

木材上における座金の線形曲げ解析

辻野哲司*・平井卓郎**・竹内則雄***

(2005年10月31日受理)

1. 緒言

木材のボルト接合において、木材が十分厚く、かつ設計基準を満足するボルトを使用しても、座金のめり込み変形が大きいと、接合部のすべり量が増し、構造物は支障をきたすことになる。このようなことから適性座金の選択も、ボルト接合部設計のパラメータの一つになると思われる。しかしながら、学術的には平井^{1,2)}による座金のめり込み挙動に関する実験的検討がある程度で、十分なものとは言えない。解析的にこのような問題を取り扱うには、座金を弾性床上の平板とみなす方法が考えられる。弾性床上の平板に関する問題において、線形解については、Timoshienko³⁾、原口⁴⁾、能町⁵⁾らにより解が求められている。一方、小林⁶⁾らは Mindlin 理論を用いて線形粘弾性基礎上の板の解析を、倉田⁷⁾らは差分法を用いて非線形基礎床上の平板の解析を、さらに松田⁸⁾らは非線形地板上の平板の曲げ解析を増分形微分方程式により行っている。しかしこれまでの報告では、崩壊荷重を求めるまで至っていない、また境界条件によっては、解の得られない場合もある。

ところで、川井^{9,10)}により開発された剛体ばねモデル (RBSM) は、クラックやすべり等の不連続性を伴う問題にも、比較的容易に対応できるので、この手法を木材上座金の曲げ問題に適用し、増分理論¹¹⁾も併用すれば、その弾塑性解析も可能になる。そのためには先ず、この座金の線形曲げに関する剛性方程式を確立しておく必要があり、本研究ではそれについて検討を行った。

2. 解析方法

木材上の座金を弾性床上の板と見なせば、これは図1に示すような分布されたばね上の板曲げ要素の集合体で表すことができる。RBSM では、各要素に対し剛体変位場を仮定するので、この分布ばねによる床反力を、要素重心に作用する反力置き換えることができる。すなわち、板の曲げに関する剛性方程式に対し、上記の床反力の項を追加することにより、弾性床上板の曲げ解析と同様の解析を行ったものと考えられる。

* 岩手大学教育学部

** 北海道大学大学院農学研究科

*** 法政大学工学部

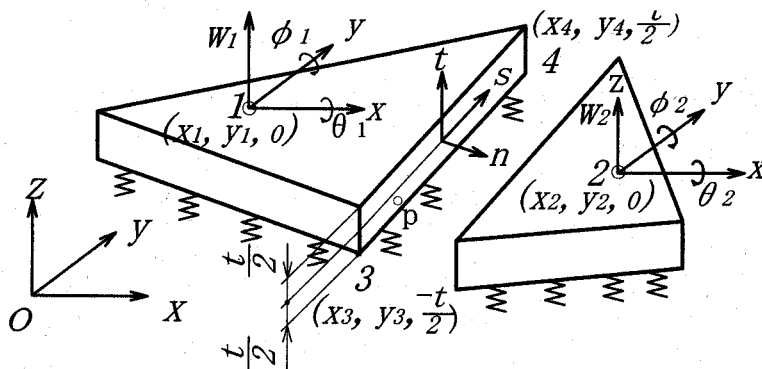


図1 弾性床上の板曲げ要素

2.1 板曲げ要素の剛性方程式

面外荷重が作用する平板要素の剛体変位場は、図1に示すようにz軸方向のたわみ(w)と、x軸、y軸回りの回転角(θ, φ)によって表すことができる。

ここで、全体座標系(x-y-z)のz軸を、2要素境界面上の局所座標系(s-t-n)のt軸と一致させ、z軸ならびにt軸の原点を、板厚方向の中心に設ける。このとき、要素1において、要素境界面内の任意点p(x, y, z)におけるx, y, z方向の移動量(U₁, V₁, W₁)は、要素重心の変位(w₁, θ₁, φ₁)を用いて、次のように表すことができる。

$$U_1 = T_1 u_1 \tag{1}$$

ここに、

$$T_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & z \\ 0 & -z & 0 \\ 1 & y - y_1 & -(x - x_1) \end{bmatrix}$$

$U_1 = [U_1, V_1, W_1]^t$, $u_1 = [w_1, \theta_1, \phi_1]^t$, (x_1, y_1) : 要素1の重心の座標値

次に、式(1)のU₁を、要素境界面上に取った局所座標系(s-t-n)の成分にU₁変換すると次式を得る。

$$\bar{U}_1 = R U_1 \tag{2}$$

$$\bar{U}_1 = [\bar{U}_1, \bar{V}_1, \bar{W}_1]^t, R = \begin{bmatrix} l & m & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ m & -l & 0 \end{bmatrix}$$

ここで、l, m は辺 34 の方向余弦であり、次の関係にある。

$$l = \frac{x_{43}}{L}, m = \frac{y_{43}}{L}, L = \sqrt{x_{43}^2 + y_{43}^2}$$

ただし、x_{ij}, y_{ij} の下付き添字 i, j は次のような意味を持つ。

$$x_{ij} = x_i - x_j, y_{ij} = y_i - y_j$$

よって、式(1)、(2)より、

$$\bar{U}_1 = R T_1 u_1 = z B_1 u_1 \tag{3}$$

ここに、

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}, \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -m & l \\ 1 & \Delta_{12} & -\Delta_{11} \\ 0 & l & m \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{11} = x - x_1 = \frac{x_{41} + x_{31}}{2}, \Delta_{12} = y - y_1 = \frac{y_{41} + y_{31}}{2}$$

式(3)は、要素1に対する座標変換後の剛体変位を示したものである。同様にして、この要素と隣接する要素2の $s-t-n$ 座標系での移動量を求めると、

$$\overline{\mathbf{U}}_2 = \mathbf{zB}_2\mathbf{u}_2 \tag{4}$$

$$\text{ここに、} \overline{\mathbf{U}}_2 = [\overline{U}_2, \overline{V}_2, \overline{W}_2]^t, \mathbf{u}_2 = [w_2, \theta_2, \phi_2]^t$$

$$\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -m & l \\ 1 & \Delta_{22} & -\Delta_{21} \\ 0 & l & m \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{21} = x - x_2 = \frac{x_{42} + x_{32}}{2}, \Delta_{22} = y - y_2 = \frac{y_{42} + y_{32}}{2}$$

よって、隣接する2つの要素境界边上中点における相対変位 (δ) は、次のように表される。

$$\delta = \mathbf{zBu} \tag{5}$$

$$\text{ここに、} \delta = [\overline{U}_2 - \overline{U}_1, \overline{V}_2 - \overline{V}_1, \overline{W}_2 - \overline{W}_1]^t = [\delta_s, \delta_t, \delta_n]^t$$

$$\mathbf{u} = [w_1, \theta_1, \phi_1, w_2, \theta_2, \phi_2]^t$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & m & -l & 0 & -m & l \\ -1 & -\Delta_{12} & \Delta_{11} & 1 & \Delta_{22} & -\Delta_{21} \\ 0 & -l & -m & 0 & l & m \end{bmatrix}$$

ここで、($\delta_s, \delta_t, \delta_n$) はそれぞれ、局所座標系 $s-t-n$ 軸に沿った相対変位を表している。

一方、相対変位 (δ) と単位面積あたりの表面力 (σ) の間には、次の関係が成立するものと仮定する。

$$\sigma = \mathbf{D}\delta \tag{6}$$

$$\sigma = [\tau_s, \tau_t, \sigma_n]^t, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} k_s & 0 & 0 \\ 0 & k_t & 0 \\ 0 & 0 & k_n \end{bmatrix}$$

ここに、(τ_s, τ_t, σ_n) はそれぞれ s 軸、 t 軸方向のせん断力、 n 軸方向の軸力に対応する。

また \mathbf{D} は、ばね行列であり、 k_s, k_t はそれぞれ s 軸、 t 軸方向のせん断に抵抗するばねを、 k_n は n 軸方向の軸力に抵抗するばねを表している。

これらのばね定数は、従来の RBSM と同様、平面応力状態を想定し、次のように仮定した。

$$k_s = k_1 \frac{E}{(1+\mu)h}, k_n = \frac{E}{(1+\mu^2)h} \tag{7}$$

ここに、 E : 板のヤング係数、 μ : ポアソン比

h : 隣り合う2つの要素重心から要素境界面に下した垂線の長さの和

以上から、変形後に要素間のばね系に蓄えられる歪エネルギー V は

$$V = \frac{1}{2} \int_A \delta^t \mathbf{D} \delta dA$$

$$= \frac{1}{2} \mathbf{u}^t \mathbf{B}^t \int_A (\mathbf{z}^t \mathbf{D} \mathbf{z}) dA \mathbf{B} \mathbf{u} \quad (8)$$

ここで、 A は隣り合う2要素境界面の面積を意味している。

従って、Castiglianoの定理から、要素剛性方程式が次のように求められる。

$$\mathbf{f} = \mathbf{k} \mathbf{u} \quad (9)$$

ここに、 $\mathbf{f} = [Q_1, L_1, M_1, Q_2, L_2, M_2]^t$

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ & & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ & & & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ & sym. & & & k_{55} & k_{56} \\ & & & & & k_{66} \end{bmatrix}$$

$$k_{11} = k_G, \quad k_{12} = \Delta_{12} k_G, \quad k_{13} = -\Delta_{11} k_G, \quad k_{14} = -k_{11}, \quad k_{15} = -\Delta_{22} k_G, \quad k_{16} = \Delta_{21} k_G$$

$$k_{22} = m^2 k_J + l^2 k_M + \Delta_{12}^2 k_G, \quad k_{23} = -l m k_J + l m k_M - \Delta_{11} \Delta_{12} k_G, \quad k_{24} = -k_{12},$$

$$k_{25} = -m^2 k_J - \Delta_{12} \Delta_{22} k_G - l^2 k_M, \quad k_{26} = l m k_J - l m k_M + \Delta_{11} \Delta_{12} k_G,$$

$$k_{33} = l^2 k_J + m^2 k_M + \Delta_{11}^2 k_G, \quad k_{34} = -k_{13}, \quad k_{35} = l m k_J - l m k_M + \Delta_{11} \Delta_{22} k_G$$

$$k_{36} = -l^2 k_J - m^2 k_M - \Delta_{11} \Delta_{22} k_G, \quad k_{44} = k_{11}, \quad k_{45} = -k_{15}, \quad k_{46} = -k_{16}$$

$$k_{55} = m^2 k_J + l^2 k_M + \Delta_{22}^2 k_G, \quad k_{56} = -l m k_J + l m k_M - \Delta_{21} \Delta_{22} k_G,$$

$$k_{66} = l^2 k_J + m^2 k_M + \Delta_{21}^2 k_G$$

$$k_J = \frac{ELt^3}{12(1+\mu)h}, \quad k_M = \frac{ELt^3}{12(1-\mu^2)h}, \quad k_G = \frac{EA}{(1+\mu)h}$$

2.2 床反力

本研究では、図1における床ばねをWinkler型ばねと仮定する。

いま要素1に着目し、その任意点 $q(x, y)$ の沈下量 $e_1(W_1)$ を求めると式(1)より次のようになる。

$$e_1 = w_1 + (y - y_1)\theta_1 - (x - x_1)\phi_1 = \mathbf{H}_1 \mathbf{u}_1 \quad (10)$$

ここに、 $\mathbf{H}_1 = [1, (y - y_1), -(x - x_1)]$, x_1, y_1 : 要素1の重心座標値

$\mathbf{u}_1 = [w_1, \theta_1, \phi_1]^t$: 要素1の剛体変位

この時、このばねに蓄えられる歪エネルギーは以下のように求められる。

$$V_{r1} = \frac{1}{2} \int_{S_1} \mathbf{u}_1^t \mathbf{H}_1^t c_{v1} \mathbf{H}_1 \mathbf{u}_1 dS_1 \quad (11)$$

S_1 : 板要素の面積、 c_{v1} : 弾性面圧定数

この積分を実行し、要素重心に作用する床反力 \mathbf{r}_1 を求めると、次のように表すことができる。

$$\mathbf{r}_1 = \frac{\partial V_{r1}}{\partial \mathbf{u}_1} = \mathbf{k}_{r1} \mathbf{u}_1 \quad (12)$$

ここに、 $\mathbf{r}_1 = [r_{w1}, r_{\theta1}, r_{\phi1}]^t$

$$k_{r1} = c_{v1} \begin{bmatrix} S_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_{x1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{y1} \end{bmatrix}$$

$$S_1 : \text{要素1の面積、} I_{x1} = \int_{S_1} (y-y_1)^2 dS_1 \quad I_{y1} = \int_{S_1} (x-x_1)^2 dS_1$$

なお、めり込み初期の場合の面圧定数には、次式から得られる値を用いた。

$$c_{v1} = \frac{E_R}{H} \tag{13}$$

ここに、 E_R は床材（木材）の繊維直交方向ヤング係数、 H は床材の厚さである。

また、ばね定数 k_{w1} と面圧定数 c_{v1} には次の関係が成立する。

$$k_{w1} = c_{v1} S_1 \tag{14}$$

2.3 弾性床板上板曲げ要素の剛性方程式

式 (12) は要素 1 についてのものである。これをすべての要素について計算し、板全体に作用する床反力を求めると次のようになる。

$$R = \sum_{i=1}^n r_i = K_r U \tag{15}$$

ここに R , K_r , U : それぞれ、全体剛性マトリックス組立て時の床反力ベクトル、床反力マトリックス、変位ベクトルを表す。

よって、弾性床の上に置かれた平板の解くべき方程式が、式 (16) のように求められ、最終的には、式 (17) の方程式を解けばよいことになる。

$$K_b U = F - R \tag{16}$$

$$(K_b + K_r) U = F \tag{17}$$

ここに、 K_b : 板の曲げに関する全体剛性マトリックス

F : 全体剛性マトリックス組立て時の外力ベクトル

3. 計算例

M12ボルト用、M16ボルト用として、それぞれ縦・横・厚さが40mm×40mm×4.5mm、54mm×54mm×6mmの角座金（前者には直径12.5mmの、後者には18.5mmの円孔を座金中心に有している）のめり込み問題を取り扱った。床材は、幅・厚さ・長さが95mm×95mm×200mmのエゾマツである。それら実験に用いた部材の材質特性は次の通りである。

座金のヤング係数： $E = 2.1 \times 10^4 \text{ kgf/mm}^2$

エゾマツ繊維直交方向ヤング係数： $E_R = 40 \text{ kgf/mm}^2$

弾性面圧定数： $C_{v1} = 0.421 \text{ kgf/mm}^3$

図2はM12ボルト用座金の荷重方法を示すものであり、座金の上に置いたボルト頭部に圧縮荷重をかけ、座金をめり込ませた。M16ボルト用座金の場合も同様の荷重方法である。

ところで、座金の端部は繊維方向の余長効果により、床反力は内部より大きくなる。いま、端部の床反力を r_{ot} 、内部のそれを r_{in} とすれば、それらの関係は次のように表すことができる。

$$r_{ot} = q r_{in} \tag{18}$$

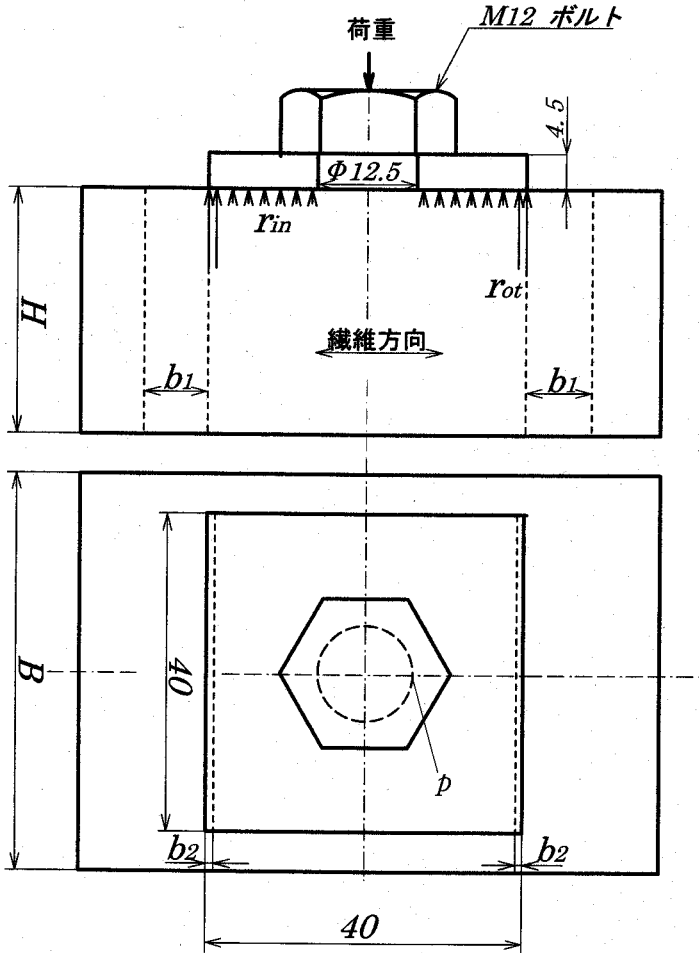


図2 M12ボルト用座金の面圧試験

ここに、 q は倍率であり、いま余長部分の有効圧縮幅を b_1 、端部ばねの負担幅を b_2 とし、片側有効圧縮幅分の抵抗を、すべて端部ばねに加えるとすれば、 q は次式で与えられる。

$$q = \frac{b_1 + b_2}{b_2} \tag{19}$$

図3はM12ボルト用座金の場合の要素分割を示す。座金は上下・左右とも対称であるので、全体の1/4について解析した。それ故、対称軸である x 軸、 y 軸には棒要素を配置した。また、端部ばねの負担幅は両者とも2mmとし、繊維方向の余長効果による有効圧縮幅は、M12ボルト用座金で、20mm ($40/2$)、M16ボルト用座金で27mm ($54/2$) と仮定した。

図4はM12ボルト用座金の、図5はM16ボルト用座金の、負荷初期段階における荷重一めり込み変位関係を示したものである。

得られた線形解は、両者とも実測値に対し比較的良く適合していると思われる。

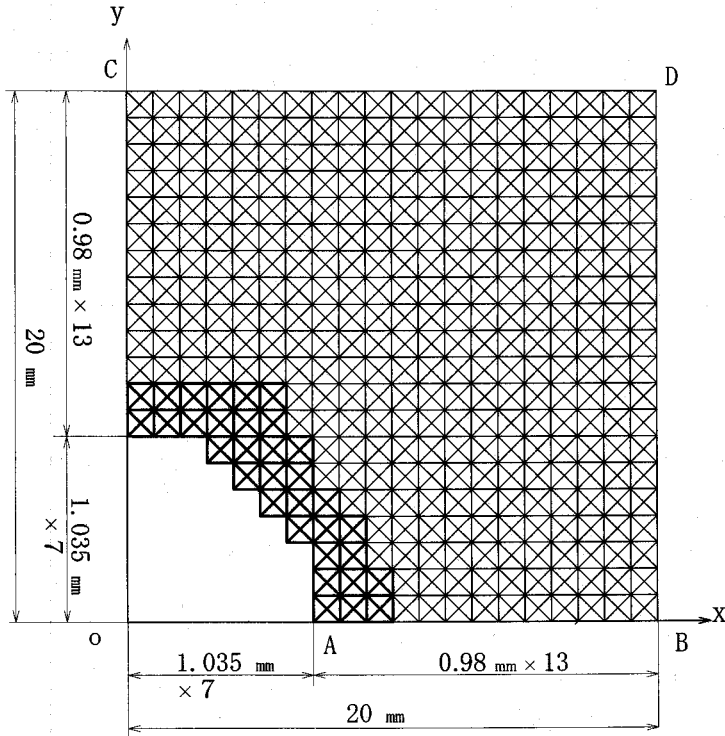


図3 M12ボルト用座金の要素分割

注：対称性より、全体の1/4を解析、ゴシックで囲まれた要素には等分布荷重を負荷

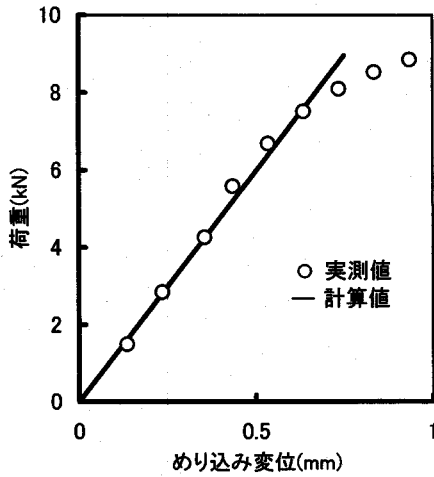


図4 M12ボルト用座金の荷重—めり込み変位関係

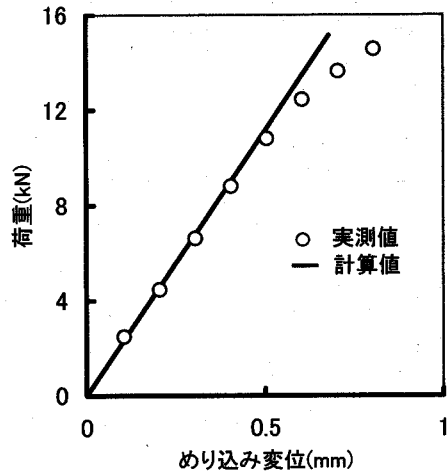


図5 M16ボルト用座金の荷重—めり込み変位関係

4. 結 言

本研究では、剛体-ばねモデル (RBSM) を用いて、木材上における座金の線形曲げ解析に関する剛性方程式を求めた。得られた計算値は実測値に対し概ね適合性を示したことから、本剛性方程式の妥当性が確認された。

引 用 文 献

- 1) 平井卓郎「木材のボルト及びドリフトピン接合部のせん断耐力解析 (第2報)」(「木材学会誌」37巻11号、1991)、1017-1025頁。
- 2) 平井卓郎「農林水産省試験研究費補助金研究成果報告書」(1991)、79-81頁。
- 3) Timoshienko, S and Woinowsky-Krieger, S.: Theory of Plates and Shells, McGRAW-HILL, London, 1959.
- 4) 原口忠次郎「弾性基礎上の矩形版」(山海堂、1964)、3-16頁。
- 5) 能町純雄「弾性基礎にある四辺、四隅自由な矩形板の曲げについて」(「土木学会論文集」32号1956)、26-32頁。
- 6) Kobayashi, H and Sonoda, K. "Rectangular thick plate on linear viscoelastic foundations", *Proc. of JSCE*, No. 341 (1984), pp. 33-40.
- 7) 倉田宗章、高端宏直、谷平勉「非線形ばね基礎上の周辺自由な平板の数値解析」(「土木学会論文報告集」208号、1972)、13-21頁。
- 8) 松田浩、崎山毅「非線形弾性地盤上の矩形版の非弾性曲げの一解析法」(「構造工学論文集」34巻A、1988)、79-86頁。
- 9) Kawai, T., "New element models in discrete structural analysis", *J. of the Society of Naval Architect of Japan*, No. 141 (1977), pp. 174-180.
- 10) Kawai, T., "A new discrete model for analysis of solid mechanics problems", *J of Seisank-enkyu, Institute of Industrial Science, Univ. of Tokyo*, Vol 29, No. 4 (1977), pp. 14-16.
- 11) 山田嘉昭「コンピュータによる構造工学講座Ⅱ-2-A、塑性・粘弾性」(培風館1972)、38-41頁。