

2層釘着梁の弾塑性曲げ解析

辻野哲司*・平井卓郎**・小泉章夫**

(2007年12月7日受理)

1. 緒言

釘着梁が曲げモーメントを受ける場合、層間すべりを生ずるため、接着梁とは異なった変形挙動を示す。これまで、釘着梁の曲げ変形に関する研究は多くなされており、例えば菱田¹⁾らは等価一体梁仮定による法で、辻井²⁾は釘着部有効配置理論による法で、Goodman³⁾、沢田⁴⁾は釘拘束による軸方向力を考慮する法で解を得ている。なお、これらの研究は初期剛性に関する線形解析である。一方、非線形解析についてはTremblay⁵⁾によるすべり係数の非線形性を考慮した場合、さらに部材の圧縮強さ、引張り強さまで考慮に入れた小泉^{6,7,8)}らによる曲げ耐力解析法があげられる。

ところで、Kawai^{9,10)}により開発された剛体ばねモデル(RBSM)は、クラックやすべりなどの不連続性を伴う問題にも、比較的、容易に対応できる。それ故、本研究では、この手法を釘着梁に適用し増分理論¹¹⁾も併用して、その弾塑性解析を行い、梁が破壊するまでの最大荷重を求めることを試みた。

2. 解析方法

図1は釘着梁を有限個の矩形要素でモデル化した一部を示すものであり、①は梁の軸方向に垂直な境界面上のばね要素を、②は部材(個材)間の境界面上、釘着部におけるばね要素を示す。

2.1 ばね要素剛性方程式

2.1.1 材軸方向ばね要素の剛性方程式

RBSMにおいては、隣接する2要素境界面に設定したばねを通して力が伝わるものとする。本報告では、梁の軸方向ばねには、梁の曲げに関するばねを設定した。すなわち、ばね要素①に関する剛性方程式は次のよう与えられる¹²⁾。

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{k}_i \mathbf{u}_i \quad (1)$$

ここに、

$$\mathbf{f}_i = [X_1, Y_1, M_1, X_3, Y_3, M_3]^t, \quad \mathbf{u}_i = [u_1, v_1, \theta_1, u_3, v_3, \theta_3]^t$$

* 岩手大学教育学部

** 北海道大学大学院農学研究院

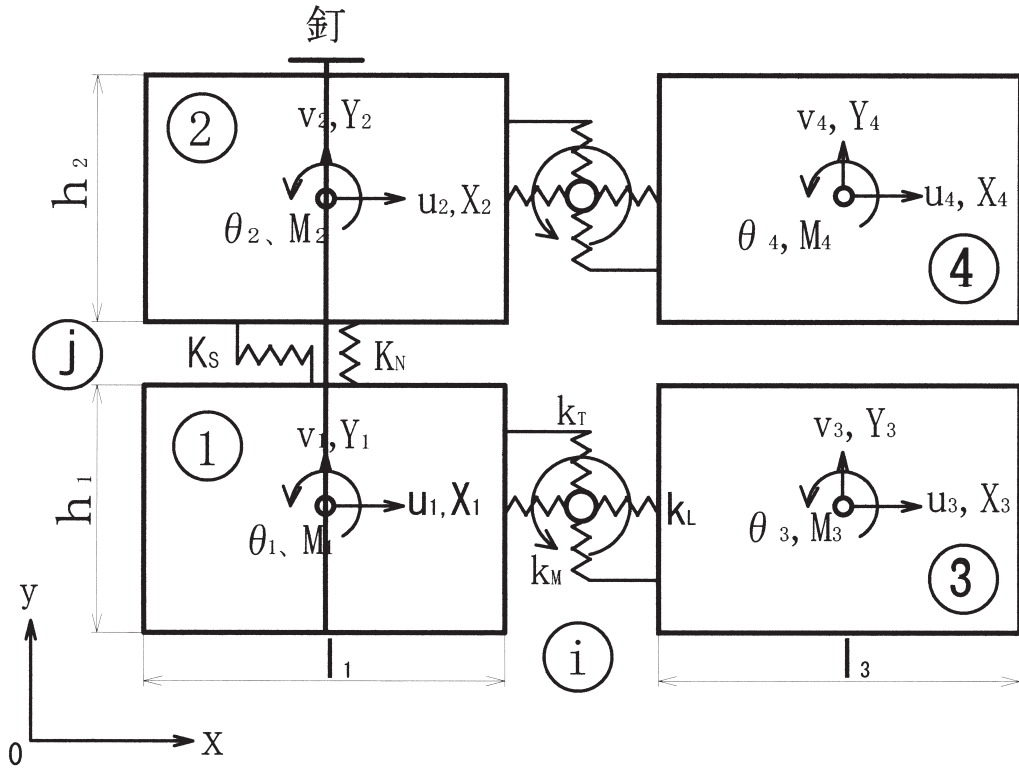


図1 矩形要素でモデル化された釘着梁（一部）

$$\mathbf{k}_i = \begin{bmatrix} k_L & 0 & 0 & -k_L & 0 & 0 \\ k_T & \frac{l_1}{2}k_T & 0 & -k_T & \frac{l_3}{2}k_T & 0 \\ \frac{l_1^2}{4}k_T + k_M & 0 & -\frac{l_1}{2}k_T & \frac{l_1 l_3}{4}k_T - k_M & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & k_L & 0 & 0 & 0 \\ & & & k_T & -\frac{l_3}{2}k_T & 0 \\ & & & & \frac{l_3^2}{4}k_T + k_M & 0 \end{bmatrix}$$

$$k_L = \frac{2E_{L1}A}{l_1 + l_3}, \quad k_T = \frac{2G_{LT1}A}{l_1 + l_3}, \quad k_M = \frac{2EI}{l_1 + l_3}$$

$$A = bh_1, \quad EI = E_{L1} \frac{bh_1^3}{12}$$

E_{L1}, G_{LT1} : それぞれ, 繊維方向ヤング係数, せん断弾性係数

2.1.2 釘着部ばね要素の剛性方程式

部材間の境界面上，釘着部におけるバネ要素①には，釘による軸力ばね K_N とせん断ばね K_S を設定した。この場合のばね要素の剛性方程式を求めるために，まず図2に示すような部材座標系 (\bar{x}, \bar{y}) における2つの矩形要素②，③を考える。要素境界面における垂直方向の相対変位を $\bar{\delta}_n$ ，同じく接線方向の相対変位を $\bar{\delta}_s$ とすれば次式が成立する。

$$\begin{aligned} \bar{N} &= \bar{K}_N \bar{\delta}_n \\ \bar{S} &= \bar{K}_S \bar{\delta}_s \end{aligned} \tag{2}$$

ここに， \bar{N} ， \bar{S} は表面力（ばねに働く力）， \bar{K}_N ， \bar{K}_S は境界面の軸力ばね定数，せん断ばね定数を示す。

さて，これら2つのばねに貯えられる歪エネルギーは

$$\bar{V} = \bar{K}_N \frac{\bar{\delta}_n^2}{2} + \bar{K}_S \frac{\bar{\delta}_s^2}{2} = \frac{1}{2} \bar{\delta}^t \bar{D} \bar{\delta} \tag{3}$$

ここに，

$$\begin{aligned} \bar{\delta} &= [\bar{\delta}_n, \bar{\delta}_s]^t \\ \bar{D} &= \begin{bmatrix} \bar{K}_N & 0 \\ 0 & \bar{K}_S \end{bmatrix} \end{aligned}$$

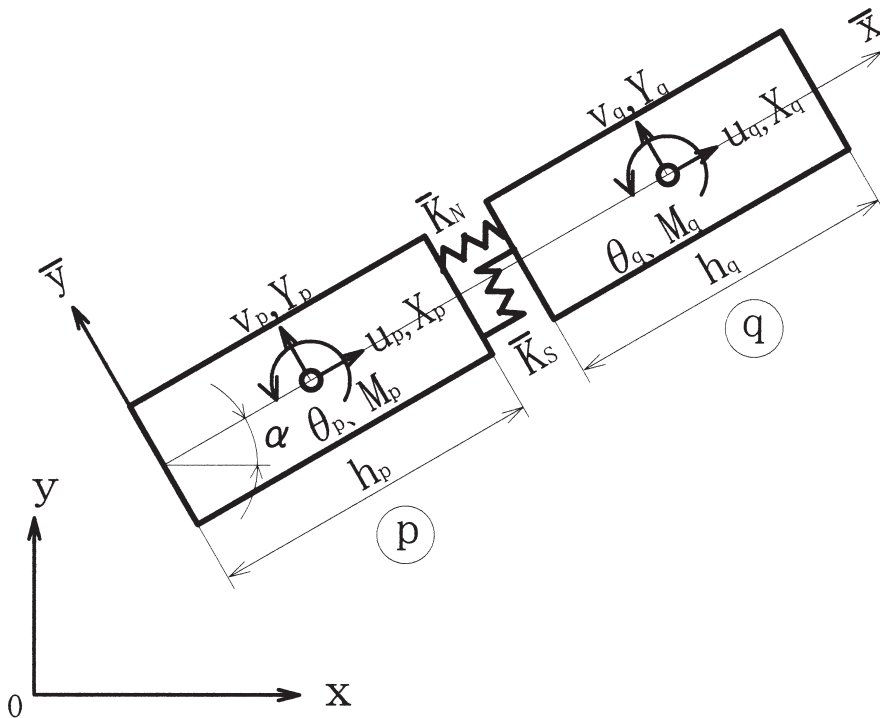


図2 部材座標系における矩形要素

ここで、相対変位 $\bar{\delta}$ は重心の剛体変位を用いて次のように表される。

$$\bar{\delta} = B\bar{u} \quad (4)$$

ここに、

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{h_p}{2} & 0 & 1 & -\frac{h_q}{2} \end{bmatrix}$$

$$\bar{u} = [\bar{u}_p, \bar{v}_p, \bar{\theta}_p, \bar{u}_q, \bar{v}_q, \bar{\theta}_q]^t$$

したがって、式 (4) を式 (3) に代入すると、歪エネルギーは以下のように表される。

$$\bar{V} = \frac{1}{2} \bar{u}^t \bar{K} \bar{u} \quad (5)$$

$$\text{ここに、} \bar{K} = B^t \bar{D} B$$

よって、式 (5) に Castigliano の定理を適用すると、次のような剛性方程式が得られる。

$$\bar{f} = \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{u}} = \bar{K} \bar{u} \quad (6)$$

ところで、式 (6) は局所座標系のものであるので、これを全体座標系の剛性方程式で表すと、以下のようなになる。

$$f = K u \quad (7)$$

$$\text{ここに、} K = T^{-1} \bar{K} T$$

ところで、図1の境界面①は、図2において $\alpha = \frac{\pi}{2}$ の場合であるから (α : 全体座標系の x 軸と局所座標系の \bar{x} 軸とのなす角度)、結局次のような剛性方程式が得られる。

$$f_j = K_j u_j \quad (8)$$

ここに、

$$f_j = [X_1, Y_1, M_1, X_2, Y_2, M_2]^t, \quad u_j = [u_1, v_1, \theta_1, u_2, v_2, \theta_2]^t$$

$$K_j = \begin{bmatrix} K_S & 0 & -\frac{h_1}{2} K_S & -K_S & 0 & -\frac{h_2}{2} K_S \\ & k_N & 0 & 0 & -k_N & 0 \\ 0 & & \frac{h_1^2}{4} K_S & \frac{h_1}{2} K_S & 0 & \frac{h_1 h_2}{4} K_S \\ & & & K_S & 0 & \frac{h_2}{2} K_S \\ \text{sym.} & & & & K_N & 0 \\ & & & & & \frac{h_2^2}{4} K_S \end{bmatrix} \quad (9)$$

ここに、ばね定数 K_N , K_S は釘接合の場合、式 (2) から

K_N : 釘の引抜き係数,
 K_S : 釘のすべり係数

で与えることができる。

ところで、支点上または荷重点下にある釘着部の部材間境界層では、反力または外力を伝える必要があるため、軸力ばねには面内変形のばね定数¹³⁾を用いた。すなわちその部分の剛性マトリックスには、式 (9) の K_j を式 (10) の K'_j に置き換えたものを用いた。

$$K'_j = \begin{bmatrix} K_S & 0 & -\frac{h_1}{2}K_S & -K_S & 0 & -\frac{h_2}{2}K_S \\ & bl_1k_n & 0 & 0 & -bl_1k_n & 0 \\ 0 & & \frac{h_1^2}{4}K_S & \frac{h_1}{2}K_S & 0 & \frac{h_1h_2}{4}K_S \\ & & & K_S & 0 & \frac{h_2}{2}K_S \\ sym. & & & & bl_1k_n & 0 \\ & & & & & \frac{h_2^2}{4}K_S \end{bmatrix} \quad (10)$$

ここに、 b : 矩形要素の幅, $k_n = \frac{2E_{T1}}{(h_1+h_2)(1-\nu_{L1}\nu_{T1})}$

E_{T1} : 繊維直交方向ヤング係数, $\nu_{L1}\nu_{T1}$: ポアソン比

なお解析に際し、ラミナそのもの材背方向に分割しており、その境界面のバネ要素には、面内変形問題に関する剛性方程式を用いた¹³⁾。

2.2 釘のせん断荷重—すべり特性

釘着梁の非線形曲げ解析を行うためには、釘のせん断荷重—すべり特性を何らかの形で押えておく必要がある。そこで本研究では、次式で与えられる指数回帰式^{14,15)}を用いた。

$$P = B \left[1 - \exp\left(-\frac{A}{B}\delta\right) \right]^C \quad (11)$$

ここに、 P : 釘一本当たりのせん断荷重 (Kg), δ : 相対すべり (mm)

なお、後述の実験では釘着梁に CN90 釘を用いており A , B , C は次のようになる。

$$A = 275r_u + 5.29, \quad B = 352r_u - 7.90, \quad C = 0.616, \quad r_u: \text{材料の気乾比重}$$

また、釘の引抜き係数には、小西¹⁶⁾による推定値を用いたが、これの非線形性は考慮しなかった。

2.3 破壊条件

釘着梁を構成している個々の部材において、軸方向に働く力は、中立軸を境に圧縮力と引張

力になる。そこで次のような破壊条件式を仮定した。

2.3.1 部材の軸圧縮側

部材の圧縮側、任意の軸方向ばね要素 m に対して、既往の研究¹⁷⁾を参考に、次式のような曲げモーメントと軸圧縮力に関する 2 次式を仮定した。

$$\left(\frac{N_c}{N_{cp}}\right)_m^2 + 4\left(\frac{M}{M_p}\right)_m^2 = 1 \quad (12)$$

ここに、

N_c, M : ばね要素 m に作用する軸圧縮力, 曲げモーメント

N_{cp}, M_p : ばね要素 m における塑性軸圧縮力, 塑性モーメント

ばねの受け持つ力が式 (12) に達すると、ばねはすべりを発生し、その後はこの破壊条件を満足しながら、表面力に変化する。本報告では、荷重増分法を適用しているため、このような現象を表現するための構成式を、山田¹⁸⁾の方法で求めると次式のようになる。

$$\Delta\sigma = D_p \Delta\delta \quad (13)$$

ここに、

$$\Delta\sigma = [\Delta F_L, \Delta F_T, \Delta M]^t, \quad \Delta\delta = [\Delta\delta_L, \Delta\delta_T, \Delta\delta_\theta]^t$$

$$D_p = \begin{bmatrix} K_L - \frac{4N_c^2}{FN_{cp}^4} K_L^2 & 0 & -\frac{16MN_c}{FM_p^2 N_{cp}^2} K_L K_M \\ & K_T & 0 \\ sym. & & K_M - \frac{64M^2}{FM_p^4} K_M^2 \end{bmatrix}$$

$$F = \frac{4N_c^2}{N_{cp}^4} K_L + \frac{64M^2}{M_p^4} K_M$$

2.3.2 部材の軸引張側

部材の引張側、任意の軸方向ばね要素 n に対して、次の条件式を仮定した。

$$\left(\frac{N_t}{N_{tp}}\right)_n^2 + 4\left(\frac{M}{M_p}\right)_n^2 = 1 \quad (14)$$

ここに、

N_t, M : ばね要素 n に作用する軸引張力, 曲げモーメント

N_{tp}, M_p : ばね要素 n における塑性軸引張力, 塑性モーメント

沢田¹⁹⁾によれば、曲げを受ける梁は、最初、圧縮側の破壊により降伏し、最終的には、引張り外皮応力が、引張り強さに達したとき破壊する。本計算も以上の考え方にに基づき、釘着梁の弾塑性曲げ過程を、圧縮破壊ばねの蓄積と、弾性引張破壊ばねの組合せによりモデル化した。解析において引張ばねの破壊は、弾性引張破壊を仮定しており、ばね強さの分布も考慮していない（ばね強さはすべて一定）。これらの仮定によれば、最初に引張ばねが破壊するのは、スパン中央最下部のそれとなる。一旦、このばねが破壊すると、一律の純弾性ばねを仮定しているので、引張ばねの破壊が中立軸に向かって次々と連続的に起こり、そのまま終局耐力につな

がると思われる。それ故、スパン中央最下部のばねが引張破壊した時点で、梁は破壊したとみなした。

なお、釘着梁のせん断破壊、荷重点、支点部の局部圧縮破壊は考慮していない。

2.3.3 塑性モーメント、塑性軸圧縮力、塑性軸引張力

塑性軸圧縮力：ラミナの縦圧縮強さに、矩形要素の断面積を乗じた値とした。塑性軸引張力：ラミナの縦引張強さに、矩形要素の断面積を乗じた値とした。塑性モーメント：矩形要素内部に生ずる引張外皮応力が引張り強さに達した時、要素横断面に分布する垂直応力から求められる曲げモーメント²⁰⁾とした。

なお、部材（木材）の圧縮強さ σ_c 、引張り強さは σ_t は $\sigma_c = 0.003E$ 、 $\sigma_t = 3\sigma_c^{21)}$ とし、ヤング係数 E から求めた。

2.4 最小荷重増分率

本研究では前述したように、山田¹⁸⁾による荷重増分法を適用している。この方法は各荷重段階で、ばねを1つ1つ降伏させ、それに必要な荷重を自動的に決定するものである。

2.4.1 部材の軸圧縮側

前回までの軸圧縮力と曲げモーメントをそれぞれ N_c 、 M とし、今回の荷重増分における軸圧縮力増分と曲げモーメント増分を ΔN_c 、 ΔM とすれば、荷重増分率 r は次式から求めることが出来る。

$$r = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4JC}}{2JC} \quad (15)$$

ここに、

$$J = \frac{\Delta N_c N_c}{N_p^2} + 4 \frac{\Delta M^2}{M_p^2}, \quad B = 2 \left(\frac{\Delta N_c N_c}{N_p^2} + 4 \frac{\Delta M M}{M_p^2} \right), \quad C = \frac{N_c^2}{N_{cp}^2} + 4 \frac{M^2}{M_p^2} - 1 \quad (16)$$

2.4.2 部材の軸引張側

式(16)において、 ΔN_c 、 N_c をそれぞれ、軸引張力増分 ΔN_t 、軸引張力 N_t で置き換えることにより、式(15)から r が求められる。以上のようにして得られる r を、降伏を起こしていない全てのばねにおいて計算し、その中の最小のものを最小荷重増分率 r_{\min} とし、今回の荷重増分率とする。

3. 既往の実験による検証ならびに考察

筆者らの1人小泉^{6,7,8)}は2層釘着梁の曲げ耐力について理論的研究を行い、実験による検証を行っているので、それらを通して本解析法の妥当性を検証した。

3.1 実験方法

試験体は図3に示すような2層釘着梁であり、両端単純支持条件のもとで、スパン中央集中荷重を与えている。スパンは1600mmで、釘着位置は支点上を第1釘着点とし、半スパンを

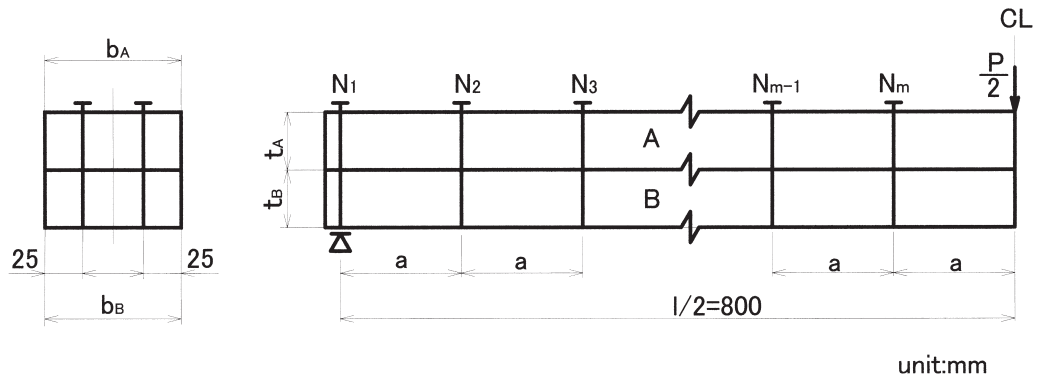


図3 試験体の形状と荷重条件（対称性より左半分表示）

スパン： $l=1600\text{mm}$ ， b_A, b_B ：部材幅， t_A, t_B ：部材高さ，
 m ：半スパン当たりの釘位置の数，釘間隔： $a=l/(2m)$ ，
 釘列数： $r=2$

表1 試験体の材質特性と釘着条件

試験体	部材	比重	ヤング係数 $E(\text{t/cm}^2)$	部材幅 $b(\text{mm})$	部材高さ $t(\text{mm})$	m	r
No. 1	A	0.437	135.0	88.90	37.35	2	2
	B	0.502	148.2	80.85	37.35		
No. 2	A	0.368	119.6	88.80	37.20	4	2
	B	0.421	112.8	88.85	37.90		
No. 3	A	0.426	113.4	84.70	37.90	6	2
	B	0.433	105.8	89.00	38.05		
No. 4	A	0.442	94.2	88.85	37.90	8	2
	B	0.423	92.5	89.05	37.90		
No. 5	A	0.409	105.0	85.15	37.75	4	2
	B	0.529	106.0	88.75	37.30		
No. 6	A	0.417	108.0	83.00	36.45	4	2
	B	0.426	120.0	85.25	37.75		

m ：半スパン当たりの釘着位置の数， r ：釘列数

等間隔に分割して配置した形をとっている。

従って、半スパン当たりの釘着位置数（： m ）が4の場合は、釘間隔（： a ）は 200mm となる。表1は試験体の材質特性と釘着位置数，釘列数を示すものである。

3.2 計算結果

計算に際し、最大荷重に対する要素数の影響を調べてみた。前述したように、軸方向ばねには梁の曲げに関する方程式を用いていることから、材背方向の分割幅は、最小でも $5\sim 6\text{mm}$ 取ることにした。ところで、表1の試験体において、どの部材も材背は約 38mm であるから、材背方向分割数を6（等分割）とした。そこでNo.5の試験体を例にとり、軸方向のそれをいくつか変えて（試験体は左右対称であるので全体の $1/4$ について解析）、最大荷重と要素数の関係を検討したところ、要素数470前後で、解には大きい違いが無いことが分かった。それ故、計算では全ての試験体において、図4に示すような要素数482（軸方向39分割）のモデルを

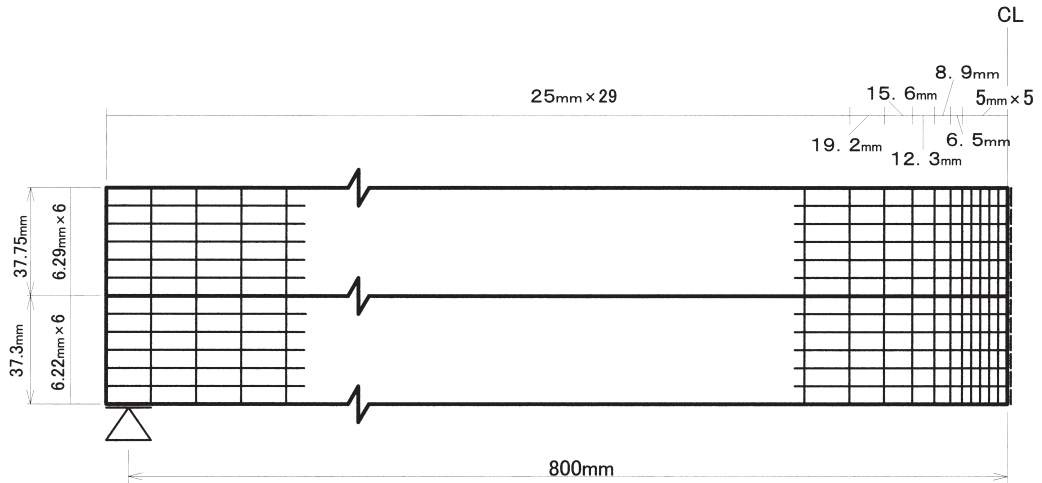


図4 要素分割 (対称性より試験体の左半分解析)
要素数：482, ばね数：899

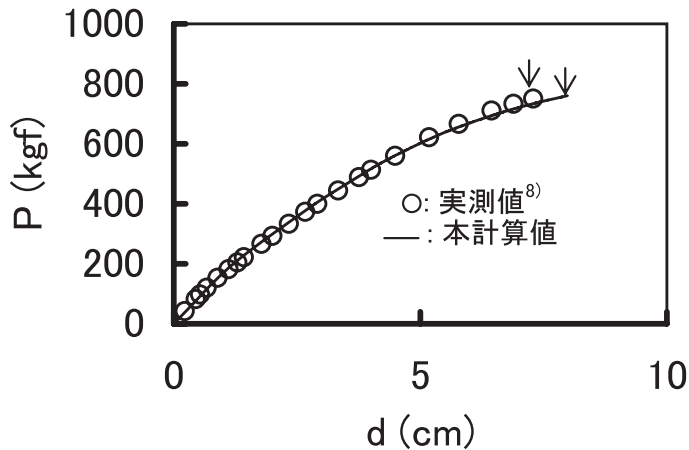


図5 No.5試験体の荷重-撓み曲線
d：スパン中央の撓み, P：スパン中央集中荷重,
↓：梁の破壊点

用いた。また、梁中央部、荷重点部、支点部には棒要素を入れた。

3.2.1 荷重-撓み曲線

試験体はすべて破壊に至らしめている。図5は例としてNo.5試験体の荷重-撓み曲線を示したものである。撓みはスパン中央のものであり、図中↓の印は梁がその時点で破壊したことを示している。

これより、荷重-撓み曲線、最大荷重の計算値は、実測値に比較的良く合っていると思われる。

3.2.2 破壊ばねの進展

図6はNo.5試験体の破壊ばねの進展状況を示すものである。最初、圧縮破壊が上部部材のスパン中央最上部生じ、負荷の増と共にこの破壊が進展した後、下部部材のスパン中央最上部に圧縮破壊が発生した。その後、最下部のばねが引張破壊をおこし梁は破壊した。実験では、上下部材の圧縮側に圧縮破壊線が多く見られ、最終的に下部部材の引張破壊で梁は崩壊しており、本解析法におけるバネの破壊進展は、釘着梁の曲げ変形・破壊過程をモデル化していると思われる。

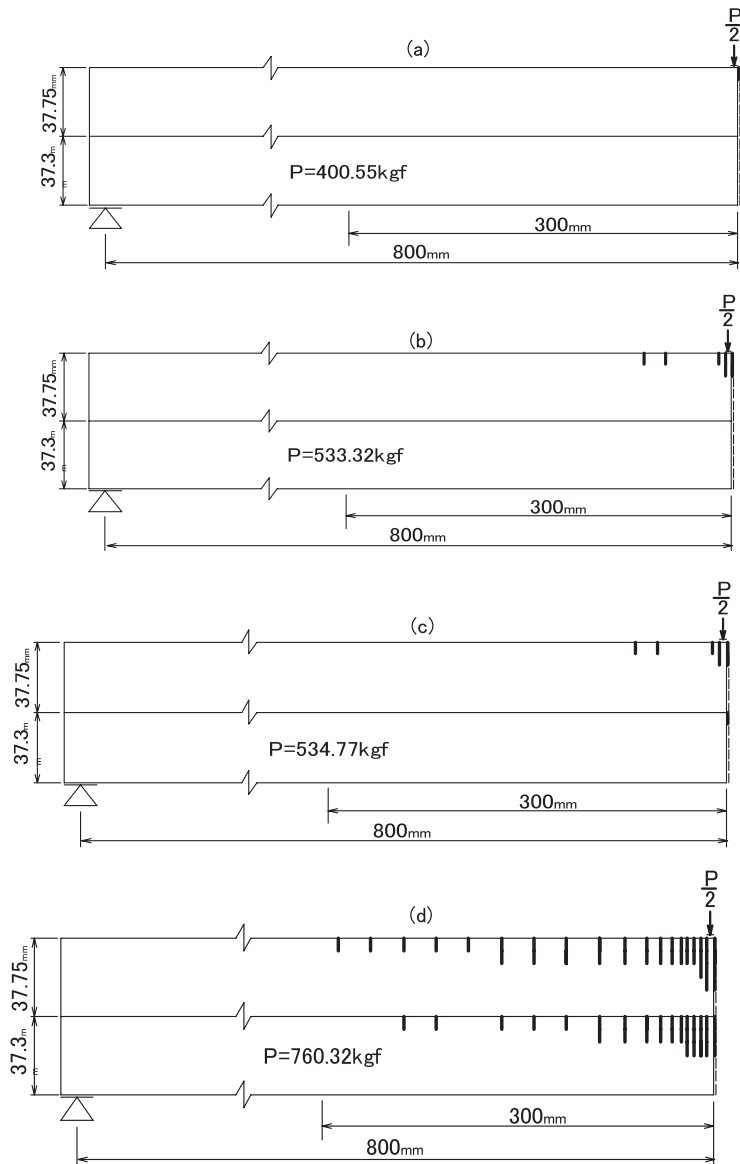


図6 No.5試験体における破壊ばねの進展状況

3.2.3 最大荷重

表2は、釘着梁の最大荷重に関する実測値、計算値⁸⁾と本計算値を示すものである。これより本計算値は、既往の実測値、計算値と概略的に適合していると思われる。

表2 2層釘着梁の最大荷重.

Specimens	P ₀ (kg)	P _T (kg)	P _R (kg)	P ₀ /P _R	P _T /P _R
No.1	830	879	887	0.94	0.99
No.2	775	796	795	0.97	1
No.3	775	780	765	1.01	1.02
No.4	765	746	739	1.04	1.01
No.5	756	733	760	0.99	0.96
No.6	770	740	800	0.96	0.93

P₀: 小泉による実測値⁹⁾,

P_T: 小泉による計算値⁸⁾,

P_R: 本計算値.

4. 結 言

本研究では、次のような計算手法のもとで、釘着梁の弾塑性解析を行い最大荷重を求めている。

- 1) 釘着梁を有限個の矩形要素に分割後、材軸方向のバネには梁の曲げに関する剛性方程式を、釘着部には釘のすべり係数、引抜き係数をバネ定数とする剛性方程式を用いた。
- 2) 釘のせん断荷重-すべり曲線には指数回帰式を用いた。
- 3) 破壊条件として、軸方向ばねに軸力と曲げモーメントに関する2次式を仮定した。

このような解析手法のもとにおいて、荷重増分法で得られた釘着梁の荷重-撓み曲線、最大荷重は既往の計算値、実測値と比較的良好な適合性を示した。以上のことにより、釘着梁の弾塑性曲げ解析に関する剛体ばねモデルを用いた本計算手法は、適用性があると思われる。

引用文献

- 1) 菱田一郎, 真能 創: 造船協会論文集, **104**, 131-137 (1959).
- 2) 辻井静二: 千葉大工研報, **8**, 3-29 (1957).
- 3) Goodman, J.R.: *Wood Science*, **1**(3), 8-151 (1969).
- 4) 沢田 稔: 北大演報, **33**(1), 139-166 (1976).
- 5) Tremblay, G.A., Goodman, J.R.: *Wood Science*, **9**(1), 21-30 (1976).
- 6) 小泉章夫, 上田恒司: 北大演報, **41**(1), 261-299 (1983).
- 7) 小泉章夫: 北海道大学農学部卒業論文 (1977).
- 8) Koizumi, A.: *Doctor's thesis of Faculty of Agriculture, Hokkaido University* (1983).
- 9) Kawai, T.: *J. of the Society of Naval Architects of Japan*, **141**, 174-180 (1977).
- 10) Kawai, T., Chang, N.C.: *J. of Seisankenkyu, Institute of Industrial Science, Univ. of Tokyo*, **30**, 165-168 (1978).
- 11) 山田嘉昭: “コンピュータによる構造工学講座II-2-A, 塑性・粘弾性”, 培風館, 東京, 1972,

p.38.

- 12) 川井忠彦：“離散化極限解析法概説”，培風館，東京，1991，p.58.
- 13) 川井忠彦，竹内則雄：“離散化極限解析プログラミング”，培風館，東京，1991，p.18.
- 14) Foschi, R.O. : *Wood Science*, **7**(1), 69-76 (1974).
- 15) Foschi, R.O., Bonac, T. : *Wood Science*, **9**(3), 118-123 (1977).
- 16) 小西千代治：農林省林業試験場研究報告，**248**，121-131 (1972).
- 17) 竹内則雄：“地盤力学における離散化極限解析”，培風館，東京，1991，p.29.
- 18) 山田嘉昭：“コンピュータによる構造工学講座Ⅱ-2-A，塑性・粘弾性”，培風館，東京，1972，p.74-78.
- 19) 沢田 稔：農林省林業試験場研究報告，**71**，81-119 (1954).
- 20) 今 俊三：日本土木学会論文集，**5**，41-55 (1950).
- 21) 沢田 稔：農林省林業試験場研究報告，**108**，116-198 (1958).