C^*- 環の数域について

小野寺　　剛

§ 1. 序　　論

A を複素 Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ 上の有界線形作用素（以下では単に作用素という）とするとき，集合 $\overline{W(A)}=\{(A\xi,\xi):\|\xi\|=1,\ \xi\in\mathfrak{H}\}$ を作用素 A の数域という。

このとき，$\overline{W(A)}$ は凸集合となることはよく知られている（例えば [1], [2], [8]）。

A のスペクトルを $\mathfrak{S}(A)$，その凸包を *conv* $\mathfrak{S}(A)$ とあらわすとき，*conv* $\mathfrak{S}(A)$ は $W(A)$ の閉包 $\overline{W(A)}$ にふくまれ，特に A が正規作用素（すなわち $A^*A=AA^*$）のときは，*conv* $\mathfrak{S}(A)=\overline{W(A)}$ なることも知られている（[2]）。

最近この等号は，必らずしも正規でないある種の作用素についても成立することが示されている（[6], [7], [9]）。

本稿においては C^*- 環の場合に数域の概念を導入して，作用素の数域の場合と類似の結果を証明する。

ここで後の議論に必要な若干の定義と，今まで知られている結果をまとめておく。

定義 1.　$\mathfrak{R}$ を単位元 e をもつ環とする。$x\in\mathfrak{R}$ に対して $x-\lambda e$ の逆元が存在しないような複素数 λ 全体の集合を $\mathfrak{S}(x)$ とかき，$x\in\mathfrak{R}$ のスペクトルという。

環 $\mathfrak{R}$ が次の条件をみたすとき，$\mathfrak{R}$ は Banach- 対称環であるという。

1)　$\mathfrak{R}$ は Banach- 環である。

2)　次の条件をみたすような対合 $x\to x^*$ が定義されている。

　a)　$(\alpha a+\beta b)^*=\bar{\alpha}a^*+\bar{\beta}b^*$　（α, β は任意の複素数，a, $b\in\mathfrak{R}$）。

　b)　$(ab)^*=b^*a^*$

　c)　$(a^*)^*=a$

　Banach- 対称環 $\mathfrak{R}$ が更に次の条件，

　d)　$\|a^*a\|=\|a\|^*\cdot\|a\|$

　をみたすとき $\mathfrak{R}$ は C^*- 環であるという。

定義 2.　C^*- 環 $\mathfrak{R}$ から Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ 上の作用素全体のつくる環 $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ の中への準同型写像 $x\to A_x$ を $\mathfrak{R}$ の表現といい，空間 $\mathfrak{H}$ の要素 ξ_0 が存在して，$A_x\xi_0\,(x\in\mathfrak{R})$ の全体が $\mathfrak{H}$ で稠密であるとき，この表現を C^*- 環 $\mathfrak{R}$ の巡回表現，ξ_0 を巡回元という。

C^*- 環 $\mathfrak{R}$ から C^*- 環 $\mathfrak{R}'$ の上への同型，等距離写像が存在するとき，$\mathfrak{R}$ と $\mathfrak{R}'$ は完全同型であるという。

このとき次の定理が成立つことが知られている。

定理 A：単位元 e をもつ C^*- 環 $\mathfrak{R}$ は Hilbert 空間上の作用素のつくるある環に完全同型である。

すなわち $\mathfrak{P}_{\mathfrak{R}}$ を $\mathfrak{R}$ 上の $f(e)=1$ をみたす正値線形汎関数全体とするとき，$f\in\mathfrak{P}_{\mathfrak{R}}$ に対して，$\mathfrak{R}$ の $\mathfrak{H}_f$（fにより定まる Hilbert 空間）上の巡回表現；$x\to A_x^{(f)}\,(A_x^{(f)}\in\mathfrak{B}(\mathfrak{H}_f))$ が存在する。

このとき直和表現；$x \to \sum_{f \in \mathfrak{P}_{\mathfrak{R}}} \oplus A_x^{(f)} = A_x,\ A_x \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H}), \mathfrak{H} = \sum_{f \in \mathfrak{P}_{\mathfrak{R}}} \oplus \mathfrak{H}_f$ は $\mathfrak{R}$ から $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ の閉部分環への完全同型写像である（[5；p256〜257, p307]）。

以下の議論ではこの表現定理が基本的な役割をもつ。

§ 2. C^*- 環の数域

$\mathfrak{R}$ を単位元 e をもつ C^*- 環とする。定理Aで保障された $\mathfrak{R}$ の表現定理を用いて，C^*- 環の各元に対して，その数域を次のように定義する。

定義 3. $x \in \mathfrak{R}$ に対して，集合 $W(x)=\{f(x)\ ;f \in \mathfrak{P}_{\mathfrak{R}}\}$ を $x \in \mathfrak{R}$ の数域と呼ぶ。

このとき次の定理が成り立つ。

定理 1：$\mathfrak{R}$ を単位元をもつ C^*- 環とするとき，各 $a \in \mathfrak{R}$ に対して $W(a)$ はコンパクトな凸集合である。さらにこのとき，$W(A_a)=W(a)$ となる。

ここで A_a は定理Aの表現による $a \in \mathfrak{R}$ に対応する作用素である。

証明：$\mathfrak{P}_{\mathfrak{R}}$ は $\mathfrak{R}$ の共役空間の凸集合で汎弱位相でコンパクト（[5；p261]）。

$f \in \mathfrak{P}_{\mathfrak{R}} \to f(a)$ の対応は線形で汎弱位相で連続であるからコンパクトな凸集合である。

次に $a \in \mathfrak{R}$ の表現を $A_a = \sum_{f \in \mathfrak{P}_{\mathfrak{R}}} \oplus A_a^{(f)}$ とすると，$f \in \mathfrak{P}_{\mathfrak{R}}$ に対して，$f(a)=(A_a\xi_f, \xi_f) \in W(A_a)$

一方 $\lambda \in W(A_a)$ とすると $\lambda=(A_a\xi, \xi)$，$\|\xi\|=1$ $\xi \in \sum_{f \in \mathfrak{P}_{\mathfrak{R}}} \oplus \mathfrak{H}_f$ とかける。

このとき，$f(x)=(A_x\xi, \xi)$，$(x \in \mathfrak{R})$ は $f(e)=1$ をみたす正値線形汎関数であるから，

$$\lambda=(A_a\xi, \xi)=f(a) \in W(a)$$

従って，$W(A_a)=W(a)$。 （証終）

次の結果は良く知られた結果である（例えば [5；p. 152]）が便利のために，補題としてのべておく。

補題 1：C^*- 環 $\mathfrak{R}$ の左(右)閉イデアル I_l (I_r) に対して，正の汎関数 f が存在して，$f(e)=1$，しかもすべての $x \in I_l (x \in I_r)$ に対して $f(x^*x)=0$ $(f(xx^*)=0)$。

この補題1を利用すれば次の定理が示される。

定理 2：$\mathfrak{R}$ を単位元 e をもつ C^*- 環とする。このとき，$\mathfrak{S}(x) \subseteqq W(x)$ である。

証明：$\lambda \overline{\in} W(x)$ とすると，任意の $\mathfrak{P}_{\mathfrak{R}}$ に対して，$f(x-\lambda e) \neq 0$。

今 $f((x-\lambda e)^*(x-\lambda e))=0$ とすると，シュワルツの不等式から

$$|f(x-\lambda e)|^2=|f(e\cdot(x-\lambda e))|^2 \leqq f(e)f((x-\lambda e)^*(x-\lambda e))=f((x-\lambda e)^*(x-\lambda e))=0.$$

従って，$f(x-\lambda e)=0$ となり矛盾である。

故に $f((x-\lambda e)^*(x-\lambda e)) \neq 0.$

このとき補題1から $\mathfrak{R}$ の任意の左閉イデアル I_l に対して，$x-\lambda e \overline{\in} I_l$

従って，$x-\lambda e$ の左逆元 $(x-\lambda e)_l^{-1}$ は存在する（[5, p. 152]）。

同様にして，$x-\lambda e$ の右逆元 $(x-\lambda e)_r^{-1}$ も存在する。

従って，$x-\lambda e$ は逆元をもち，

$\lambda \overline{\in} \mathfrak{S}(x)$ である。

従って，$\mathfrak{S}(x) \subseteqq W(x)$. （証終）

定義 4. $\mathfrak{R}$ を Banacn- 対称環とする。$x \in \mathfrak{R}$ がエルミット要素（すなわち $x=x^*$）であるとき，$\mathfrak{S}(x) \subseteqq [0, \infty)$ $(\mathfrak{S}(x) \geqq 0$ とかく）ならば，$x \geqq 0$ とかき，x を正の要素という。

次の結果もよく知られているが，便利のために補題としてのべておく。

補題 2. 単位元をもつ二つの C^*- 環が完全同型。単位元に単位元に移れば，対応するエルミット要素は共に正である ([4 ; p. 247])。

定義 5. 作用素の場合と類似に単位元をもつ Banach- 対称環 $\mathfrak{R}$ において，$x^*x \geqq xx^*$ であるとき，$x \in \mathfrak{R}$ を hyponormal であると定義する。

このとき，補題2を利用すれば次の定理が示される。

定理 3：x を単位元をもつ C^*- 環 $\mathfrak{R}$ の hyponormal な要素とする。このとき

$W(x) = conv\mathfrak{S}(x)$　である。

証明：$x \to A_x$ ($x \in \mathfrak{R}$) を定理Aの表現とすると，$\mathfrak{R}$ と $x \in \mathfrak{R}$ に対応する作用素全体の作る C^*- 環は完全同型であるから，補題3により

$x \geqq 0 \Leftrightarrow A_x \geqq 0$

従って，$x^*x \geqq xx^*$ とすると

$A_x{}^*A_x - A_xA_x{}^* \geqq 0$ である。

すなわち A_x は hyponormal な作用素である。

$\mathfrak{S}(A_x) = \mathfrak{S}(x)$ ([3]) であるから $W(A_x) = W(x) \supseteqq \mathfrak{S}(x) = \mathfrak{S}(A_x)$

一方 $\overline{W(A_x)} = conv\,\mathfrak{S}(A_x)$ ([6]) が分っているから，$\overline{W(x)} = conv\,\mathfrak{S}(x)$

定理1から $W(x)$ は閉だから，$W(x) = conv\,\mathfrak{S}(x)$。　(証終)

§ 3. 附　記

定義 6. $\mathfrak{R}$ を単位元をもつ C^*- 環とするとき，$\omega(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in W(x)\}$，$r(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \mathfrak{S}(x)\}$ をそれぞれ $x \in \mathfrak{R}$ の数域半径，スペクトル半径と呼ぶことにし，作用素 A の数域半径を，$\omega(A) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in W(A)\}$ とかく。

このとき，$0 \leqq r(x) \leqq \omega(x) = \omega(A_x) = \|A_x\| = \|x\|$ は容易に知られる。

このとき，次の系 1，2 が証明される。

系 1：$\mathfrak{R}$ を単位元 e をもつ C^*- 環とする。このとき，$\omega(e-a) < 1$ ならば，a の逆元 a^{-1} が存在する。

証明：a^{-1} が存在しないとすると，$0 \in \mathfrak{S}(a)$

従って，$1 \in \mathfrak{S}(e-a)$

従って，$1 \leqq r(e-a) \leqq \omega(e-a)$ となり，仮定に反する。　(証終)

複素平面上のコンパクト集合全体に，Hausdorff の意味での距離が次の様に定義されることが知られている。すなわち，

$M+(\varepsilon) = \{z+\alpha : z \in M,\ |\alpha| < \varepsilon$ M はコンパクト集合，$\varepsilon > 0\}$

M, N が二つのコンパクト集合とするとき，$d(M, N) = \inf\{\varepsilon > 0 : M \subseteqq N+(\varepsilon),\ N \subseteqq M+(\varepsilon)\}$

このとき次の系が示される。

系 2. $W(x)$ は $\mathfrak{R}$ のノルムによる位相に関して連続である。

証明：$\|x-y\| < \varepsilon$，$f \in \mathfrak{P}_{\mathfrak{R}}$ とするとき，

$|f(x-y)| \leqq \|x-y\| f(e) < \varepsilon$　([5 ; p. 184])

従って，$f(x) = f(y) + f(x-y) \in W(y) + (\varepsilon)$

従って，$W(x) \subseteqq W(y) + (\varepsilon)$

同様にして，$W(y) \subseteqq W(x) + (\varepsilon)$

従って，$d(W(x),\ W(y)) < \varepsilon$

故に，$W(x)$ は連続である。 (証終)

参 考 文 献

1) 藤田 宏，線形作用素の数域が凸であることの証明，数学第17巻第4号 (1966)，232～233.
2) P. R. Halmos, A Hilbert space problem book, Van Nostrand, The University Series in Higher Mathematics, (1966).
3) Irving Kaplanski, Normed algebras, Duke Math. Journal, 16(1949), 399～418.
4) C. E. Rickart, General theory of Banach algebras, Van Nostrand, The University Series in Higher Mathematics, (1960).
5) M. A. ナイマルク著，功力，井関，笠原訳，関数解析入門 I II，共立全書，(1963, 1964).
6) T. Saito and T. Yoshino, On the conjecture of Berberian, Tôhoku Math. J., 17(1961), 147～149.
7) T. G. Stampfli, Hyponormal operators and Spectral density, Trans. Amer. Soc., 117(1965), 469～476.
8) M. H. Stone, Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, XV, New York, (1932).
9) T. Yoshino, On the spectrum of a hyponormal operator, Tôhoku Math. J. 17(1965), 305～309.