分散分析法を用いての週期解析法と
その週期性の検定について

石　川　栄　助

On the Periodic Analysis by the Analysis of Variance and on the Testing for the Periodicities

EISUKE ISHIKAWA

（この小文を E. T. WHITTAKER 教授に捧げる）

§0. はしがき

週期解析法として，従来 WHITTAKER の第一法，第二法，SCHUSTER の方法，TUNER の方法，correlogram による方法等があるが，ここに分散分析法を用いての新しい週期解析法と，これによる週期性の検定法とを合せて論じたい．因みにこの方法によると，WHITTAKER の第二法は，その特段の場合として理解出来る．

§1. 群間変動と週期

N個よりなる時系列 (time series) $y_1, y_2, \cdots\cdots, y_N$ に週期性が認められる時，仮りの週期を p とおき，$N=np+l$ として，次の様に二重排列を工夫する．

$$\left.\begin{array}{lllll} y_{11} & y_{12} & \cdots\cdots\cdots & y_{1l} & \cdots\cdots\cdots & y_{1p} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots\cdots\cdots & y_{2l} & \cdots\cdots\cdots & y_{2p} \\ y_{n,1} & y_{n,2} & \cdots\cdots\cdots & y_{n,l} & \cdots\cdots\cdots & y_{n,p} \\ y_{n+1,1} & y_{n+1,2} & \cdots\cdots\cdots & y_{n+1,l} & & \end{array}\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1.1)$$

平均系列 ；　$\bar{y}_1,\ \bar{y}_2,\ \cdots\cdots\cdots\ \bar{y}_l,\ \cdots\cdots\cdots\ \bar{y}_p$ 　　$\cdots\cdots\cdots\cdots$ (1.2)

群内個数 ；　$n_1,\ n_2,\ \cdots\cdots\cdots\ n_l,\ \cdots\cdots\cdots\ n_p$

ここに

$$\left.\begin{aligned} \bar{y}_j &= \frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j} y_{ij} \\ \bar{y}_{..} &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}\sum_{j=1} y_{ij} \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1.3)$$

資料(1)に関して分散分析を行い，次の表をうる

Analysis of Variance

Souce of Variation	Sum of Squares	Degree of Freedom	Variance	F-Value
Between Group	S_G	$p-1$	$V_G=\dfrac{S_G}{p-1}$	$F_G=\dfrac{V_G}{V_W}$
Within Group	S_W	$N-p$	$V_W=\dfrac{S_W}{N-p}$	
Total	S_T	$N-1$	$V_T=\dfrac{S_T}{N-1}$	

即ち　$S_G = \sum_j n_j(\bar{y}_j-\bar{y}_{..})^2$,　　$S_T = \sum_i\sum_j (y_{ij}-\bar{y}_{..})^2$

$S_W = S_T-S_G$,

ここに V_G は p が真の週期に近い程，より大きくなる．この V_G が WHITTAKER の第二法による σ_p^2 に当り，graph (p, V_G) は WHITTAKER の第二の periodogram に当るのである．

(註)　WHITTAKER の σ_p^2 は $\dfrac{S_G}{p}$ である．

依て試みの週期 p の有意性は，群間の有意性より $F_G = \dfrac{V_G}{V_w}$　($\nu_1 = p-1,\ \ \nu_2 = N-p$) として検定する事が出来る．

従つて graph (p, σ_p^2 よりも graph (p, V_G) の方が意味がある．

§ 2. 群内変動と週期

時系列 (1.1) の週期 p を前節によつて求めた時，この平均系列；$\bar{y}_1, \bar{y}_2, \cdots\cdots, \bar{y}_p$ の回帰線即ち，週期曲線は $p = 2m$ とおけば，

$$\left.\begin{aligned}\bar{y}_j = a_0 &+ a_1 cosx_j + a_2 coz2x_j + \cdots\cdots + a_m cosmx_j \\ &+ b_1 sinx_j + b_2 sin2x_j + \cdots\cdots + b_{m-1} sin\,(m-1)\,x_j\end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2,1)$$

としてうる．ここに $x_j = \dfrac{2\pi}{p}\, j$

従つてこの曲線の適合の程度は，残差平方和 S_E,　即ち　$S_E = \sum_i\sum_j (y_{ij}-\bar{y}_j)^2 = S_W$

によつて大体知る事が出来る．ここに S_E は群内変動 S_W に一致する．

故に (p, S_W) の graph を描けば，このグラフの谷の位置に当る p が最も適合のよい（信頼の高い）回帰線の週期を与える事になる．この graph を WHITTAKER の逆 periodogram とよぶ事にする．

§ 3. 分散比と週期性

§ 1. によつて，V_G が大きい程，群間の見かけ上の差違が大となり，見かけ上の週期が見出される．又 § 2. によつて V_W の小さい程，見かけ上の適合のよい週期が見出される．従つて次の比，

$F_G = \dfrac{V_G}{V_W}$ を求め，(p, F_G) の graph を描く時は，この graph の最高位の p が，予想

的週期の最良値を与える筈である．この graph を WHITTAKER の standard periodogram 又は WHITTAKER の標準週期図表とよぶ事にする．（第一図参照）

もしも週期 p が有意ならば，群間変動は少くとも有意となるから

$$\left.\begin{aligned} & F_G \geqq F_\alpha \\ & F_\alpha = F^{\nu_1}_{\nu_2}(\alpha) \quad (\nu_1 = p-1, \ \nu_2 = N-p) \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3.1)$$

が成立し，検定のためにもこの graph が便利である．

因みに WHITTAKER の第二法による週期性の検定を考えることは，実は上の検定を行う事に当る．

試みに (p, F_G) なる graph と，(p, F_α) なる graph を描く時，後者の図の上方に位置する前者の図の部分の p が α-point で有意である事を示している．故に (p, F^α) なる graph を α-基準の限界週期図表又は critical periodogram とよびたい．

標準週期図表の敏感である事は第一図によつても明らかである．

§ 4. Correlogram と分散分析

時系列；$y_1, y_2, \cdots\cdots, y_N$ の週期が p である時，その平均系列；$\bar{y}_1, \bar{y}_2, \cdots\cdots, \bar{y}_p$ の回帰線(週期曲線）を求めれば（2.1）式をうる．この計算値は殆んど平均系列に一致する．従つて残差変動 S_E $(=S_W)$，全変動 S_T，群間変動 S_G とおけば，標本相関指数 ρ は

$$\rho^2 = 1 - \frac{S_W}{S_T} = \frac{S_G}{S_T} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (4.1)$$

となる．

（註） 残差の分散 V_E $(= V_W)$，全体の分散を V_T とおく時，母相関指数の推定値 ρ は

$$\rho^2 = 1 - \frac{V_W}{V_T} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (4.2)$$

となるが，検定に際しては (4.1) 式が用いられる．

扨て correlogram には相関係数 r を用い，graph (p, r) を用いるが，ここに標本相関指数 ρ を用いた graph (p, ρ) を WHITTAKER の correlogramとよぶ事にする．この ρ の有意性は回帰線による相関指数の検定より

$$\left.\begin{aligned} & F_0 = \frac{\rho^2}{1-\rho^2} \cdot \frac{N-p}{p-1} \\ & \nu_1 = p-1, \quad \nu_2 = N-p \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (4.3)$$

として，F 表によつて検定出来る．

上式に (4.1) の値を代入すれば

$$F_o = \frac{V_G}{V_W} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (4.4)$$

となり，群間の差の有意性の検定の分散比 F_G に当る．

§ 5. 使　用　例

使用例として拙文“元素の密度指数の週期解析”[1] を分散分析法を用いて，長週期について行い，

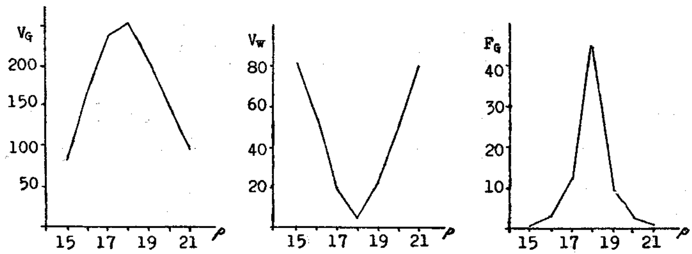
1）本誌第12巻に発表の予定

次の表を得た.

Periodic Analysis

Statistic \ p	15	16	17	18	19	20	21
V_G	80.8	167.0	236.4	250.7	206.3	149.3	98.3
V_W	89.8	54.1	19.2	5.64	22.4	50.5	80.0
F_G	0.90	3.09**	12.31***	44.45***	9.21***	2.96**	1.23
ρ	0.504	0.750**	0.922***	0.978***	0.913***	0.798**	0.666

次に graph (p, V_G), (p, V_W), (p, F_G) を描けば次の通りである. ここに (p, V_G) は WHITTAKER の第二 periodogram である.



第 1 図　Periodogram

上図によつても (p, F_G) の graph 即ち標準週期図表が比較的鋭敏である事を知る. 本例の元素の密度指数の長週期として18が卓越する事が明らかである.

§ 6. 結　　語

時系列 $y_1, y_2, \cdots\cdots, y_N$ に於て, 仮りの週期を p とおき, この全数列を p 群に分けて, 次の様に分散分析を行えば,

	1	2	……	l	……	p
	y_{11}	y_{12}	……	y_{1l}	……	y_{1p}
	y_{21}	y_{22}	……	y_{2l}	……	y_{2p}
	……	……	……	……	……	……
	y_{n1}	y_{n2}	……	y_{nl}	……	y_{np}
	$y_{n+1,1}$	$y_{n+1,2}$	……	$y_{n+1,l}$		
平均系列	$\bar{y}_1$	$\bar{y}_2$	……	$\bar{y}_l$	……	$\bar{y}_p$

Analysis of Variance

Source of Variation	Sum of Squares	Degree of Freedom	Variance	F-Value
Between Group	S_G	p-1	V_G	$F_G=\frac{V_G}{V_W}$
Within Group	S_W	N-p	V_W	
Total	S_T	N-1	V_T	

p を真の週期の前後の値にとり，夫々の p に対して，V_G, V_W, F_G, 及び $\rho^2 = \dfrac{S_W}{S_T}$ を求めれば，次のことが明らかになつた．

1° graph (p, V_G) は WHITTAKER の第二法による periodogram であり，V_G の最大値に対応する p が真の週期に近い．

2° graph (p, V_W) を WHITTAKER の逆 peridogram と名ずけ，V_W の最小値に対応する p があてはまりのよい週期に近い．

3° graph (p, F_G) を WHITTAKER の standard periodogram とよぶ．F_G の最大に対する p が信頼の高い有意の週期を示す．

4° $F_\alpha = F^{\nu_1}_{\nu_2}(\alpha)$, $\nu_1 = p-1$, $\nu_2 = N-p$ を求め，graph (p, F_α) をつくる．これを critical periodogam とよぶ．もしも $F_G \geqq F_\alpha$ ならば週期 p が有意．

5° graphr (p, ρ) を WHITTAKER の correlogram と名ずける．相関指数の有意性は 4°によつて検定出来る．

即ち分散比 F_G は 1°, 3°, 5° に関係し，週期性の検定に重要なる統計量となつている．従つて graph (p, F_G) の意味が深い．

Summary

Let the observed measures of the phenomenon, made at equal intervals of time,

$$y_1, \quad y_2, \cdots\cdots\cdots, y_N \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

and suppose that this period is p.

Now the seqence (1) to be denoted as follows:

$$\begin{array}{llll} y_{11} & y_{12} & \cdots\cdots\cdots, & y_{1p} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots\cdots\cdots & y_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ y_{n,1} & y_{n,2} & \cdots\cdots\cdots & y_{n,p} \\ y_{n+1,1} & y_{n+1,2} & \cdots\cdots\cdots & y_{n+1,l} \end{array}$$

Means: $\bar{y}_1, \quad \bar{y}_2 \cdots\cdots \bar{y}_l \cdots\cdots \bar{y}_p$

Numbers: $n_1, \quad n_2 \cdots\cdots n_l \cdots\cdots n_p$

where $N = np + l$

$$\bar{y}_j = \frac{1}{n_j} \sum_i y_{ij}, \quad \bar{y} = \frac{1}{N} \sum_i \sum_j y_{ij}.$$

The above data may be expressed by the following analysis of variance;

Analysis of Variance

Source of Variation	Sum of Squares	Degree of Freedom	Variance	F-Value
Between Group	S_G	p-1	V_G	$F = \dfrac{V_G}{V_W}$
Within Group	S_W	N-p	V_W	
Total	S_T	N-1	V_T	

where $S_G = \sum_j n_j(\bar{y}_j - \bar{y}_{..})^2$, $\quad V_G = \dfrac{S_G}{p-1}$

$S_T = \sum_i \sum_j (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2$, $\quad V_w = \dfrac{S_W}{N-p}$

$S_W = S_T - S_G$

and $\quad \rho = \sqrt{\dfrac{S_W}{S_T}}$

with p varying as……, $p-2$, $p-1$, p, $p+1$, $p+2$,……, then we have following results.

1° The graph (p, V_G) is the WHITTAKER's second periodogram. The recongnition of these peaks in the periodogram is the means by which we reveal hidden periodicities.

2° The graph (p, V_W) is called the WHITTAKER's inverse periodogram. We discover hidden periodicities by the valley in the inverse periodogram.

3° Draw the graph (p, F_G), then the period is discovered by the peaks in this periodogram, and this graph is called the WHITTAKER's standard periodogram.

4° The graph (p, F_α) is called critical periodogram, in which

$$F_\alpha = F^{\nu_1}_{\nu_2}(\alpha), \quad \nu_1 = p-1, \quad \nu_2 = N-p$$

If $F_G \geqq F_\alpha$, the period is of significance at α-level.

5° The graph (p, ρ) is called the WHITTAKER's correlogram, there by the required period can be discovered, and the periodicities may be tested by the analysis of variance

参　考　文　献

(1) WHITTAKER and ROBINSON : The Calculus of Observations (1937).

(2) 応用力学会編：応用統計学 (1950).

(3) 石川栄助編著：実用近代統計学 (1955).

(4) 石 川 栄 助：元素の密度指数の週期とその調和分析，本誌，No.12 (1957).