Gal'perin 理論による数学「学習対象」翻案

佐 伯 卓 也[1]・伊 藤 潤 一[2]

The Translations of "Objects of Learning" by Gal'perin's Theory in Mathematics

Takuya SAEKI and Jun-ichi ITO

§0. はじめに

Gal'perin や Talyzina 等による知的行為の多段階形成理論 (Gal'perin, 1969) がある。この理論が Bruner による学習対象の翻案のスケールとして使えることは，駒林氏の指摘する所である（駒林，1972, 1973 a)。ここで学習対象といったのは次の意味である。すなわち，従来の「教材」なる概念は明確でないので，ここでは，学習者が学習の対象としてとるものを「学習対象」(object of learning) といい，その素材となるものを「学習素材」(subject matter) ということにする。

この小論においては，Gal'perin 理論を用いて，翻案のスケール化を，線形モデルというより，むしろ，3次元格子点モデルとして考える（佐伯，1973 b, 1974)。それにあてはめて，因数分解の学習対象の翻案の試案を示す。この小論を書くにあたり，終始有益な御助言を賜わった岩手大学教育学部駒林邦男教授に感謝する。

§1. Gal'perin の理論

Gal'perin (1957, 1969) によると，知的行為の形成について，4つのパラメーターをとる。その活動の基礎的パラメーターは

(1) 成就される行為の水準（形式)，

(2) 行為の一般化の度合，

(3) 行為の完成される操作 (operation) の完全性（圧縮性)，

(4) 行為の習得の度合

であるとする。(1) の行為の水準はさらにさまざまの段階をとる。すなわち

(i) 仕事とその条件への予備的定位，

(ii) 物質または物質的表現または記号の段階，

(iii) 対象の直接のサポートのない可聴言語 (audible speech) にもとづく行為，

(iv) 外的言語 (external speech) をともなう行為，

1) 岩手大学教育学部

2) 岩手県立東和高等学校

（v） 内的言語 (internal speech) を用いた行為
となる。

(2) 行為の一般化は，転移の広さで段階に分けられるし，(3) 行為の完全性は，試行錯誤的な，あまり慣れていない段階と，よく慣れた段階（最初の条件を与えただけで，容易すく結論にまで達してしまうような行為）に分けて考えられる。「慣れる」ということは途中の段階が略されるという意味で「行為の圧縮性」(abbreviation) ともいう。(4) 習得の度合は，行為遂行の速さである。

これら4つの基本的パラメーターの具体的な諸指標を組み合わせることによって，人間の行為の諸属性の総体を具体的に記述し，それら属性の形成度の水準を評価するためのスケールを作成することができるであろう，というのが Gal'perin の見解である（駒林，1973 a)。

§2. 格子点モデル

ここでは，拙論（佐伯，1973 b，1974）でふれた数学学習対象の翻案にかかわる数学的モデル――格子点モデル――についてごく簡単にふれる。

Zeeman (1965) による脳の認知のトポロジーモデル（以下思考立体という）は，種々の感覚器を通して，外界のものなどの思考の対象となるものを，許容関係の範囲内で一意的に（数学の意味で）認識する。これが，学習仮説（拙論では，この仮説を「学習」の定義として考えてよいことを指摘しておいた）によって，十分学習を積むと，思考立体の中の点集合の許容関係による構造と，学習対象の集合の，思考立体から，ひきもどされた許容関係による構造が，許容同相 (tolerancely homeomorphic) になるといわれる（佐伯，1973 b，1974)。簡単にいうと，学習対象のもつ諸属性や関係は，認知できる範囲では，あまり構造を変えずに，そのまま思考立体の中におさまるというわけである。

Bruner (1961) によれば，「どの教科でも，知的性格をそのままにたもって，発達のどの段階のどの子どもにも効果的に教えることができる」という仮説のもとで，「特定の年齢の子どもに，ある教科を教えるという仕事は，いわば，その子どもがものを観察する方法に結びつけて，その教科の構造を示すこと」が「翻案する仕事と考えてよい」としている。

Zeeman の思考立体は，Piaget の意味での同化作用でその学習対象の許容構造が修正され，さらに調節作用で，思考立体の許容構造が変っていく。それに従って，思考立体の許容構造と許容同相になる学習対象の集合の許容構造も変化していく。Bruner の説く「翻案」は，ある発達段階の思考立体の許容構造にあわせて，学習対象の集合の許容構造を変えていくことになる。

次に具体的に「翻案」のスケールを示す。まず (1) 水準であるが，

1°，物質的行為 ………… 0，

2° 知的行為 ………… 1

の2段階にし，それぞれ，実数0，1を対応させる。1° の物質的行為に対応する学習対象は，Piaget の意味の「具体」的なものとしてとる (Adler, 1966)。Piaget は「具体」とか「具体操作」というとき，人が知覚する対象との関係の実さいの，あるシステムについての命題についての，知的な操作を意味している。この「具体」はその人の過去の経験と知的成熟に相対的に依存してきまる。例えば，幼稚園児にとっては，2つの積木の集合と，3つの積木の集合は

具体であるが，2+3は具体でない。このとき，2+3が学習対象であったとすると，積木の「扱い方」(manipulation) は物質化された行為，すなわち，2+3の1つの翻案になる。同じように小学校6年生にとっては，2+3は具体であるが，x+y は具体ではない。

2° の知的行為には，その学習対象の目的である，純粋に論理的な数学命題等を対応させる。これら具体と論理的な翻案の段階の間には無数（高々可算無限個）の翻案が可能になるので，適当に実数 x $(0 \leqq x \leqq x)$ を対応させ，考えることができる。

(2) 一般化を次に考える

1° 最も狭い転位 ………… 0,

2° 最も広い転位 ………… 1

のように実数を対応させる。学習対象の翻案では，1° に対応するものは，その例だけにしかあてはまらないような，一般性のない特殊な「例」のようなものとなる。2° に対応するものは，最も一般化された公式のようなものとなる。その中間的な翻案は，実数 $y (0 \leqq y \leqq 1)$ に対応していると考える。もちろん，翻案は高々可算無限である。

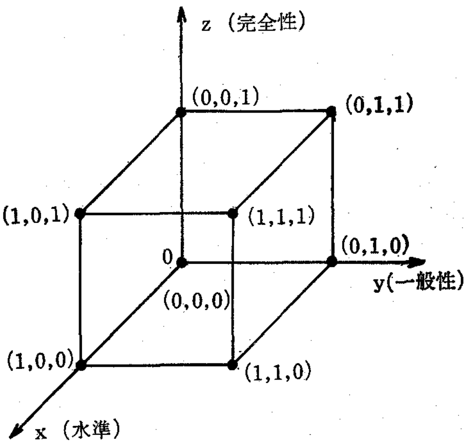
(3) 完全性（圧縮性）を考える。

1° 拡げられた行為 ……… 0,

2° 圧縮された行為 ……… 1

の2段階とし，1° には，可能な最も短かいサイズのステップの系列で示される学習対象を対応させ，2° には，ステップにわけない学習対象を対応させる。前と同じように，中間的な翻案は，実数 $z (0 \leqq z \leqq 1)$ に対応していると考える。

以上から1つの学習対象を翻案するとき，3つのパラメーター（第4のパラメーターである習得は，この場合考えないこととする）を考え，水準は x 軸，一般性は y 軸，完全性は z 軸，とすると1図のような翻案の格子点モデルが作られる。例えば，図で，(1, 0, 0) の翻案といえば，水準が知的段階で，一般性は最もひくく，完全性もひくい翻案と考える。図では8個の点しかとってないが，翻案の必要性から適当に (1, 0.5, 0) とか (0, 0.5, 0.5) の翻案というように，中間の値をとってよい。



1 図

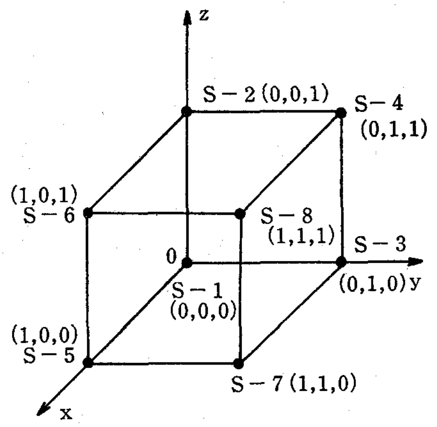
§3. 若干の研究例

駒林氏 (1973b) は，単位換算の評価問題のスケールの具体化を佐藤氏 (1973) の協力で行ない，その問題別正答率を示した(1表)。この研究結果を，格子点モデルにあてはめてみよう。

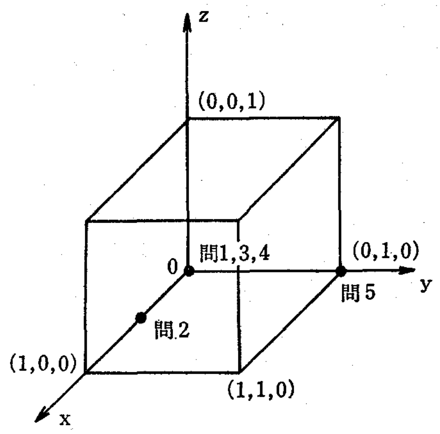
問題番号	格子点モデルのベクトル表示
S-1	(0, 0, 0)
S-2	(0, 0, 1)

S-3	(0, 1, 0)
S-4	(0, 1, 1)
S-5	(1, 0, 0)
S-6	(1, 0, 1)
S-7	(1, 1, 0)
S-8	(1, 1, 1)

となり，これを図示したのが2図である。駒林氏が指摘するように，正答率は原点 (0, 0, 0) から遠ざかるほどひくくなっているが，特にz軸（行為の完全性にあたる翻案）の方向が勾配が急であるのがよくわかる。



2 図



3 図

1 表 問題別正答率[3)]

被験児＼問題	S-1	S-2	S-3	S-4	S-5	S-6	S-7	S-8
F校(盛岡市)	97	64	100	33	85	56	85	20
G校(へき地)	78	36	58	7	69	33	62	4

佐伯 (1973a) は，中学生を対象に位相空間論を数直線（1次元位相空間）で展開し，そのあと事後テストをした。その結果を格子点モデルにあてはめる。3図がそれである。

問題番号	ベクトル表示
問 1	(0, 0, 0)
問 2	(0.5, 0, 0)
問 3	(0, 0, 0)
問 4	(0, 0, 0)
問 5	(0, 1, 0)

これの問題別正答率は2表にある。前の拙論（佐伯卓也，三田村喜久雄，朴沢晶子 (1973)）で指摘したように，評価問題が (0, 0, 0) のとき正答率が比較的高いが，1つでも0以外の値を

3) この評価問題は駒林邦男 (1973 b)，佐藤敬行 (1973) 参照。

2表 問題別正答率[4)]

問	1	2	3	4	5
全　　体	76.73	6.92	83.07	85.06	16.15
上 位 群	92.67	10.00	94.00	93.33	36.00
下 位 群	67.66	4.00	78.00	77.78	8.00

パラメーターが持つと，急に正答率が下がることがわかる。特に下位群では著しい。

§4. 因 数 分 解 の 翻 案

高等学校1年生を対象として因数分解の問題をとりあげる。生徒は一応，形式操作の段階に達していると考えられる。

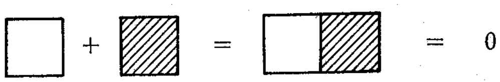
そこで「具体」を何に求めるか，ということを考え，タイル（厚手の画用紙で作った正方形または長方形の紙を，こう呼ぶことにする）で物質化し，0に相当する水準と考えることにした。

和算（日本の明治前の数学）では古くから中国から伝わった算木が数の物質化したものとして計算に用いられた（小倉金之助 1940，三上義夫 1947）。算木を用いて，整数の4則，開平，開立，さらに高次方程式の実根を求めた（Horner の方法）。このような計算をするとき，正，負の数を区別する必要が起る。算木では，正数を赤色の算木で示し，負数を黒色の算木で示した。

そこで，タイルでも，整数を表わすとき，正数を白色のタイル，負数を赤色のタイルで示すことにした。色で正負を区別する方法は，和算の算木の現代化ともいえる。

まず，整数の計算例についてふれる。キャンセルの原理ともいうべき「原理」を生徒に認めさせる。

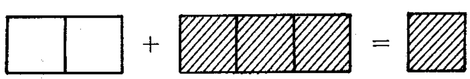
原理　$(+1)+(-1)=0$



4 図

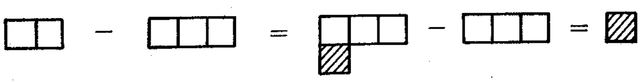
ただし，白色タイルは斜線をひかない正方形で，赤色タイルは斜線をひいた正方形で示すことにする。

例　$(+2)+(-3)=-1$



5 図

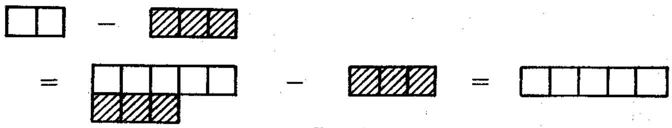
例　$(+2)-(+3)=-1$



6 図

4) この評価問題は佐伯卓也（1973 a），佐伯卓也，三田村喜久雄，朴沢晶子（1973）参照。

$(+2)-(-3)=+5$



7 図

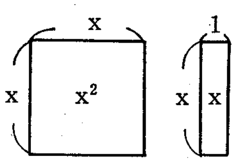
次に因数分解を考える。ここで考える因数分解は，

$$ax^2+bx+c \quad および \quad ax^2+bxy+cy^2$$

のタイプで，有理数の範囲で因数分解できるものに限定する。

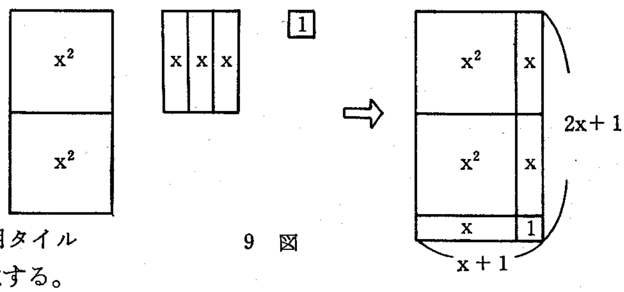
1°. ax^2+bx+c の因数分解用タイル

8図のように3種のタイル，すなわち，x^2, x, 1 のタイルを用意する[5]。因数分解をするということは，タイルを長方形に並べかえることになる，ことを生徒に示す。



8 図

例 $2x^2+3x+1=(2x+1)(x+1)$

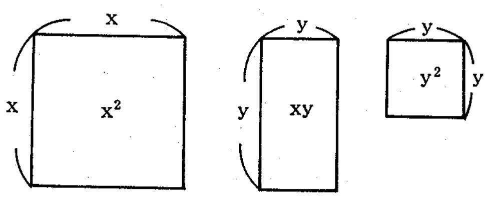


9 図

2°. $ax^2+bxy+cy^2$ の因数分解用タイル

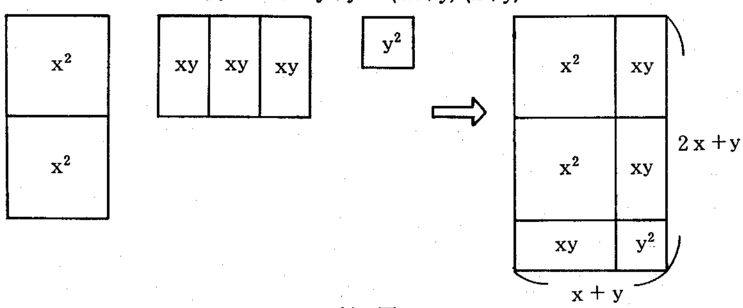
10図のように3種のタイルを用意する。

1° と同じように，因数分解はタイルを長方形に並べかえることである。



10 図

例 $2x^2+3xy+y^2=(2x+y)(x+y)$



11 図

5) x のタイルのたて，よこの比は無理数の方がよい。有理数の比のとき，目的としない並べ方で，長方形になってしまう恐れがあるからである。

次に ax^2+bx+c の因数分解問題を格子点モデルにあわせての翻案を考えてみよう。

1) 行為の水準

0 (物質的)・・・・タイルを実さいに用いる。

0.5 ・・・・ノートに図をかいて扱う。

1 (知的) ・・・・「たすきがけ」で計算する。

2) 行為の一般性

0 (転移が狭い)・・・・ax^2+bx+c で $a\geqq0$, $b\geqq0$, $c\geqq0$; $a=1$ または $b=1$

0.5・・・・ax^2+bx+c で, $a\geqq0$, $b\geqq0$, $c\geqq0$

1 (転位が広いい) ax^2+bx+c で b, c は正とは限らない。

3) 行為の完全性

0 (完全性が低い)・・・・ステップに分割する。

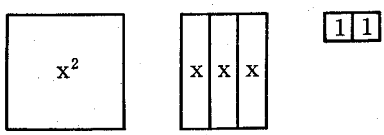
0.5・・・・分割が中ぐらい。

1 (完全性が高い)・・・・全くステップに分割しない。

3種のパラメーターの各々につき, 3段階づつであるから, 全部で $3^3=27$ 通りの翻案が考えられる。次に2, 3の例をあげる。

(0, 0, 0) の例, 12図のようなタイルを用いて, これらを並べて長方形を作る。まず, x^2 の

x^2+3x+2

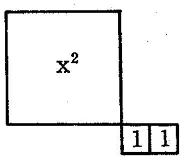


12 図

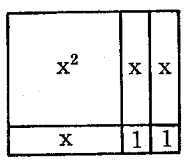
タイルを13図のようにおき, 右下のすみに1のタイルをおく。次に, x のタイルが3本あるので, これを補うと14図のような長方形となる。これから

$$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$$

の因数分解が得られる。



13 図

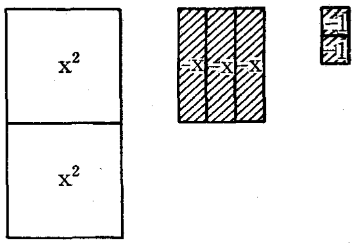


14 図

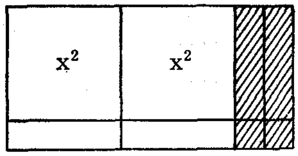
(0, 0, 1) の例。「x^2 のタイル 2, x のタイルが 3, 1 のタイルが 1 のとき, タイルをならべかえて長方形をつくれ。」という問題になる。

(0, 1, 0) の例。「x^2 のタイル 2, $-x$ のタイル 3, -1 のタイル 2 を用いて, 長方形をつくる」という問題で, ステップに分けて提示していく。x^2 のタイル 2 個を16図のように並べ, その右下に -1 のタイル 2 個をおくとうまくいかない (キャンセルの原理使用)。そこで17図のように並べると, ちょうど長方形ができ上がる。これから

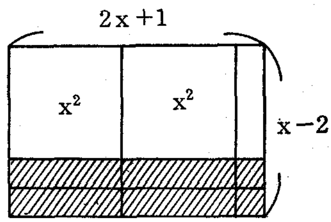
$$2x^2-3x-2=(2x+1)(x-2)$$



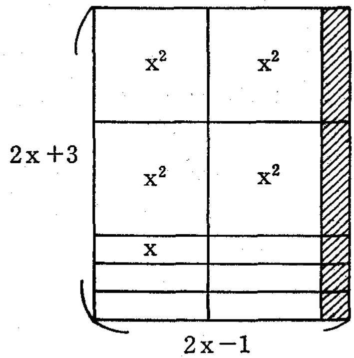
15 図



16 図



17 図



18 図

という因数分解が得られる。

(1, 1, 1) の例。「$4x^2+4x-3$ を因数分解せよ」と提示する。なおこの例を (0, 0, 0) に翻案すれば，キャンセルの原理をxと−xのタイルに用いて，18図のように並べ，

$$(2x+3)(2x-1)$$

と因数分解されることを付記する。

このようにして，27通りの翻案が考えられる。実さいの教授一学習にあたって，どのようにするかを次に考える。

§5.　教授プログラムの試み

Hernandez (1973) は「人間は知能的存在であるから，教師が用いることを望むどんなストラテジーでも常に学習ができるということは，多分，安全ないい方だろう」と発言している。問題はその学習対象でスローな（おくれる）生徒にある。数学的能力因子の同定は，因子分析によるアメリカ，イギリスにおける研究 (Stafford 1972, Aiken 1973) と，論理分析によるソビエトの研究 (Крутецкий 1968) が主なるものであるが，結果は類似している。この中からN（数的）因子，M（記憶）因子，R（推理）因子をとりあげ，北田氏 (1974) は高校受験のためのT予備校（盛岡市）の生徒を被験体にして主成分分析[6]を用いて調べた結果，スロークラスでは，他にくらべ，N因子とM因子の因子負荷量が，.01水準で有意で高いことを見つけ

6) 因子分析は数学的に疑問がある（津村 1971）ので主成分分析を用いた。計算は岩手大学設置の電子計算機 (FACOM-231) を用いた。

た（他はR因子が高い）。

このようなことを手がかりに，スロークラスの生徒の特性や，個人的な特性の情報をもとに，ATI, TTI 等を考えながら，その生徒個人の条件のもとにおける最適の教授過程を，前にのべた27の翻案を素材にして，最終目標を (1, 1, 1) において組立てることになる。一般に，このような過程を見つける方法は，種々あるが，いずれにしても試行錯誤をくり返していかなければいけないだろう。次に2つ程，具体的にふれてみたい。

第一に考えられるのは，その生徒個人をとり出して，ケーススタデイ的にアプローチを試み，そのデータを集積し，一般化していく方法である。個人へのアプローチの手がかりとしては Соколов (1961) の「課題解決の論理的に予想される経過とそ事実上の経過の図示的比較」でとられた方法がある。あらかじめ，27の翻案の中から論理的な過程を組んでおき，実さいに生徒に考えさせ，その事実を図示し，これらの図示した結果を集積し，最適な教授過程へ，試行錯誤的に，アプローチしていく方法が考えられよう。

第二に考えられるのは CAI の利用である。Stolurow (1969) によると，CAI の用い方は5つのモードに区別される。注目するのはその中の author mode である。東氏 (1969) の指摘する如く，Smallwood は，生徒から学ぶことのできる学習機械の可能性を示した。それによると，CAI のシステムに何百人という被験者をかけて学習させているうちに，author mode の CAI 自身も試行錯誤的に，いくつかの最適な標準コースを同定してくるだろうというのである。その標準コースを，現実の教授—学習過程へ応用する方法が考えられる。

さて標準コースの同定，適用で，問題になるのは overt な現象にだけ注目し，covert な心理過程があまり注目されないということである。駒林氏 (1973b) の指摘する如く，「スキナー型のプログラムは，スモールステップの原理により input と output が単純な，連合的結合以外の何ものの介在しなくともよいように，つまり『中間の環』を無視してもよいように作られている」状態になってはいけない。この中間の環の制御については，駒林氏 (1973b) がふれたように，Ланда の指導の下で，Юдина と Граник が試みた「診断的，適応的プログラム」が注目されてよい。つまり，最適コースの同定や，実さいの応用において，プログラム化されるべき学習対象についての可能な誤りの原因の心理学的研究がなされなければならない。この研究も，ケーススタディ的に個人的に追求するか，CAI を用いて研究するかのいずれかの方法が考えられよう。CAI はハード，および，ソフトの開発がないと実施できないが，ケーススタディ的な方法はいつでも可能である。 (1974. 6. 26)

引用文献

Adler, I. Mental growth and the art of teaching, Math. Teacher, 1966, 59, 706-715.

Aiken, L.R. Ability and creativity in mathematics, Review of Educational Reseach, 1973, 43, 405-432.

東 洋，コンピューターと自動教育，心理学評論，1969, 12, 197-209.

Bruner, J.S. The process of education, Harvard Univ. Press, 1961.

Gal'perin, P.Y. An experimental study in the formation of mental actions, Psychol. Soviet Union, ed. B. Simon, 1957, 213-225.

Gal'perin, P.Y. Stages in the development of mental acts, A Handbook of Contemporary Soviet Psychol., eds. M. Cole & I. Maltzman, 1969, 249-273.

Hernandez, N.G. Instructional strategies in mathematics education, Math. Teacher, 1973 66,

607-612.
北田 実，コンピューターによる主成分分析——生徒のもつ数学能力——，岩手大学教育学部 昭和48年度卒論，1974.
駒林邦男，「知的行為の多段階形成理論」研究覚書，岩手大学教育学部研究年報，1971，31，4部，1-86.
駒林邦男，転移力と学習対象の最適構造，総合教育技術，1972，27の8.
駒林邦男，知識技能の易動性をめざす指導と「翻案」，教育展望，昭和48年7月号，1973，41-48.(a)
駒林邦男，教授過程へのサイバネティックなアプローチとしての教育工学，岩手大学教育学部研究年報，1973，33，4部，1-25.(b)
Крутецкий, В. А. Психология математических способностей школьников, 1968, Просвещние. (駒林邦男訳，数学的能力の構造，上，下，1969)
三上義夫，日本数学史，1947，東海書房.
小倉金之助，日本の数学，1940，岩波書店.
佐伯卓也，三田村喜久雄，朴沢晶子，数学的学習能力の性差について，岩手大学教育学部研究年報，1973，33，4部，69-73.
佐伯卓也，中学校における一つの位相教材についての研究，数学教育学会研究紀要，1973，14，1・2号，37-45.(a)
佐伯卓也，数学教材の格子点モデルについて，数学教育学会研究紀要，1973，14，3・4号，7-14.(b)
佐伯卓也，The tolerance fibre bundle and the translation of mathematics subject matters，東北数学教育学会年報，1974，5，15-21.
佐藤敬行，教授ー学習アルゴリズム化・その教授実験，岩手大学教育学部，昭和47年度卒論 1973.
Соколов, А. Н. Графическое сопоставление логического ходо решения задач, Вопросы Психологии, 1961, 6.
Stafford, R. E. Hereditary and environmental components of quantitative reasoning, Review of Educational Reseach, 1972, 42, 183-201.
Stolurow, L. M. Computer-assisted instruction. The Schools and the Challenge of Innovation, Commitee for Economic Development, 1969.
津村善郎，因子分析は有用か，科学，1971，41，437-441.
Zeeman, E. C. Topology of the brain, Mimeographed Note, 1965.