# $q$－概積多様体のチエンホモトピー

佐　伯　卓　也

## Chain Homotopy in $q$-almost Product Manifolds

TAKUYA SAEKI

この小論においては，可微分多様体に概積構造の一般化の一つと見なされる $q$－概積構造を定義し，それに関するチエンホモトピーについて論じてみたい．この構造は可積分のとき，小平氏及びD．C．Spencerの導入した重foliate構造に関係があるものと思われる．

主なる結果は $q$－概積多様体についてのチエンホモトピーである．これが証明されると次いでde Rham の定理またはその類似の定理が得られるのが常であるが，われわれの場合は得られない．それは $q$－概積構造をもつ多様体においては，微分形式の芽のつくる層が一般にはfineでないからである．

§1では $q$－概積構造の定義を与え，必要な外微分作用素についてのべる．§2ではslant作用素を定義し，それから得られるいくらかの式を証明する．

**§1．q－概積構造．** $M$を連結パラコンパクト$C^{\infty}$級$n$次元可微分多様体とする．その接バンドルを$T(M)$と表わす．接$p$ベクトルのバンドルを$\wedge^{p}T(M)$または単に$T^{p}(M)$と表わす．そのグラスマン多元環を$\wedge T(M)$と書く．即ち$\wedge T(M)=\sum_{q=o}^{n}T^{p}(M)$．特に$T^{0}(M)$は実数バンドル，$T^{1}(M)=T(M)$とする．$\phi(M)$を余接バンドルとし，これから作られる$\wedge^{p}\phi(M)$及び$\wedge\phi(M)$は前述の$T(M)$のときと同じような意味とする．このとき$\wedge\phi(M)$の横断は微分多項式である．$d$を$\wedge\phi(M)$上のまたは上の微分多項式の外分微作用素とする．

多様体$M$が整数$q(1<q\leqq n)$に対して$q$－概積構造（$p_1$……，$p_\alpha$，……，$p_q$）（簡単のために（$p_\alpha$)と略記する）を有するとは次の条件を満足する射影準同型$p_\alpha$：$T(M)\longrightarrow T(M)$（$\alpha=1$，……，$q$）が存在することである：

(i) $T_x(M)$ を点$x\in M$における$M$の接空間とするとき，$P_\alpha(T_x(M))\subset T_x(M)$ですべての点$x$で成り立つ．

(ii) $T_x(M)=\oplus\sum_{\alpha=1}^{q}P\alpha\ (T_x(M))$

(iii) $P_\alpha(\alpha=1$，……，$q)$は$C^{\infty}$写像である．

ここで$p_\alpha=\dim p_\alpha(T_x(M))$とおくと，$\sum_{\alpha=1}^{q}p_\alpha=n$かつ$p_\alpha$は点$x$から独立である．ここですべての$p_\alpha$は0でないと仮定する．特に$q=2$とすれば．$q$－概積構造はGuggenhim－Spencerの意味の概積構造に帰する．更に両ベクトル空間$P_1(T_x(M))$，$P_2(T_x(M))$の次元が等しいときは，普通の概積構造に帰する．

$q$－概積構造の例としては$q$個のユークリッド空間（次元は有限であれば何次元でもよい）の積空間や，$q$次元トーラス等を考えればよい．特に後者はコンパクトな空間の例になる．

$q$－概積構造は射影$\Pi_{s_1,\cdots,s_q}$：$\wedge\phi\ (M)\longrightarrow\phi^{s_1,\cdots,s_p}(M)$ と$\Pi^*_{s_1,\cdots,s_q}$：$\wedge T\ (M)\longrightarrow T^{s_1,\cdots,s_p}(M)$を誘導する．但し$\phi^{s_1,\cdots,s_p}(M)=\Pi_{s_1,\cdots,s_q}(\wedge\phi\ (M))$ $T^{s_1,\cdots,s_p}(M)=\Pi_{*s_1,\cdots,s_q}(\wedge T\ (M))$とする．$\phi^{s_1,\cdots,s_p}(M)$ の横断$\phi$は型（$s_1,\cdots,s_q$）であるという．$T^{s_1,\cdots s_p}(M)$についても同様である． 写真$f$：$M\to M$が$q$－概積構造（$P_\alpha$）に関して型（$m_1$, …, $m_q$）であるとは

$$\Pi_{s_1+m_1,\cdots,s_q+m_q}\circ f^*=f^*\circ\Pi_{s_1,\cdots,s_q}$$

となることである．但し$f^*$：$\wedge\phi\ (M)\to\wedge\phi\ (M)$ で$f$から誘導された写像である．

$\wedge T\ (M)$または$\wedge\phi\ (M)$上の作用素$h$はいろいろな型の作用素に分解される．即ち

$$\Pi_{m_1,\cdots,m_q}h=\sum_{s_1,\cdots,s_q}\Pi_{s_1+m_1,\cdots,s_q+m_q}\circ h\circ\Pi_{s_1,\cdots,s_q}$$

である．外微分作用素$d$は次のように分解される．

$$（1．1）\qquad d=\sum_{\alpha,\beta=1}^{q}d_{\alpha\beta},$$

但し$d_{\alpha\beta}$はそれぞれ型（$0,\cdots,0,\overset{\alpha\text{番目}}{-1},0,\cdots,0,\overset{\beta\text{番目}}{2},0,\cdots,0$）の作用素とする $d^2=0$であるから，これより次の等式が得られる．

$$d^2_{\alpha\alpha}+\sum_\beta d_{\beta\beta}d_{\beta\alpha}+\sum_\beta d_{\beta\alpha}d_{\beta\beta}=0,$$

$$d_{\alpha\alpha}d_{\alpha\beta}+d_{\beta\alpha}d_{\alpha\alpha}=0,$$

$$d_{\alpha\beta}d_{\gamma\gamma}+d_{\gamma\gamma}d_{\alpha\beta}=0,$$

$$d_{\alpha\beta}d_{\beta\alpha}+d_{\beta\alpha}d_{\alpha\beta}+d_{\alpha\alpha}d_{\beta\beta}+d_{\beta\beta}d_{\alpha\alpha}=0,$$

$$d_{\alpha\beta}d_{\alpha\beta}=0,$$

$$d_{\alpha\beta}d_{\alpha\gamma}+d_{\alpha\gamma}d_{\alpha\beta}=0,$$

$$d_{\alpha\beta}d_{\gamma\beta}+d_{\gamma\beta}d_{\alpha\beta}=0,$$

$$d_{\alpha\beta}d_{\beta\gamma}+d_{\beta\gamma}d_{\alpha\beta}=0,$$

$$d_{\alpha\beta}d_{\gamma\delta}+d_{\gamma\beta}d_{\alpha\delta}+d_{\alpha\delta}d_{\gamma\beta}+d_{\gamma\delta}d_{\alpha\beta}=0,$$

さてここに新しく次の公理で各$\alpha$に対して作用素$d_\alpha$：$\phi^p(M)\longrightarrow\phi^{p+1}(M)$ を定義する：

(i) $\phi\in\wedge^0\phi_x(M)$，$v\in T_x(M)$のとき$(d_\alpha\phi)\ v=(P_\alpha v)\ (\phi)$

(ii) $\phi\in\wedge^0\phi_x(M)$のとき$(d_\alpha d+d\,d_\alpha)\ \phi=0$，

(iii) $\phi\in\wedge^p\phi_x(M)$かつ$\psi\in\wedge\phi_x(M)$のとき

$$d_\alpha(\phi\wedge\psi)=d_\alpha\phi\wedge\psi+(-1)^p\phi\wedge d_\alpha\psi.$$

公理(ii)の代り，それと同値な（ii′）がある．

（ii′）$d_\alpha d+d\,d_\alpha=0$．

所で$2\sum_{\alpha\neq\beta}d_{\beta\alpha}+d_{\alpha\alpha}-\sum_{\alpha\neq\beta}d_{\alpha\beta}$をつくると，

丁度上の作用素$d_\alpha$の公理を満足する．但し $\Sigma$は$\beta$が1から$q$まで動いたときのすべての和で$\alpha=\beta$となる項をのぞく意味である．従って

$$（1．2）\qquad d_\alpha=2\sum_{\alpha\neq\beta}d_{\beta\alpha}+d_{\alpha\alpha}-\sum_{\alpha\neq\beta}d_{\alpha\beta}$$

とおけば$d_\alpha$が実在することが示される，これから直ちに$d=\sum_\alpha d_\alpha$を得る．一般に$d_\alpha$は$d_\alpha^2$

$=0$ を満足しない，即ち境界作用素ではない．しかし $q$ ー概積構造が可積分（即ち型 $P_\alpha$ の2つのベクトル場のポアソン括弧式が再び同じ型 $P_\alpha$ のベクトル場であること）ならば $d_\alpha{}^2=0$ が成り立つことが示される．

命題．$d_\alpha{}^2=0$ なるための必要十分条件は $d=\sum_\alpha d_{\alpha\alpha}$ となること，即ちすべての $\alpha$ に対して $d_\alpha=d_{\alpha\alpha}$ となることである．

§2．**slant作用素**．先ずGuggenheim－Spencer［1］に従ってslant作用素について記す．$U$ と $M$ を多様体とする．$\phi\in\Phi^{r+s}(U\times M)$ とし，$c$ を $U$ の特異 $r$ －チエンとする．このときslant作用素は次の式で定義される．

$$(\phi/c)(v)(y)=(-1)^{rs}[j_y^*(v\lrcorner\phi)]c,$$

従って $\phi/c\in\Phi^s(M)$．但し $v\in T^s(M)$．$y\in M$，$j_y:U\to U\times M;x\to(x,y)$．これから

（2．1）　$d\phi/c-\phi/bc=(-1)^r d(\phi/c)$

を得る．$bc$ は $c$ の境異を意味する．（この証明は［1］にある．）

さて $q$ －概積構造の場合にもどる．$M$ を $q$ －概積構造 $(P_\alpha)$ をもっと仮定し，更に $U=U^1\times\cdots\times U_q$ とする．$U\times M$ 上に新しく $q$ －概積構造を

$P_\alpha T(U\times M)=T(U_\alpha)\oplus P_\alpha T(M)$

で定義する．この条件の下で，（2．1）式は種々の成分に分解する．この中で1つの特別な場合，即ち $c=c_\gamma$ の場合を考える．ここに $c_\gamma=x_1\times\cdots\times x_{\gamma-1}\times c'_\gamma\times x_{\gamma+1}\times\cdots\times x_q$．$c'_\gamma$ は $U_\gamma$ の特異 $r_\gamma$ －チエンで $x_\alpha$ $(\alpha\neq\gamma)$ は $U_\alpha$ の0－チエンとみなしてよい点とする．この状況の下では準同型 $\phi\to\phi/c$ は型（0，$v$，0，$-r_\gamma$，0，…，0）である．（2．1）式より

$$d_{\alpha\beta}\phi/c_\gamma=(-1)^{r_\gamma}d_{\alpha\beta}(\phi/c_\gamma)$$
$$d_{\alpha\beta}\phi/c_\alpha=(-1)^{r_\alpha}d_{\alpha\beta}(\phi/c'_\alpha)$$
$$d_{\alpha\beta}\phi/c_\beta=(-1)^{r_\beta}d_{\alpha\beta}(\phi/c_\beta)$$
$$d_{\alpha\alpha}\phi/c_\beta=(-1)^{r_\beta}d_{\alpha\alpha}(\phi/c_\beta)$$
$$d_{\alpha\alpha}\phi/c_\alpha-\phi/bc_\alpha=(-1)^{r_\alpha}d_{\alpha\alpha}(\phi/c_\alpha)$$

を得る．更に（1．2）式を用いて

$$d_\alpha\phi/c_\beta=(-1)^{r_\alpha}d_\alpha(\phi/c_\beta)$$

を得る．

§3．**チエン　ホモトピー**　先ずGuggenheim-Spencerの一般の多様体のときのチエンホモトピーについて記す．$U$ と $M$ を§2で導入した多様体にとる．$W$ を第3の多様体とする．$F$ を $U\times M\to W$ なる写像とする．ここで $\lambda:\Phi(M)\to\Phi(M)$ を

（3．1）　$\lambda\psi=(-1)^{r+1}(F^*\psi)/c$

で定義する．但し $\psi\in\Phi(W)$ とする．（2．1）式を用いて

（3．2）　$(d\lambda+(-1)^{r+1}\lambda d)\psi=(F^*\psi)/bc$

を得る．（この証明は［1］にある．）

ここで $c$ を特に $I\to U$ なる特異1－単体とする．また $f_t:M\to W$ を $f_t(y)=F(c(t)y)$ で定義する．$F$ がホモトピーを表わすなら（3．2）式は

（3．3）　$d\lambda+\lambda d=f_1^*-f_0^*$

となる．（この証明は〔1〕にある．）

次に§2で導入された$q$－概積構造$(P_\alpha)$をとる．$F$は許容的であると仮定する．（3．1）により定義された$\lambda$は，このとき$r_\alpha$－チエン$c_\alpha$に関して考えるから，それを$\lambda_\alpha$とかいて（3．2）式より

$$(d_\alpha\lambda_\alpha+(-1)^{r_\alpha+1}\lambda_\alpha d_\alpha)\ \psi=F^*\psi/b\,c_\alpha$$
$$(d_\beta\lambda_\alpha+(-1)^{r_\alpha+1}\lambda_\alpha d_\beta)\ \psi=0$$

を得る．$c'_\alpha$が特に$U_\alpha$の中の特異1－単体のとき（3．3）式と同様にして

$$d_\alpha\lambda_\alpha+\lambda_\alpha d_\alpha=f_1^*-f_0^*$$

を得る．特に$W=M$かつ$M$が可積分ならば，

$(x_1^1,\ \cdots\cdots,\ x_1^{p_1}\cdots\cdots,\ x_{\alpha-1}^{p_{\alpha-1}},\ x_\alpha^1,\ \cdots\cdots,\ x^1_{\alpha+1},\ \cdots\cdots,\ x_m^{p_m})$ を

$(x_1^1,\ \cdots\cdots,\ x_1^{p_1},\ \cdots\cdots,\ x_{\alpha-1}^{p_{\alpha-1}},\ 0,\ \cdots\cdots,\ 0,\ x_1^{\alpha+1},\ \cdots\cdots,\ x_m^{p_m})$ にdeformするホモトピーを作ることができる．従ってチエンホモトピー$\lambda_\alpha$が得られて

$$d_\alpha\lambda_\alpha\phi+\lambda_\alpha d_\alpha\phi=\phi$$

を満たす．但し$\phi$はすべてのproperな微分形式とする．これから次の補題を得る．

**補題** $M$を可積分な$q$－概積構造をもつ可微分多様体とする．$\phi\in\Phi^{s_1\cdots,s_\alpha,\cdots,s_m}(M)$ $(s_\alpha>0)$ かつ$d_\alpha\phi=0$とする． このとき局所的に$\varphi\in\Phi^{s_1,\cdots,s_{\alpha-1},\cdots s_m}(M)$ が存在して$d_\alpha\varphi=\phi$を満足する．

## 文 献

〔1〕V.K.A.M. Guggenheim and D.C. Spencer, chain homotopy and the de Rham theory, Proc. Amer. Math. Soc.,7 (1956) ,144-152.

〔2〕B.L. Reinhart, Harmonic integrals on almost product manifolds, Trans, Amer. Math. Soc.,88 (1958) ,243-276.

〔3〕T.Saeki, Affine transformations in a differentiable manifold with $\pi$- structure, Jour. Math. Soc. Japan,14 (1962) ,341-349.