Randomized Block Method の條件と 2 個以上の Missing Plots について

石　川　榮　助

はしがき

Randomized block Method（乱塊法）に於ては夫々のBlock内の観察個数（要素の箇数）が同一である事を必要としているが，これは実は充分条件であつて必要条件ではない．依て一般に欠項のある乱塊法の必要充分条件を求め，併せて二項以上のMissing Plotsとして従来行われているIterative method（繰返法）の欠点を補うMissing plotsの公式を求めた．

§1　欠項のある乱塊法の條件

m群（行）n Block（列）の矩形配列のRandomized block,

$$\{x_{ij}\} \qquad \begin{array}{l} i=1.\ 2.\cdots\cdot m \\ j=1.\ 2.\cdots\cdot n \end{array}$$

に於て，$x_{a\alpha}$，$x_{b\beta}$，……$x_{\ell\lambda}$ の l 個の欠項があるものとする．今第 i 群，第 j 列の個数，合計及平均を夫々 n_i，m_j，$T_{i.}$，$T_{.j}$ 及 $\overline{X}_{i.}$，$\overline{X}_{.j}$ とし総計をT，全平均を $\overline{X}$，群間偏差 $\overline{X}_{.i}-\overline{X}$ を y_i，Block 間偏差 $\overline{X}_{.j}-\overline{X}$ を z_j とおけば，任意の要素（観察値）x_{ij} は l 項の欠項を除いて

$$x_{ij}=\overline{X}+y_i+z_j+e_{ij}$$

となる．ここに e_{ij} は誤差の項である．

故に　$\sum_i\sum_j(x_{ij}-\overline{X})^2=\sum_i\sum_j(y_i+z_j+e_{ij})^2$
（但 l 項欠）

$$=\sum_i\sum_j[y_i^2+z_j^2+e^2_{ij}+2(y_iz_j+y_ie_{ij}+z_je_{ij})]$$

而して　$\sum_i\sum_j y_ie_{ij}=-\sum_i\sum_j y_iz_j$

及　$\sum_i\sum_j z_je_{ij}=-\sum_i\sum_j y_iz_j$

故に　$S_T=S_G+S_B+S_E-2\sum_i\sum_j y_iz_j$ ……(1.1)

ここに　$\sum_i\sum_j y_i^2=S_G$　$\sum_i\sum_j z_j^2=S_B$　$\sum_i\sum_j e_{ij}^2=S_E$

$\sum_i\sum_j(x_{ij}-\overline{X}^2)=S_T$

従つて　$\sum_i\sum_j y_iz_j=0$ ……………………(1.2)

ならば (1.1) 式は

$$S_T=S_G+S_B+S_E$$

となり，乱塊法が適用出来る．即ち (1.2) 式は $\{x_{ij}\}$ が乱塊法を可能ならしむる必要充分条件である．(1.2) 式が成立する時，群（行）とBlock（列）とは直交していると称す．依て次の言葉にまとめられる．

<u>欠測のある矩形配列に於て群とBlock（列）とが直交する時乱塊法が可能となる．</u>

扨て (1.2) 式は l 項欠であるから

$$\sum_i\sum_j y_iz_j=(\sum_i^m y_i)(\sum_j^n z_j)-\sum^l y_az_\alpha=0$$

$$\therefore\quad (\Sigma y_i)(\Sigma z_j)=\sum^l y_az_\alpha \text{ ………………(1.3)}$$

即ち

<u>欠測のある矩形配列に於て乱塊法可能なるためには，群間偏差の和とBlock間偏差の和との積が欠項の群偏差Blockの偏差の積和に等しいことである．</u>

系　<u>矩形配列に於て欠項がない時は乱塊法が恒に可能である</u>

これは $\Sigma y_i=\Sigma z_j=0$ にして且つ欠項がないから (1.3) 式が成立することから明かである．

（充分条件である）

例 (1.1)　欠項のある次の矩形配列は乱塊法可能か．

B \ G	1	2	3	4	$\bar{x}_{i.}$	y_i
1	3	4	2	3	3	−1
2	5	4	5	6	5	1
3	7	□	2	3	4	0
$\bar{x}_{.j}$	5	4	3	4	$\bar{x}=4$	0
z_j	1	0	−1	0	0	

欠項は x_{32}，故に $y_3z_2=0\times0=0$

又　$\Sigma y_i=0$　$\Sigma z_j=0$

依て (1.3) 式が成立し，この場合は Missing plot method を行う事なく乱塊法が可能となる．

註　この様な例は實際は稀にしか生じない。

例 (1.2)　欠項のある次の矩形配列は乱塊法可能か．

B \ G	1	2	3	4	$\bar{x}_{i.}$	y_i
1	3	2	2	1	2	−2
2	5	7	6	□	6	+2
3	□	6	4	□	5	+1
$\bar{x}_{.j}$	4	5	4	1	$\bar{x}=4$	+1
z_j	0	1	0	−3	−2	

欠項は

x_{31}，x_{24}，x_{34}

故に　$\sum^{3} y_\alpha z_\alpha$

$=1\times0+2\times(-3)$

$+1\times(-3)=-9$

而して

$(\Sigma y_i)(\Sigma z_j)$

$=1\times(-2)=-2$

依て　(1.3) 式が成立しない．

故にこの配列は直交せず乱塊法は不能となる．

§ 2　欠項のある Latin Square Method の條件

一辺が m なる Latin 方格に於て，l 個の欠項があるものとする．今簡単のために群間，列間，処理間偏差を夫々 y_i, z_j, w_t とおけばこの Latin 方格の任意の要素 $x_{ij(t)}$ は

$$x_{ij(t)}=\bar{X}+y_i+z_j+w_t+e_{ij}$$

ここに e_{ij} は i 群，j 列，t 処理に当る誤差項である．

依て全変動 S_T は

$$S_T=\sum_i\sum_j(y_i+z_j+w_t+e_{ij})^2 \qquad (\text{但}\ l\ \text{項欠})$$

而して　$\sum_i\sum_j y_ie_{ij}=-\sum_i\sum_j y_i(z_j+w_t)$,

$$\sum_i\sum_j z_je_{ij}=-\sum_i\sum_j z_j(y_i+w_t)$$

及び　$\sum_i\sum_j w_te_{ij}=-\sum_i\sum_j w_t(y_i+z_j)$

故に　$S_T=S_G+S_B+S_t+S_E-2\sum_i\sum_j(y_iz_j+y_iw_t+z_jw_t)$ ……………………… (2.1)

ここに　$S_G=\sum_i\sum_j y_i^2$, … $S_t=\sum_i\sum_j w_t^2$ 等である．

依て次の言葉が得られる．

欠測のある Latin 方格に於て Latin 方格法の必要且つ充分条件は

$$\sum_i\sum_j(y_iz_j+y_iw_t+z_jw_t)=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2.2)$$

なる事である．

又欠項が l 項あるから (1.3) と同様に

$$(\Sigma y_i)(\Sigma z_j)+(\Sigma y_i)(\Sigma w_t)+(\Sigma z_j)(\Sigma w_t)$$
$$=\sum^{l}(y_\alpha z_\alpha+y_\alpha w_A+z_\alpha w_A) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2.3)$$

系．Latin 方格に於て欠測がない時は Latin 方格法は恒に可能となる．

これは $\Sigma y_i=\Sigma z_j=\Sigma w_t=0$ にして (2.3) の右辺がないことから明かである．

例 (2.1)　1 項欠の次の Latin 方格は Latin 方格法が可能か．

B \ G	1	2	3	4	$\bar{x}_{i.}$	y_i
1	3	4	2	3	3	−1
2	5	4	5	6	5	1
3	7	□	2	3	4	0
4	5	4	3	4	4	0
$\bar{x}_{.j}$	5	4	3	4	$\bar{x}=4$	0
z_j	1	0	−1	0	0	

A	C	B	D
B	D	C	A
C	A	D	B
D	B	A	C

t	A	B	C	D	計
$\bar{x}_t$	4	3.5	5	3.5	
w_t	0	−0.5	1.0	−0.5	0

欠測は x_{32A} にして

$y_3=0$　$z_2=0$

$w_A=0$

及び　$\Sigma y_i=\Sigma z_j=\Sigma w_t=0$

故に(2.3)式が成立し，欠測を補う事なく Latin 方格法が可能となる．

§ 3　Randomized block に於ける二個の Missing plots

m 群，n 列の矩形配列に於て一項 $x_{\alpha\alpha}$ が欠の時，この推定値 x は既に次の通りに求められた*.

$$X=\frac{mg+nb-T}{(m-1)(n-1)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3.1)$$

ここに　$T=\sum_i\sum_j x_{ij}$　$(x_{ij}\neq x_{\alpha\alpha})$

$$g=\sum_j x_{aj}\ (j\neq\alpha) \qquad b=\sum_i x_{i\alpha}\ (i\neq a)$$

若も二項：$x_{a\alpha}\equiv x,\ \ x_{b\beta}\equiv y$（但$a\neq b,\ \alpha\neq\beta$）が欠の場合，(**) 二つの欠測値を同時に埋める事が出来ないとし，(3.1)式を繰返し用いるIterative method が用いられている．即ち先ず一つの欠測値例えば y を仮定して $x_{b\beta}$ を埋め，(3.7)式を用いて x を推定し，次にこの値を $x_{a\alpha}$ に代入し(3.1) 式を用い y を推定する．再びこの y の値を $x_{b\beta}$ に代入して (3.1) 式を用いて x を推定する，……かくして漸近的に最確値 x y が定められる．(***)

(*) Allan と Wishart が求め Yates が改良した．
(**) $a=b$ 又は $\alpha=\beta$ のときには行又は列の知識の精度が悪い．(農事試験法 参照)
(***) Snedecor : Statistical methods 又は (農事試験法 参照)

この Interative method は以上の如く手数がかかるので筆者は Yates の方法に倣つて欠測値 x, y を一意的に定める公式を導いた．

今簡単のために $T=\sum_i\sum_j x_{ij}\quad (x_{ij}\neq x_{a\alpha},\ x_{b\beta})$

$$g_1=\sum x_{aj}\ (j\neq\alpha) \qquad g_2=\sum x_{bj}\ (j\neq\beta)$$
$$b_1=\sum x_{i\alpha}\ (i\neq a) \qquad b_2=\sum x_{i\beta}\ (i\neq b)$$

$$S_T=\sum\sum x_{ij}^2+x^2+y^2-\frac{(T+x+y)^2}{m\,n} \qquad (x_{ij}\neq x_{a\alpha},\ x_{b\beta})$$

$$S_G=\frac{1}{n}\left[\sum T_{i\cdot}^2+(g_1+x)^2+(g_2+y)^2\right]-\frac{(T+x+y)^2}{m\,n} \qquad (i\neq a,\ b)$$

$$S_B=\frac{1}{m}\left[\sum T_{\cdot j}^2+(b_1+x)^2+(b_2+y)^2\right]-\frac{(T+x+y)^2}{m\,n} \qquad (j\neq\alpha,\ \beta)$$

然る時

$$S_E=\sum\sum x_{ij}^2+x^2+y^2+\frac{(T+x+y)^2}{m\,n}-\frac{1}{n}\left[\sum T_{i\cdot}^2+(g_1+x)^2+(g_2+y)^2\right]-\frac{1}{m}\left[\sum T_{\cdot j}^2+(b_1+x)^2+(b_2+y)^2\right]$$

$$\therefore \frac{\partial S_E}{\partial x}=2\left[x+\frac{T+x+y}{m\,n}-\frac{g_1+x}{n}-\frac{b_1+x}{m}\right]=0$$

$$\frac{\partial S_E}{\partial y}=2\left[y+\frac{T+x+y}{m\,n}-\frac{g_2+y}{n}-\frac{b_2+y}{m}\right]=0$$

これを解き

$$x=\frac{\lambda c_1-c_2}{\lambda^2-1} \qquad y=\frac{\lambda c_2-c_1}{\lambda^2-1}\cdots\cdots(3.2)$$

ここに $\lambda=(m-1)(n-1)$

$$c_1=mg_1+nb_1-T$$
$$c_2=mg_2+nb_2-T$$

(3.2)式によつて欠測値が一意的決定される．

例 (3.2) 次の例は Snedecor の statistical methods の例である．

G＼B	1	2	3	sum
1	6	5	4	15
2	15	□	8	$23=g_1$
3	□	15	1	$27=g_2$
sum	21	20	13	$65=T$
	b_2	b_1		

欠項は $x_{22}\equiv x,\ x_{31}\equiv y$ である．これに関して(1.3)式を満足しないから Missing plots によらねばならない．

(i) Iterative method による値，先ず $y=18$ と仮定し，これを埋めて，(3.1) 式を用いて x の近似値 $x_1=11.5$ を得る．次にこの近似値を代入して，(3.1) 式を用いて y の推定値 $y_2=16.9$ を得，再びこれを代入して，(3.1)式を繰返し用い $x_2=11.8$ を得，これを代入して $y_3=16.8$ を得，この様にして漸近的に最確値 $x=11.8$, $y=16.8$ を求める．

(ii) (3.2) 式による値

上例を (3.2) 式を用いて解けば

$$c_1=mg_1+nb_1-T=3\times23+3\times20-65=64$$
$$c_2=mg_2+nb_2-T=3\times27+3\times21-65=79$$
$$\lambda=(m-1)(n-1)=2\times2=4$$

依て

$$x=\frac{4\times64-79}{15}=11.8$$
$$y=\frac{4\times79-64}{15}=16.8$$

を得る．即ち x. y は一意的に決定出来て便利である．

§ 4 Randomized block に於ける三個以上の Missing plots

m 群 n 列の矩形配列に於て三項：

$$x_{a\alpha}\equiv x \qquad x_{b\beta}\equiv y \qquad x_{c\gamma}\equiv z$$

が欠の時は，§ 3 と同様にして

$$S_E=\sum\sum x_{ij}^2+x^2+y^2+z^2+\frac{(x+y+z+T)^2}{m\,n}-\frac{1}{n}\left[\sum T_{i\cdot}^2+(x+g_1)^2+(y+g_2)^2+(z+g_3)^2\right]$$

$$-\frac{1}{m}\Big[\Sigma T._j^2+(x+b_1)^2+(y+b_2)^2+(z+b_3)^2\Big]$$

依て $\frac{\partial S_E}{\partial x}=0$ $\frac{\partial S_E}{\partial y}=0$ $\frac{\partial S_E}{\partial z}=0$ をとき

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} c_1 & 1 & 1 \\ c_2 & \lambda & 1 \\ c_3 & 1 & \lambda \end{vmatrix}}=\frac{y}{\begin{vmatrix} \lambda & c_1 & 1 \\ 1 & c_2 & 1 \\ 1 & c_3 & \lambda \end{vmatrix}}=\frac{z}{\begin{vmatrix} \lambda & 1 & c_1 \\ 1 & \lambda & c_2 \\ 1 & 1 & c_3 \end{vmatrix}}$$

$$=\frac{1}{\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (4.1)$$

ここに　$c_3=mg_3+nb_3-T$　$\lambda=(m-1)(n-1)$

$g_3=\Sigma x._j$　$(j\neq\gamma)$

$b_3=\Sigma x_{i.}$　$(i\neq c)$

上の公式は又 l 項欠の場合に拡張出来る．

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} c_1 & 1 & \cdots & 1 \\ c_2 & \lambda & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \\ c_l & 1 & \cdots & \lambda \end{vmatrix}}=\frac{y}{\begin{vmatrix} \lambda & c_1 & \cdots & 1 \\ 1 & c_2 & \vdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & c_l & & \lambda \end{vmatrix}}=\frac{z}{\begin{vmatrix} \lambda & 1 & c_1 & \vdots & 1 \\ 1 & \lambda & c_2 & \vdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & c_l & \vdots & \lambda \end{vmatrix}}$$

$$=\cdots\cdots=\frac{1}{\begin{vmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \lambda & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & \lambda \end{vmatrix}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (4.2)$$

§ 5　Latin 方格に於ける Missing plots

(i)　一項欠の場合

一辺 m なる Latin 方格に於て a 群，α 列，A 処理の要素 $x_{a\alpha(A)}\equiv x$ が欠なるときの最良の推定値 x 既に次の如く求められてある．

$$x=\frac{m(b+g+t)-2T}{(m-1)(m-2)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (5.1)$$

ここに　$T=\Sigma\Sigma x_{ij}$　$(x_{ij}\neq x_{a\alpha})$　$t=\Sigma x_t$　$(t\neq A)$

$g=\Sigma x_{aj}$　$(j\neq\alpha)$　$b=\Sigma x_{i\alpha}$　$(i\neq a)$

(ii)　二項欠の場合

一辺 m なる Latin 方格に於て二項：

$x_{a\alpha(A)}\equiv x,$　　$x_{b\beta(B)}\equiv y$

が欠の場合は二項欠の乱塊法と同様に Iterative method が用いられているが，これは§3と同様にして一意的に推定出来る次の公式を求めた．

先ず

$$S_E=\Sigma\Sigma x_{ij}^2+x^2+y^2+2\left(\frac{x+y+T}{m}\right)^2$$

$$-\frac{1}{m}\Big[\Sigma T_{i.}^2+(g+x)^2+(g_2+y)^2+\Sigma T._j^2$$

$$+(b_1+x)^2+(b_2+y)^2+\Sigma T_t^2+(t_1+x)^2$$

$$+(t_2+y)^2\Big]$$

を求め，$\frac{\partial S_E}{\partial y}=0$　$\frac{\partial S_E}{\partial y}=0$ を解く．

ここに　$\Sigma\Sigma x_{ij}$　$(x_{ij}\neq x_{a\alpha},\ x_{b\beta})$

ΣT_i^2　$(i\neq a,b)$

$g_j=\Sigma x_{aj}$　$(j\neq\alpha,\beta)$

以下同様

然る時

$$x=\frac{\mu c_1-2c_2}{\mu^2-4},\qquad y=\frac{\mu c_2-2c_1}{\mu^2-4}\quad\cdots\ (5.2)$$

ここに　$\mu=(m-1)(m-2)$

$c_1=m(g_1+b_1+t_1)-2T$

$c_2=m(g_2+b_2+t_2)-2T$

(iii)　三項以上欠の場合

上の問題に於て三項：

$x_{a\alpha(A)}\equiv x$　　$x_{b\beta(B)}\equiv y$　　$x_{c\gamma(C)}\equiv z$

が欠の場合，但 a, b, c は互に相異する，α, β γ 及 A. B. C についても同様であるとする．

然る時は (5.2) と同様に

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} c_1 & 2 & 2 \\ c_2 & \mu & 2 \\ c_3 & 2 & \mu \end{vmatrix}}=\frac{y}{\begin{vmatrix} \mu & c_1 & 2 \\ 2 & c_2 & 2 \\ 2 & c_3 & \mu \end{vmatrix}}=\frac{z}{\begin{vmatrix} \mu & 2 & c_1 \\ 2 & \mu & c_2 \\ 2 & 2 & c_3 \end{vmatrix}}$$

$$=\frac{1}{\begin{vmatrix} \mu & 2 & 2 \\ 2 & \mu & 2 \\ 2 & 2 & \mu \end{vmatrix}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (5.3)$$

ここに　$\mu=(m-1)(m-2)$

$C_3=m(g_3+b_3+t_3)-2T$

以下同様

上の公式は l 項欠の場合に拡張され，次の様になる．

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} c_1 & 2 & \cdots & 2 \\ c_2 & \mu & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_l & 2 & \cdots & \mu \end{vmatrix}} = \frac{y}{\begin{vmatrix} \mu & c_1 & \cdots & 2 \\ 2 & c_2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2 & c_l & & \mu \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} \mu & 2 & c_1 & 2 \\ 2 & \mu & c_2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & c_l & \mu \end{vmatrix}}$$

$$= \cdots\cdots = \frac{1}{\begin{vmatrix} \mu & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & \mu & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & & \mu \end{vmatrix}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(5.4)}$$

（註）　同群（又は同列，同処理）に二個以上の場合の Missing plots はその群（又は列処理）に関する知識の精度を悪くするので Missing plots の適用は妥当でない．従つてこの場合の推定公式は割愛した．この事は乱塊法についても同然である．尚（4.2），（5.4）の公式使用に当つても同様の注意を払う必要がある．

—— 1951. Dec. ——