二　次　曲　面　の　分　類

石　川　栄　助

Classification of Quadrics

EISUKE ISHIKAWA

§0. はしがき

二次曲面の方程式

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0 \qquad \cdots\cdots (0.1)$$

の係数による次の行列式

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \Delta_2\lambda^2 - \Delta_1\lambda + \Delta = 0 \qquad \cdots\cdots (0.2)$$

$$D(\mu) = \begin{vmatrix} a_{11}-\mu & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{12} & a_{22}-\mu & a_{23} & a_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-\mu & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \end{vmatrix} = -a_0\mu^3 + D_2\mu^2 - D_1\mu + D = 0 \qquad \cdots\cdots (0.3)$$

の係数 Δ, Δ_1, Δ_2 ; D, D_1, D_2 は不変式であり，これによつて二次曲面を次のように分類する．

第 1 表　固有二次曲面の分類

		$D<0$	$D>0$	$D=0$
$\Delta\neq0$ (有心二次曲面)	$\Delta_1>0$, $\Delta\Delta_2>0$	長円面	虚長円面	点長円面 (虚錐面)
	その他	二葉双曲面	一葉双曲面	二次錐面
$\Delta=0$ (無心二次曲面)	$\Delta_1\neq0$	長円放物面	双曲放物面	二次柱面(*)

(*) 柱面は次のように分類される．

第 2 表　二次柱面の分類

$D=\varDelta=0$		$D_1<0$	$D_1>0$	$D_1=0$
$\varDelta_1\neq 0$ (有心二次柱面)	$\varDelta_1>0$, $\varDelta_2>0$	長円柱	虚長円柱	点長円柱 (虚相交二平面)
	$\varDelta_1>0$, $\varDelta_2<0$	虚長円柱	長円柱	点長円柱 (虚相交二平面)
	$\varDelta_1<0$	双曲柱	双曲柱	相交二平面
$\varDelta_1=0$ (無心二次柱面)	$\varDelta_2\neq 0$	放物柱	放物柱	平行二平面 (**)

(**) 平行二平面は次のように分類される.

第 3 表　平行二平面の分類

$D_1=\varDelta_1=0$	$D_2<0$	$D_2>0$	$D_2=0$
$\varDelta_2\neq 0$	平行二平面	虚平行二平面	一致二平面

なお，この論の概要は1959年10月日本数学会に於て発表した事を附記する.

第一編　不　変　式

§1　判 別 式

一般二次曲面の方程式 (0.1) の係数でつくつた (0.2) なる式の係数Δは周知のように二次曲面の中心の有無を判別する．即ち

$$\left.\begin{array}{lll}\Delta\neq 0 & \text{ならば} & \text{有心二次曲面}\\ \Delta=0 & \text{ならば} & \text{無心二次曲面}\end{array}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots (1.1)$$

また (0.3) 式の係数 D は二次曲面の母線の有無を判別する．（例えば拙論(1)を参照）二次曲面が実なる相交の一母線をもつか，虚なる相交二母線をもつか，一致せる二母線をもつかによつて，交線織面，虚線織面，合線織面と名づければ

$$\left.\begin{array}{lll}D>0 & \text{ならば} & \text{交線織面}\\ D=0 & \text{ならば} & \text{合線織面}\\ D<0 & \text{ならば} & \text{虚線織面}\end{array}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots (1.2)$$

特に $D=0$ の場合を可展面と呼ぶことにする．ここに Δ, D は次の通りである．

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{vmatrix},\qquad D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1\\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_2\\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_3\\ a_1 & a_2 & a_3 & a_0\end{vmatrix}\quad\cdots\cdots\cdots (1.3)$$

§2　不 変 式 $\Delta(\lambda)$

(0.1) 式を $F(x,y,z)=0$ で表わし，その一次の項，二次の項をそれぞれ $\pi(x,y,z)$, $\phi(x,y,z)$ とおけば

$$F(x,y,z)=\phi(x,y,z)+2\pi(x,y,z)+a_0=0\quad\cdots\cdots\cdots\cdots (0.1)'$$

今　$\phi(xyz)=\lambda(x^2+y^2+z^2)$　即ち

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz-\lambda(x^2+y^2+z^2)=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2.1)$$

なる二次曲面を考える．この二次曲面が無心二次曲面であるためには（1．1）式から直ちに次をうる．

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2.2)$$

これは（0.2）式の $\Delta(\lambda)=0$ である．即ち

$$\Delta(\lambda) = -\lambda^3 + \Delta_2\lambda^2 - \Delta_1\lambda + \Delta = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2.2)'$$

次に原点をそのままにして，軸を廻転した時の新座標を X，Y，Z とおけば

$$x^2 + y^2 + z^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$$

従つて（2.1）式は

$$b_{11}X^2+b_{22}Y^2+b_{33}Z^2+2b_{12}XY+2b_{13}XZ+2b_{23}YZ-\lambda(X^2+Y^2+Z^2)=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2.3)$$

となる．この面は勿論無心二次曲面であるから，（2.2）式と同様な判別式 $\Delta'(\lambda)$：

$$\Delta'(\lambda) = \begin{vmatrix} b_{11}-\lambda & b_{12} & b_{13} \\ b_{12} & b_{22}-\lambda & b_{23} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33}-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3+\Delta_2'\lambda^2-\Delta_1'\lambda+\Delta'=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2.4)$$

をうる．（2.2）′と（2.4）は同一λであるから，両式の係数は相等しい．即ち

$$\Delta' = \Delta, \quad \Delta_1' = \Delta_1, \quad \Delta_2' = \Delta_2 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2.5)$$

従つて Δ, Δ_1, Δ_2 は軸の廻転に関係しない不変式である．

§ 3　不 変 式 $D(\mu)$

§ 2 と同様の事を（0.1）式で考える．即ち

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$
$$+ 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z - \mu(x^2+y^2+z^2) = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3.1)$$

なる二次曲面が可展面（合線織面）であるためには（1.2）式より

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\mu & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{12} & a_{22}-\mu & a_{23} & a_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-\mu & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3.2)$$

これは（0.3）式の $D(\mu)=0$ である．即ち

$$D(\mu) = -a_0\mu^3 + D_2\mu^2 - D_1\mu + D = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3.2)'$$

原点をそのままにして軸を廻転した時，（3.1）式は

$$b_{11}X^2 + b_{22}Y^2 + b_{33}Z^2 + 2b_{12}XY + 2b_{13}XZ + 2b_{23}YZ$$
$$+ 2b_1X + 2b_2Y + 2b_3Z + a_0 - \mu(X^2+Y^2+Z^2) = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3.3)$$

これが二次可展面を表わすから，（1.2）による新判別式は

$$D'(\mu) = \begin{vmatrix} b_{11}-\mu & b_{12} & b_{13} & b_1 \\ b_{12} & b_{22}-\mu & b_{23} & b_2 \\ b_{13} & b_{23} & b_{33}-\mu & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & a_0 \end{vmatrix} = -a_0\mu^3+D_2'\mu^2-D_1'\mu+D'=0 \qquad \cdots\cdots\cdots (3.4)$$

(3.2)′ と (3.4) は同一μであるから，両式の係数比較から

$$D = D', \quad D_1 = D_1', \quad D_2 = D_2' \qquad \cdots\cdots (3.5)$$

即ち　D, D_1, D_2 は軸の廻転に関係しない不変式である．

§ 4　軸 の 廻 転

座標面を主径面にとり，それぞれの軸の方向余弦を l_1, m_1, n_1；l_2, m_2, n_2；l_3, m_3, n_3 とし，互に直交させる時は，新座標 X', Y', Z' によつて (0.1) 式は $X'Y'$, $X'Z'$, $Y'Z'$ の項が消失し次のようになる．

$$\phi(l_1,m_1,n_1)X'^2 + \phi(l_2,m_2,n_2)Y'^2 + \phi(l_3,m_3,n_3)Z'^2 + 2\pi(l_1,m_1,n_1)X' + 2\pi(l_2,m_2,n_2)Y' + 2\pi(l_3,m_3,n_3)Z' + a_0 = 0 \qquad \cdots\cdots (4.1)$$

簡単のために

$$\phi(l_i, m_i, n_i) = \phi_i \qquad \pi(l_i, m_i, n_i) = \pi_i \qquad i = 1, 2, 3$$

とおけば，上式は

$$\phi_1 X'^2 + \phi_2 Y'^2 + \phi_3 Z'^2 + 2\pi_1 X' + 2\pi_2 Y' + 2\pi_3 Z' + a_0 = 0 \qquad \cdots\cdots (4.2)$$

ここで判別式$\Delta(\lambda) = 0$ をつくる．即ち

$$\Delta(\lambda) = (\phi_1 - \lambda)(\phi_2 - \lambda)(\phi_3 - \lambda) = 0 \qquad \cdots\cdots (4.3)$$

よつて ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 は $\Delta(\lambda) = 0$ の3根である，これを λ_1, λ_2, λ_3 とおけばこの3根は実根である事が証明されてあるから (4.3) 式は次のようになる．

$$\lambda_1 X'^2 + \lambda_2 Y'^2 + \lambda_3 Z'^2 + 2\pi_1 X' + 2\pi_2 Y' + 2\pi Z_3' + a_0 = 0 \qquad \cdots\cdots (4.4)$$

この式は二次曲面の分類によく用いられる基本の式となるものである．

第2編　二 次 曲 面 の 分 類

§ 5　有 心 二 次 曲 面

(4.4) 式に於て $\Delta \neq 0$ のときは $\Delta(\lambda) = 0$ の3根が存在する．今原点を中心に移す時は (4.4) 式は次の様になる．

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 + C' = 0 \qquad \cdots\cdots (5.1)$$

ここで上の式の不変式 D をとれば，$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \Delta$ であるから

$$D = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 C' = \Delta C' \qquad 即ち \quad C' = \frac{D}{\Delta}$$

よつて (5.1) 式は次のようにかかれる．

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 + \frac{D}{\Delta} = 0 \qquad \cdots\cdots (5.2)$$

これ即ち有心二次曲面の基本形である．

$\Delta(\lambda) = 0$ の3根が共に同符号であるためには

$$\Delta_1 > 0, \qquad \Delta_2 \Delta > 0 \qquad \cdots\cdots (5.3)$$

よつて (5.2) 式は次のように分類される．

第4表　有心二次曲面の分類

$\Delta \neq 0$	$D < 0$	$D > 0$	$D = 0$
$\Delta_1 > 0$, $\Delta\Delta_2 > 0$	長　円　面	虚 長 円 面	点 長 円 面(虚錐面)
そ　の　他	二葉双曲面	一葉双曲面	二 次 錐 面

§ 6 放 物 面

もしも (4.4) 式に於て $\Delta = 0$ ならば，この曲面は中心を持たない．即ち無心二次曲面である．このとき $\Delta(\lambda) = 0$ は

$$\Delta(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 - \Delta_2\lambda + \Delta_1) = 0 \quad \cdots\cdots (6.1)$$

よつて $\Delta_1 \neq 0$ ならば $\Delta(\lambda) = 0$ は唯一根のみ零．これを例えばλ_3とすれば，(4.4) 式は

$$\lambda_1 X'^2 + \lambda_2 Y'^2 + 2\pi_1 X' + 2\pi_2 Y' + 2\pi_3 Z' + a_0 = 0 \quad \cdots\cdots (6.2)$$

もしも $\pi_3 \neq 0$ ならば，原点を適当に移し，

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + 2\pi_3 Z = 0 \quad \cdots\cdots (6.3)$$

をうる．上式の不変式 D を求めると

$$D = -\lambda_1\lambda_2\pi_3^2 = -\Delta_1\pi_3^2 \qquad \therefore \qquad \pi_3 = \sqrt{\frac{-D}{\Delta_1}} \quad \cdots\cdots (6.4)$$

よつて (6.3) 式は

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 \pm 2\sqrt{\frac{-D}{\Delta_1}}\, Z = 0 \quad \cdots\cdots (6.5)$$

これが放物面の基本形であり，次のように分類する．

第 5 表　放 物 面 の 分 類

$\Delta=0,\ \Delta_1\neq0,\ D\neq0$	$D<0$	$D>0$
$\Delta_1<0$	—	双曲放物面
$\Delta_1>0$	長円放物面（実，虚）	—

§ 7 二次柱面の分類

(i) (6.4) 式に於て $\pi_3 = 0$ 即ち $D = 0$ の時は，(6.2) 式は

$$\lambda_1 X'^2 + \lambda_2 Y'^2 + 2\pi_1 X' + 2\pi_2 Y' + a_0 = 0 \quad \cdots\cdots (7.1)$$

となる．

故に $\Delta_1 \neq 0$ のとき，原点を適当に移すときは，上式は，

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + C' \ 0 \quad \cdots\cdots (7.2)$$

ここで不変式 D_1 をとれば

$$D_1 = \lambda_1\lambda_2 C' = \Delta_1 C' \qquad \therefore \qquad C' = \frac{D_1}{\Delta_1} \quad \cdots\cdots (7.3)$$

従つて上式は

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \frac{D_1}{\Delta_1} = 0 \quad \cdots\cdots (7.4)$$

これが有心二次柱面の基本形である．この形は二次曲線の有心二次曲線と同形である．従つて(7.1)式以下の面を退行二次曲面，§ 5, § 6の面を固有二次曲面といわれている．

(ii) もしも (6.2) 式に於て $\Delta_1 = 0$ の時は，$\Delta_2 \neq 0$ ならば $\Delta(\lambda) = 0$ の根は唯一根のみ存在する．これを例えば λ_1 とすれば，

$$\lambda_1 = \Delta_2 \quad \cdots\cdots (7.5)$$

従つて (6.2) 式は

$$\triangle_2 X'^2 + 2\pi_1 X' + 2\pi_2 Y' + 2\pi_3 Z' + a_0 = 0 \qquad \cdots\cdots (7.6)$$

ここで $\pi_2 \neq 0$, $\pi_3 \neq 0$ のときは原点を適当に移し，上式は次のようになる．

$$\triangle_2 X^2 + 2\pi_2 Y + 2\pi_3 Z = 0 \qquad \cdots\cdots (7.7)$$

YZ 面で軸を適当に廻転し

$$\triangle_2 X^2 \pm 2\sqrt{\pi_2^2 + \pi_3^2}\ Y'' = 0 \qquad \cdots\cdots (7.8)$$

上式による不変式 D_1 を求めると

$$D_1 = -4\triangle_2 \left(\pi_2^2 + \pi_3^2\right) \qquad \cdots\cdots (7.9)$$

この関係を (7.8) 式に代入し

$$\triangle_2 X^2 \pm 2\sqrt{\frac{-D_1}{\triangle_2}}\ Y'' = 0 \qquad \cdots\cdots (7.10)$$

これが放物柱面の基本形である．(7.4)，(7.10) 式を合わせて二次柱面を次のように分類する．

第 6 表　二　次　柱　面

$\Delta = D = 0$		$D_1 < 0$	$D_1 > 0$	$D_1 = 0$
$\Delta_1 > 0$	$\Delta_2 > 0$	長　円　柱	虚 長 円 柱	点長円柱（虚相交二平面）
	$\Delta_2 < 0$	虚 長 円 柱	長　円　柱	点長円柱（虚相交二平面）
$\Delta_1 < 0$		双　曲　柱	双　曲　柱	相 交 二 平 面
$\Delta_1 = 0$，$\Delta_2 \neq 0$		放　物　柱	放　物　柱	（平行二平面）*

* 印は§8参照

§8　平行二平面の分類

もしも (7.6) 式に於て $\pi_2 = \pi_3 = 0$ のときは，この式は

$$\triangle_2 X'_2 + 2\pi_1 X' + a_0 = 0 \qquad \cdots\cdots (8.1)$$

原点を移せば，上式は

$$\triangle_2 X^2 + C' = 0 \qquad \cdots\cdots (8.2)$$

(7.9) 式より $D_1 = 0$，よつてここに不変式 D_2 を求めると

$$D_2 = \triangle_2 C' \qquad \cdots\cdots (8.3)$$

よつて上式は

$$\triangle_2 X^2 + \frac{D_2}{\triangle_2} = 0 \qquad \cdots\cdots (8.4)$$

これは平行二平面を表わす，従つて次のように分類される．

第 7 表　平　行　二　平　面

$\Delta_1 = 0, D_1 = 0$	$D_2 < 0$	$D_2 > 0$	$D_2 = 0$
$\Delta_2 \neq 0$	平 行 二 平 面	虚 平 行 二 平 面	一 致 二 平 面

要　　約

第4表，第5表をまとめたのが第1表であり，第6表，第7表は第2表，第3表になつている．即ち二次曲面の方程式（0.1）式は $\triangle(\lambda)=0$，$D(\mu)=0$ の係数によつて完全に分類することが出来た．

参　考　文　献

(1) 石 川 栄 助 ： 一般二次曲面の母線の判別式

月刊 数 学 no. 11 (1936)

Summary

We shall write the general equation of the second degree,

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz$$
$$+2a_1x+2a_2y+2a_3z+a_0=0 \qquad \cdots\cdots (0.1)$$

put

$$\triangle(\lambda)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}$$
$$=-\lambda^3+\triangle_2\lambda^2-\triangle_1\lambda+\triangle=0 \qquad \cdots\cdots (0.2)$$

and

$$D(\mu)=\begin{vmatrix} a_{11}-\mu & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{12} & a_{22}-\mu & a_{23} & a_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-\mu & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \end{vmatrix}$$
$$=-a_0\mu^3+D_2\mu^2-D_1\mu+D=0 \qquad \cdots\cdots (0.3)$$

The Quadric will be classified according to the coefficient of (0.2) and (0.3).

Table 1. The proper quadrics

		$D<0$	$D>0$	$D=0$
$\varDelta \neq 0$ central quadrics	$\varDelta_1>0$, $\varDelta\varDelta_2>0$	ellipsoid	imaginary ellipsoid	imaginary cone
	the rest	hyperboloid of two sheets	hyperboloid of one sheet	cone
$\varDelta=0$ non-central quadrics	$\varDelta_1 \neq 0$	elliptic paraboloid	hyperbolic paraboloid	cylinder (*)

(*) Table 2. The Cylinder

$D=\Delta=0$		$D_1 < 0$	$D_1 > 0$	$D_1 = 0$
$\Delta_1 \neq 0$ central cylinder	$\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$	elliptic cylinder	imaginary elliptic cylinder	two intersecting planes (imaginary)
	$\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 < 0$	imaginary elliptic cylinder	elliptic cylinder	two intersecting planes (imaginary)
	$\Delta_1 < 0$	hyperbolic cylinder	hyperbolic cylinder	two intersecting planes
$\Delta_1 = 0$ non-central cylinder	$\Delta_2 \neq 0$	parabolic cylinder	parabolic cylinder	a pair of parallel planes (*)

(**) Table 3. The pair of parallel planes

$D_1=\Delta_1=0$	$D_2 < 0$	$D_2 > 0$	$D_2 = 0$
$\Delta_2 \neq 0$	real planes	imaginary planes	coincident planes