逐次近似公式について*

石　川　栄　助

Successive Approximate Formulas

EISUKF ISHIKAWA

§0.　は　し　が　き

方程式

$$F(x)=0 \cdots\cdots (0.1)$$

の根ξを求めるのに，代数方程式ならばHORNERの方法がある．もしも（0.1）式が次の形におかれ次の条件

$$x=f(x) \cdots\cdots (0.2)$$

$$f'(x) < M < 1 \cdots\cdots (0.3)$$

を満足する時は，試みの近似値x_0から出発して順次に

$$x_{k+1}=f(x_k) \qquad (k=0,\ 1,\ 2, \cdots,\ ) \cdots\cdots (0.4)$$

を算出し

$$\lim_{k\to\infty} x_{k+1}=\xi \cdots\cdots (0.5)$$

をうる．この方法はいわゆる反復法であって，何回かの反復を行なわなければならないし，(0.1) 式は必ずしも（0.2）の形に変形できないこともあるので，もう少し反復の少ない収束の早い一般公式を工夫したい．

§1.　Newton の 反 復 法

（0.1）式が（0.2）の形に変形できないものの一つの工夫としてNEWTONの方法がある，すなわち

$$x-\frac{F(x)}{F'(x)}=f(x) \cdots\cdots (1.1)$$

とおき

$$x=f(x) \cdots\cdots (1.2)$$

とおけば，

$$|f'(x)| < M < 1 \cdots\cdots (1.3)$$

ならば（0.4）式と同様にして

$$x_{k+1}=f(x_k)=x_k-\frac{F(x_k)}{F'(x_k)} \cdots\cdots (1.4)$$

$$(k=0,1,2,\cdots\cdot)$$

---

* この小文は1960年12月10日，日本数学会東北支部会にて発表した一部である．

より

$$\lim_{k\to\infty} x_{k+1}=\xi \cdots\cdots (1.5)$$

をうる．ここにも $k=0,1,2,\cdots$ とおく反復のわずらわしさがあり，k が大きくなるにつれて解が困難となる．よって反復せず逐次にやや精密な値をうる一般公式を求めることにした．

§2. 逐次近似公式

方程式

$$F(x)=0 \cdots\cdots (2.1)$$

の根 ξ の近傍において，次の式を考える．

$$\left.\begin{aligned} f(x)&=x+A_1(x)F(x)+A_2(x)\{F(x)\}^2+\cdots+A_k(x)\{F(x)\}^k \\ x&=f(x) \end{aligned}\right\}\cdots\cdots (2.2)$$

ここで $x=\xi$ とおけば $F(\xi)=0$ となるから，ξ は (2.2) 式の根であり，(2.1) 式の根でもある．よって $F(x)=0$ の粗根（試みの根）を x_0 とおけば

$$x=f(x_0)=x_0+A_1(x_0)F(x_0)+A_2(x_0)\{F(x_0)\}^2+\cdots+A_k(x_0)\{F(x_0)\}^k\cdots(2.3)$$

$$(k=1,2,\cdots\cdots k)$$

を得る．簡単のため上式の左辺を x_k とおき

$$f'(\xi)=f''(\xi)=\cdots=f^{(k)}(\xi)=0 \cdots\cdots (2.4)$$

なるように $A_k(x)$ $(k=1,2,\cdots,k)$ を選べば

$$\begin{aligned} x_k-\xi&=f(x_0)-f(\xi) \\ &=f'(\xi)(x_0-\xi) \\ &\quad+\frac{f''(\xi)}{2!}(x_0-\xi)^2+\cdots+\frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(x_0-\xi)^k+\frac{f^{(k+1)}(\eta)}{(k+1)!}(x_0-\xi)^{k+1} \end{aligned}$$

$$\therefore\ x_k-\xi=\frac{f^{(k+1)}(\eta)}{(k+1)!}(x_0-\xi)^{k+1} \qquad (0<\eta<\xi) \cdots\cdots (2.5)$$

よって x_0 が ξ に近似し，x_k は急速に ξ に接近する．

さて (2.2) 式の左辺を $f_k(x)$ とおけば，(2.2)式は次のようにかかれる．

$$f_k(x)=f_{k-1}(x)+A_k(x)\{F(x)\}^k \qquad (k=1,2,\cdots k) \cdots\cdots (2.6)$$

この式の k 次導亟数を求め，近似根 x_0 を代入する時は (2.4) の条件から近似的に次が成立する．

$$f_k^{(k)}(x_0)=f_{k-1}^{(k)}(x_0)+k!\,A_k(x_0)\{F'(x_0)\}^k=0 \cdots\cdots (2.7)$$

$$(k=1,2,\cdots,k)$$

これから

$$A_k(x_0)=-\frac{f_{k-1}^{(k)}(x_0)}{k!\{F'(x_0)\}^k}\cdots\cdots (2.8)$$

従って (2.6) 式は近似的に次のようになり，(2.5) 式が成立する．

$$x_k=f_k(x_0)=f_{k-1}(x_0)-\frac{f_{k-1}^{(k)}(x_0)}{k!}\left\{\frac{F(x_0)}{F'(x_0)}\right\}^k\cdots\cdots (2.9)$$

これを一般に次のように表わすことにする．

$$x_k=f_k(x)=f_{k-1}(x)-\frac{f_{k-1}^{(k)}(x)}{k!}\left\{\frac{F(x)}{F'(x)}\right\}^k\cdots\cdots (2.9)'$$

しかるとき $k=1,2,3,4,\cdots$ については

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= f_1(x) = x - \frac{F(x)}{F'(x)} \\
x_2 &= f_2(x) = f_1(x) - \frac{f_1''(x)}{2!}\left\{\frac{F(x)}{F'(x)}\right\}^2 \\
x_3 &= f_3(x) = f_2(x) - \frac{f_2'''(x)}{3!}\left\{\frac{F(x)}{F'(x)}\right\}^3 \\
x_4 &= f_4(x) = f_3(x) - \frac{f_3^{IV}(x)}{4!}\left\{\frac{F(x)}{F'(x)}\right\}^4
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (2.10)$$

ここに右辺の x は試みの根（近似根）x_0 である．

上の公式を使用する時は近似根が逐次くわしく求まり便利である．しかし k が大なる程近似度がよいが，$f_{k-1}^{(k)}(x)$ の計算は容易でないので適当な処で我慢しなければならない．便宜のため $k=1$, 2, 3, 4, についての公式を $F(x_0)$, $F'(x_0)$, $F''(x_0)\cdots$ を F, F', $F''\cdots$ と略記してかかげよう．

$k=1$ のとき

$$x_1 = f_1(x) = x - \frac{F}{F'} \cdots\cdots\cdots\cdots (2.11)$$

これは Newton の反復公式である．

$k=2$, 3, 4, のとき

$$x_2 = f_2(x) = x_1 - \frac{F''}{2F'}\left(\frac{F}{F'}\right)^2 \cdots\cdots\cdots\cdots (2.12)$$

$$x_3 = f_3(x) = x_2 - \frac{1}{6}\left\{3\left(\frac{F''}{F'}\right)^2 - \left(\frac{F'''}{F'}\right)\right\}\left(\frac{F}{F'}\right)^3 \cdots\cdots (2.13)$$

$$x_4 = f_4(x) = x_3 - \frac{1}{24}\left\{15\left(\frac{F''}{F'}\right)^3 - 10\frac{F''}{F'}\cdot\frac{F'''}{F'} + 5\frac{F^{IV}}{F'}\right\}\left(\frac{F}{F'}\right)^4 \cdots (2.14)$$

なお $k=5$ のときは

$$x_5 = f_5(x) = x_4 - \frac{1}{120}\left\{105\left(\frac{F''}{F'}\right)^4 - 105\frac{F'''F''^2}{F'^3} + 15\frac{F^{IV}F''}{F'^2} + 10\frac{F'''^2}{F'^2} - \frac{F^V}{F'}\right\}\left(\frac{F}{F'}\right)^5 \cdots\cdots (21.5)$$

x_0 における F', F'', …を求め，順次に x_1, x_2, x_3…を計算すると逐次精密な根をうる．なお，上の諸公式を反復公式として用いるならば，更によい近似根を速に求めうる．

Summary

Let two equations be

$$F(x) = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$x = f_k(x) = x + A_1(x)F(x) + A_2(x)\{F(x)\}^2 + \cdots + A_k(x)\{F(x)\}^k \cdots (2)$$

and ξ be a value of a root of the equation $F(x)=0$.

When ξ is a value of a root of the equation (2)

Now take

$$f'(\xi) = f''(\xi) = \cdots = f^{(k)}(\xi) = 0$$

and we get

$$A_k(\xi) = -\frac{f_{k-1}^{(k)}(\xi)}{k!}\cdot\frac{1}{\{F'(\xi)\}^k}$$

If x_0 is an approximate solution of the equation $F(x) = 0$

$$A_k(x_0) \doteqdot \frac{-f_{k-1}^{(k)}(x_0)}{k\,!} \quad \frac{1}{\{F'(x^0)^k\}}$$

and the equation (2) is

$$x_k = f_k(x_0) = f_{k-1}(x_0) - \frac{f_{k-}^{(k)}\ (x_0)}{k\,!} \left\{ \frac{F(x_0)}{F'(x_0)} \right\}^k \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

The value x_k is $k+1$ the order approximation of the equation $F(x)=o$, We may take as the formula on which iteration and successive is based.

参 考 文 献

WHITTAKER and ROBINSON : The Calculus of Observations (1956).

F. M. SAXELBY : PRACTICAL MATHEMATICS (1948) .

柴垣三雄：実用数学 (1958) .

泉信一，林五郎：応用数学 (1960) .