岩手大学教育学部研究年報　第73巻（2014. 3）57 ～ 74

高校における「数学のよさ」を認識するための指導
－グラフ電卓を活用した放物線の探究－

中　村　好　則*

（2013年9月5日受付，2013年12月25日受理）

1．はじめに

高校数学科では，平成24年度より新学習指導要領が先行実施された。高校数学科の目標では「数学的活動を通して，数学における基本的な概念や原理・法則の体系的な理解を深め，事象を数学的に考察し表現する能力を高め，創造性の基礎を培うとともに，数学のよさを認識し，それらを積極的に活用して数学的論拠に基づいて判断する態度を育てる」ことが述べられている（文部科学省2009，下線は筆者）。生徒が「数学のよさ」を認識できるよう指導することは，高校の数学指導においても達成されなければならない重要な目標の1つである。しかし，高校の数学の授業は，教師が一方的に問題の解法を説明し，その解法が適用できるように多くの演習問題を解くという形式の授業になりがちで（高等学校数学教育研究会編2011），生徒が「数学のよさ」を認識することよりも正確に速く解法できるようになることに指導の重点がおかれ，その目標を達成することはそう容易なことではない。

そこで，本研究では，「数学のよさ」を認識するための題材として，中学校第3学年から学習する放物線を取り上げ，グラフ電卓[1]を活用した指導展開例を提案し，それらの展開過程の分析を通して，高校における「数学のよさ」を認識するための指導の在り方を考察する（研究の目的）。そのために，まず「数学のよさ」（第2章）と放物線の指導（第3章）について，文献や先行研究，中学校及び高校の教科書等を調査する。次に，それらをもとに，1）放物線の定義，2）パラボラアンテナの原理，3）放物線の性質の3つの題材で，グラフ電卓を活用した指導展開例を提案し（第4章），それらの展開過程の分析を通して，生徒が「数学のよさ」を認識するための指導の在り方を考察する（第5章）。最後に，研究のまとめと今後の課題について述べる（第6章）。

2．「数学のよさ」について

「数学のよさ」は，今回の学習指導要領の改訂（中学校は平成20年，高校は平成21年）で前回の学習指導要領（中学校は平成10年，高校は平成11年）の中学校と高等学校の目標にあっ

＊　岩手大学教育学部

た「数学的な見方や考え方のよさ」を変更したものである。そのことについて，学習指導要領解説では，『「数学のよさ」とは，数学的な見方や考え方のよさ以外に，数学の概念や原理・法則のよさ，数学的な表現や処理の仕方のよさを含み，さらに高等学校では，数学の実用性や汎用性などの数学の特徴，数学的活動や思索することの楽しさなども含んだものである』ことが述べられている（文部科学省2009，p.17）。また，変更の理由について「現在，高等学校には，数学の学習に関心や意欲を見いだせない生徒がいることも事実である。そのような高等学校の現状を踏まえ，数学の学習が単なる問題の解法の暗記にならないよう絶えず数学のよさや数学を学ぶ意義を認識させることに留意し，数学に対する関心と主体的に数学を学ぼうとする意欲を高めることが大切である」と述べている（文部科学省2009,p.17,下線は筆者)。このように，「数学のよさ」には，多くの意味を含み，それらを生徒に認識させることで高校の数学指導を改善することが求められていると言える。

ところで，「数学のよさ」には，「数学のよさ」の認識のほか，「数学のよさ」の感得などを使うこともあり，認識と感得という語句が使われることが多い。認識とは「物事を見分け，本質を理解し，正しく判断すること。また，そういう心の働き（スーパー大辞林3.0，三省堂)」，感得とは「感じ取ること。深遠な道理などをさとること。思いがけず手に入れること（スーパー大辞林3.0，三省堂)」とある。すなわち，数学の指導を通して，まずは「数学のよさ」を感得し（感じ取り),この経験を繰り返す（多面的な意味の「数学のよさ」を繰り返し感得する）ことで,「数学のよさ」の認識に至る（本質を理解する）ことができるものと考える。したがって，高校では，「数学のよさ」を感得する（感じ取る）ための指導を意識して，しかも，繰り返し行うことで，生徒に「数学のよさ」を認識させる（本質を理解させる）ことができ，学習指導要領に示された目標を達成できるものと考える。

一方，「数学のよさ」に焦点を当てた実践研究は，中学校では多数行われているが，高校においてはあまり行われていないのが現状である。実際，日本数学教育学会誌に掲載された論文において,「数学のよさ」が主題に含まれているものは,中学校では野田（2011）や松原（2011）など多数あるが，高校ではほとんどない。筆者は，これまで数学の有用性を感得するために，実験を取り入れた指導について検討し，教材化を試みてきた（中村2007）。その結果，実験を取り入れた指導では，具体的な事象と数学との関連付けができること，生徒の主体的な学習活動が構成できることなどの効果があり，「数学のよさ」（有用性としての「数学のよさ」）を感得できることが示唆された。しかし，「数学のよさ」にはもっと広い意味があり，数学の有用性の感得だけでなく，「数学のよさ」がもつ多面的な意味を感得し，認識できるような指導を検討することが課題であった。

3. 放物線の指導について

1）放物線の教科書での取り扱い

放物線については，中学校第3学年「2乗に比例する関数」，高校数学Ⅰ「2次関数」，高校数学Ⅲ「2次曲線」で学ぶ。中学校第3学年「2乗に比例する関数」では,「関数$y=ax^2$のグラフは，放物線といわれる曲線である」と述べられている（中学数学3，教育出版，p.102)。その性質として，$a>0$のとき上に開いた放物線（$a<0$のとき下に開いた放物線)，y 軸について対称，a の絶対値が多きいほどグラフの開き方は小さくなること等（放物線のグラフの特徴）を学

ぶ。また，放物線の性質（放物線の焦点の性質）が活用されている例として，パラボラアンテナが紹介されている（図1）。しかし，これは，中学校で学ぶ放物線の性質（放物線のグラフの特徴）ではなく,中学校では直接学習していない放物線の性質（放物線の焦点の性質）である。中学校学習指導要領解説数学編（文部科学省2008，p.125）では，「関数は，具体的な事象や場面とのかかわりの中で学習することが大切である。関数$y=ax^2$にかかわる具体的な事象として，例えば，理科で学習する斜面を転がる物の運動や，車の制動距離，また，噴水の水が作る形，パラボラアンテナなど，身近に感じたり目にしたりすることができるものがある」と述べられている。しかし，このように関数$y=ax^2$を用いて事象をとらえ説明することの例として，パラボラアンテナがあげられているが，実際の指導においてどのように扱うかは示されていない。

高校の数学Ⅰ「2次関数」では，「2次関数$y=ax^2$のグラフの形をした曲線を放物線という」と述べている（新編数学Ⅰ，数研出版，p.70）。放物線の性質についても，中学校と同様にほぼ同じ扱いであり，放物線のグラフの特徴を述べたものである。その後，一般の 2次関数$y=ax^2+bx+c$ も放物線になることを扱う。この教科書においても，放物線の性質（放物線の焦点の性質）が活用されている例として，パラボラアンテナが取り扱われている（図2）。しかし，放物線の焦点の性質は数学Ⅰの学習内容としては取り上げてはいない。

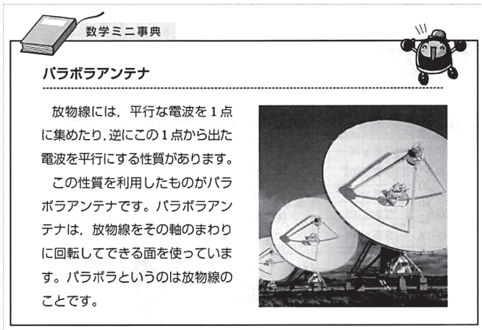

数学ミニ事典
パラボラアンテナ
放物線には，平行な電波を1点に集めたり，逆にこの1点から出た電波を平行にする性質があります。
この性質を利用したものがパラボラアンテナです。パラボラアンテナは，放物線をその軸のまわりに回転してできる面を使っています。パラボラというのは放物線のことです。

図1　中学数学3（教育出版，p.115）

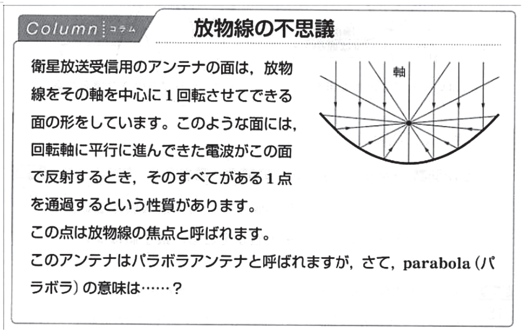

Column コラム　放物線の不思議
衛星放送受信用のアンテナの面は，放物線をその軸を中心に1回転させてできる面の形をしています。このような面には，回転軸に平行に進んできた電波がこの面で反射するとき，そのすべてがある1点を通過するという性質があります。
この点は放物線の焦点と呼ばれます。
このアンテナはパラボラアンテナと呼ばれますが，さて，parabola（パラボラ）の意味は……？

図2　新編数学Ⅰ（数研出版，p.85）

高校の数学Ⅲ「2次曲線」では，「平面上において，定点F とF を通らない直線l について，F からの距離とl からの距離とが等しい点の軌跡を放物線という」と幾何学的に定義している。また，定点F を焦点，定直線l を準線ということを学ぶ。ここでは，軸がx 軸，頂点が原点の放物線$y^2=4px$（放物線の方程式の標準形）について初めに学び，次にx とy を入れ替えた放物線$x^2=4py$（y 軸を軸とする放物線）が数学Ⅰで学習した 2次関数と一致することが扱われる。実際，高校学習指導要領解説数学編理数編（文部科学省2009，p.37）では，『放物線については，座標平面上の定点F（p，0）と，F を通らない定直線l（x=－p）までの距離が等しい点の軌跡として定義し，放物線の方程式の標準形$y^2=4px$ を導く。このとき，定点F が焦点，定直線l が準線である。なお，「数学Ⅰ」の 2次関数のグラフが放物線であることを確認しておくことも大切である』とある。ただし，数学Ⅲの履修率は 20% 前後で推移している（安野2011）ことを考えると,ほとんどの生徒は幾何学的な定義を学ばないことになる。

また，数学Ⅲでは，定点F からの距離と定直線l からの距離の比がe：1であるとき，e を2次曲線の離心率といい，$0<e<1$のとき楕円，$e=1$のとき放物線，$e>1$のとき双曲線となるこ

とを学び，2次曲線として統一的に扱われる。さらに，円錐曲線の1つとして，放物線が扱われている。例えば，数学Ⅲの教科書（長谷川ら 2012，p.57）では，教科書の本文と関連した内容（「研究」）として紹介されている（図3）。母線l と軸m のなす角をα（$0^\circ < \alpha < 90^\circ$），平面と軸m のなす角を$\theta$（$0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$）とすると，$\theta = \alpha$のとき放物線という（図5）。

さらに，数学Ⅲの教科書（長谷川ら 2012，p.68）では，2次曲線の極方程式も取り扱われている（図4）。教科書では，準線l をy 軸に平行に取っているが，ここでは，中学校第3学年や数学Ⅰの2次関数との関連を考慮し，準線l をx 軸と平行に取り考える。極O を焦点とし，極座標が（a，$\frac{3}{2}\pi$）である点A を通り始線と平行な直線l を準線とする放物線の極方程式は，$r = \frac{a}{1-\sin\theta}$ となる。実際，放物線上の点P の極座標を（r，θ），P から準線l に垂線PH を引くと，OP=r，PH=a+rsin θであるから，OP=PH より，軸がy 軸に平行な放物線の極方程式を得る（図6）。

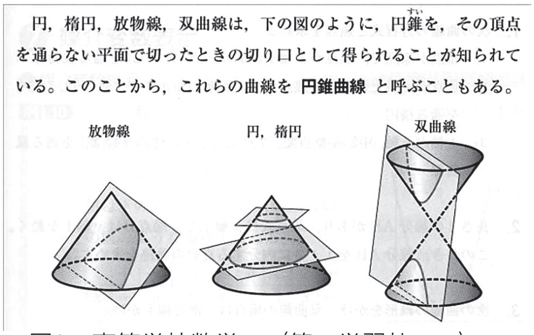
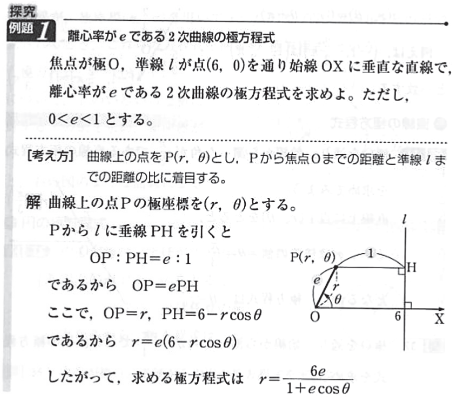

円，楕円，放物線，双曲線は，下の図のように，円錐を，その頂点を通らない平面で切ったときの切り口として得られることが知られている。このことから，これらの曲線を **円錐曲線** と呼ぶこともある。

図3　高等学校数学Ⅲ（第一学習社p.57）


探究
例題 1　離心率が e である2次曲線の極方程式

焦点が極O，準線 l が点(6, 0)を通り始線OX に垂直な直線で，離心率が e である2次曲線の極方程式を求めよ。ただし，$0<e<1$ とする。

[考え方]　曲線上の点をP(r, θ)とし，Pから焦点Oまでの距離と準線 l までの距離の比に着目する。

解　曲線上の点Pの極座標を(r, θ)とする。
Pから l に垂線PHを引くと
$\mathrm{OP}:\mathrm{PH}=e:1$
であるから　$\mathrm{OP}=e\mathrm{PH}$
ここで，$\mathrm{OP}=r$，$\mathrm{PH}=6-r\cos\theta$
であるから　$r=e(6-r\cos\theta)$
したがって，求める極方程式は　$r=\dfrac{6e}{1+e\cos\theta}$

図4　高等学校数学Ⅲ（第一学習社p.68）

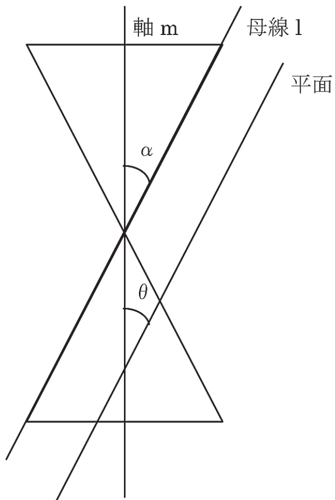


図5　円錐曲線

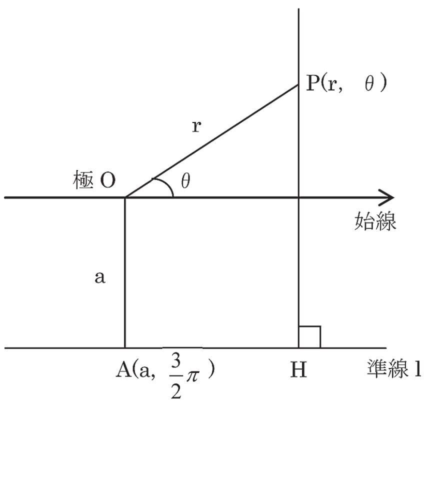


図6　極方程式

　また，x=rcos θ，y=rsin θ であるから，rcos θ=x，$x^2+y^2=r^2$を軸が y 軸に平行な放物線の極方程式に代入すると，$y=\frac{1}{2a}x^2-\frac{a}{2}$ を得ることができ，2次関数と一致することが分かる。
　さらに，数学Ⅲでは，2次曲線の媒介変数表示についても学ぶ。軸が x 軸，頂点が原点の放物線$y^2=4px$（放物線の方程式の標準形）の媒介変数表示は，$x=pt^2$，y=2pt である。しかし，先にも述べたが，数学Ⅲの履修率は 20% 前後（安野2011）で推移しており，ほとんどの生徒はこのような放物線の多様な表現（幾何学的な定義,極方程式,媒介変数表示）は学習せず,放物線と言えば一般の 2次関数$y=ax^2+bx+c$ を想起する。パラボラアンテナに活用されている放物線の焦点の性質を具体的に学習することはほとんどない。つまり，パラボラアンテナに放物線の性質が活用されていることは中学校や高校の数学Ⅰの教科書で紹介され知ってはいても，どのような性質がどこに活用されているのかを具体的には知らないことになる。放物線には多くの性質があり，その性質が日常生活で活用されているなど,「数学のよさ」を認識できるよい題材であると考えられるが，このような現状では生徒が「数学のよさ」を感得し，認識に至ることは難しいものと考える。

2）入試問題に見る放物線

　放物線の性質がパラボラアンテナに活用されていることは，高校入試にも出題されている(図7)。放物線の 2つの性質がパラボラアンテナに活用されていることを，グラフを活用して説明する問題である。放物線の性質は，中学生でも扱い方によっては十分に教材として活用可能であると言える。

3　次の文章は，パラボラアンテナのしくみについて説明したものである。$\boxed{}$ に適当な数または式を書き入れなさい。ただし，同じ記号の $\boxed{}$ には，同じ数または式が入る。

【パラボラアンテナのしくみ】

　パラボラアンテナ(図１)は，放物線を軸(対称軸)のまわりに回転させてできる曲面を使っており，図１の矢印が示す部分に電波を受信するための装置が取り付けてある。図２は，パラボラアンテナが電波を受信するしくみを模式的に表したものである。放物線の軸に平行に進んできた電波は放物線上で反射されて，点Ｃに集められ，より強い電波として受信される。このとき，<u>電波が線分ＡＢ上を通過した位置から，放物線上で反射され，点Ｃに至るまでの経路の長さは，反射された位置に関係なく一定である</u>。さらに，電波の速さは一定なので，同時刻に線分ＡＢを通過した電波は，同時に点Ｃに到達する。

図１（提供JAXA）

下線部についてグラフを利用した説明

　図３のように，直線 $y=1$ および関数 $y=\frac{1}{4}x^2$ のグラフ上に，x 座標が a である点をそれぞれとり，P(a, 1)，Q(a, b)とする。ただし，a の変域は，$0<a<2$ とする。点C(0, 1)とするとき，ＰＱ＋ＱＣの長さが一定であることを示す。

　ＰＱの長さを b を使って表すと，$\mathrm{PQ}=\boxed{（ア）}$ ……………（1）

　△ＰＱＣは，∠ＣＰＱ＝90° の直角三角形なので，三平方の定理から，

　　$\mathrm{QC}^2=\mathrm{PC}^2+\mathrm{PQ}^2=a^2+(\boxed{（ア）})^2$ ………………（2）

　また，点Ｑは関数 $y=\frac{1}{4}x^2$ のグラフ上の点なので，$a^2=\boxed{（イ）}b$ が成り立つ。

　したがって，(2)から，

　　$\mathrm{QC}^2=\boxed{（イ）}b+(\boxed{（ア）})^2=(\boxed{（ウ）})^2$

　$\mathrm{QC}>0$, $\boxed{（ウ）}>0$ であるから，$\mathrm{QC}=\boxed{（ウ）}$ ………（3）

　(1)，(3)から，$\mathrm{PQ}+\mathrm{QC}=\boxed{（エ）}$

　だから，a が $0<a<2$ の範囲でどのような値をとっても，ＰＱ＋ＱＣの長さは一定である。

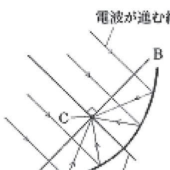


図２

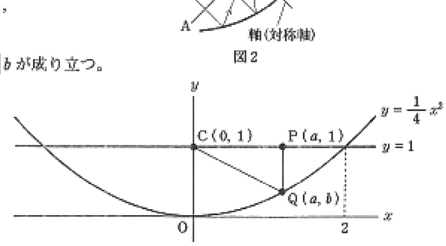


図３

図7　平成24年度公立高校入試問題 (2)

3）放物線を題材とした指導に関する先行研究

高校における放物線を題材とした指導に関する先行研究では，美崎（2012）や岡田・愛木（2008）などがある。美崎（2012）は，「放物線$y^2=4px$において，互いに直交する接線の交点の軌跡は準線$x=-p$である」ということをもとに，放物線の性質を一般化する教材を検討したものである。このように一般化する教材の活用により，既習事項をより広い視野の中で捉え直すことができ，生徒の数学への好奇心，興味・関心を喚起することができる効果を述べている。岡田・愛木（2008）は，放物線の焦点の性質を利用して，実際に作成した放物面で太陽光を発火させる実験を行ったものである。実践からは，放物線の焦点の性質が実際に活用されていることを知ることができ，放物線の焦点の性質がよく理解できたことを述べている。実践対象生徒は，中学校第3年生から高校2年生である。しかし，美崎（2012）は放物線を題材とした指導の発展性の効果に，岡田・愛木（2008）は放物線を題材とした指導における実用性の感得に焦点があてられているものの，どちらの研究も多面的な意味を持つ「数学のよさ」の認識という視点から，この題材を捉えたものではない。本研究では，多面的な意味を持つ「数学のよさ」の認識という視点から，放物線の題材を検討する。また，指導方法に関して，美崎（2012）は代数的に解法しグラフ作成ソフトにより検証するという方法を，岡田・愛木（2008）は実物を作り実験する方法を取り入れている。本研究では，グラフ電卓で帰納的に原理や性質を見つけ，代数的・幾何学的に証明する方法で指導展開例を提案する。そうすることで生徒が証明の必要性を実感し，主体的に学習活動に取り組めるものと考えたからである。

4．指導展開例

本章では，1）放物線の定義，2）パラボラアンテナの原理，3）放物線の性質の３つの題材で，グラフ電卓（TI-Nspire）を活用した指導展開例を提案する。1）放物線の定義と 2）パラボラアンテナの原理は，数学Ⅰの課題学習での取り扱いを想定している。3）放物線の性質は，数学Ⅱを学習後に扱うことを想定しているが，既習事項に配慮しながら数学Ⅰの課題学習で扱うことも考えられる。授業では，グラフ電卓を活用し，帰納的に原理や性質を見つけ，代数的・幾何学的に確かめることで視覚的，体験的な学習活動を構成する。

1）指導展開例１：放物線の定義

数学Ⅰ「2次関数」では，「2次関数$y=ax^2$のグラフの形をした曲線を放物線という」と定義しているが，数学Ⅰで，数学Ⅲで学ぶ幾何学的な定義「平面上において，定点FとFを通らない直線lについて，Fからの距離とlからの距離とが等しい点の軌跡を放物線という」を扱うことを提案する。以下のように，（1）$y=ax^2$型の放物線のグラフ，（2）$y=ax^2+q$型の放物線のグラフ，（3）$y=a(x-p)^2+q$型の放物線のグラフを，幾何学的な定義を用いてグラフ電卓で描き，その後，2次関数になることを計算によって確かめる学習活動である。

（1）$y=ax^2$型の放物線のグラフ

① 放物線の幾何学的な定義により，放物線（$y=ax^2$型）をグラフ電卓で描く

グラフ電卓を使って，幾何学的な定義通りに作図し，点Pの軌跡を描くと，点Pの軌跡として$y=ax^2$型のグラフを得ることができる（図8)。そのためには，幾何学的な定義

を満たすようにグラフ電卓で作図しなければならない。グラフ電卓の画面上に定点F(0, f) と定直線l：y=－f を取り，l 上の点を H とする。幾何学的な定義に合うように点P をとるには，グラフ電卓の作図機能を使い，線分FH の垂直2等分線と l と直交する H 上の垂線との交点P を作図する。このとき，「PF=PH となる点P をとるために，⊿FHP が二等辺三角形になるように作図しなければならない」ことを，教師が教えるのではなく，生徒が主体的に探究し見つけるように指導することが重要である。最後に，トレース機能を使い，H を l 上を動かし P の軌跡を描くと，図8を得ることができ，$y=ax^2$型のグラフと一致することが視覚的に分かる。

② 幾何学的な定義が，放物線の方程式（$y=ax^2$型）になるかを計算で確かめる

焦点F（0，f），準線y=－f のとき，P（x，y）とすると，P から準線に垂線PH を引くと，H（x, －f）であるから，PF=PH の両辺を 2乗して，

$$x^2+(y-f)^2=(y+f)^2$$

$$\therefore y=\frac{1}{4f}x^2$$

となり，$y=ax^2$型の 2次関数となることが式の形からも分かる。

2点間の距離については，数学Ⅱの「図形と方程式」で学ぶが，三平方の定理を学習していれば，理解することは可能と考える。また，課題学習では，「場合によってはより早い時期に課題学習を行いそれ以後の内容ではどのようなことを学習するかを感じ取らせ，関心や意欲をもって学習を進めさせることも可能である」ことが述べられており（文部科学省2009，p.26），必ずしも既習にこだわる必要はないものと考える。

次に，$y=ax^2$型以外の今まで学習した放物線（$y=ax^2+q$，$y=a(x-p)^2$，$y=a(x-p)^2+q$）を描くには，どのように定点（焦点）と定直線（準線）を取ればいいのかを探究する。数学Ⅰでは，2次関数の平行移動について学ぶ。例えば，（2）y 軸方向に平行移動した2次関数$y=ax^2+q$ のグラフを描くには焦点と準線をどのようにとればよいか（$y=ax^2+q$ 型の放物線のグラフ），（3）x 軸方向と y 軸方向に平行移動した 2次関数$y=a(x-p)^2+q$ のグラフは描くには焦点と準線をどのようにとればよいか（$y=a(x-p)^2+q$ 型の放物線のグラフ）を考える。

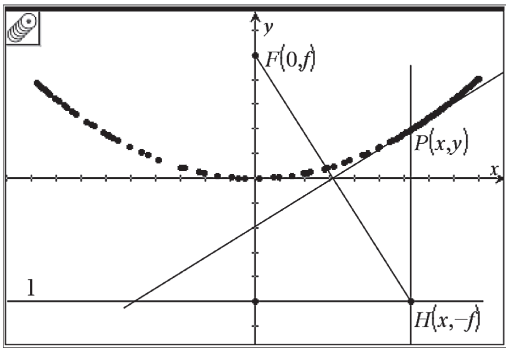


図8　$y=ax^2$型の軌跡

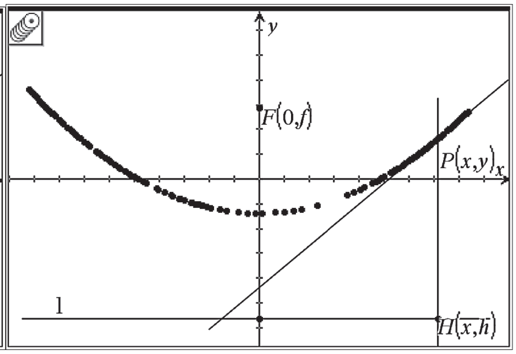


図9　$y=ax^2+q$ 型の軌跡

(2) $y=ax^2+q$ 型の放物線のグラフ

$y=ax^2$型のグラフをｙ軸方向にずらすためには，焦点Fか，定直線lをｙ軸方向にずらせばよいことが予想される。これをグラフ電卓で試す。例えば，準線を下にずらして，点Hを動かしながら点Pの軌跡をトレースすると図9を得る。これにより，$y=ax^2+q$ 型のグラフと一致することが視覚的に分かる。

実際，焦点F（0，f），準線y=hのとき，P（x，y）とすると，Pから準線に垂線PHを引くと，H（x，h）であるから，PF=PHの両辺を2乗して，

$$x^2+(y-f)^2=(y-h)^2$$

$$\therefore y=\frac{1}{2(f-h)}x^2+\frac{f+h}{2}$$

となり，$y=ax^2+q$ 型の2次関数となることが式の形からも分かる。

$y=a(x-p)^2$型のグラフも，同様に定点Fをｘ軸方向にずらして確かめることができる（図は省略）。

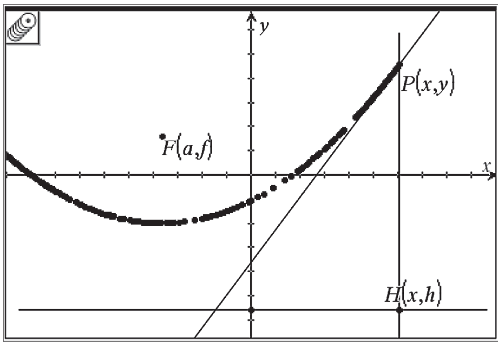


図10　$y=a(x-p)^2+q$ 型の軌跡

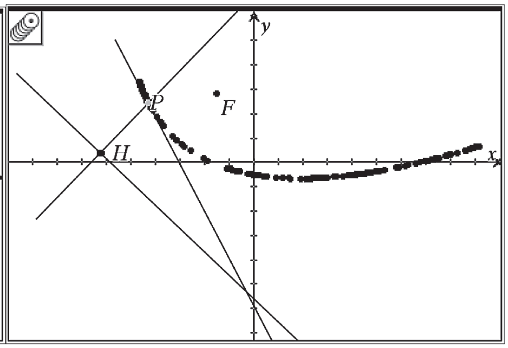


図11　焦点と定直線が任意の場合の軌跡

(3) $y=a(x-p)^2+q$ 型の放物線のグラフ

$y=ax^2$型のグラフをｘ軸方向とｙ軸方向にずらすためには，焦点Fと準線lをｘ軸方向とｙ軸方向にずらせばよいことが分かる。(2)と同様に焦点Fと準線lを移動させてグラフ電卓で確かめると，図10を得ることができ，$y=a(x-p)^2+q$ 型のグラフと一致することが視覚的に分かる。

実際，焦点F（a，f），準線はy=hのとき，P（x，y）とすると，Pから準線に垂線PHを引くと，H（x，h）であるから，PF=PHの両辺を2乗して，

$$(x-a)^2+(y-f)^2=(y-h)^2$$

$$\therefore y=\frac{1}{2(f-h)}(x-a)^2+\frac{f+h}{2}$$

となり，$y=a(x-p)^2+q$ 型の2次関数となることが式の形からも分かる。

さらに，定点Fと定直線lを任意に取っても放物線になることを確かめることができる（図11）。ただし，ここでは視覚的にグラフの形が放物線になることを確認することまでとする。

2）指導展開例２：パラボラアンテナの原理

パラボラアンテナは，放物線の焦点の性質を利用して作られていることは，中学校の教科書でも紹介されていた。指導展開例２では，このことを，実際にグラフ電卓を活用して視覚的に確かめる。パラボラアンテナの原理は，(1) 電波が１か所（焦点F）に集まることと，(2) 電波が焦点F に同時に届くことである。

(1) 電波が１か所（焦点F）に集まること

人工衛星から送られてきた電波は，パラボラアンテナ（放物線）にあたると，反射し跳ね返る。このとき，点P で跳ね返ったとすると，反射角と入射角が等しくなるように反射し，点F を通る (図12)。グラフ電卓のトレース機能を使い，電波（点P を通る直線）を動かすと，点P で反射した直線は常に定点F を通ることを確かめることができる（図13)。実際には，点K を任意に動かすことで電波（点P を通る直線）を動かすことができる。点K をどこに動かしても，点P で反射した直線は，点F を通ることが視覚的に分かる。基本的には，このことを生徒に作図させることから学習を始めたい。1）の学習活動により，ある程度，グラフ電卓の作図機能が使えるようになることが予想されるからである。次に，このことを 2つの方法で証明する。

① 証明１：二等辺三角形による証明（図12）

放物線を $y=ax^2$ とし，点P $(p,\ ap^2)$ で反射したとすると，点P における接線の方程式は，

$$y-ap^2=2ap(x-p)$$

$$\therefore y=2apx-ap^2 \quad \cdots \ (\text{式①})$$

ただし，p=0のときはどの議論においても明らかであるので，以下では常に $p\neq 0$ とする。
この接線と点P において直交する直線の方程式は，

$$y=-\frac{1}{2ap}(x-p)+ap^2$$

$$\therefore y=-\frac{1}{2ap}x+\frac{1}{2a}+ap^2\cdots(\text{式②})$$

点A と点B は，それぞれ y 軸との交点なので，

$$A(0,\ \frac{1}{2a}+ap^2),\qquad B(0,\ -ap^2)$$

∠FPB= ∠KPL（反射角= 入射角なので)，∠FBP= ∠KPL（直線KP は y 軸に平行）なので，⊿FBP は二等辺三角形。よって，FB=FP。同様に⊿AFP も，∠FPA = ∠FAP の二等辺三角形なので，AF=FP。点F は，AB の中点であるので，

$$F(0,\ \frac{1}{4a})$$

したがって，点P の位置によらず，定点F に集まる。ただし，接線の方程式は，数学Ⅱの「微分・積分の考え」で学ぶことに注意が必要である。

② 証明２：正接による証明（図12）

点P における接線の方程式は，$y=2apx-ap^2$ なので，
x 軸と点P における接線とのなす角（$\tan\phi$ が点P における接線の傾きとなる角）を ϕ と

すると，tan ϕ=2ap

θをKPとLPのなす角(人工衛星から送られてきた電波KPが反射面上の点Pで跳ね返ったとすると，θ=90°－入射角=∠KPLととる)，ρをFPとx軸とのなす角（tan ρが直線FPの傾きとなる角）とすると，

$$\theta+\phi=\frac{\pi}{2} \quad \therefore \theta=\frac{\pi}{2}-\phi$$

$$\rho=\phi+(\pi-\theta)=2\phi+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+2\phi$$

ここで，

$$\tan\rho=\frac{\sin\rho}{\cos\rho}=\frac{\sin(\frac{\pi}{2}+2\phi)}{\cos(\frac{\pi}{2}+2\phi)}=\frac{\cos 2\phi}{-2\sin\phi\cos\phi}=\frac{\cos^2\phi-\sin^2\phi}{-2\sin\phi\cos\phi}=\frac{1}{2}(\tan\phi-\frac{1}{\tan\phi})$$

よって，

$$\text{PFの傾き}=\tan\rho=\frac{1}{2}(2ap-\frac{1}{2ap})=\frac{4a^2p^2-1}{4ap}$$

PFの方程式は，P（p，ap²）を通り，傾き $\frac{4a^2p^2-1}{4ap}$ なので，

$$y=\frac{4a^2p^2-1}{4ap}x+\frac{1}{4a}$$

となり，点Pの位置によらず，定点Fに集まる。ただし，加法定理は数学Ⅱの「三角関数」で学ぶことに注意が必要である。

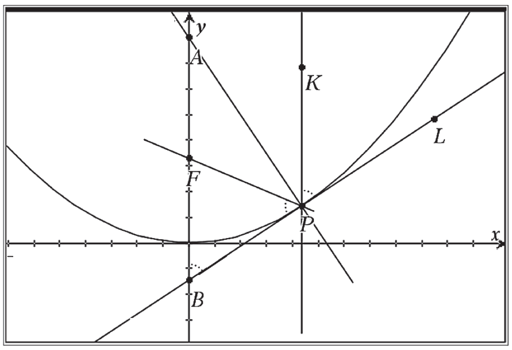


図12　入射角と反射角

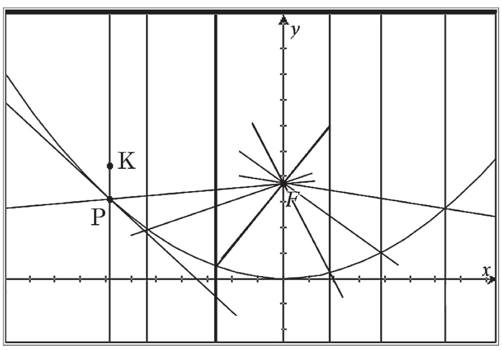


図13　常に焦点Fに集まる

(2) 電波が同時に焦点Fに届く

焦点Fに同時に電波が届くことを示すには，PF=PHを示せばよい（図14)。これは，もし放物線に反射しなければ，平行線は同時に準線lに到着するからである。しかし，PF=PHは放物線の幾何学的な定義から明らかである。そこで，このことをグラフ電卓で確かめ，さらに成り立つ性質を探究する学習活動を行う。

グラフ電卓による探究

グラフ電卓の計測機能を利用し，点K を動かしてみると，点K がどこでも PF=PH になっていることが分かる（図14)。ただし，これは放物線の幾何学的な定義から明らかなので，さらに点K を動かし，成り立つ性質を探究する。すると，（ア）FH と PB は直交すること，（イ）FH と PB の交点C はいつでも x 軸上にあることに気づく（図14)。これらについて，本当に成り立つのかどうか，或いはなぜ成り立つのかを考える。そのためには，証明が必要であり，このときこれらの証明の必要性が出てくる。以下では，これらを証明する。

（ア）の証明（FH と PB は直交すること）

放物線を $y=ax^2$ とし，点P（p，ap^2）で反射したとすると，点P における接線の方程式は，

$$y=2apx-ap^2 \quad \cdots（式①）$$

F（0,f）と H（p, －f）であるから，直線FH の方程式は，

$$y=-\frac{2f}{p}x+f \cdots（式③）$$

であるから，それぞれの傾きをかけると，

$$2ap\times(-\frac{2f}{p})=-4af=-1 \qquad (\because a=\frac{1}{4f})$$

（ア）の幾何学的な証明

点K を通る電波が点P で反射し焦点F に到達したとすると，入射角= 反射角であるから，

∠KPL= ∠FPC

また，∠KPL= ∠CPH（対頂角）であるから，∠FPC= ∠CPH

放物線の定義から FP=PH であるから，⊿FPH は二等辺三角形である。

二等辺三角形の頂角の二等分線は底辺を垂直に二等分するので，

PC ⊥FH，FC=CH･･･ ①

従って，FH ⊥PB

（イ）の証明（FH と PB の交点C はいつでも x 軸上にあること）

（式①）と（式③）から x を消去して y について解くと，y=0となり，点C が x 軸上にあることが分かる。

（イ）の幾何学的な証明

準線l と y 軸との交点を D とする。⊿FDH において，

FO=OD（点F は焦点，点O は原点，点D は準線l と y 軸との交点）

FC=CH（（ア）の幾何学的な証明の①）

中点連結定理により，OC と DH は平行である。また，DH は x 軸に平行なので，

OC も x 軸に平行である。

点O は原点なので，x 軸上にある。

従って，FH と PB の交点C は x 軸上にある。

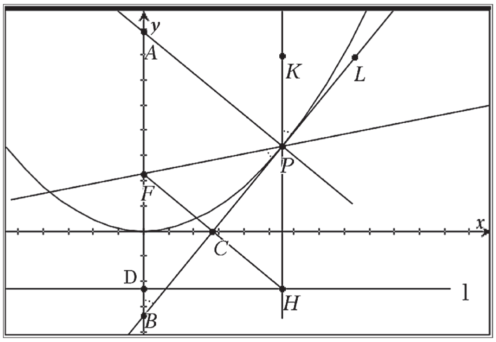


図14　焦点F に同時に集まる

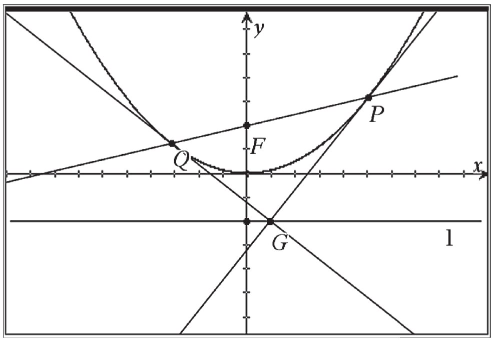


図15　準線上の点G からの接線（3）の①）

3）指導展開例３：放物線の性質の探究

放物線の性質には，2）で取り扱った2つの性質以外にも，以下のような性質があることに気づく。高校の授業では，以下の①から③の課題が与えられ，これを証明せよという指導展開になるのが通常である。しかし，グラフ電卓を活用することで，放物線の接線や交点を動的に見ることができ，①から③の性質に帰納的に気付くことが期待できる。なぜそのような性質が成り立つのかを考えることで証明する必要性を生徒は感じることができ，主体的に学習活動を進めることが可能と考える。

① 準線y=－f 上の点G から引いた 2本の接線は直交し，接点P と Q を結ぶ直線PQ は焦点F（0，f）を通る（図15）。

② 準線上の点G から焦点F（0，f）までの距離は，$\frac{(p-q)}{2}$ であり，GF は PQ と直交する（p，q は①の接点P，Q の x 座標）（図16）。

③ 焦点F から互いに直交する 2本の接線に降ろした垂線の足をそれぞれ C，D とすると，四角形FDGC は長方形である（図17）。

以下では，①と②を証明する。

①準線y=－f 上の点G から引いた 2本の接線は直交し，接点P と Q を結ぶ直線PQ は焦点F（0，f）を通る（図15）。

（証明）

放物線を y=ax^{2}とすると，$a=\frac{1}{4f}$

点P（p，ap^2）上の接線は，

$y-ap^2=2ap(x-p)$　　　$\therefore\ y=2apx-ap^2$

同様に，点Q（q，aq^2）上の接線は，$y=2aqx-aq^2$

これら 2つの接線の交点は，

$2apx-ap^2=2aqx-aq^2$　　　$2a(p-q)x=a(p-q)(p+q)$

ただし，$a\neq 0$，$p\neq q$ より，G（g，－f）とすると，

$$x=\frac{p+q}{2}\qquad(=g)$$

よって，接線の方程式に代入すると，

$$y = 2ap \times \frac{p+q}{2} - ap^2 = apq \qquad (= -f) \qquad \therefore \ pq = -\frac{f}{a}$$

それぞれの接線の傾きをかけると，

$2ap \times 2aq = 4a^2pq$

$$= 4a^2 \times \left(-\frac{f}{a}\right) = -4af$$

$$= -4 \times \frac{1}{4f} \times f = -1$$

点P（p，ap^2），Q（q，aq^2）を通る直線は，

$$y - ap^2 = \frac{aq^2 - ap^2}{q-p}(x-p) \qquad \therefore \quad y = a(p+q)x - apq$$

よって，y 軸との切片は，

$$-apq = -a \times \left(-\frac{f}{a}\right) = f$$

となり，焦点F（0，f）を通る。

②準線上の点G から焦点F（0，f）までの距離は，$\frac{(p-q)}{2}$であり，GF はPQ と直交する（p，q は①の接点P，Q の x 座標）（図16）。

（証明）

（1）より，G（g，－f）なので，

$GF^2 = (0-g)^2 + (f+f)^2 = g^2 + 4f^2$

$$= \left(\frac{p+q}{2}\right)^2 + 4 \times \left(-\frac{pq}{4}\right) = \frac{(p-q)^2}{4}$$

$$\because f^2 = f \times f = -apq \times \left(\frac{1}{4a}\right) = -\frac{pq}{4}$$

p>q なので，

$$GF = \frac{p-q}{2}$$

直線GF の方程式は，G（g，－f），F（0，f）なので，

$$y - f = \frac{-f-f}{g-0}(x-0)$$

$$y = -\frac{2f}{g}x + f$$

直線PQ と GF の傾きをかけると，

$$a(p+q) \times \left(-\frac{2f}{g}\right) = a \times 2g \times \left(-\frac{2f}{g}\right) = -4af = -1$$

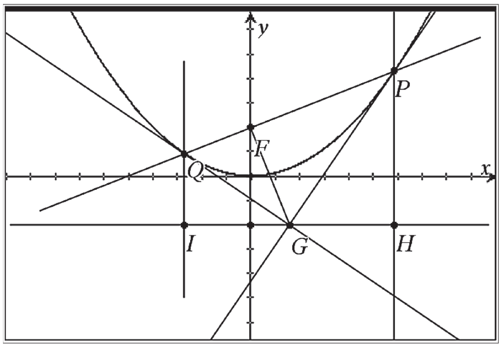


図16　PQ ⊥FG（（3）の②）

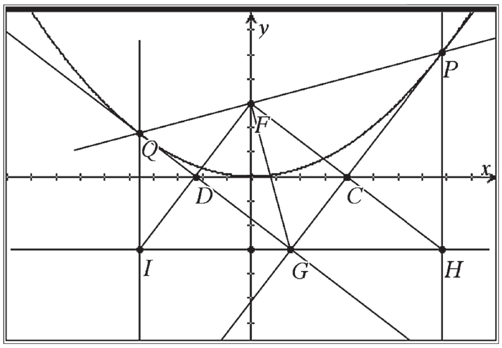


図17　四角形FDGC は長方形（（3）の③）

5. 考　察

3つの指導展開例の展開過程をもとに，生徒が「数学のよさ」を認識するための指導の在り方について考察する。数学のよさが多面的な意味をもつことは，第2章で述べた。本章では，前章で提案した3つの指導展開例の展開過程を通して，生徒が感得できると考える数学のよさについて，1）数学的表現のよさ，2）数学的内容の関連性，3）数学の実用性，4）数学の発展性，5）数学的活動の楽しさとの関連から生徒が「数学のよさ」を認識するための指導の在り方について以下に述べる。

1）数学的な表現のよさ（指導展開例１）

放物線は，2次関数の式による表現，グラフによる表現，幾何学的表現があり，2次関数の式による表現には，グラフの平行移動の程度やグラフの開き具合を数値でとらえやすいよさがある。一方，グラフによる表現は視覚的に変化の特徴をとらえやすいよさがある。幾何学的表現は,放物線の性質を考えるときや双曲線や楕円との関連性を考えやすいよさがある。指導展開例１の「放物線の定義」では，幾何学的表現と2次関数の式による表現が異なる表現でありながら，グラフの形としても，関数の式の形としても一致していることや，幾何学的な表現では焦点と準線で放物線の平行移動を考えることができること，2次関数の式による表現では頂点や軸で放物線の平行移動を考えることができることが理解でき，それぞれの数学的表現のよさを感得できるものと考える。

2）数学的内容の関連性（指導展開例１）

2次関数としての放物線は，中学校第3学年と数学Ⅰで学習する。そのときは，2次関数の式とグラフによって放物線が定義される。数学Ⅲで初めて放物線の幾何学的定義を学ぶ。しかし，それらが同じ放物線を表現していることを感じることは難しい。それらの学習内容を関連付けるような学習活動が必要である。指導展開例１の「放物線の定義」では，2次関数としての放物線と2次曲線としての放物線を関連付けることができるものと考える。実際，生徒は，数学の学習において，例えば，関数で学習したことは関数，幾何で学習したことは幾何というように，学習内容はそれぞれの単元において独立したものであり，関連はあまりないと考えるところがある。指導展開例１の「放物線の定義」では，２次関数の式が幾何的に表現ができることを知ることができ，数学的内容の関連性を感得できるものと考える。

3）数学の実用性（指導展開例２）

指導展開例２の「パラボラアンテナの原理」では，放物線の 2つの性質がパラボラアンテナに活用されていることを，グラフ電卓に描かれたグラフと証明により知ることができる。この学習活動を通じて,生徒は数学（放物線の焦点の性質）が日常生活（パラボラアンテナ）に活用されていること（実用性）を感得できるものと考える。ただし，証明の部分では，数学Ⅱの学習内容（接線の方程式，加法定理など）も含まれるため，指導時期により扱い方に配慮が必要である。

4）数学の発展性（指導展開例２，指導展開例３）

指導展開例２の「パラボラアンテナの原理」の後半（2）と指導展開例３の「放物線の性質の探究」では，指導展開例２の「パラボラアンテナの原理」の前半（1）で考察したパラボラアンテナに活用されている放物線の焦点の性質以外の性質について探求した。特に，グラフ電卓を活用し，作図した点を動かすことで，動かない（変化のない）部分を見つけ出すことができ，新しい放物線の性質を発見することができるものと考える。この学習活動を通して，2次関数や 2次曲線に関する学習の広がりと深まり（発展性）を感得できるものと考える。生徒は，数学の問題は解を求めてしまえば終わり，或いは証明してしまえば終わりであると考えている場合が多い。数学のよさは，数学がもつ発展性にある。そのことを感得できるものと考える。

5）数学的活動の楽しさ（指導展開例１，指導展開例２，指導展開例３）

各指導展開例では，グラフ電卓を活用し，帰納的に探究し代数的・幾何学的に証明する活動を行う。つまり，生徒が探究し，見つけた性質を証明するという活動を行うことができる。これは,教師から与えられた課題ではなく生徒自らが見つけた課題を解くという活動である。これらの活動では，生徒の主体的な学習活動が行われ，生徒は数学的活動の楽しさを感得できるものと考える。

以上のように，放物線を題材にした３つの指導展開例のような指導を行うことで，生徒は，数学的な表現のよさ，数学的内容の関連性，数学の実用性，数学の発展性，数学的活動の楽しさを感得することができ，多面的な意味での「数学のよさ」を感得することが可能であり，「数学のよさ」の認識に至ることができるものと考える（図18）。

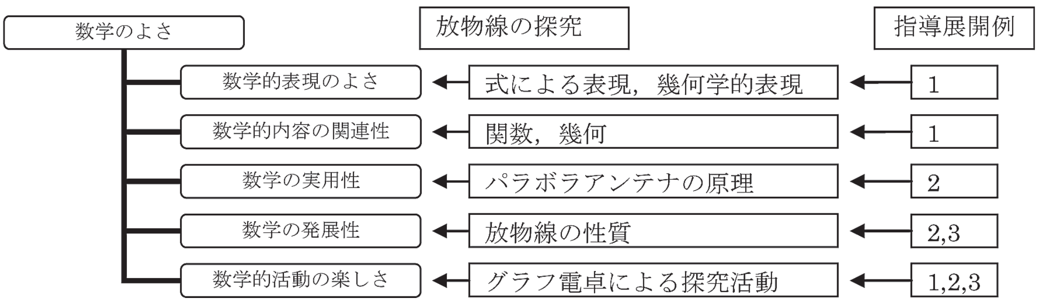


図18　放物線の探究と「数学のよさ」

6. 研究のまとめと今後の課題

本研究では，放物線を題材に高校における「数学のよさ」を認識するための指導について考察を行った。「数学のよさ」には，数学的見方や考え方のよさだけではなく，数学的な表現や処理のよさ，実用性や汎用性，数学的活動の楽しさなども含まれる。生徒が「数学のよさ」を認識するために，「数学のよさ」がもつ多面的な意味を生徒の主体的学習活動を通して感得し，その経験を繰りかえすような指導を行うことが重要である。本研究では，そのための題材として放物線を取り上げ，指導展開例を提案し，展開過程を分析することで考察を行った。その結果，グラフ電卓を活用した放物線の探究は，数学的表現のよさ，数学的内容の関連性，数学の実用性，数学の発展性，数学的活動の楽しさを感得することができ，生徒が「数学のよさ」を認識できる指導を構成できるものと考える。

今後は，高校において，実際に実践し，生徒の学習活動を分析することで，その効果を具体的に検討することが課題である。

【注記】

⑴　グラフ電卓は，Texas Instruments 社の TI- Ｎspire CX CAS（Ver3.2）を使用した。

⑵　岡山県私塾連盟, 公立高校入試過去問, http://kenjukuren.jp/kakomon/（2013年2月22日参照）

【引用・参考文献】

中央教育審議会（2008）「幼稚園，小学校，中学校，高等学校及び特別支援学校の学習指導要領等の改善について（答申）」http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chukyo/chukyo0/toushin/ __icsFiles/afieldfile/2009/05/12/1216828_1.pdf（2013年2月22日参照）.

長谷川考志，他19名（2012）高等学校数学Ⅲ，第一学習社.

高等学校数学教育研究会編（2011）高等学校数学教育の展開，聖文新社.

松原敏治(2011)数学のよさを感得させる授業づくりをめざす教材研究, 日本数学教育学会誌数学教育93(1)，pp.27-28.

美崎由子（2012）問題を一般化する試み：円錐曲線等にひいた 2接線の交点の軌跡より，日本数学教育学会誌数学教育94（7），pp.11-18.

文部科学省（2008）中学校学習指導要領解説数学編（平成20年9月），教育出版.

文部科学省（2009）高等学校学習指導要領解説数学編理数編（平成21年12月），実教出版.

中村好則（2007）数学の有用性を感得する実験を取り入れた学習指導：「ペットボトルの流水実験」の教材化，日本数学教育学会誌数学教育89（11），pp.2-9.

野田典彦（2011）数学のよさを味わう授業をめざして：比較検討するとはどういうことか，日本数学教育学会誌数学教育93（1），pp.23-24.

岡田 真子・愛木 豊彦（2008）高校生を対象とした 2次曲線を題材とする教材の開発と実践，岐阜数学教育研究 7, pp.48-59.

大矢雅則，他17名（2011）新編数学Ⅰ，数研出版.

澤田利夫，坂井裕監修（2011）中学数学3，教育出版.

安野史子（2011）旧課程と現行課程における高等学校数学の科目履修状況について，日本数学教育学会誌数学教育93（5），pp.12-22.