或種の計量を有する高次曲面素空間の幾何學

外　岡　慶之助

1.　本論文に於ては次の記號を用いる。即ち

$$\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i}=X^a_i,\quad \frac{\partial^2 \bar{x}^a}{\partial x^i \partial x^j}=X^a_{ij},\quad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a}=X^i_a,\quad \frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^a \partial \bar{x}^b}=X^i_{ab},\quad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial u^\lambda}{\partial u^\alpha}=U^\lambda_\alpha,\quad \frac{\partial^2 u^\lambda}{\partial n^\alpha \partial u^\beta}=U^\lambda_{\alpha\beta},\quad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial u^\lambda}=U^\alpha_\lambda,\quad \frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial u^\lambda \partial u^\mu}=U^\alpha_{\lambda\mu},\quad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial x^i}{\partial u^{\alpha_1}}=p^i_{\alpha_1},\quad \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^{\alpha_1} \partial u^{\alpha_2}}=p^i_{\alpha_1\alpha_2}=p^i_{\alpha(2)},\quad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

尙 $\alpha(s)$ が夫々 $l_1,\ l_2,\cdots\cdots,\ l_K$ 個の同じ指標よりなるとき

$$F;^{(\alpha(s))}_i=\frac{\cdot\partial}{\partial p^i_{\alpha(s)}}F=\frac{s\,!}{l_1\,!\cdots l_K\,!}\,\frac{\partial}{\partial p^i_{\alpha(s)}}F$$

今 n 次元空間 R の点座標を $x^i(i=1,\ 2,\cdots\cdots,\ n)$ とするとき此の空間の K 次元曲面は K 個の径数 $u^1,\cdots\cdots,\ u^K$ を用いて $x^i=x^i(u^1,\cdots\cdots,u^K)$ で表わされ此の曲面上の各点に於て m 次の曲面素 $x^i,p^i_{\alpha(1)},\cdots\cdots,p^i_{\alpha(m)}$ が定まる。　今 R の各点に対し夫々任意の値をとり得る $\binom{K+m}{m}n+n-1$ 個の量 $u^\alpha.\ x^i,p^i_{\alpha(1)},\cdots\cdots,\ p^i_{\alpha(m)}$ を附隨させればここに $\binom{K+m}{m}n+n-1$ 次元の曲面素空間 $*F^{(m)}_n$ を得る。次に N 次元ユークリッド空間 E の直交座標系を $y^L(L=1,\cdots\cdots,N)$ とし

$$y^L=y^L(u^\alpha,\ x^i,\ p^i_{\alpha(1)},\cdots\cdots,\ p^i_{\alpha(m)}),\ L=1,\cdots\cdots,\ N;$$

によつて $*F^{(m)}_n$ を E の中の $\binom{K+m}{m}n+n-1$ 次元曲面素空間 $*E^{(m)}_n$ に写像すれば $*E^{(m)}_n$ の線素の大さ ds は次の樣に表わされる。

$$(1.1)\qquad ds^2=\sum_{L=1}^{N}(dy^L)^2=g^{\alpha(s)}_{\ i}{}^{\beta(t)}_{\ j}\,dp_{\alpha(s)}^{\ i}dp_{\beta(t)}^{\ j}$$

$$+2g^{\alpha(s)}_{\ i\ \omega}\,dp_{\alpha(s)}^{\ i}du^{\omega}+g_{\alpha\beta}du^{\alpha}du^{\beta}$$

但し $\quad g^{\alpha(s)}_{\ i}{}^{\beta(t)}_{\ j}=\sum_{L=1}^{N}\dfrac{\partial y^L}{\partial p_{\alpha(s)}^{\ i}}\dfrac{\partial y^L}{\partial p_{\beta(t)}^{\ j}},\quad g^{\alpha(s)}_{\ i\ \alpha}=\sum_{L=1}^{N}\dfrac{\partial y^L}{\partial p_{\alpha(s)}^{\ i}}\dfrac{\partial y^L}{\partial u^{\alpha}}$

$$g_{\alpha\beta}=\sum_{L=1}^{N}\frac{\partial y^L}{\partial u^{\alpha}}\frac{\partial y^L}{\partial u^{\beta}}$$

さて座標系並びに経数の変換

$$(1.2)\qquad \bar{x}^a=\bar{x}^a(x^i),\qquad u^{\lambda}=u^{\lambda}(u^{\alpha})$$

によつて曲面素は次の様に変換される。

$$p^a_{\lambda(1)}=p^i_{\alpha(1)}X^a_iU^{\alpha 1}_{\lambda 1},$$

$$p^a_{\lambda(2)}=p^i_{\alpha(2)}X^a_iU^{\alpha 1}_{\lambda 1}U^{\alpha 2}_{\lambda 2}+p^i_{\alpha 1}p^j_{\alpha 2}X^a_{ij}U^{\alpha 1}_{\lambda 1}U^{\alpha 2}_{\lambda 2}+p^i_{\alpha 1}X^a_iU^{\alpha 1}_{\lambda 1\lambda 2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p^a_{\lambda(m)}=p^a_{\lambda(m)}(u^{\alpha},\ x^i,\ p^i_{\alpha(1)},\ \cdots\cdots\cdots\cdots,\ p^i_{\alpha(m)}).$$

又 y^L を変換 (1.2) に関し *point invariants* とするならば当然 $g^{\alpha(s)}_{\ i}{}^{\beta(t)}_{\ j}$ は変換 (1.2) の基で次の変換を受ける。即ち

$$(1.3)\qquad g^{\lambda(u)}_{\ a}{}^{\mu(v)}_{\ b}=g^{\alpha(s)}_{\ i}{}^{\beta(t)}_{\ j}\frac{\partial p^i_{\alpha(s)}}{\partial p^a_{\lambda(u)}}\frac{\partial p_{\beta(t)}^{\ j}}{\partial p_{\mu(v)}^{\ b}}$$

さて $|p^{\alpha(s)}_{\ i}{}^{\beta(t)}_{\ j}|$ を ${}^{\alpha(s)}_{\ i}$ を行とし ${}^{\beta(t)}_{\ j}$ を列とする $\binom{K+m}{m}n$ 次の行列式とするとき $N\geqq\binom{K+m}{m}n$ と仮定するならば行列式 $\left|g^{\alpha(s)}_{\ i}{}^{\beta(t)}_{\ j}\right|=\left|\sum_{L=1}^{N}\dfrac{\partial y^L}{\partial p_{\alpha(s)}^{\ i}}\dfrac{\partial y^L}{\partial p_{\beta(t)}^{\ j}}\right|$ は恒等的には零ではない。因つて *inverse system* $g_{\alpha(s)}^{\ i}{}_{\beta(t)}^{\ j}$ が求められる。即ち

$$g_{\alpha(s)}^{\ i}{}_{\beta(t)}^{\ j}\,g^{\beta(t)}_{\ j}{}^{\gamma(r)}_{\ K}=\delta^i_K\,\delta^{\gamma(r)}_{\alpha(s)},$$

但し $r=s$ のとき $\delta^{\gamma(r)}_{\alpha(s)}=\dfrac{s\,!}{l_1!\cdots l_K!}\delta^{(\gamma 1}_{\alpha 1}\cdots\cdots\delta^{\gamma r)}_{\alpha s)}$ $\quad r\neq s$ のとき $\delta^{\gamma(r)}_{\alpha(s)}=0$. この $g_{\alpha(s)}^{\ i}{}_{\beta(t)}^{\ j}$ は変換 (1.2) によつて次の様に変換される。即ち

$$g_{\lambda(u)}^{\ a}{}_{\mu(v)}^{\ b}=g_{\alpha(s)}^{\ i}{}_{\beta(t)}^{\ j}\frac{\partial p_{\lambda(u)}^{\ a}}{\partial p_{\alpha(s)}^{\ i}}\frac{\partial p_{\mu(v)}^{\ b}}{\partial p_{\beta(t)}^{\ j}}$$

特に

(1.4)　$g_{\lambda(1)}{}^{a}{}_{\mu(0)}{}^{b}=g_{\alpha}{}^{i}{}_{1}{}^{j}{}_{0}X^{a}_{i}X^{b}_{j}U^{\alpha}_{\lambda}+g^{i}_{0}{}^{j}_{0}p^{K}_{\alpha}U^{\alpha 1}_{\lambda 1}X^{a}_{iK}X^{b}_{j},$

(1.5)　$g^{a}_{0}{}^{b}_{0}=g^{i}_{0}{}^{j}_{0}\ X^{a}_{i}\ X^{b}_{j}$

(1.5) により $g^{i}_{0}{}^{j}_{0}$ は普通の反変対称テンゾルであるからこれを g^{ij} で表はすことにし $|g^{ij}|\neq 0$ とすればこの *inverse system* g_{ij} が求められる。ここで $g_{jK}g^{i}_{\alpha}{}^{K}_{0}=-\Gamma^{i}_{j\alpha}$ とおけば (1.4) によつて $\Gamma^{i}_{j\alpha}$ は次の変換法則に従う。

$$\Gamma^{a}_{b\lambda}=\Gamma^{i}_{j\alpha}X^{a}_{i}\ X^{j}_{b}\ U^{\alpha}_{\lambda}-X^{a}_{ij}p^{j}_{\alpha}X^{i}_{b}\ U^{\alpha}_{\lambda}$$

又 $g_{ij}\ p^{i}_{\alpha}\ p^{j}_{\beta}\ =L_{\alpha\beta}$ とおけば $L_{\alpha\beta}$ は対称 u— テンゾルの分値であり $|g_{ij}|\neq 0$ なる故 $|L_{\alpha\beta}|\neq 0$ よつて $L_{\alpha\beta}\ L^{\beta\gamma}=\delta^{\gamma}_{\alpha}$ を満足する L^{β}_{γ} を求め

$$G^{\gamma}_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}L^{\gamma\delta}(D_{\beta}L_{\alpha\delta}+D_{\alpha}L_{\delta\beta}-D_{\delta}L_{\alpha\beta})$$

とおけばこれは (1.2) の基で次の様に変換される。

$$G^{\nu}_{\lambda\mu}=U^{\nu}_{\delta}U^{\alpha}_{\lambda}U^{\beta}_{\mu}G^{\delta}_{\alpha\beta}+U^{\nu}_{\alpha}U^{\alpha}_{\lambda\mu},$$

但し D_{α} は u^{α} による全微分を表わすものとす。

2.　さて二種類の量 $\Gamma^{i}_{j\alpha}$, $G^{\delta}_{\alpha\beta}$ を用いて $*E^{(m)}_{n}$ の基接続を決めることが出來る。今

(2.1)　$p^{i}_{\delta/\alpha}=p^{i}_{\alpha\delta}+\Gamma^{i}_{j\alpha}p^{j}_{\delta}-G^{\beta}_{\alpha\delta}p^{j}_{\beta}$

とおくときこれは *intrinsic* な量である。即ち i に関しては普通のベクトルの変換を受けギリシヤ指標に関しては *u—tensor* の変換を受ける。

更に

$$p^{i}_{\gamma/\alpha(2)}=D_{\gamma 2}p^{i}_{\gamma/\alpha 1}+\Gamma^{i}_{j\alpha 2}p^{j}_{\gamma/\alpha 1}-G^{\beta}_{\gamma\alpha 2}p^{i}_{\beta/\alpha 1}-G^{\beta}_{\alpha 2\alpha 1}p^{i}_{\gamma/\beta}$$

とおけばこれは又 *order* が一つ高い *intrinsic* な量である。一般に

(2.2)　$p^{i}_{\gamma/\alpha(s)}=\sum_{L=0}^{s}P^{i}_{j}{}^{\beta(L)}_{\alpha(s)}p^{j}_{\beta(L)\gamma}+\sum_{L=1}^{s}Q^{i}_{j}{}^{\beta(L)}_{\alpha(s)\gamma}p^{j}_{\beta(L)}$

を *intriusic* な量とすれば次の量も又 *intrinsic* でなければならない。

(2.3)　$p^{i}_{\gamma/\alpha(s+1)}=D_{(\alpha s+1}p^{i}_{\gamma/\alpha(s)}\quad+\Gamma^{i}_{K(\alpha s+1}p^{K}_{|\gamma|/\alpha(s)}$

$$-G^{\omega}_{\gamma(\alpha s+1}p^{i}_{|\omega|/\alpha(s))}-\sum_{t=1}^{s}G^{\omega}_{(\alpha t\alpha s+1}p^{i}_{|\gamma|/\alpha 1\cdots\cdots\alpha t-1\ |\omega|\ \alpha t+1\cdots\cdots\alpha s)}$$

この式に (2.1) を入れて整頓すれば

$$p^{i}_{\gamma/\alpha(s+1)}=\sum_{L=1}^{s+1}P^{i}_{j}{}^{\beta(L)}_{\alpha(s+1)}p^{j}_{\beta(L)\gamma}+\sum_{L=1}^{s+1}Q^{i}_{j}{}^{\beta(L)}_{\alpha(s+2)\gamma}p^{j}_{\beta(L)},$$

但し

$$P^{i}_{j}{}^{\beta(L)}_{\omega(s+1)}=P^{i}_{j}{}^{\beta(L-1)}_{(\alpha(s)}\delta^{\beta L}_{\alpha s+1)}+D_{(\alpha s+1}P^{i}_{j}{}^{\beta(L)}_{\alpha(s))}$$

$$+\Gamma^{i}_{K\alpha(s+1}P^{K}_{|j|}{}^{\beta(L)}_{\alpha(s))}-sG^{\omega}_{(\alpha s\alpha s+1}P^{i}_{|j|}{}^{\beta(L)}_{\alpha(s-1))\omega},$$

$$P^{i}_{j}{}^{\beta(-1)}_{\alpha(s)}=P^{i}_{j}{}^{\beta(s+1)}_{\alpha(s)}=P^{i}_{j}{}^{\beta(1)}_{\alpha(0)}=0,$$

(2.4)
$$Q^{i}_{j}{}^{\beta(L)}_{\alpha(s+1)\gamma}=Q^{i}_{j}{}^{\beta(L-1)}_{(\alpha(s)|\gamma|}\delta^{\beta L}_{\alpha s+1)}+D_{(\alpha s+1}Q^{i}_{|j|}{}^{\beta(L)}_{\alpha(s))\gamma}$$

$$+\Gamma^{i}_{K(\alpha s+1}Q^{K}_{|j|}{}^{\beta(L)}_{\alpha(s))\gamma}-sG^{\omega}_{(\alpha s\,\alpha s+1}Q^{i}_{|j|}{}^{\beta(L)}_{\alpha(s-1)\gamma\omega}$$

$$-G^{\omega}_{\gamma(\alpha s+1}Q^{i}_{|j|}{}^{\beta(L)}_{\alpha(s))\omega}-G^{\beta}_{\gamma(\alpha s+1}P^{\beta L}_{|j|}{}^{\beta(L-1)}_{\alpha(s))},$$

$$Q^{i}_{j}{}^{\beta(0)}_{\omega(s)\gamma}=Q^{i}_{j}{}^{\beta(L)}_{\alpha(0)}=0.$$

上式に於て $s=1$ のとき (2.1) によれば

(2.5)
$$P^{i}_{j}{}^{\beta(0)}_{\alpha(1)}=\Gamma^{i}_{j\,\alpha 1},\quad P^{i}_{j}{}^{\beta 1}_{\alpha 1}=\delta^{i}_{j}\,\delta^{\beta 1}_{\alpha 1},$$
$$Q^{i}_{j}{}^{\beta(1)}_{\alpha(1)\,\gamma}=-\delta^{i}_{j}\,G^{\beta 1}_{\alpha 1\,\gamma}.$$

(2.4), (2.5) によつて (2.2) の $p^{j}_{\beta(L)\gamma}$ 及び $p^{j}_{\beta(L)}$ の係数をすべて $\Gamma^{i}_{j\ \alpha}$, $G^{\beta}_{\alpha\ \gamma}$ 及び夫等の経数による *derivative* のみで表わすことが出來る。更に (2.4) に於て $L=s+1$ とおけば

$$P^{i}_{j}{}^{\beta(s+1)}_{\alpha(s+1)}=P^{i}_{j}{}^{\beta(s)}_{(\alpha(s)}\delta^{\beta s+1}_{\alpha s+1)}=\delta^{i}_{j}\,\delta^{\beta 1}_{\alpha 1}\cdots\cdots\delta^{\beta s+1}_{\alpha s+1)}$$

因て

(2.6)
$$p^{i}_{\gamma/\alpha(s)}=p^{i}{}_{\alpha(s)\gamma}+\sum_{L=0}^{s-1}P^{i}_{j}{}^{\beta(L)}_{\alpha(s)}\,p^{j}_{\beta(L)\gamma}+\sum_{L=0}^{s}Q^{i}_{j}{}^{\beta(L)}_{\alpha(s)\gamma}\,p^{j}_{\beta(L)}$$

さて (1.2) の基では $dp^{i}_{\alpha(s)}$ と $p^{i}_{\alpha(s)\gamma}\,du^{\gamma}$ とは全く同じ変換法則に從い $P^{i}_{j}{}^{\beta(L)}_{\alpha(s)}$, $Q^{i}_{j}{}^{\beta(L)}_{\alpha(s)\gamma}$ は $p^{i}_{\alpha(s)\gamma}\,du^{\gamma}$ と無関係に変換されるから (2.6) に du^{γ} を掛け γ に就て 1から K までが加えればこれ又 *intrinsic* な量である。ここで $p^{i}_{\alpha(s)\gamma}\,du^{\gamma}$, $p^{j}_{\beta(L)\gamma}\,du^{\gamma}$ を夫々 $dp^{i}_{\alpha(s)}$, $dp^{j}_{\beta(L)}$ で置きかえ $\sum\limits_{L=1}^{s}Q^{i}_{j}{}^{\beta(L)}_{\alpha(s)\gamma}\,p^{j}_{\beta(L)}=R^{i}_{\alpha(s)\gamma}$ とおけば *intrinsic* な *Pffaf* 形式

(2.7)
$$Dp^{i}_{\alpha(s)}=dp^{i}_{\alpha(s)}+\sum_{L=0}^{s-1}P^{i}_{j}{}^{\beta(L)}_{\alpha(s)}\,dp^{j}_{\beta(L)}+R^{i}_{\alpha(s)\gamma}\,du^{\gamma},$$

$$(s=1.2,\cdots\cdots,m)$$

を得る。吾々は (2.7) 及び $Dx^{i}=dx^{i}$, $Du^{\alpha}=du^{\alpha}$ によつて $^{*}E^{(m)}_{n}$ の基接続を定義することが出來る。

3. f を $^{*}E^{(m)}_{n}$ の *intrintic* なスカラーとするときこの全微分は

(3.1)
$$df=f_{;\alpha}du^{\alpha}+\sum_{s=0}^{m}f;{}_{i}{}^{(\alpha(s))}\,dp^{i}_{\alpha(s)}$$

で与えられる。さて (2.7) を $dp^{i}_{\alpha(s)}$ で解き

(3.2) $$dp^{i}_{\alpha(s)}=Dp^{i}_{\alpha(s)}-\sum_{L=0}^{s-1}P^{i}_{j}{}^{\beta(L)}_{\alpha(s)}\,dp^{j}_{\beta(L)}-R^{i}_{\alpha(s)\tau}\,du^{\tau}$$
$$=Dp^{i}_{\alpha(s)}-\sum_{L=0}^{s-1}M^{i}_{j}{}^{\beta(L)}_{\alpha(s)}\,Dp^{j}_{\beta(L)}-N^{i}_{\alpha(s)\tau}\,du^{\tau}$$

これと (2.7) より容易に

$$M^{i}_{j}{}^{\beta(s-1)}_{\alpha(s)}=P^{i}_{j}{}^{\beta(s-1)}_{\alpha(s)}$$
$$M^{i}_{j}{}^{\beta(L)}_{\alpha(s)}=P^{i}_{j}{}^{\beta(L)}_{\alpha(s)}-\sum_{t=L+1}^{S-1}P^{i}_{K}{}^{\tau(t)}_{\alpha(\ )}\,M^{K}_{j}{}^{\beta(L)}_{\tau(t)}\quad(0\leqq L\leqq s-2)$$

(3.3)

$$N^{i}_{\alpha(s)\tau}=R^{i}_{\alpha(s)\tau}-\sum_{L=1}^{s-1}P^{i}_{j}{}^{\beta(L)}_{\alpha(s)}\,R^{j}_{\beta(L)\tau}\ \bullet$$

斯して $M^{i}_{j}{}^{\beta(S)}_{\alpha(L)}$, $N^{i}_{\alpha(s)\tau}$ は $P^{i}_{j}{}^{\beta(L)}_{\alpha(S)}$, $Q^{i}_{j}{}^{\beta(L)}_{\alpha(S)\tau}$ より一意に決定される。(3.2) を (3.1) に代入して整頓すれば

$$df=\nabla_{\alpha}f\cdot du^{\alpha}+\sum_{S=0}^{m}\nabla^{\alpha(S)}_{K}f\cdot Dp^{K}_{\alpha(S)},$$

但し

$$\nabla_{\alpha}f=f_{;\alpha}-\sum_{S=0}^{m}f;{}^{(\beta(S))}_{i}\,N^{i}_{\beta(s)\alpha},$$

(3.4) $$\nabla^{\alpha(S)}_{j}f=f;{}^{(\alpha(S))}_{j}-\sum_{t=\ +}^{m}f;{}^{(\beta(t))}_{i}\,M^{i}_{j}{}^{\alpha(S)}_{\beta(t)},\quad 0\leqq s\leqq m-1$$
$$\nabla^{\alpha(m)}_{j}f=f;{}^{(\alpha(m))}_{j}.$$

これはスカラー f の *covariant derivative* である。次に一般のベクトルの共変微分を定義するために擬似接続の経数に相当する Γ^{i}_{jK} を求めよう。既に述べた様に $\Gamma^{i}_{j\alpha}$ は変換 (1.2) によつて次の様に変換される。即ち

$$\Gamma^{a}_{b\lambda}=\Gamma^{i}_{j\alpha}X^{a}_{i}X^{j}_{b}U^{\alpha}_{\lambda}-X^{a}_{ij}p^{j}_{\alpha}X^{i}_{b}U^{\alpha}_{\lambda}$$

因て $\Gamma^{i}_{j\alpha}$ に対し形式的に ∇^{β}_{K} なる算法を施せば $\nabla^{\beta}_{K}\Gamma^{i}_{j\alpha}$ は次の変換法則に従う。

$$\nabla^{\mu}_{c}\Gamma^{a}_{b\lambda}=X^{K}_{c}U^{\mu}_{\beta}\nabla^{\beta}_{K}\{\Gamma^{i}_{j\alpha}X^{a}_{i}X^{j}_{b}U^{\alpha}_{\lambda}-X^{a}_{ij}p^{j}_{\alpha}X^{i}_{b}U^{\alpha}_{\lambda}\}$$
$$=X^{K}_{c}X^{a}_{i}X^{j}_{b}U^{\mu}_{\beta}U^{\alpha}_{\lambda}\nabla^{\beta}_{K}\Gamma^{i}_{j\alpha}-X^{a}_{ij}X^{i}_{b}X^{K}_{c}U^{\mu}_{\beta}U^{\alpha}_{\lambda}\nabla^{\beta}_{K}p^{j}_{\alpha}$$

従つて

$$\nabla^{\lambda}_{(c}\Gamma^{a}_{b)\lambda}=X^{a}_{i}X^{j}_{(b}X^{K}_{c)}\nabla^{\alpha}_{K}\Gamma^{i}_{j\alpha}-X^{a}_{ij}X^{i}_{(b}X^{k}_{c)}\delta^{j}_{K}$$
$$=X^{a}_{i}X^{j}_{b}X^{K}_{c}\nabla^{\alpha}_{(K}\Gamma^{i}_{j)\alpha}-X^{a}_{ij}X^{i}_{b}X^{j}_{c}$$

因て $\Gamma^{i}_{jK}=\nabla^{\alpha}_{(K}\Gamma^{i}_{j)\alpha}=\dfrac{\partial}{\partial p^{(K}_{\alpha}}\Gamma^{i}_{j)\alpha}-\sum_{t=2}^{m}\Gamma^{i}_{(j|\alpha|};{}^{(\beta(t))}_{|L|}\,M^{L\ \alpha}_{K)\beta(t)}$ とおくとき v^{i} が $*E^{(m)}_{n}$ のベクトルならば

$$(3.5) \qquad Dv^i = dv^i + \Gamma^i_{jK} v^j dx^K$$

は又 $*E^{(m)}_n$ のベクトルである。そこで吾々は (3.5) によつて $*E^{(m)}_n$ のベクトルの共変微分を定義する。尙混合テンソル例えば $v^{i\gamma}$ 又は v^i_γ の共変微分は夫々

$$Dv^{i\gamma} = dv^{i\gamma} + \Gamma^i_{jK} v^{j\gamma} dx^K + G^\gamma_{\beta\alpha} v^{i\beta} du^\alpha$$

$$Dv^i_\gamma = dv^i_\gamma + \Gamma^i_{jK} v^j_\gamma dx^K - G^\beta_{\gamma\alpha} v^i_\beta du^\alpha$$

で与えられ，*Covariant derivative* は次の式で定義される。

$$\nabla_\alpha v^i = v^i{}_{;\alpha} - \sum_{t=1}^{m} v^i{}_{;\binom{\beta(t)}{K}} N^K_{\beta(t)\alpha},$$

$$\nabla_K v^i = v^i{}_{;K} + \Gamma^i_{jK} v^j - \sum_{t=1}^{m} v^i{}_{;\binom{\beta(t)}{j}} M^{j\ \alpha(\ )}_{K\ \beta(t)},$$

$$\nabla^{\alpha(S)}_K v^i = v^i{}_{;\binom{\alpha(S)}{K}} - \sum_{t=S+1}^{m} v^i{}_{;\binom{\beta(t)}{j}} M^{j\ \alpha(S)}_{K\ \beta(t)}, \quad (s=1, \cdots\cdots, m-1),$$

$$\nabla^{\alpha(m)}_K v^i = v^i{}_{;\binom{\alpha(m)}{K}}$$

又普通の方法によつて曲率量，捩率量が求められるのであるがここでは割愛する。

尙本研究は文部省科学研究費による研究の一部であることを附言しておく。

文　　献

〔1〕 H. V. Crag: On extensors and a euclidean basis higher order spaces. American Journal of Mathematics, Vol LXI, Numb 3, 1939.

〔2〕 A. Kawaguchi: Die Differentialgeometrie höherer Ordnung I. Journal of the Faculty of Science, Hokkaido Imperal University, Vol IX, 1940.

〔3〕 S. Hokari: Sätze über ein System von Pfaffschen Ausdrücken in der Mannigflatigkeit von K dimensionalen Flächenelemeten und ihre Anwendung. Imp. Acad. Tokyo VoL 17 (1941), pp 444—454.