Buffon の針の問題について

石　川　栄　助

On the Buffon's Needle Problem

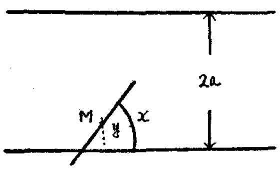
EISUKE ISHIKAWA

§0　は　し　が　き

Monte Carlo method の一つとして，円周率を確率的に求める BUFFON の針の問題がある．G.L. BUFFON（1707～1788）は平面上に多数の平行線を等間隔 $2a$ で引き，その上に長さ $2l(l<a)$ なる針をランダムに落し，針が平行線と交わる確率から，円周率 π を実験的に求める事を1733年に発表した．この結果は明瞭簡潔であるが，その理論は稍々簡単でない．そこで BUFFON の針の問題に因み実験的に π の値を求める方法を針の代りに円板を用いて，この理論を初等的に工夫してみた．比較のためにまず BUFFON の針の問題を掲げ，次に円板による方法を述べ，あわせてこの実験による π の推定の変動を示したい．

§1　BUFFON の 針

平面上に多数の平行線を等間隔 $2a$ で引き，その上に長さ $2l$ $(l<a)$[2] の針をランダムに落した時，針の中点をMとし，Mとそれに最も近い平行線との距離を y，平行線と針の交角を x とすれば，針は複雑な運動によって落ちるが，その中点Mの y 座標は，0から a までの値を一様の確らしさでとり，交角 x は0から π までの値を同様の確らしさをとる．従って点が y と $y+dy$ の間にある確率は $\frac{dy}{a}$ であり，この針がMを中心に，平行線の一つと交わる確率は $\frac{\pi-2x}{\pi}$ である．但しこの時次の条件がある．



第 1 図

$$l \sin x = y \qquad \cdots\cdots(1)$$

よって針が平行線の一つと交わる確率 p は確率の積の定理から

$$p=\int_0^l \frac{(\pi-2x)dy}{a\pi}=\frac{2l}{\pi a} \qquad \cdots\cdots(2)$$

今投針を n 回試み，針が平行線と交わった回数を k とすれば，上式より次の式をうる．

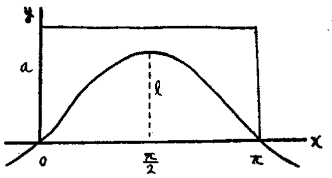
$$\pi=\frac{2ln}{ak} \qquad \cdots\cdots(3)$$

(2)の結果は次のように考える事が出来る．

中点Mの座標を x，y とし

1）この要旨を1960年2月17日岩手大学学芸学部土曜会において発表した．

2）$l \geqq a$ に対する論は参考文献(3)の石田保士の論文がある．



第 2 図

$$0 \leqq x \leqq \pi \quad , \quad 0 \leqq y \leqq a$$

なる条件の下に(1)の領域の割合が p であるから

$$p = \frac{\int_0^\pi l \sin x \, dx}{\pi a} = \frac{2l}{\pi a}$$

WOLF は 1850 年に平行線の間隔を45mm，針の長さを36mmにとり，投針5000回で，針が平行線と2532回交わった事から(3)式を用いて $\pi = 3,1596\cdots$ を得た．またド・モルガン（DE MORGAN 1806～1871）は1855年に $l=30$ mm　$a=50$mm とし，友人 SMITH に3204回の投針をさせ平行線と針と交わったのが1213回，不正確が11回，この結果から平均的に $\pi = 3.1553$ を得た．参考のため先達の実験値を次にかかげる．

第1表　BUFFON の 針 の 実 験

実験者	年代	投針回数	π の推定値	$\sigma(\hat{\pi})$
WOLF	1850	5000	3.1596	(0.044　)
SMITH	1855	3204	3.1553	(0.071　)
FOX	1894	1120	3.1419	(0.068 以上)
LAZZARINI	1901	3408	3.1415929	(0.042 以上)

$\sigma(\hat{\pi})$は(7)，(7)′ 式によって求めた．

§2　BUFFON の 円 板

BUFFON の針による(2)式はやや初等的でないので，筆者は針の代りに円板を，平行線の代りに方眼紙を用いて(2)式と相似た次の(4)式を得た．

今平面上に巾 b の方眼をつくり，半径 r なる円板を投げ，この円板が任意の方眼の交点（格子点）をおう確率を考える．この確率は半径 r なる円板と，一辺 b なる正方形の面積の比として得られる．従ってこの円板が格子点を覆う確率 p は

$$p = \frac{\pi r^2}{b^2} \quad \cdots\cdots\cdots(4)$$

よって投板回数を n，円板が格子点をおう回数を k とすれば

$$\pi = \frac{kb^2}{nr^2} \quad \cdots\cdots\cdots(5)$$

として求まる．この問題を BUFFON の円板と呼ぶことにする．

筆者は半径10mmの1円アルミ貨及び半径 $25/2$ mmの50円貨を円板にとり，方眼紙の目の巾を一つは30mmに，もう一つを25mmとして，共に投板1000回づつ5度試み，円板が格子点をおう回数 k を数えて次の表を得た．

第2表　BUFFON の 円 板 の 実 験

	投板回数 n	格子点を蔽うた回数 k		
		$b=30$mm $r=10$mm	$b=25$mm $r=10$mm	$b=25$mm $r=25/2$mm
1	1000	342	503	790
2	1000	362	496	777
3	1000	354	515	785
4	1000	3 3	500	794
5	1000	350	499	780
計	5000	1751	2513	3927
	$\hat{\pi}$	3.1518	3.14125	3.1416
	$\sigma(\hat{\pi})$	0.061	0.044	0.023

$\sigma(\hat{\pi})$ は(8)式によったものである．

§3　BUFFON の実験による π の推定の変動

BUFFON の投針の場合，針と平行線群との交わる確率を p，この標準偏差を $\sigma(p)$ とおけば，

$$p=\frac{2l}{\pi a}\quad(l\leqq a)\qquad\cdots\cdots(2)$$

$$\sigma(p)=\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\qquad\cdots\cdots(6)$$

従って(3)式から推定する π の標準偏差 $\sigma_1(\hat{\pi})$ は

$$\sigma_1(\hat{\pi})=\frac{\pi}{p}\sigma(p)=\pi\sqrt{\frac{1-p}{np}}\qquad\cdots\cdots(7)$$

となる．同様に円板を投げた時は

$$p=\frac{r^2\pi}{b^2}\qquad(2r\leqq b)\qquad\cdots\cdots(4)$$

(5)式より

$$\sigma_2(\hat{\pi})=\pi\sqrt{\frac{1-p}{np}}\qquad\cdots\cdots(8)$$

をうる．(7)と(8)より投針，投板による $\hat{\pi}$ の精度は同一であることを知る．第 2 表の $\sigma(\hat{\pi})$ は(8)式による値である．さて(7)，(8)式を見るとき p が大きい程，$\sigma(\hat{\pi})$ が小となる．従って p を大きくするように実験を試みればよい．ここに(2)，(4)の p は $l\leqq a$，$2r\leqq b$ の制限があるので，それぞれの p の最大値 $\frac{2}{\pi}$，$\frac{\pi}{4}$ を代入し，

$$\sigma_1(\hat{\pi})\doteqdot\frac{2.37}{\sqrt{n}}\qquad\cdots\cdots(7)'$$

$$\sigma_2(\hat{\pi})\doteqdot\frac{1.64}{\sqrt{n}}\qquad\cdots\cdots(8)'$$

従って $\hat{\pi}$ を小数以下 2 位まで求めるには約 1 万回以上の投針，投板を試みなければならない．第 1 表，第 2 表は好都合に成功したものであるといってよい．

因みに WOLF は $p\doteqdot0.50$ を目標に投針したものと思う．筆者の $b=25$，$r=10$ の投板は $p=0.50$ を目標にしたものであり，$b=25$，$r=25/2$ は p の最大値 $p=\frac{\pi}{4}$ を目標に試行したものであった．

参　考　文　献

1.　末綱　恕一：　確率論（1941）．
2.　奥川光太郎：　数理統計学概説（1959）．
3.　石田　保士：　BUFFON の針の問題　機械研究　第11巻第12号（1959）．
4.　M. MORSE and E. KIMBALL : Method of Operations Research (1954).