えて考えさせる授業」を構成する1つの手段となるものと考え。市川（2013）は「教えて考えさせる授業」は「習得で教えて，探究で考えさせる」というように習得と探究を区別して考えるのではなく，習得には「教える」とことと主体的構成の両方が必要であることを述べている。このことは旅人算の場合についても同様に言えることと考える。動的視覚化を用いて教えること（支援の観点の①から⑤）はしっかりと教え，発展的探究により問題場面の理解を主体的に構成することの両方により，問題場面の理解がさらに深まり，問題場面の理解の支援が可能となるものと考え。

5. まとめと課題

本研究では，ICT を活用した動的視覚化と発展的探究を取り得た指導の可能性について，旅人算の問題場面の理解の支援に焦点を当てて検討してきた。その結果，旅人算の中学生の理解では，①事象（問題場面）と線分図やグラフ（数学的表現）との関連付けができていないこと，②経過時間毎の登場人物の位置関係が理解できないこと，③2つの経過時間を意識化していないこと，④グラフが問題解決の道具として活用されていないことなどが分かった。これらの観点を支援するために動的視覚化と発展的探究を取り入れた指導を行うことで，1）事象（問題場面）と数学的表現（表や線分図，グラフ）との関連付け，2）線分図やグラフの意味理解の促進等の有効性が考察された。

また，ICT を活用した動的視覚化と発展的探究を取り入れた指導を「教えて考えさせる授業」を構成する1つの方法として位置付けることで効果的に旅人算の問題場面の理解を支援できる可能性が示唆された。

今後は実際に中学校で実践を行い，ICT を活用した動的視覚化と発展的探究を取り入れた指導の具体的な効果を検討することが課題である。その際，①数学指導においていつでも使える ICT 環境が整備されていること，②今回使用した ICT の操作は簡単ではあるがある程度の初歩的な操作スキルは指導者と生徒が身につけておく必要があること，③ICT を数学指導で活用する意義や目的を指導者が理解していること（本論で提案している部分でもある）が必要であることが重要であり，これらを配慮して実践したいと考えている。

さらに，本研究では，旅人算に焦点を当てて考察したが，他の題材においても ICT を活用した動的視覚化と発展的探究を取り入れた指導を検討したい（動的問題については，中村（2015b）で考察している）。

【注記】

- (1) ICTは、Texas Instruments社のTI-Nspire CX CAS (Ver.3.9)を使用した。
- (2) 旅人算のTI-Nspireの活用方法は、Texas Instruments社のWeb上の教材 (Algebra 1: Trains in Motion) を参考にした。http://education.ti.com/en/timathnspired/us/ (2015.2.16最終参照)

【謝辞】

調査に協力いただいた中学校の生徒及び教師にこの場をお借りし厚くお礼申し上げます。

【付記】

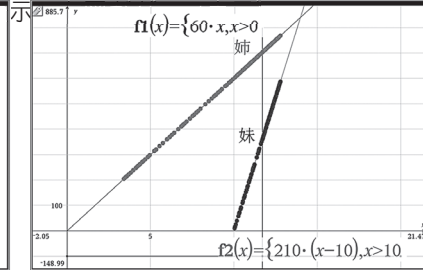
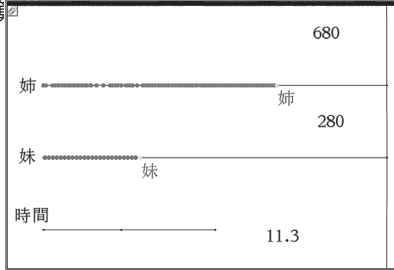
本研究は科学研究費補助金「基盤研究 (C)」課題番号24531096によって行われた。

【引用・参考文献】

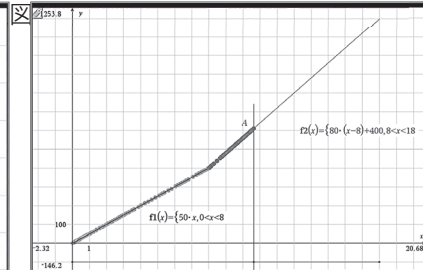
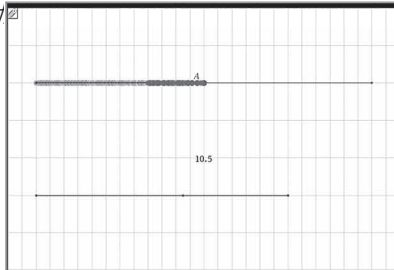
- 中央教育審議会教育課程部会 (2007) 「第3期教育課程部会の審議の状況について」 (平成19年1月26日) (教育課程の枠組み関連部分抜粋) http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chukyo/chukyo3/siryo/07061432/004.htm (2015年5月8日最終参照)。
- 藤井齊亮, 俣野博ほか 39名 (2011) 新しい数学1・2, 東京書籍。
- 市川伸一編 (2013) 「教えて考えさせる授業」の挑戦—学ぶ意欲と深い理解を育む授業デザイナー, 明治図書。
- 国立教育政策研究所教育課程研究センター (2014) 平成26年度全国学力・学習状況調査解説資料中学校数学～一人一人の生徒の学力・学習状況に応じた学習指導の改善・充実に向けて～
https://www.nier.go.jp/14chousa/pdf/14kaisetsu_chuu_suugaku.pdf (2015.2.16最終参照)
- 三塚泰平 (1991) 計算トレーニング, pp.64~81, 東京図書。
- 文部科学省・国立教育政策研究所 (2014) 平成26年度全国学力・学習状況調査報告書中学校数学, 一人一人の生徒の学力・学習状況に応じた学習指導の改善・充実に向けて, <https://www.nier.go.jp/14chousakekkahoukoku/report/data/mmath.pdf> (2015.2.16最終参照)
- 中村好則 (2015a) 問題場面の理解を支援する動的視覚化教材の開発, 数学教育学会誌臨時増刊2015年度数学教育学会春季年会発表論文集, pp.29-31.
- 中村好則 (2015b) 動点問題のグラフ電卓を活用した視覚化と発展的指導の有効性に関する一考察, 岩手大学教育学部研究年報, 74, pp.119-138.
- 波平博人 (2012) 教材の動的視覚化と電子黒板の活用について, 日本教育情報学会学会誌「教育情報研究」第27巻第3号, pp.27-32.
- 新村出編 (1998) 広辞苑第五版, p.1670, 岩波書店。
- 杉山吉茂, 俣野博ほか 32名 (2006) 新しい数学3, 東京書籍。

【資料】

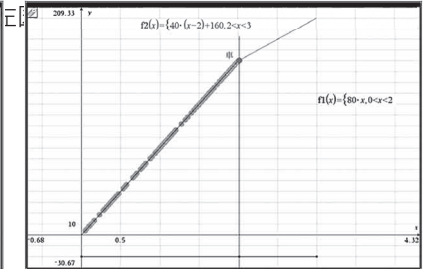
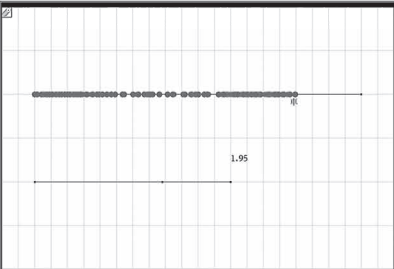
(1) 追掛



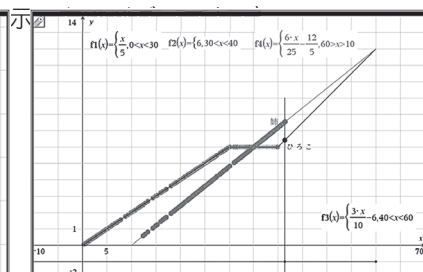
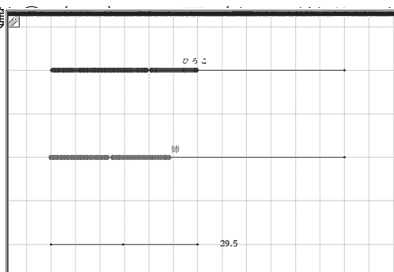
(2) 速さ



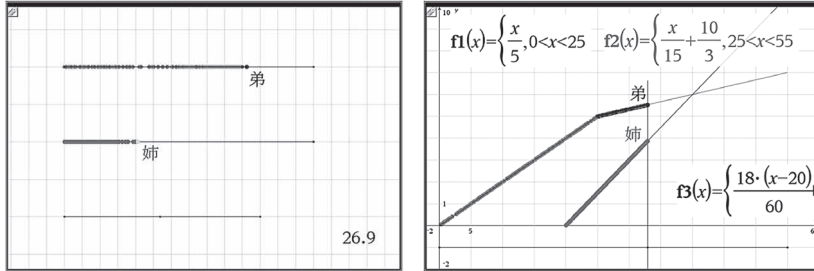
(3) 速さ



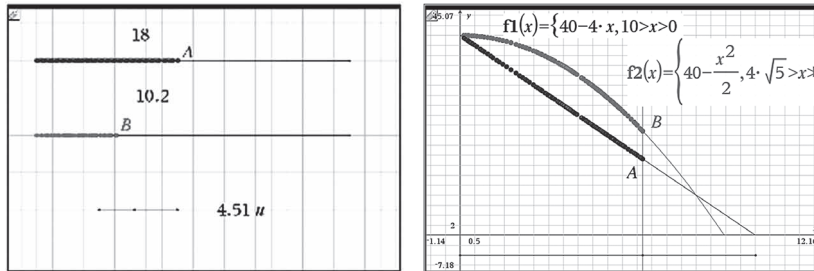
(4) 追掛



(5) 追掛算④ (図8) の画面 (左図が線分図表示, 右図がグラフ表示)



(6) 追掛算⑤ (図9) の画面 (左図が線分図表示, 右図がグラフ表示)



(7) 周囲算 (図6) の画面 (上図はグラフ表示, 中図は状況表示, 下図は線分図表示)

