

直交異方性板の撓みの解析*

佐藤 敏・辻野 哲司

Analysis of Deflections of Orthotropic Rectangular Plates.

M. SATO, T. TSUJINO

In the previous paper, deflections of orthotropic rectangular plate by moment distributed along the edges were reported.

Furthermore this paper describes distribution of bending moment M_x , M_y and solutions of uniformly loaded orthotropic rectangular plates with two opposite edges simply supported and the other two edges clamped.

1. 緒 言

前報¹⁾において、対辺単純支持、他辺に一様分布された曲げモーメントを受ける直交異方性板の撓みを求めた。

本報では、さらに曲げモーメント M_x , M_y の分布を調べ、対辺固定、他辺単純支持で一様分布荷重を受ける場合の解も導いたものである。

2. 解の誘導

一般に直交異方性板の撓みに関する微分方程式は(1)式で表わされる。

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2k \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \cdot \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} = \frac{p}{D_x} \quad \dots\dots\dots(1)$$

ただし

$$\eta = ny, \quad n = 4 \sqrt{\frac{D_x}{D_y}}, \quad k = \frac{D_x \cdot \nu_{yx} + 2D_{xy}}{\sqrt{D_x \cdot D_y}}$$

$$D_x = \frac{E_x \cdot h^3}{12(1 - \nu_{yx} \cdot \nu_{xy})}, \quad D_y = \frac{E_y \cdot h^3}{12(1 - \nu_{xy} \cdot \nu_{yx})}$$

$$D_{xy} = \frac{G_{xy} \cdot h^3}{12}$$

E_x, E_y : 曲げヤング係数

ν_{yx}, ν_{xy} : ポアソン比

G_{xy} : 剪断弾性係数

h : 板厚, p : 荷重

2・1 対辺単純支持, 他辺に一様分布された曲げモーメントを受ける場合

撓み w は次式により与えられる⁽¹⁾

i) $k > 1$ の場合

$$w = \frac{4M_0}{\pi} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{\sin \frac{m\pi}{a} x}{D_y(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} \left[\frac{\cosh \lambda_1 \cdot y}{\cosh\left(\lambda_1 \cdot \frac{b}{2}\right)} - \frac{\cosh \lambda_2 \cdot y}{\cosh\left(\lambda_2 \cdot \frac{b}{2}\right)} \right] \dots\dots(2)$$

曲げモーメント M_x, M_y は次式により求められる

$$\left. \begin{aligned} M_x &= - \left(D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_y &= - \left(D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3)$$

ただし

$$D_1 = \nu_{yx} \cdot D_x$$

(2) 式を (3) 式に代入すると

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{4M_0}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2} \frac{D_x}{D_y} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi}{a} x}{\cosh\left(\lambda_1 \cdot \frac{b}{2}\right) \cdot \cosh\left(\lambda_2 \cdot \frac{b}{2}\right)} \\ &\quad \left\{ \frac{m\pi}{a^2} \left[\cosh\left(\lambda_2 \cdot \frac{b}{2}\right) \cdot \cosh \lambda_1 y - \cosh\left(\lambda_1 \cdot \frac{b}{2}\right) \cdot \cosh \lambda_2 y \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{\nu_{yx}}{m\pi} \left[\lambda_1^2 \cdot \cosh\left(\lambda_2 \cdot \frac{b}{2}\right) \cdot \cosh \lambda_1 y - \lambda_2^2 \cosh\left(\lambda_1 \cdot \frac{b}{2}\right) \cdot \cosh \lambda_2 \cdot y \right] \right\} \dots(4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_y &= \frac{4M_0}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi}{a} x}{\cosh\left(\lambda_1 \cdot \frac{b}{2}\right) \cdot \cosh\left(\lambda_2 \cdot \frac{b}{2}\right)} \\ &\quad \left\{ \nu_{yx} \frac{m\pi}{a^2} \left[\cosh\left(\lambda_2 \cdot \frac{b}{2}\right) \cosh \lambda_1 y - \cosh\left(\lambda_1 \cdot \frac{b}{2}\right) \cosh \lambda_2 y \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{m\pi} \left[\lambda_1^2 \cosh\left(\lambda_2 \cdot \frac{b}{2}\right) \cosh \lambda_1 y - \lambda_2^2 \cosh\left(\lambda_1 \cdot \frac{b}{2}\right) \cosh \lambda_2 y \right] \right\} \dots\dots\dots(5) \end{aligned}$$

ここで

$$\lambda_1 = \frac{m\pi}{a} \left(\sqrt{\frac{k+1}{2}} + \sqrt{\frac{k-1}{2}} \right)$$

$$\lambda_2 = \frac{m\pi}{a} \left(\sqrt{\frac{k+1}{2}} - \sqrt{\frac{k-1}{2}} \right)$$

ii) $k < 1$ の場合

撓み w は

$$w = \frac{2M_0}{\pi D_y} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{\lambda_1 \cdot \lambda_2} \sin \frac{m\pi}{a} x$$

$$\left[\frac{\sinh\left(\lambda_1 \frac{b}{2}\right) \sin\left(\lambda_2 \frac{b}{2}\right) \cosh\lambda_1 y \cdot \cos\lambda_2 y - \cosh\left(\lambda_1 \frac{b}{2}\right) \cdot \cos\left(\lambda_2 \frac{b}{2}\right) \cdot \sinh\lambda_1 y \cdot \sin\lambda_2 y}{\cosh^2\left(\lambda_1 \frac{b}{2}\right) \cdot \cos^2\left(\lambda_2 \frac{b}{2}\right) + \sinh^2\left(\lambda_1 \frac{b}{2}\right) \cdot \sin^2\left(\lambda_2 \frac{b}{2}\right)} \right] \dots\dots\dots(6)$$

(3)式に(6)式を代入すると曲げモーメントを得る。

$$M_x = \frac{2M_0 \cdot M_1}{\lambda_1 \cdot \lambda_2} \left[\frac{D_x}{D_y} \cdot \frac{m\pi}{a} M_2 - \frac{D_1 \cdot M_3}{m\pi D_y} \right] \dots\dots\dots(7)$$

$$M_y = \frac{2M_0 \cdot M_1}{\lambda_1 \cdot \lambda_2} \left[\frac{m \cdot \pi \cdot M_2 \cdot D_1}{a^2 \cdot D_y} - \frac{M_3}{m\pi} \right] \dots\dots\dots(8)$$

ここで

$$M_1 = \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi}{a}}{\cosh^2\left(\lambda_1 \frac{b}{2}\right) \cdot \cos^2\left(\lambda_2 \frac{b}{2}\right) + \sinh^2\left(\lambda_1 \frac{b}{2}\right) \cdot \sin^2\left(\lambda_2 \frac{b}{2}\right)}$$

$$M_2 = \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \left\{ \sinh\left(\lambda_1 \frac{b}{2}\right) \cdot \sin\left(\lambda_2 \frac{b}{2}\right) \cdot \cosh(\lambda_1 y) \cdot \cos(\lambda_2 y) \right. \\ \left. - \cosh\left(\lambda_1 \frac{b}{2}\right) \cdot \cos\left(\lambda_2 \frac{b}{2}\right) \cdot \sinh(\lambda_1 y) \cdot \sin(\lambda_2 y) \right\}$$

$$M_3 = \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \left[\sinh\left(\lambda_1 \frac{b}{2}\right) \sin\left(\lambda_2 \frac{b}{2}\right) \{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \cosh(\lambda_1 y) \cdot \cos(\lambda_2 y) \right. \\ \left. - 2\lambda_1 \cdot \lambda_2 \sinh(\lambda_1 y) \cdot \sin(\lambda_2 y)\} \right. \\ \left. - \cosh\left(\lambda_1 \frac{b}{2}\right) \cdot \cos\left(\lambda_2 \frac{b}{2}\right) \{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \sinh(\lambda_1 y) \sin(\lambda_2 y) \right. \\ \left. + 2\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \cosh(\lambda_1 y) \cdot \cos(\lambda_2 y)\} \right]$$

$$\lambda_1 = \frac{m\pi}{a} \sqrt{\frac{1+k}{2}}, \quad \lambda_2 = \frac{m\pi}{a} \sqrt{\frac{1-k}{2}}$$

iii) $k = 1$ の場合

$$w = \frac{2M_0}{\pi \cdot D_y} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi}{a} x}{\alpha_m^3 \cdot m \cdot \cosh \frac{\alpha_m \cdot b}{2}} \left[\frac{\alpha_m \cdot b}{2} \tanh \frac{\alpha_m \cdot b}{2} \cosh(\alpha_m \cdot y) - \alpha_m y \cdot \sinh(\alpha_m \cdot y) \right] \dots\dots(9)$$

同様にして

$$M_x = 2M_0 \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi}{a} x}{\cosh \frac{\alpha_m \cdot b}{2}} \left\{ \frac{D_x \cdot m\pi}{a^2 \cdot D_y \cdot \alpha_m^3} \left[\frac{\alpha_m \cdot b}{2} \tanh \frac{\alpha_m \cdot b}{2} \cosh(\alpha_m y) - \alpha_m y \cdot \sinh(\alpha_m y) \right] - \frac{D_1}{D_y \cdot m\pi} \left[\frac{\alpha_m \cdot b}{2} \tanh \frac{\alpha_m \cdot b}{2} \cosh(\alpha_m \cdot y) - 2 \cosh(\alpha_m \cdot y) - \alpha_m y \sinh(\alpha_m y) \right] \right\} \dots\dots(10)$$

$$M_y = 2M_0 \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi}{a} x}{\cosh \frac{\alpha_m \cdot b}{2}} \left\{ \frac{D_1 \cdot m\pi}{a^2 \cdot D_y \cdot \alpha_m^3} \left[\frac{\alpha_m \cdot b}{2} \tanh \frac{\alpha_m \cdot b}{2} \cosh \alpha_m \cdot y - \alpha_m y \cdot \sinh(\alpha_m \cdot y) \right] - \frac{1}{m\pi} \left[\frac{\alpha_m \cdot b}{2} \tanh \frac{\alpha_m \cdot b}{2} \cosh(\alpha_m \cdot y) - \alpha_m y \cdot \sinh(\alpha_m y) - 2 \cosh(\alpha_m \cdot y) \right] \right\} \dots\dots(11)$$

ただし

$$\alpha_m = \frac{m\pi}{a}$$

ここで、次の場合の解を求めておく。

2・2 周辺単純支持、一様分布荷重を受ける場合

(1)式において周辺条件は次のようになる。

$$x = 0, a \text{ で } w = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \dots\dots(12-1)$$

$$y = \pm \frac{b}{2} \text{ で } w = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \dots\dots(12-2)$$

又(1)式の解を(13)式とする。

$$w = w_e + w_p \dots\dots\dots(13)$$

(13)式で w_e, w_p を

$$w_e = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \sin \frac{m\pi}{a} x$$

$$w_p = \frac{p}{24D_x} (x^4 - 2ax^3 + a^3x)$$

とおけばこれらの式は周辺条件 (12-1) を満足する。さらに (12-2) を満足するように係数を決め、 w_p をフーリエ級数に展開して撓み w を求めれば次式のようになる。

i) $k > 1$ の場合

$$w = \frac{pa^4}{D_x} \cdot \frac{4}{\pi^5} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^5} \sin \frac{m\pi}{a} x \left[1 + \frac{\lambda_1^2 \cosh \beta \cdot \cosh(\lambda_2 y) - \lambda_2^2 \cosh \gamma \cdot \cosh(\lambda_1 y)}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2) \cosh \gamma \cdot \cosh \beta} \right] \dots\dots(14)$$

ただし

$$\beta = \lambda_1 \cdot \frac{b}{2}, \quad \gamma = \lambda_2 \cdot \frac{b}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{m\pi}{a} \left(\sqrt{\frac{k+1}{2}} + \sqrt{\frac{k-1}{2}} \right)$$

$$\lambda_2 = \frac{m\pi}{a} \left(\sqrt{\frac{k+1}{2}} - \sqrt{\frac{k-1}{2}} \right)$$

ii) $k < 1$ の場合

$$w = \frac{Pa^4}{D_x} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sin \frac{m\pi}{a} x \left[A_m \cosh(\lambda_1 y) \cos(\lambda_2 y) + D_m \sinh(\lambda_1 y) \sin(\lambda_2 y) + \frac{4}{\pi^5 m^5} \right] \dots\dots\dots(15)$$

ただし

$$A_m = -\frac{2}{\pi^5 m^5} \left[\frac{1}{\lambda_1 \cdot \lambda_2} \frac{\sinh\left(\lambda_1 \frac{b}{2}\right) \sin\left(\lambda_2 \frac{b}{2}\right) \left\{ \lambda_1^2 - 2\lambda_1 \lambda_2 \tanh\left(\lambda_1 \frac{b}{2}\right) \tan\left(\lambda_2 \frac{b}{2}\right) - \lambda_2^2 \right\}}{\sinh^2\left(\lambda_1 \frac{b}{2}\right) \sin^2\left(\lambda_2 \frac{b}{2}\right) + \cosh^2\left(\lambda_1 \frac{b}{2}\right) \cos^2\left(\lambda_2 \frac{b}{2}\right)} + \frac{2}{\cosh\left(\lambda_1 \frac{b}{2}\right) \cdot \cos\left(\lambda_2 \frac{b}{2}\right)} \right]$$

$$D_m = \frac{2 \cosh\left(\lambda_1 \frac{b}{2}\right) \cos\left(\lambda_2 \frac{b}{2}\right) \left\{ \lambda_1^2 - 2\lambda_1\lambda_2 \tanh\left(\lambda_1 \frac{b}{2}\right) \tan\left(\lambda_2 \frac{b}{2}\right) - \lambda_2^2 \right\}}{\pi^5 m^5 \lambda_1 \lambda_2 \left[\sinh^2\left(\lambda_1 \frac{b}{2}\right) \sin^2\left(\lambda_2 \frac{b}{2}\right) + \cosh^2\left(\lambda_1 \frac{b}{2}\right) \cos^2\left(\lambda_2 \frac{b}{2}\right) \right]}$$

$$\lambda_1 = \frac{m\pi}{a} \sqrt{\frac{1+k}{2}}, \quad \lambda_2 = \frac{m\pi}{a} \sqrt{\frac{1-k}{2}}$$

iii) $k = 1$ の場合²⁾

$$w = \frac{4pa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^5} \sin \frac{m\pi x}{a} \left(1 - \frac{\alpha_m \tanh \alpha_m + 2}{2 \cosh \alpha_m} \cosh \frac{m\pi y}{a} + \frac{1}{2 \cosh \alpha_m} \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi}{a} y \right) \dots\dots\dots(16)$$

ただし

$$\alpha_m = \frac{m\pi b}{2a}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

2・3 対辺単純支持, 他辺固定で一様分布荷重を受ける場合

図1に示すように, $x=0, a$ で単純支持, 他の2辺が固定された矩形板を考える。

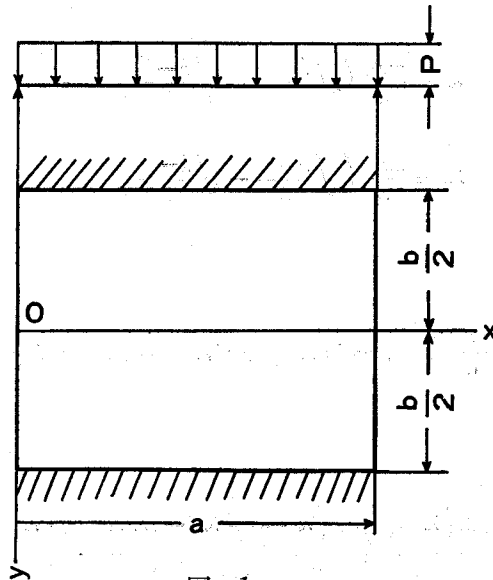


図 1

このような条件のもとにおける板の解は, 周辺単純支持で一様分布荷重を受ける板の解と横荷重により辺 $y = \pm \frac{b}{2}$ に沿って生ずる回転を除くような強さの曲げモーメントを受ける場合の解とを組み合わせることにより得られる²⁾。

i) $k > 1$ の場合

周辺単純支持、一様分布荷重を受ける場合の撓みは(14)式で計算される。

今辺 $y=b/2$ における撓み角は

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=\frac{b}{2}} = \frac{4Pa^4}{\pi^5 D_x} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^5} \sin \frac{m\pi x}{a} \left[\frac{\lambda_1^2 \cdot \lambda_2 \cosh \beta \cdot \sinh \gamma - \lambda_2^2 \cdot \lambda_1 \cosh \gamma \cdot \sinh \beta}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2) \cosh \gamma \cdot \cosh \beta} \right] \dots\dots\dots(17)$$

この傾きを除くように、そして実際の周辺条件を満足するように辺 $y=\pm b/2$ に次の級数で示される曲げモーメントを与える。

$$(My)_{y=\pm \frac{b}{2}} = \sum_{m=1}^{\infty} E_m \sin \frac{m\pi}{a} x \dots\dots\dots(18)$$

このモーメントによる傾きが(17)式で与えられた撓み角に等しくなるよう係数 E_m を決める。

ここで対辺単純支持、他辺に曲げモーメントを受ける矩形板の撓みは次式より求められる¹⁾。

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{E_m \cdot \sin \frac{m\pi}{a} x}{D_y(\lambda_2^2 - \lambda_1^2) \cosh\left(\lambda_2 \frac{b}{2}\right)} \left[\frac{\cosh\left(\lambda_2 \frac{b}{2}\right) \cosh(\lambda_1 y) - \cosh\left(\lambda_1 \frac{b}{2}\right) \cosh(\lambda_2 y)}{\cosh\left(\lambda_1 \frac{b}{2}\right)} \right] \dots\dots\dots(19)$$

従ってに $y = \frac{b}{2}$ 沿う撓み角は

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=\frac{b}{2}} = \frac{E_m}{D_y(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sin \frac{m\pi}{a} x \left[\lambda_1 \tanh\left(\lambda_1 \frac{b}{2}\right) - \lambda_2 \tanh\left(\lambda_2 \frac{b}{2}\right) \right] \dots\dots\dots(20)$$

(20)式の負の値が(17)式に等しくおけば E_m を得る。すなわち

$$E_m = \frac{D_y}{D_x} \frac{4Pa^4}{\pi^5 m^5} \lambda_1 \cdot \lambda_2 \frac{\lambda_1 \tanh\left(\lambda_2 \frac{b}{2}\right) - \lambda_2 \tanh\left(\lambda_1 \frac{b}{2}\right)}{\lambda_2 \tanh\left(\lambda_2 \frac{b}{2}\right) - \lambda_1 \tanh\left(\lambda_1 \frac{b}{2}\right)} \dots\dots\dots(21)$$

E_m を(18)式に代入すれば辺 $y = \pm \frac{b}{2}$ における曲げモーメントを得る。

$$(M_y)_{y=\pm \frac{b}{2}} = \frac{D_y}{D_x} \cdot \frac{4Pa^4}{\pi^5} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^5} \sin \frac{m\pi x}{a} \lambda_1 \cdot \lambda_2 \frac{\lambda_1 \tanh\left(\lambda_2 \frac{b}{2}\right) - \lambda_2 \tanh\left(\lambda_1 \frac{b}{2}\right)}{\lambda_2 \tanh\left(\lambda_2 \frac{b}{2}\right) - \lambda_1 \tanh\left(\lambda_1 \frac{b}{2}\right)} \dots \dots \dots (22)$$

又(21)式の E_m を(19)式に代入すれば(22)式で与えられる曲げモーメント M_y による撓みを得る。この撓みを w_1 とすれば

$$w_1 = \frac{4Pa^4}{D_x \cdot \pi^5} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi}{a} x}{m^5} \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2} K_m \cdot B_m \dots \dots \dots (23)$$

ただし

$$K_m = \frac{\lambda_1 \tanh\left(\lambda_2 \frac{b}{2}\right) - \lambda_2 \tanh\left(\lambda_1 \frac{b}{2}\right)}{\lambda_2 \tanh\left(\lambda_2 \frac{b}{2}\right) - \lambda_1 \tanh\left(\lambda_1 \frac{b}{2}\right)}$$

$$B_m = \frac{\cosh\left(\lambda_2 \frac{b}{2}\right) \cosh(\lambda_1 y) - \cosh\left(\lambda_1 \frac{b}{2}\right) \cdot \cosh(\lambda_2 y)}{\cosh\left(\lambda_1 \frac{b}{2}\right) \cdot \cosh\left(\lambda_2 \frac{b}{2}\right)}$$

中央おける撓み w_{1m} は

$$w_{1m} = \frac{4Pa^4}{D_x \pi^5} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^5} \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2} K_m \left[\frac{1}{\cosh\left(\lambda_1 \frac{b}{2}\right)} - \frac{1}{\cosh\left(\lambda_2 \frac{b}{2}\right)} \right] \dots \dots (24)$$

となる。

ここで(14)式から、今求めた撓み(23)式を引けば、最終的に対辺単純支持、他辺固定で一様分布荷重を受ける板の撓みを得る。

(14)式から板の中央における撓み w_{2m} は

$$w_{2m} = \frac{4Pa^4}{D_x \cdot \pi^5} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^5} (-1)^{\frac{m-1}{2}} \left[1 + \frac{\lambda_1^2 \cosh \beta - \lambda_2^2 \cosh \gamma}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2) \cosh \gamma \cdot \cosh \beta} \right] \dots \dots \dots (25)$$

従って与えられた条件のもとにおける板の中央の撓み w_m は

$$w_m = w_{2m} - w_{1m}$$

$$= \frac{4Pa^4}{D_x \cdot \pi^5} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^5} (-1)^{\frac{m-1}{2}} \left[1 + \frac{\lambda_1^2 \cosh \beta - \lambda_2^2 \cosh \gamma - K_m \lambda_1 \lambda_2 (\cosh \gamma - \cosh \beta)}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2) \cosh \gamma \cdot \cosh \beta} \right] \dots \dots (26)$$

ここで

$$\lambda_1 = \frac{mn\pi}{a} \left(\sqrt{\frac{k+1}{2}} + \sqrt{\frac{k-1}{2}} \right)$$

$$\lambda_2 = \frac{mn\pi}{a} \left(\sqrt{\frac{k+1}{2}} - \sqrt{\frac{k-1}{2}} \right)$$

$$\beta = \lambda_1 \cdot \frac{b}{2}, \quad \gamma = \lambda_2 \cdot \frac{b}{2}$$

$$K_m = \frac{\lambda_1 \tanh\left(\lambda_2 \frac{b}{2}\right) - \lambda_2 \tanh\left(\lambda_1 \frac{b}{2}\right)}{\lambda_2 \tanh\left(\lambda_2 \frac{b}{2}\right) - \lambda_1 \tanh\left(\lambda_1 \frac{b}{2}\right)}$$

ii) $k < 1$ の場合

$k > 1$ の場合と同様にして(18)式で与えられる曲げモーメント M_y による撓み w_1 は

$$w_1 = \frac{2Pa^4}{\pi^5 D_x} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi}{a} x}{m^5} F_m \cdot \left(\frac{G_m \cdot H_m}{I_m} - 2J_m \right) \cdot L_m \dots\dots\dots(27)$$

となる。

ここで

$$F_m = \frac{1}{\lambda_1 \sin\left(\lambda_2 \frac{b}{2}\right) \cos\left(\lambda_2 \frac{b}{2}\right) + \lambda_2 \sinh\left(\lambda_1 \frac{b}{2}\right) \cosh\left(\lambda_1 \frac{b}{2}\right)}$$

$$G_m = \lambda_1^2 - 2\lambda_1 \cdot \lambda_2 \tanh\left(\lambda_1 \frac{b}{2}\right) \tan\left(\lambda_2 \frac{b}{2}\right) - \lambda_2^2$$

$$H_m = \lambda_1 \sin\left(\lambda_2 \frac{b}{2}\right) \cos\left(\lambda_2 \frac{b}{2}\right) + \lambda_2 \sinh\left(\lambda_1 \frac{b}{2}\right) \cosh\left(\lambda_1 \frac{b}{2}\right)$$

$$I_m = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \left[\sinh^2\left(\lambda_1 \frac{b}{2}\right) \sin^2\left(\lambda_2 \frac{b}{2}\right) + \cosh^2\left(\lambda_1 \frac{b}{2}\right) \cos^2\left(\lambda_2 \frac{b}{2}\right) \right]$$

$$J_m = \lambda_1 \tanh\left(\lambda_1 \frac{b}{2}\right) - \lambda_2 \tan\left(\lambda_2 \frac{b}{2}\right)$$

$$L_m = \sinh\left(\lambda_1 \frac{b}{2}\right) \sin\left(\lambda_2 \frac{b}{2}\right) \cosh(\lambda_1 y) \cos(\lambda_2 y)$$

$$- \cosh\left(\lambda_1 \frac{b}{2}\right) \cos\left(\lambda_2 \frac{b}{2}\right) \sinh(\lambda_1 y) \sin(\lambda_2 y)$$

中央における撓み w_{1m} は

$$w_{1m} = \frac{2Pa^4}{\pi^5 \cdot D_x} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^5} \sinh\left(\lambda_1 \frac{b}{2}\right) \sin\left(\lambda_2 \frac{b}{2}\right) \cdot F_m \cdot \left(\frac{G_m \cdot H_m}{I_m} - 2J_m \right)$$

.....(28)

又周辺単純支持, 一様分布荷重をうける板の中央の撓みは(15)式から得られ次のようになる。

$$w_{2m} = \frac{Pa^4}{D_x} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{m-1}{2}} \times \left(A_m + \frac{4}{\pi^5 m^5} \right) \dots\dots\dots (29)$$

従って対辺単純支持, 他辺固定, 一様分布荷重を受け場合の板の中央における撓み w_m は

$$w_m = \frac{Pa^4}{D_x} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{m-1}{2}} \left[A_m + \frac{2}{\pi^5 m^5} \left\{ 2 - \sinh\left(\lambda_1 \frac{b}{2}\right) \sin\left(\lambda_2 \frac{b}{2}\right) \cdot F_m \left(\frac{G_y \cdot H_m}{I_m} - 2J_m \right) \right\} \right] \dots\dots\dots (30)$$

ここで

$$A_m = -\frac{2}{\pi^5 m^5} \left[\frac{1}{\lambda_1 \cdot \lambda_2} \frac{\sinh\left(\lambda_1 \frac{b}{2}\right) \sin\left(\lambda_2 \frac{b}{2}\right) \left\{ \lambda_1^2 - 2\lambda_1 \lambda_2 \tanh\left(\lambda_1 \frac{b}{2}\right) \tan\left(\lambda_2 \frac{b}{2}\right) - \lambda_2^2 \right\}}{\sinh^2\left(\lambda_1 \frac{b}{2}\right) \sin^2\left(\lambda_2 \frac{b}{2}\right) + \cosh^2\left(\lambda_1 \frac{b}{2}\right) \cos^2\left(\lambda_2 \frac{b}{2}\right)} \right. \\ \left. + \frac{2}{\cosh\left(\lambda_1 \frac{b}{2}\right) \cdot \cos\left(\lambda_2 \frac{b}{2}\right)} \right] \\ \lambda_1 = \frac{m\pi}{a} \sqrt{\frac{1+k}{2}}, \quad \lambda_2 = \frac{m\pi}{a} \sqrt{\frac{1-k}{2}}$$

iii) $k=1$ の場合

同様にして解けば, 板の中央における撓み w_m は

$$w_m = \frac{2Pa^4}{\pi^5 \cdot D} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^5} \left[2 - \frac{\alpha_m \tanh \alpha_m + 2}{\cosh \alpha_m} \right. \\ \left. - \frac{\alpha_m \tanh \alpha_m}{\cosh \alpha_u} \cdot \frac{\alpha_m - \tanh \alpha_m (1 + \alpha_m \tanh \alpha_m)}{\alpha_m - \tanh \alpha_m (\alpha_m \tanh \alpha_m - 1)} \right] \dots\dots\dots (31)$$

となる。

3 数値計算例ならびに考察

対辺単純支持, 他辺に一樣な曲げモーメントを受ける 3ply シナ合板の撓み w , 曲げモーメント M_x, M_y を正方形板の場合について計算した。ここで材料の弾性定数により定まる k の値は, 合板の表繊維方向がスパン方向に対し 0° の傾きを持つ試験片の場合 $k=0.48$, 45° の傾きを持つ場合 $k=1.809$ である³⁾。

図2は 0° 方向に木取った正方形 3ply シナ合板の撓み w の分布を調べたものである。当

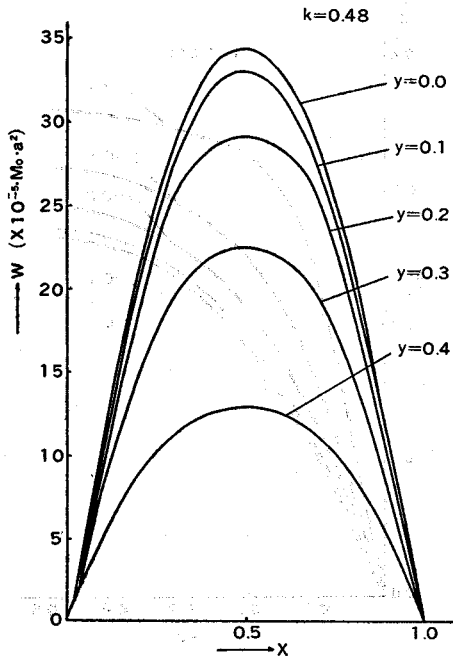


図2 スパン方向に対し 0° 方向に木取った正方形 3ply シナ合板における撓み w の分布。

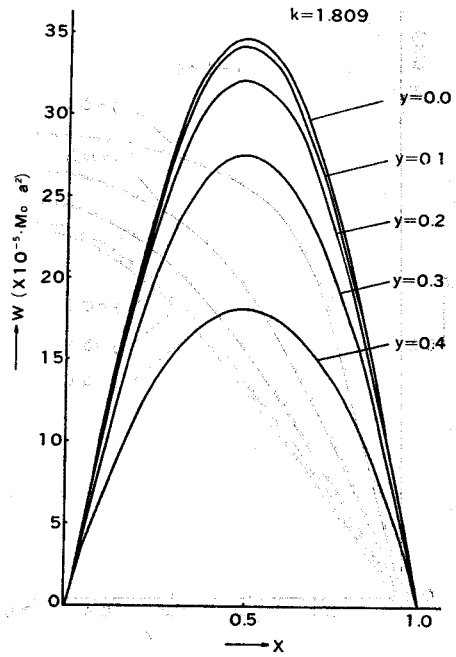


図3 スパン方向に対し 45° 方向に木取った正方形 3ply シナ合板における撓み w の分布。

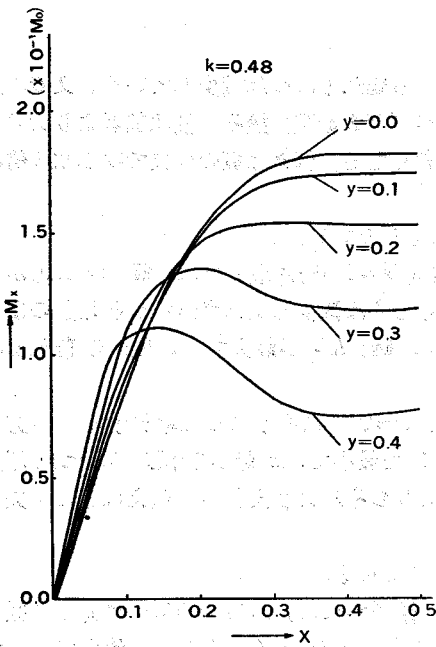


図4 スパン方向に対し 0° 方向に木取った正方形 3ply シナ合板における曲げモーメント M_x の分布。

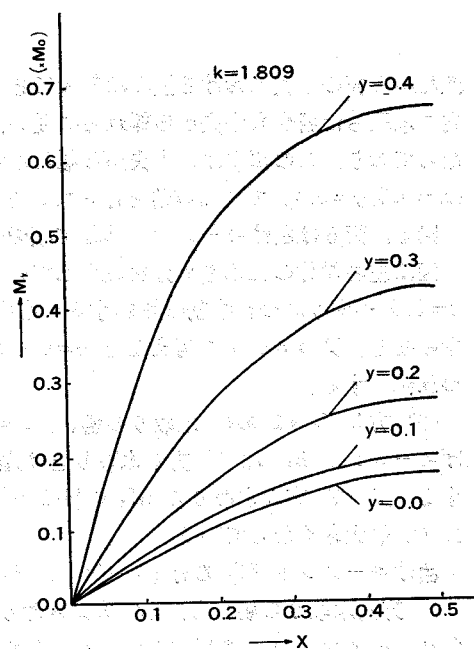


図5 スパン方向に対し 45° 方向に木取った正方形 3ply シナ合板における曲げモーメント M_x の分布。

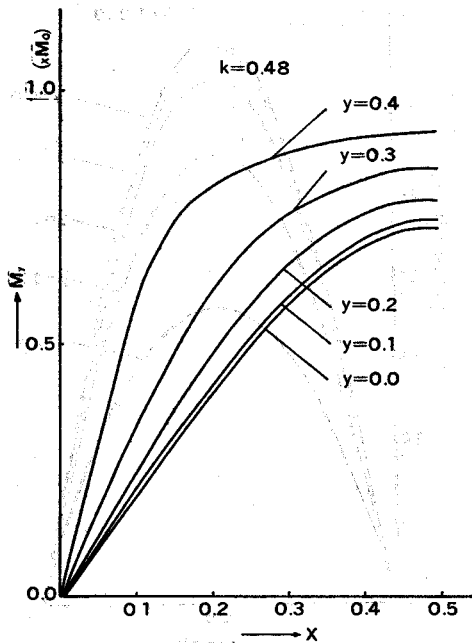


図6 スパン方向に対し 0° 方向に木取った正方形 3ply シナ合板における曲げモーメント M_y の分布。

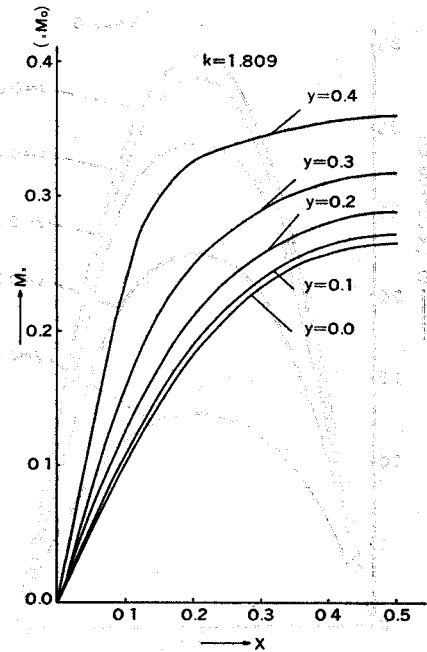


図7 スパン方向に対し 45° 方向に木取った正方形 3ply シナ合板における曲げモーメント M_y の分布。

然ながら板の中央における撓みは最大であり、それから離れるにつれ減少していく。又 45° 方向に木取った場合も中央から離れるに従い減少するが(図3参照)撓みの量は前者より大きくなっており、この傾向は、中央から離れるにつれ大きくなる。例えば板の中央では1.005倍端 ($x=0.5, y=0.4$) で1.397倍となっている。

図4, 図5は曲げモーメント M_x の分布を調べたものである。

図は左右対称のため左半分を表示している。 0° 方向($k=0.48$)木取りでは、縁($x=0.0$)から $x=0.5$ へ向うにつれ最初は増加するが途中で一定もしくは減少し又わずかながら増加の傾向をみせる。又 $x=0.5$ で考えると $y=0.0$ における(x 軸) M_x が最大で、 x 軸から離れるにつれ減少する。

45° 方向($k=1.809$)木取りの場合、 $x=0.0$ から $x=0.5$ に向うにつれ増加する。一方曲げモーメント M_x は 0° 方向木取りとは逆に $y=0.0$ で最小で、 x 軸から離れるにつれ増加する。又 45° 方向木取りの M_x の量は 0° 方向木取りのそれより大きい。例えば板の中央で1.466倍大きくなっている。

曲げモーメント M_y の分布を調べたのが図6, 図7である。

0° 方向木取りの場合も、 45° 方向木取りの場合も縁 ($x=0.0$) から $x=0.5$ に向うに従い曲げモーメント M_y は増加していく。その値は両者とも、 x 軸上 ($y=0.0$) が最小で、 x 軸から離れるにつれ増す。全体に前者 M_y のは後者のそれよりも大きい値を示している。たとえば板の中央では4.22倍大きくなっている。

又 $x=0.5$ 軸上で、 45° 方向木取りの場合、縁から x 軸 ($y=0.0$) に向かってモーメントの急激な減少 (17.25%に減少) がみられるが、 0° 方向木取りのそれは、ゆるやかな減少 (72.8%) を示している。

参 考 文 献

- 1) “対辺に一樣な曲げモーメントを受ける直交異方性板の撓み”，辻野哲司，佐藤松敏，岩手大学教育学部研究年報，Vol 31, 1971, p. 75.
- 2) “Theory of Plate and Shells” by S. Timoshenko and Woinowsky-Krieger, McGraw-Hill Book Company
- 3) “木質板に関する研究 (第1報)”，沢田稔，上田恒司，北海道大学農学部演習林報告，Vol. 25, p. 61.

(昭和47年5月17日 受理)