岩手大学教育学部研究年報　第62巻（2003．2）185～191．

高校数学の微積分教材

中　嶋　文　雄*

（2002年9月30日受理）

概　要

高校微積分教材について大学教育の立場から考察する。第一章では循環小数について，第二章では基本的な積分公式の力学的意味について，第三章では定積分の積分範囲について，第四章では弧度法について述べる。

1　循環小数

高校数学の中で循環小数 $0.\dot{9}=0.999\cdots$ に対し $0.\dot{9}=1$ となることを生徒が直観的に理解できないという点について考察する。端的に言えば，直観的理解に相当するものはそもそも存在しないというのが著者の結論である。数学的には $\dot{9}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{9}{10^k}=1$ は理解されるに違いない。問題点を少し数学的に整理すれば，$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{9}{10^k}$（$n$ は自然数）と置くと，すべての自然数 n に対し $a_n<1$ であるにもかかわらず $\lim_{n\to\infty}a_n=1$ が直観的に理解されていないという事である。これは実は大学の数学教育の場でもよく見られる事である。これに対する著者の答えは「極限操作は数の大小関係を必ずしも保存しない」である。任意の有限回操作で成立する事柄が，無限回の操作の後に成立する場合もあり，成立しない場合もある。等式の関係が前者であり，不等式の関係が後者である。この極限操作が数学者に対してさえも直観的に受け入れ難い例として，19世紀末のペアノ曲線の発見がある。また，$0.\dot{9}<1$ へとミスリードする要素の一つに $0.\dot{9}=0.999\cdots$ の記法のあいまいさがあると著者は考える。$0.999\cdots$ は有限小数の記法の無限小数への濫用であり，この記法の中に何らかの数学的意味がある訳ではない。従って例えば $0.9<0.\dot{9}=0.999\cdots$ 及び $0.\dot{9}=0.999\cdots\leq 1$ は $0.\dot{9}=0.999\cdots$ の記号から導かれるのではなく，あくまでも $0.\dot{9}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{9}{10^k}$ の定義に従って $0.9<\sum_{k=1}^{\infty}\frac{9}{10^k}$ 及び $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{9}{10^k}\leq 1$ から導かれるのである。再言するまでもなく，$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{9}{10^k}=1$ である。著者の研究室の学生の一人は高校生の時，先生から $0.\dot{9}=1$ の証明として $\frac{1}{3}=0.\dot{3}$ の両辺を3倍することを習ったという。この証明は二つの問題点がある。一つは無限級数の定数倍は各項を同じく定数倍したものの無限級数と等しくなることを前提としていること。もう一つは $\frac{1}{3}=0.\dot{3}$ を正しいものと認めていることである。$\frac{1}{3}=0.\dot{3}$ を正しいとすれば $9\div 9=1$ の計算を次のように行えば $1=0.\dot{9}$ が直接得られる：

＊　岩手大学教育学部

$$9\div 9=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{9}{10^k}$$

最後に著者はアキレスと亀の話の論理に立てば（この論理はもちろん欠陥がある），$0.\dot{9}<1$ となることを考察した。すなわち $0.\dot{9}=1$ が直観的に受け入れ難いという事はアキレスと亀の話の論理を受け入れてしまう危さと同値である。

2 積分係数

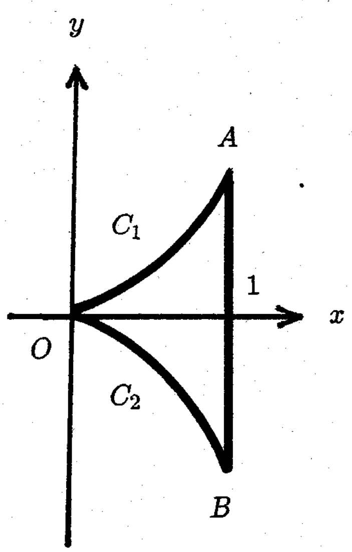
アルキメデスは求積問題のいくつかを力学のテコの原理を応用して解いた [1]。ここではそのアイデアを基にして，積分公式

$$\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}\ (n：自然数) \tag{1}$$

における係数 $\frac{1}{n+1}$ の意味付けを試みる。

まず，(1) の被積分関数より 1 つ次数の低い関数 $y=x^{n-1}(0\leq x\leq 1)$ を考え，x-y 平面におけるそのグラフを C_1 とする。原点を O とし，$A=(1,1)$ とすれば，C_1 は $n\geq 2$ のとき O と A を結ぶ曲線となり，$n=1$ のとき，$P_1=(0,1)$ と A を結ぶ線分となる（図 1 の（イ）及び（ロ）を参照)。C_2 を C_1 と x 軸に関し対称なグラフとし，$B=(1,-1)$ とする。$n\geq 2$ のとき，C_1, C_2 及び線分 AB は閉曲線をなす。$n=1$ のとき C_1, C_2，線分 AB 及び線分 P_1P_2 は長方形をなす（ここで $P_2=(0,-1)$ とする)。

（イ） （ロ）



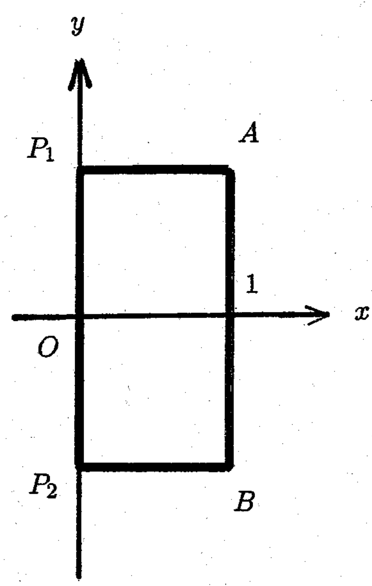


図 1

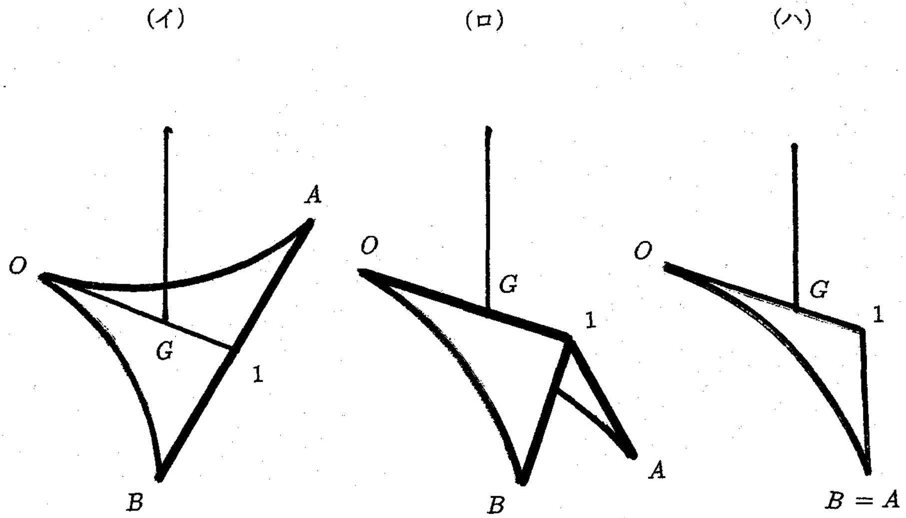


図 2

さて，我々の重力の働く 3 次元空間において，図 1 の（イ），（ロ）の各々の図形 AOB と AP_1P_2B は均一な密度の材質から成る板とし，これらの重心を求めることを考える。すなわち，これらの板をある一点 G で垂直方向に吊るすとき，これらの板が水平に保たれるようにする。まず，図 1 の（ロ）の場合は明らかに $G=(\frac{1}{2}, 0)$である。以下，図 2 を考える。図形 AOB は線分 O1 に関し対称なので重心 G は O1 上にある。AOB を G で吊るしたまま，図形 AO1 と BO1 を O1 に対称にしつつ，下方に折り畳む。(図 2 の（イ）→（ロ）→（ハ）を参照)
従って，図 2 の（ハ）において，線分 O1 は水平に保たれたままである。（ハ）において，点 G の周りの回転モーメントを求める。G から点 1 に向かってのモーメントを I_1，G から点 O に向かってのモーメントを I_2 とすると，$I_1=I_2$，かつ

$$I_1=\int_G^1 x^{n-1}(x-G)dx,\quad I_2=\int_0^G x^{n-1}(G-x)dx$$

となる。ここで板の密度は 1 で，点 G の x 座標を G$(0\leq G\leq 1)$としている。I_1, I_2 の計算及び $I_1=I_2$ より，

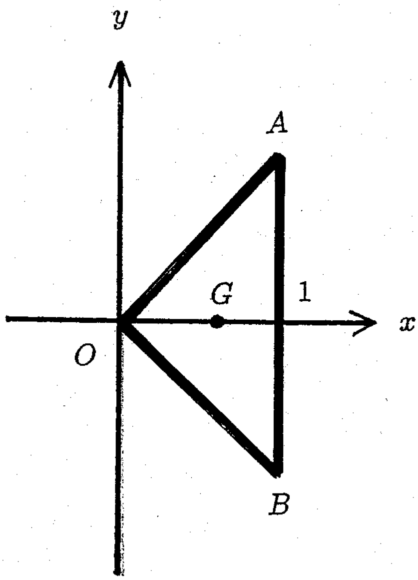
$$G=\frac{n}{n+1}$$

となる。よって，点 x=1 と G との距離 G1 は $\frac{1}{n+1}$ となる。すなわち，(1) の係数 $\frac{1}{n+1}$ は図形 AOB の重心の位置を表している。図 1 の（ロ）も同様である。次に例として，$n=2, 3$ 及び 1 について述べる：

(i) $n=2$ のとき，$\int x^2dx=\frac{1}{3}x^3$ であり図形 AOB は 2 等辺三角形である。(図 3 参照)

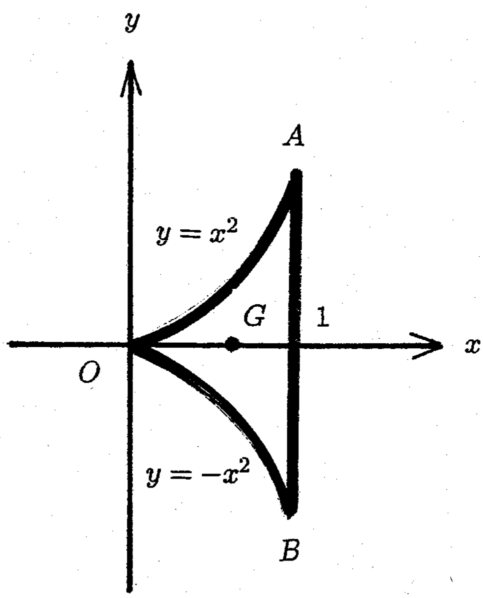
(ii)$n=3$ のとき，$\int x^3dx=\frac{1}{4}x^4$ であり図 AOB の概形は次のようになる。(図 4 参照)

(iii)$n=1$ のとき，$\int xdx=\frac{1}{2}x^2$ であり図 1 の（ロ）により $G1=\frac{1}{2}$ となる。



$G1 = \frac{1}{3}$

図 3



$G1 = \frac{1}{4}$

図 4

3 定積分

実数区間Ｉ上で定義された連続関数 $f(x)$ に対しその定積分について考察する。Ｉの２点 a, b に対し，$a<b$ ならば，通常の区分求積法により定積分 $\int_a^b f(x)dx$ は定義される。そして，高校数学の教科書を始め多くの文献がそうであるように，$a>b$ ならば

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \tag{2}$$

と定義する。こうすることにより，$f(x)$ の原始関数 $F(x)$ に対し

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

が a と b の間の大小関係の如何にかかわらず成立する利点がある。
本章では (2) の左辺の意味を問い直すことを試みる。このような試みは，教える立場にとって必要であるように思われる。結論的には，数直線上の線積分を以って定積分の定義とする。すなわち，$<x, x'>$ をＩの区間で，$x<x'$ ならば $<x, x'> = [x, x']$，$x>x'$ ならば $<x, x'> = [x', x]$ を表すものとする。a を始点とし，b を終点とする定積分 $\int_a^b f(x)dx$ を次のように定義する。先ず，$<a, b>$ の中に，a から b に到る $n-1$ 個の分点 $\{x_i\}_{i=1}^{n-1}$（n は任意の自然数）を取り，$a<b$ ならば $a=x_0<x_1<\cdots<x_i<x_{i+1}<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，$a>b$ ならば $a=x_0>x_1>\cdots>x_i>x_{i+1}>\cdots>x_{n-1}>x_n=b$ とする。ここで $\lim_{1\leq i\leq n-1}|x_i-x_{i+1}|\to 0$ $(n\to\infty)$ とする。$<x_i, x_{i+1}>$ の中の任意の点 ξ_i を取り

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i)$$

と定める。このとき，$a<b$ ならば上式は通常の定義となる。又 $b<a$ ならば

$$\int_a^b f(x)dx = -\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_i-x_{i+1}) = -\int_b^a f(x)dx$$

となる。すなわち，(2) の性質は証明されるべきものとなった。又

$$F(x) = \int_a^x f(x)dx$$

と置くと，x と a の大小関係の如何にかかわらず $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$ である。

4 角の正負と弧度法

中学校数学では角は図５のように平面において始点を共有する２つの半直線 OA と OB のなす図形である。
そこでは角に正と負の概念はなく，いわば絶対角と呼ぶべきものである。これに対し高校数学では三角関数の変数としての角の役割のため正と負の概念が必要となる。周知のように，正の角は図５において OA を始線とし OB を動径とし，反時計回りに回転したときの回転角を指

し，負の角は時計回りに回転したときの回転角を指す。一般に角 α（α は正の角であっても良いし，負の角であっても良い）に対し，$-\alpha$ と α と反対方向に α の絶対角だけ回転した角を表すものとする。例えば＝$-1°$ に対し $-(-1)°$ は $1°$ となる。この定義により角に対し正と負の計算法則が成立する。

次に角の大きさ（角度）について考える。1 回転を 360 度とする度数法はその分割を限りなく繰り返すことにより任意の角度を表現し得るが，弧度法の方が図形的に把握しやすい利点がある。弧度法では単位円において任意の中心角の大きさを対応する弧の長さで表すが，ここで問題となるのは弧の長さの存在である。同じ性質の問題として円周の長さの存在がある。これらは自明なものの様であるが，数学では実数の連続性の公理の下で厳密に定義されている。例えば［2］では，実数の連続性の公理として「上に有界な数列は上限を持ち，下に有界な数列は下限を持つ」を仮定して，円周の長さはその円周に内接する凸多角形の周の長さの上限と定義する。同様な定義は［3］でも述べられている。これらに従えば，弧の長さとは，その弧に内接する凸な折れ線の全長の上限となる。ここで折れ線が凸とは図 6 の多角形 $OAP_1P_2\cdots P_nB$ が凸となることである。さらに［2］では，この上限の考えを用いて

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=1$$

が証明されている。直線と円という二つの概念は我々に疑いも無く明瞭なイメージを与えるが，それぞれの属性である長さと角度を結びつけるのに実数の公理が要請されていることは興味深い。

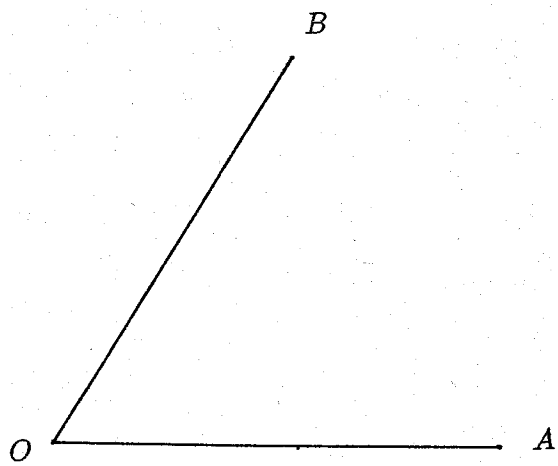


図 5

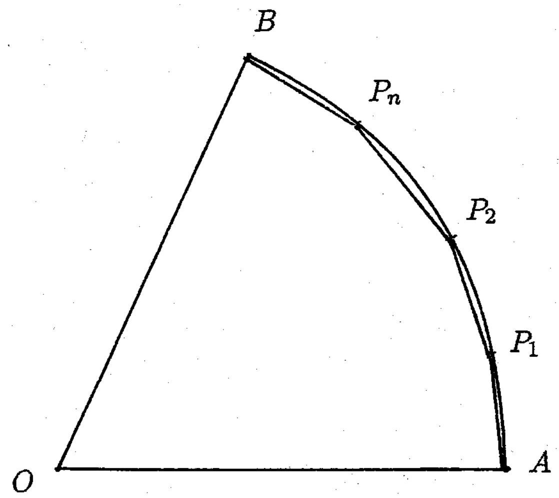


図 6

あとがき

第 1 章の循環小数は，1999 年に岩手県内の各高等学校の数学科に対するアンケートの結果に基いて，取り上げたものである。第 1 章及び第 2 章については岩手大学の数学科及び理科の先生方との議論を参考にした。第 4 章については岩手県の高校数学の先生方との議論を参考にした。ここに深く感謝の意を表したい。なお，本研究は文部科学省科学研究費基盤（C)(2)課題番号 13680186，算数・数学における問題解決の適性別指導（研究代表者　能田伸彦・岩手大学教授）の助成によるものである。

参考文献

[1]　ニキフォロフスキー（馬場良和訳）「積分の歴史」（現代数学社，1985）23 頁.

[2]　能代　清，「微分学」（朝倉書店，1960）76-78 頁.

[3]　黒須康之介，「平面，立体　幾何学」（培風館，1957）107-109 頁.