Ambige Klasse と Normenrest について

黒　澤　　誠

n次の巡回体K/kに於て Hauptgeschlecht(單位種)に屬する各類は或る類の1-S乘中に等しいと云う定理を類体論に於ける Umkehrsatz の結論を利用しないで証明することを試みようと思う.

体Kに於て絕体の意味での類Cを考察する. 類數をhとして各類を

$$C_0,\ C_1,\ C_2,\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\ C_{h-1} \qquad (1)$$

とする, これ等は群をなす. この群をCとする. これ等の各類を代表する Ideal を

$$\mathfrak{A}_0,\ \mathfrak{A}_2\ \mathfrak{A},\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\ \mathfrak{A}_{h-1}$$

とする.

今巡回体K/kのGalois群を生ずる置換をSとすれば$\mathfrak{A}_i^s$の共軛 Ideal $\mathfrak{A}_i^s$は一つの類を作る. その類をC_i^sと書き類C_i/C_i^sをC_i^{1-s}と略記する. さてC_i^{1-s}が單項類になる如き類を Ambige Klasse とし, その類數がfなるときそれ等の Ambige Klasse を

$$C_0,\ C_1,\ C_2,\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\ C^{f-1} \qquad (2)$$

とする. (1)の類に(2)に屬さない類があるとき. その類をC_jとし, これを代表する Ideal を$\mathfrak{A}_j$とすると, 次の類は(2)の類と悉く同等ならざることは明らかである.

$$\mathfrak{A}_jC_0,\mathfrak{A}_jC_1,\mathfrak{A}_jC_2,\cdots\cdots\cdots,\mathfrak{A}_jC_{f-1} \qquad (3)$$

更に(1)の類に(2), (3)に屬さない類があるときはその類を代表する Ideal をとり, (3)の如き類を作る. 以下同樣にすると, (1)の類は$\mathfrak{A}_jC_i$の形に表わせる.

但し$i=0,1,2,\cdots\cdots,f-1;\ j=0,1,2,\cdots,g-1;\ g=h/f,\ \mathfrak{A}_0=(1)$

然るに$(\mathfrak{A}_jC_i)^{1-s}$のものはh個あるが其の中$C_i^{1-s}$ $(i=0,1,2,\cdots\cdots f-1)$なるf個の類は單項類となり$(\mathfrak{A}_jC_i)^{1-s}$ $(j\neq 0)$は單項類でない類となる. これ等の類をC'_lとする.

但し$l=0,1,2,\cdots\cdots,g-1$にしてC'_0は單項類である.

而しC'_lは總てC^{1-s}の形で表わされるものである. 然るときはC'_lなる類を代表する Ideal は$A\mathfrak{A}_l^{1-s}$となる.

但しAは單項 Ideal である.

而して$N\mathfrak{A}_l^{1-s}=N(\mathfrak{A}_l/\mathfrak{A}_l^s)=1$であるから$C'_l$なる類 Normは總て Normenrestになる.

次に$N\mathfrak{A}$がNormenrestになる如きIdeal$\mathfrak{A}$によつて代表される類は群をなすが, これ等の類C''_lをHauptgeschlecht(單位種)と云う.

然るにC'_lなる類もC''_lなる類も夫々群をなす. 且つC'_lはC''_lの群の部分群である. 即ち

$$C \supset C''_l \supset C'_l \qquad (4)$$

である.

故に定理を証明するためには

$$C'_l \supset C''_l \qquad (5)$$

なることが判ればよい.

今Hauptgeschlecht に屬する類が，C'_l 以外にあるとし，その類を代表するIdealを$\mathfrak{A}'$とする．而してC'なる類は

$$C^{1-s}_{l\cdot 0},\ C^{1-s}_{l\cdot 1},\ C'^{1-s}_{l\cdot 2}\cdots\cdots,\ C^{1-s}_{l\cdot g-1} \quad (6)$$

の形となる．

然るときは

$$\mathfrak{A}'C^{1-s}_{l\cdot 0},\ \mathfrak{A}'C^{1-s}_{l\cdot 1},\ \mathfrak{A}'C^{1-s}_{l\cdot 2}\cdots\cdots\mathfrak{A}'C^{1-S}_{l\cdot g-1} \quad (7)$$

なる類は總て Haupt gesch lecht に屬し 且つ互に同等ならざる類である．故に Haupt gesch lecht の類數はC^{1-s}の類數の倍數である．

mod. m のNormenrestをνとし，(7) の或類を代表する Ideal を $\mathfrak{A}'\mathfrak{A}_i^{1-S}$とすれば

$$N(\mathfrak{A}'\mathfrak{A}_i^{1-S}) \equiv \nu_1 \ (\mathrm{mod.\ m})$$

然るに$N\mathfrak{A}_i^{1-S}=1$

故に

$$N\mathfrak{A}'\equiv\nu_1 \ (\mathrm{mod.\ m})$$

而して Normenrest ν は群をなすから $\nu_1\nu_2\equiv 1\ (\mathrm{mod.m})$ なるν_1, ν_2があり

且つ $NA\equiv\nu_2\ (\mathrm{mod.\ n})$

なる單項 Ideal A がある．

故に$N(A\mathfrak{A}'\mathfrak{A}_i^{1-S})\equiv\nu_1\nu_2\equiv 1\ (\mathrm{mod.\ m})$

且つ Ideal $A\mathfrak{A}'\mathfrak{A}_i^{1-S}$ は (7) の類の何れかに屬するものである．

次にmの一つの素因數にして1の約數ならざるkの素數$\mathfrak{p}$をとり，$\mathfrak{p}$進体について考えると適當なる限界以上にλをとり

$$N(A\mathfrak{A}'\mathfrak{A}_i^{1-S})\equiv 1\ (\mathfrak{p}^\lambda)$$

とすれば $N(A\mathfrak{A}'\mathfrak{A}_i^{1-S})=\alpha^n$

となる．但しαは$k_\mathfrak{p}$の數である．

K/kに返り$N(A\mathfrak{A}'\mathfrak{A}_i^{1-S}/\xi)=1 \qquad (8)$

但しξはkの數である．

次に Herbrand の Lemma を利用する．

Herbrand の Lemma

『巡回体K/kに於て$N\mathfrak{A}=1$ならば$\mathfrak{A}=\mathfrak{B}^{1-s}$なる整の Idealがある』

故にこの Lemma により(8)より

$$A\mathfrak{A}'\mathfrak{A}\xi_i^{-S}/\xi=\mathfrak{B}^{1-S}$$

而してξはkの數である．

故に(7)の或類を代表する Ideal は悉く(6)の類に屬することが判る．

故に $C'_l \supset C''_l$

故に(4)と(9)より Haupt gesch lecht は(6)なるC^{1-s}と一致する．

故に巡回体K/kに於て Haupt gesch lecht に屬する各類は或類の1—S乗中に等しい．

Hauptgeschlecht の類を$C\nu$とすると

$$(C : C\nu)=(C : C^{1-s})$$

なることが判つたことになる．