岩手大学教育学部研究年報　第72巻（2013. 3）71 ～ 83

円分割問題の高校数学科における課題学習での活用の可能性

中　村　好　則*

（2013年1月8日受理）

1．はじめに

高校数学科において，今年度（平成24年度）より学年進行で先行実施されている新しい学習指導要領では，数学的活動を生かした指導を一層充実させるために，必履修科目や多くの生徒の選択が見込まれる科目（数学Ｉと数学Ａ）に課題学習が位置付けられた（文部科学省2009）。そこでは，生徒の関心や意欲を高める課題を設け，生徒の主体的な学習を促し，数学のよさを認識できるようにすることが期待されている。しかし，高校における数学の指導は，教師から生徒に問題の解法を一方的に説明する知識伝達的な授業になりがちで，課題学習の趣旨を生かした授業を行うには課題も多い。

課題学習は，平成元年の学習指導要領改訂で中学校に設けられた。当時は中学校の第2，3学年において実施されてきた。しかし，平成10年12月の学習指導要領改訂では，第１学年も含めた中学校全学年で実施することとなった（文部省1999）。このように先行して実施された中学校の課題学習では多くの実践事例がある（例えば，筑波大学附属中学校数学教育研究会1991など）。しかし，高校数学の指導内容は中学校よりも抽象的・論理的であり，中学校の課題学習の教材は参考にはなるがそのまま活用することは難しい。また，高校において対象となる生徒は，中学生のときにすでに課題学習を経験しており，そのことにも配慮する必要がある。高校の課題学習で活用できる教材の検討は喫緊の課題である。

筆者は，今まで高校の課題学習で活用できる教材として，水ロケットやフィルムケースロケット等の飛行実験を行い，数学を活用してそれらの飛行特性等を探究する教材を開発しその効果を検討してきた（中村2011a，2011b）。その結果，それらを活用した課題学習では，具体的な事象と数学との関連付けができること，生徒の主体的な学習活動が構成できること，数学のよさを感得できることなどの効果が示唆された。しかし，それらの教材を活用した指導では，実験準備や実験に多くの時間がかかるなどの課題があった。また，課題学習の教材として，具体的な事象と関連のある教材だけでなく，具体的な事象と関連はなくとも，生徒の興味・関心を引き，数学のよさを感得できる教材を開発することが課題であった。

そこで，本研究では，問題の意外性が生徒の興味や探究心を促進し，高校数学の内容とも関連が多くあると考えられる円分割問題を教材として取り上げ，高校数学科における課題学習での活用の可能性を考察する。そのために，2つの円分割問題とその発展問題（平面分割問題，

*　岩手大学教育学部

空間分割問題）を取り上げ，それらの解決過程の検討を通して，円分割問題の課題学習での活用の可能性を検討する。

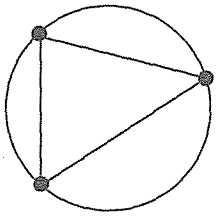
2．2つの円分割問題とその発展問題

(1) 2つの円分割問題

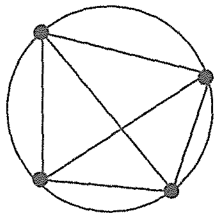
円分割問題とは，円を分割したときにいくつの部分領域に分けられるかを考える問題である。円を分割するためには，2つの方法があり，円分割問題はその方法により，次の2つの問題に分けられる。

＜点による円分割問題＞

円周上に点をとって直線で結ぶと，円は図1のようにいくつかの部分領域に分けられる。円周上の点に10個の点をとったとき，最も多くなる部分領域の数（最大部分領域数）を求めよ。（レオ・モーザーの円分割問題）



点が3個のときは，
最大部分領域数は4

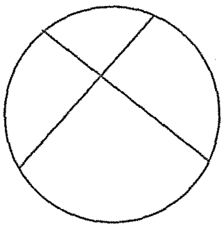


点が4個のときは，
最大部分領域数は8

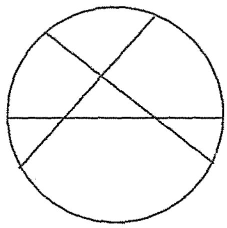
図1　点による円分割問題

＜弦による円分割問題＞

円に弦をひくと，円は図2のようにいくつかの部分領域に分けられる。円に10本の弦をひいたとき，最も多くなる部分領域の数（最大部分領域数）を求めよ。



弦が2本のときは，
最大部分領域数は4



弦が3本のときは，
最大部分領域数は7

図2　弦による円分割問題

円分割問題は，北島（2011）が数学Aの課題学習の教材として，点による円分割問題を取り上げ，①教材の意外性（最大部分領域数が予想に反して点の数が6個以上になると2の累乗から離れていくこと）が生徒の主体的な問題解決を促し思考力を深めること，②パスカルの三角形との関係で最大部分領域数を捉えることができることなどの効果を述べている。しかし，

円分割問題は，点による円分割問題のみを単独で扱うだけでなく，弦による円分割問題とともに扱うことで，（ⅰ）分割方法が異なる場合でも解法や解決結果を統合的に考えることができるとともに，（ⅱ）どちらの円分割問題もパスカルの三角形と関連があることを見いだすことができ，生徒の主体的な探究活動を促し，数学的な理解を深めることが可能と考える。さらに，（ⅲ）弦による円分割問題を扱うことにより，直線による平面の分割問題（平面分割問題）や平面による空間の分割問題（空間分割問題）にも自然に発展することが可能となる。本研究では，高校における課題学習において，これら2つの円分割問題を統合的に扱い，さらに，平面分割問題と空間分割問題へと発展的に考え探究する指導を提案する。

（2）点による円分割問題の解決過程

①点による円分割問題を図で考える

円周上に10個の点をとった時に円が最大いくつに分割されるかを考える。部分領域数が最大になるように分割するには，点と点を結んでできる弦が，どの3本も1点で交わらないことが必要である。しかし，点が10個の場合を図に書くことは弦の数が多くなり容易ではない。そこで，図3のように1個から5個の場合までを順に図に書いて考える。そうすることで，点を増やしていくとどのように円が分割され，部分領域が増えていくかを観察することができる。

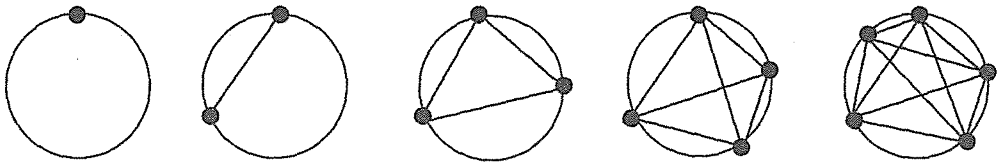


図3　点による円分割（点が5個まで）

②点による円分割問題を表で考える

点の数（n）が変われば，最大部分領域数（S_n）がどのように変わるかを調べる。そのために，図3から点の数（n）と最大部分領域数（S_n）を調べ，表1を作成する。（点の数をn個とし，そのときの点による円分割の最大部分領域数をS_nとする。）

表1　点の数（n）と最大部分領域数（S_n）との関係

点の数（n）	1	2	3	4	5
最大部分領域数（S_n）	1	2	4	8	16

③点の数（n）と最大部分領域数（S_n）との関係

表1をもとに，点の数（n）と最大部分領域数（S_n）との関係を考えると，

$$S_n=2^{n-1}$$

のように指数関数になるのではないかと予想できる。この予想が正しいとすると，

$$S_{10}=2^{10-1}=2^9=512$$

となり，点の数が10個の場合（n=10）の最大部分領域数は512となる。指数関数は，数学Ⅱの「指数関数・対数関数」の単元で学ぶ。

④検証

点の数が6の場合(n=6)でも, $S_n=2^{n-1}$ が成り立つかどうかを実際に図に書いて検証する(図4)。すると，点の数が6の場合（n=6)，最大部分領域数は $S_6=31$ となり，$2^{6-1}=2^5=32$ とはならない。ここに，点による円分割問題の意外性があり，この意外性が生徒の探究心を促進し，生徒の主体的な学習活動が期待できる（北島2011)。

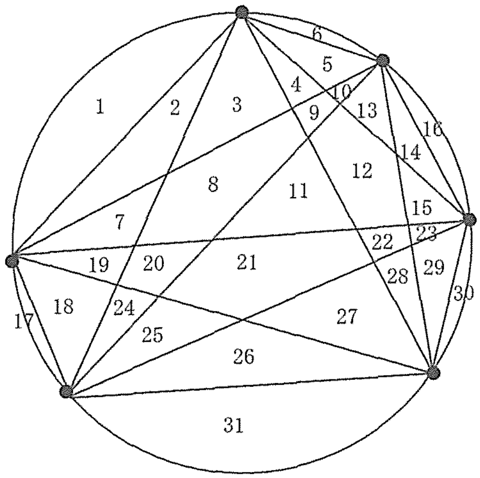


図4　点による円分割（点が6個の場合)

⑤階差をとって考える

③では，点の数（n）と最大部分領域数（S_n）とのきまりを見つけ，そのきまりを利用して解決しようとしたが，うまくいかなかった。そこで，次は，階差をとって考える。階差数列は，数学B の「数列」の単元で学ぶ。表2のように，第4階差までとると，第4階差が1となり，第4階差が一定になると予想できる。第4階差がすべて1であると仮定し，それを第4階差から第1階差へ順にさかのぼって計算すると，点が10個の場合（n=10)，最大部分領域数は256であることが求められる。しかし，これの結果は，第4階差が一定であることを仮定していることに注意する必要がある。

表2　点の数 (n) と最大部分領域数 (S_n) との階差

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
S_n	1	2	4	8	16	31	57	99	163	256

第1階差 ⇒ 1　2　4　8　15　26　42　64　93

第2階差 ⇒ 1　2　4　7　11　16　22　29

第3階差 ⇒ 1　2　3　4　5　6　7

第4階差 ⇒ 1　1　1　1　1　1

（○数字は，第4階差が1であることを仮定し，第4階差から第1階差へ順に計算したときの数字である。）

また，杉山（2009）は，第4階差が一定であることを仮定して，次のように一般項S_nを求めている。第4階差が一定なので，微分の考えを利用し，4回微分したとき一定になる関数は4次関数と考え，

$$S_n=an^4+bn^3+cn^2+dn+e$$

とおいて，n=1からn=5までの値を代入する。

$S_1=a+b+c+d+e=1$　　$S_2=16a+8b+4c+2d+e=2$

$S_3=81a+27b+9c+3d+e=4$　　$S_4=256a+64b+16c+4d+e=8$

$S_5=625a+125a+25c+5d+e=16$

これを解くと，

$$a=\frac{1}{24},\ b=-\frac{1}{4},\ c=\frac{23}{24},\ d=-\frac{3}{4},\ e=1$$

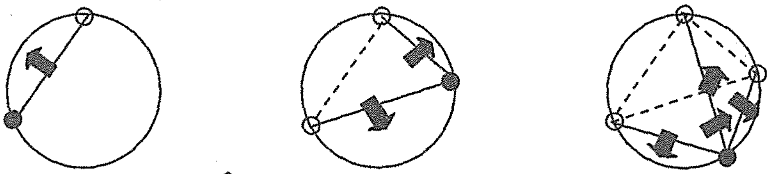
従って，

$$S_n=\frac{1}{24}n^4-\frac{1}{4}n^3+\frac{23}{24}n^2-\frac{3}{4}n+1$$

しかし，この一般項も，第4階差が一定であることを仮定していることに注意が必要である。また，この方法では，微分の考えが必要であり，微分は数学Ⅱの「微分・積分の考え」，数学Ⅲの「微分法」の単元で学ぶ。

⑥数学的な意味を考える

点が増えると最大部分領域数が増えるが，その関係を直接考えるのが難しい場合には，点が増えると弦の数や交点の数が増えることにも着目することが大切である。そこで，点と弦と交点の数と最大部分領域数との関係を考える。そのために，まずは，図で増え方を考える（図5）。点の数が1個から2個に増えると，弦が1本増え，最大部分領域数も1個増える。次に，点の数が2個から3個に増えると，弦の数は2本増え，最大部分領域数も2個増える。同様に，点の数が3個から4個に増えると，弦の数が3本増え，交点が1個増え，最大部分領域数が4個増える。そうすると，増えた弦の数と交点の数だけ最大部分領域数が増えていることになる。さらに詳しく見るために，今までの図（図3，図4，図5）をもとに表3を作成する。



（●は増えた点を示し，⬆は新たに増えた弦及び交点と部分領域との対応を示す）

図5　点と弦と交点の数と最大部分領域数の関係（点が2個から4個まで）

表3　点（n）と弦と交点の数と最大部分領域数（S_n）の関係

点の数（n）	1	2	3	4	5	6
弦の数	0	1	3	6	10	15
交点の数	0	0	0	1	5	15
最大部分領域数（S_n）	1	2	4	8	16	31

表3から，次の関係が成り立っていることがわかる。

（弦の数）＝（1つ前の点の数）＋（1つ前の弦の数）

（最大部分領域数）＝（弦の数）＋（交点の数）＋1

また，弦はn個ある点の中から2個の点が決まれば決まり，交点はn個ある点の中から4個の点が決まれば決まるので，

(弦の数) $= {}_nC_2$ ，　　　　(交点の数) $= {}_nC_4$

したがって，

(最大部分領域数) $= {}_nC_2 + {}_nC_4 + 1$　　　　$\therefore\ S_n = {}_nC_2 + {}_nC_4 + 1$

ここで，

${}_nC_2 = \frac{n(n-1)}{2\times1}$，　　　　${}_nC_4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\times3\times2\times1}$

であるから，これを代入して計算すると，

$$S_n = \frac{n^4-6n^3+23n^2-18n+24}{24}$$

組合せは，数学Aの「場合の数と確率」の単元で学ぶ。

⑦パスカルの三角形との関係

パスカルの三角形は，図6のようになる。パスカルの三角形は，数学Ⅱの「二項定理」の単元で取り扱われている（川中ら 2011）。これを2項係数で置き換えると，図7のようになる。つまり，

${}_nC_0=1$，　　　　${}_nC_n=1$，　　　　${}_nC_k={}_{n-1}C_{k-1}+{}_{n-1}C_k$

が成り立つ。従って，

${}_nC_2={}_{n-1}C_1+{}_{n-1}C_2$，　　　　${}_nC_4={}_{n-1}C_3+{}_{n-1}C_4$

であるから，最大部分領域数S_nは，

$$S_n = {}_nC_2+{}_nC_4+1 = {}_{n-1}C_1+{}_{n-1}C_2+{}_{n-1}C_3+{}_{n-1}C_4+{}_{n-1}C_0 = {}_{n-1}C_0+{}_{n-1}C_1+{}_{n-1}C_2+{}_{n-1}C_3+{}_{n-1}C_4$$

これは，パスカルの三角形の左から第5項までの数の和である。パスカルの三角形のn行目の数の和は2^nであるから，6行目からS_nは2^nから離れていくことがここからもわかる。

点による円分割問題にでてくる最大部分領域数の列

1,2,4,8,16,31,57,99,⋯

は，この問題の提唱者（レオ・モーザー）にちなんで，モーザー数列という。

										1										
									1		1									
								1		2		1								
							1		3		3		1							
						1		4		6		4		1						
					1		5		10		10		5		1					
				1		6		15		20		15		6		1				
			1		7		21		35		35		21		7		1			
		1		8		28		56		70		56		28		8		1		
	1		9		36		84		126		126		84		36		9		1	
1		10		45		120		210		252		210		120		45		10		1

………………………………………………………………

図6　パスカルの三角形１

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & {}_0C_0 & & & \\
 & & {}_1C_0 & & {}_1C_1 & & \\
 & {}_2C_0 & & {}_2C_1 & & {}_2C_2 & \\
{}_3C_0 & & {}_3C_1 & & {}_3C_2 & & {}_3C_3 \\
{}_4C_0 & {}_4C_1 & {}_4C_2 & {}_4C_3 & {}_4C_4 & & \\
\cdots\cdots & & & & & & \\
{}_{n\text{-}1}C_0 & {}_{n\text{-}1}C_1 & {}_{n\text{-}1}C_2 & {}_{n\text{-}1}C_3 & {}_{n\text{-}1}C_4 & \cdots\cdots & \\
{}_nC_0 & {}_nC_1 & {}_nC_2 & {}_nC_3 & {}_nC_4 & {}_nC_5 & \cdots\cdots \\
\cdots\cdots & & & & & &
\end{array}
$$

図7　パスカルの三角形２（2項係数）

（３）弦による円分割問題の解決過程

①弦による円分割問題を図で考える

弦による分割で部分領域数が最大になるためには，どの 2本の弦も平行ではなく，どの 3本の弦も 1点で交わらない場合である。弦が 10本の場合を図に書くことは容易ではない。そこで，点による円分割問題と同様に，弦が 1本から 5本までの場合を順に図に書いて考える（図8)。

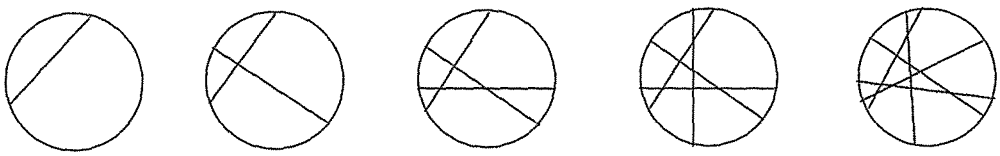


図8　弦による円分割（弦が５本まで）

②弦による円分割問題を表で考える

弦の数（n）と最大部分領域数（T_n）との関係を図8をもとに表を作って考える（表4)。(弦の数を n 本とし，そのときの弦による円分割の最大部分領域数を T_n とする。)

表4　弦の数（n）と最大部分領域数（T_n）との関係

弦の数（n）	1	2	3	4	5
最大部分領域数（T_n）	2	4	7	11	16

③弦の数（n）と最大部分領域数（T_n）との関係

表4を観察すると，次の関係が成り立つことが予想される。

（最大部分領域数）＝（1つ前の最大部分領域数）＋（弦の数）

とすると，弦の数が 6本（n=6）のときは，$T_6=16+6=22$である。

④検証

弦の数が 6本の場合について，図を書いて確かめる（図8)。すると，n=6のとき，最大部分領域数は 22となり，③の計算と一致する。予想は正しそうである。

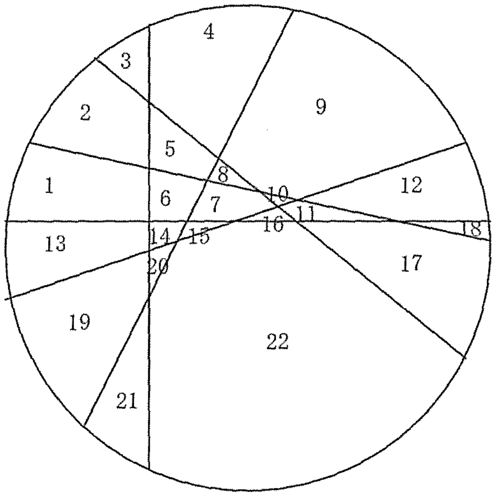


図9　弦による円分割（弦が6本の場合）

⑤階差をとって考える

(2)の⑤と同様に，表5のように階差をとって考えると，第2階差がすべて1となり一定の値になる。これを仮定し，第2階差から順にさかのぼって計算すると，弦が10本の場合は，最大部分領域数が56であることが分かる。

表5　弦の数（n）と最大部分領域数（T_n）との階差

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T_n	1	2	4	7	11	16	22	29	37	46	56

第1階差 ⇒　1　2　3　4　5　6　7　8　9　10

第2階差 ⇒　1　1　1　1　1　1　1　1　1

（○数字は，第2階差が1であることを仮定し，第2階差から第1階差へ順に計算したときの数字である。）

点による円分割問題と同様に，微分の考えを活用すると，第2階差が一定になるので，2回微分したときに一定になる関数は2次関数である。よって，

$$T_n=an^2+bn+c$$

とおくと，

$$T_0=c=1,\qquad T_1=a+b+c=2,\qquad T_2=4a+2b+c=4$$

なので，これを解くと，

$$a=\frac{1}{2},\quad b=\frac{1}{2}$$

従って，

$$T_n=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n+1$$

これも第2階差が一定であることを仮定していることに注意する必要がある。 次に，

（最大部分領域数）＝（1つ前の最大部分領域数）＋（弦の数）

が正しいとすると，

$T_n=T_{n-1}+n$,　　　$T_0=1$

であるから，階差数列の解き方を利用して，

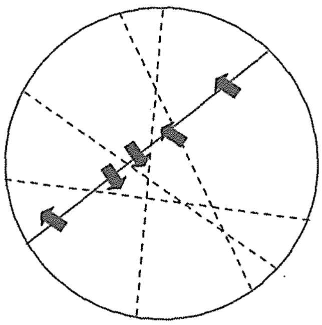
$$
\begin{aligned}
T_n - \cancel{T_{n-1}} &= n \\
\cancel{T_{n-1}} - \cancel{T_{n-2}} &= n-1 \\
&\cdots\cdots \\
\cancel{T_2} - \cancel{T_1} &= 2 \\
+)\ \cancel{T_1} - T_0 &= 1 \\
\hline
T_n - T_0 &= (1+2+\cdots+n)
\end{aligned}
\qquad \therefore\ T_n=\frac{n(n+1)}{2}+1
$$

よって，弦が 10本のときは，

$$T_{10}=\frac{10(10+1)}{2}+1=56$$

⑥数学的な意味を考える

弦が 1本増えることで，最大部分領域数は弦の本数分だけ増える。例えば，弦が 4本から 5本に増えるときは，弦は 5個の部分領域を分割することになるためである（図10)。点による円分割問題と同様に考えると，弦が 1本増えたときに，増えた弦と交点に新たに増えた部分領域を対応させることができる。



（実線の弦が新たに増えると，5 個の部分領域を分割することになる。⬆は増えた部分領域を示す）

図10　弦の数と最大大部分領域数との関係（弦が 5本の場合）

図8，図9，図10をもとに，弦と交点の数と最大部分領域数を表にまとめると表6になる。これらより，

（最大部分領域数）＝（弦の数）＋（交点の数）+1

であることが分かる。一方，

（弦の数）$=n$,　　　（交点の数）$={}_nC_2$　　　（交点は 2本の弦で決まる）

であるから，

（最大部分領域数）$=n+{}_nC_2+1$

表6　弦 (n) と交点の数と最大部分領域数 (T_n) の関係

弦の数 (n)	0	1	2	3	4	5
交点の数	0	0	1	3	6	10
最大部分領域数 (T_n)	1	2	4	7	11	16

⑦パスカルの三角形との関係

弦による円分割についても，点による円分割と同様に，二項係数で表すと，

$$(\text{最大部分領域数}) = n + {}_nC_2 + 1 = {}_nC_1 + {}_nC_2 + {}_nC_0$$

$$\therefore T_n = {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2$$

これは，パスカルの三角形の左から第3項の数の和である。

（4）円分割問題の発展

円分割問題を次のように発展することができる。これらは，杉山（2009）では演習問題として扱われている。

弦による円分割問題において，円を取り除いて平面全体を分割するように考えると，弦による円分割問題は，次のような平面分割問題に発展できる。

＜平面分割問題＞
平面をn本の直線で切ったときにできる最大部分領域数を求めよ。

しかし，この問題は，円をとって平面に拡張して考えても，弦による円分割問題と同様に考えることができ，最大部分領域数は弦による円分割問題と同じである。従って，

$$T_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1$$

次に，平面分割問題の平面を空間に拡張すると，次のような空間分割問題に発展できる。

＜空間分割問題＞
空間をn枚の平面で切ったときにできる最大部分領域数を求めよ。

空間を平面で切る場合，最大部分領域数が最大になるには，どの2枚の平面も平行ではなく，どの3枚の平面も1本の交線で交わらないことが必要である。n枚の平面で分割されている空間を，n+1枚目の平面で分割すると，n+1枚目の平面はn枚の平面で分割された分だけ平面が増える。つまり，平面をn本の直線で分割した分だけ部分領域が増えることになる。従って，空間を分ける領域が，$1+\frac{n(n+1)}{2}$ 個（直線による平面分割，或いは弦による円分割の最大部分領域数T_n）だけ増えるので，

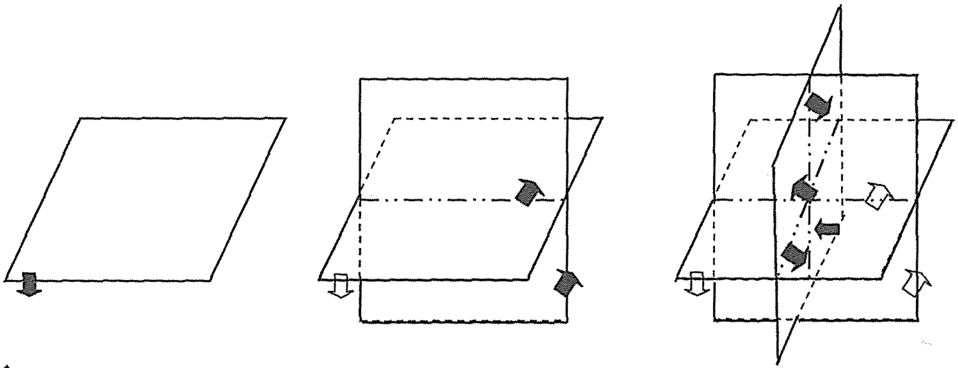
$$V_n = V_{n-1} + T_{n-1}$$

が成り立つ。これは，階差数列なので，これを解くと，

$$V_n = V_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}k + 1\right) = \frac{n^3+5n+6}{6}$$

となる。

また，点による円分割問題や弦による円分割問題のときと同様に，平面が増えるときに新たに増える要素（平面，交線，交点）に着目する。図10のように新たに平面が増えるごとに，増えた平面，交線，交点に新たに増えた空間（部分領域）を対応させて考えると，表7を得る。



（ ⇧ は，平面が増えたときに，新たに増えた平面，交線，交点と部分領域との対応を示す）

図10　交線と交点の数と最大部分領域数との関係（平面が 3枚まで）

表7　平面と交線と交点の数と最大部分領域数の関係

平面の数（n）	0	1	2	3	4	5
交線の数（${}_nC_2$）	0	0	1	3	6	10
交点の数（${}_nC_3$）	0	0	0	1	4	10
最大部分領域数（V_n）	1	2	4	8	15	26

表7より，

（最大部分領域数）＝（平面の数）＋（交線の数）＋（交点の数）+1

であることが分かる。交線は 2平面で決まり，交点は 3平面で決まるので，

（最大部分領域数）$= {}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3 = \frac{n^3+5n+6}{6}$

となる。従って，空間の平面による分割の最大部分領域数は，パスカルの三角形の左から第4項までの和となる。

3．円分割問題の課題学習での活用の可能性

前節において，2 つの円分割問題とその発展問題（平面分割問題，空間分割問題）について，それらの解決過程を検討した。それらをもとに，円分割問題の課題学習での活用の可能性について考察した結果，円分割問題には，以下のような教材としてのよさがあることが明らかとなった。

（1）問題の発展性

2つの円分割問題をともに扱うことで，弦による円分割問題を平面分割問題に発展し，さらにそれを空間分割問題に発展することが可能となる。数学の授業では，1つの問題を解いて終わりとなることも多いが，2 つの円分割問題を用いることで発展的な学習活動を展開できるものと考える。

（2）解法と解決結果の統合性

2つの円分割問題の解決過程において，どちらも点や弦の数が増えたときに，増える弦や交点に着目し，それらを増えた部分領域に対応付けることで，（最大部分領域数）＝（弦の数）＋（交点の数）+1という関係を導き出し解決できた。空間分割問題においても，同様に，平面が増

えたときに増える平面や交線，交点に着目し，それらを増えた部分領域に対応付けることで，(最大部分領域数) ＝ (平面の数) ＋ (交線の数) ＋ (交点の数) +1という関係を導き出し解決できた。このようにどの分割問題も増えた要素（弦，交点，平面，交線）を増えた部分領域に対応付けるという考え方で解法を統合的に捉えることができる。

また，2つの円分割問題と平面分割問題，空間分割問題の解決結果（最大部分領域数の一般項）は，すべてパスカルの三角形の左からの項数の和の形に統合することができた。異なる分割問題から得られた結果は，数式を見ただけではあまり関係があるようには見えない。しかし，パスカルの三角形という関係から見るとその結果を統合的にみることができる。これらにより，生徒は，数学のよさ（統合的に考え解決できること）や数学の美しさ（パスカルの三角形との関係）を感得することができるものと考える。

（３）問題の意外性

点による円分割の最大部分領域数が，点の数が6個の場合から2の累乗から離れることだけでなく，すべての分割問題がパスカルの三角形と関連があることや同じ考え方で解法できること，空間分割問題の中に平面分割問題を含んでいること等，多くの意外性を含んでいる。これらにより，生徒の興味や探究心を促進し，主体的な学習活動を構成することができるものと考える。

（４）高校数学との関連性

これらの問題の解決過程において，高校数学の多くの内容（数学A「組合せ」，数学B「階差数列」，数学Ⅱ「二項定理」「微分の考え」，数学Ⅲ「微分法」）が活用された。これにより，円分割問題と高校数学の学習内容との関連付けができ，高校数学の学習内容の理解が深まるものと考える。

これら（1）から（4）までを図にまとめると，図11になる。これら（1）から（4）の事項から，円分割問題の課題学習での活用の可能性として，(a) 発展的な学習活動の展開，(b) 数学のよさや美しさの感得，(c) 生徒の興味や探究心の促進と主体的な学習活動の構成，(d) 高校数学の学習内容との関連付けと理解の促進が示唆された。特に，（1）問題の発展性と（2）解法と解決結果の統合性，（3）問題の意外性（2の累乗から離れること以外の意外性）は，点による円分割問題のみを扱った場合には出てこないものである。2つの円分割問題を同時に扱うことで，これらの教材のよさが引き出され，課題学習での活用の可能性がより拡大されると考える。

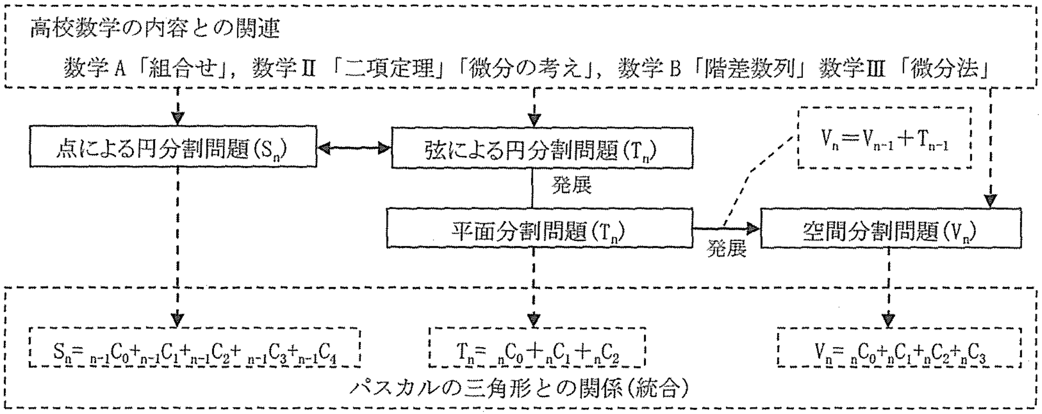


図11　2つの円分割問題の発展性・統合性・関連性

4．まとめと課題

本研究では，２つの円分割問題とその発展問題（平面分割問題と空間分割問題）の解決過程を検討し，それらの高校の課題学習での活用の可能性について検討した。その結果，円分割問題には，(1) 問題の発展性，(2) 解法と解決過程の統合性，(3) 問題の意外性，(4) 高校数学との関連性の４つのよさがあり，２つの円分割問題を活用した課題学習では，(a) 発展的な学習活動の展開，(b) 数学のよさや美しさの感得，(c) 生徒の興味や探究心の促進と主体的な学習活動の構成，(d) 高校数学の学習内容との関連付けと理解の促進の可能性が示唆された。しかし，課題学習は数学Ⅰと数学Aに設置されたものであり，生徒の履修状況によっては，数学Bや数学Ⅱ，数学Ⅲの内容と関連がある事項については扱えない場合もある。課題学習の趣旨を生かすのであれば，数学Ⅱや数学Bなど，他の科目での課題学習の実施についても検討が必要と考える。

今後は，実際に高校において円分割問題を活用した課題学習の指導実践を行い，生徒の学習活動や学習成果を評価し，具体的に効果を検討することが課題である。

＜引用文献＞

川中宣明ほか13名（2011）数学Ⅱ，数研出版

北島茂樹（2011）思考力・判断力・表現力を育む教材とその指導: 円分割問題とパスカルの三角形を題材に（〈特集〉高校新学習指導要領の実施へ向けて），日本数学教育学会誌 93（11），pp.47-50

文部科学省（2009）高等学校学習指導要領解説数学編（平成21年7月），実教出版

文部省（1999）中学校学習指導要領解説数学編（平成10年12月），大阪書籍

中村好則（2011a）水ロケット教材の高校数学Ⅰの課題学習での活用の可能性，日本数学教育学会誌93（3），pp.19-26

中村好則（2011b）高校数学[課題学習]で活用するフィルムケースロケットの教材化（数学的モデリングの授業実践を通じて，どんな力をどのように育てるか（2），課題研究，次世代の科学力を育てる：社会とのグラウンディングを実現するために），日本科学教育学会第35回年会論文集，pp.117-120

杉山吉茂（2009）中等科数学科教育学序説，第27章 関数の考え，pp.305-319，東洋館

筑波大学附属中学校数学教育研究会（1991）数学科課題学習の教材集－中学校・新しい授業－，明治図書