

修 士 論 文

射影平面における円錐曲線の性質について  
—高校数学における古典的教材の視点から—

岩手大学大学院 教育学研究科修士課程

教科教育専攻 数学教育専修

金 濱 千 明

2005年3月

# 目次

<b>第1章 円錐曲線</b>	<b>3</b>
1.1 標準形	3
1.2 非退化な円錐曲線の性質	13
1.3 共焦点円錐曲線	24
1.4 パスカルの定理とその応用	27
<b>第2章 射影変換, 複比, 対合</b>	<b>30</b>
2.1 射影変換, 複比	31
2.2 複比の性質	34
2.3 対合	40
<b>第3章 射影円錐曲線</b>	<b>44</b>
3.1 射影平面, 同次座標	44
3.2 射影円錐曲線	48
3.3 アフィン円錐曲線	62
<b>第4章 射影円錐曲線束</b>	<b>65</b>
4.1 円錐曲線束	65
4.2 2つの円錐曲線の交わり	68
4.3 ポンスレーの大定理	84

## はじめに

本研究は、高等学校「数学C」で扱われる教材“2次曲線”に関して、その背景や周辺の内容を調べることにより、より高い視点からの教材観を得るための研究である。

**研究の意図** 高等学校の数学教材は歴史的には2~300年前までに研究されていた内容がほとんどである。歴史的に数学はその後も自然な方向で発展したと思われるが、日本の数学教育のプログラムでは約50年ほど前の“数学教育の現代化”を境に高等学校の指導内容と大学の題材に大きなギャップが生じたように感じる。特に、ここ2~300年で盛んに研究された数学が“古典”に分類され、“現代化”以後は大学でもほとんど扱われなくなった。「円錐曲線論」、「射影幾何学」、「方程式論」等々がそういったものであるが、実際これらの内容を勉強してみると現代化された数学の問題意識や理論展開の必然性が非常にわかりやすく感じられる。また、高等学校で数学を指導する中で大学入試問題を取り上げることがよくある。大学入試問題では手法は高等学校の範囲内であるが、題材自体はその少し先にある内容を意識したものが非常に多く見られる。結果的にそれらは前述の“古典”に属する内容であることが多々ある。以上のことから数学の“古典”的教材をもっと知りたいと考えるようになった。数学の“古典”の範疇は非常に広いので、その中でも幾何学に絞って研究したものである。

**研究の概略** 第1章「円錐曲線」では、高等学校でも扱える内容を意識して“円錐曲線”の性質について述べる。第2章「射影変換, 複比, 対合」では、“射影幾何学”を考えるための道具として、“複比”や“対合”について考察する。第3章「射影円錐曲線」では、円錐曲線を統一的に扱う立場としての射影の観点で円錐曲線を考える。第4章「射影円錐曲線束」では、円錐曲線束という方法を導入することで射影幾何学で最も美しい結果といわれる“ポンスレーの大定理”の証明を考える。

# 第1章 円錐曲線

この章ではユークリッド平面における円錐曲線の基本的な性質について論じる。§1.1では、円錐曲線のタイプ(楕円, 放物線, 双曲線, ...)分けするための標準形の導出について考える。§1.2では、非退化円錐曲線の性質についてまとめる。§1.3では、焦点を共有する円錐曲線について考察する。§1.4では、楕円に内接(外接)する6辺形に関する性質としてパスカルやブリアンションの導いた定理を示す。

## 1.1 標準形

**定義** 2次方程式の零点集合を $\mathbb{R}^2$ における図形と見なす。このとき $\mathbb{R}^2$ の部分集合

$$C = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c = 0 \right\} \quad (1.1)$$

を円錐曲線という。ただし、ここで $a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c$ は実数で、 $a_{11}, a_{12}, a_{22}$ のうち少なくとも1つは0でないとする。

円錐曲線を調べるために、与えられた方程式を単純な形にする座標変換が有効である。考える座標変換は、

① 平行移動, すなわちベクトル $\vec{v} = (p, q)$ に対する写像

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (x + p, y + q)$$

② 原点中心の角 $\theta$ の回転, すなわち写像

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$$

①と②の合成写像

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (x \cos \theta - y \sin \theta + p, x \sin \theta + y \cos \theta + q)$$

である。これらは向きを保つ合同変換という。

### 1.1.1 6つのタイプ

ここでは円錐曲線 (1.1) が分類される6つのタイプのリストを示し、その後に任意の円錐曲線が6つのタイプのいずれかに分類されるという定理を示す。

**タイプ1：楕円**  $a_1, a_2 > 0$  に対して、

$$E_{a_1, a_2} := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} = 1 \right\} \quad (1.2)$$

とおく。  $E_{a_1, a_2}$  は  $x$  軸との交点が  $(\pm a_1, 0)$ ,  $y$  軸との交点が  $(0, \pm a_2)$  の楕円である。両座標軸は楕円の「対称軸」である。  $a_1 = a_2$  のとき、  $E_{a_1, a_2}$  は  $(0, 0)$  を中心、半径  $a_1 = a_2$  の円である。

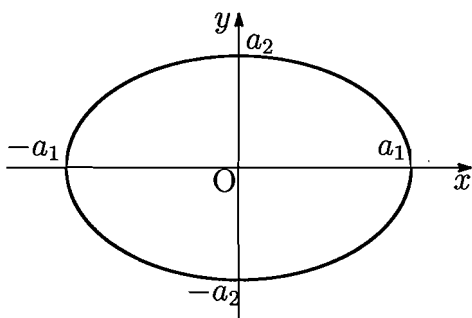


図 1.1: 楕円

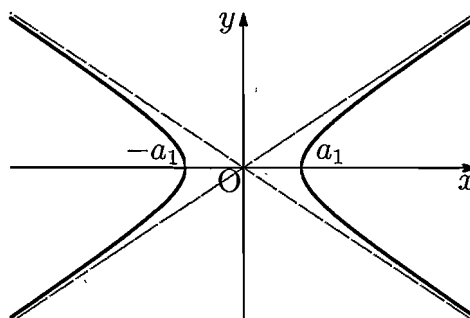


図 1.2: 双曲線

**タイプ2：双曲線**  $a_1, a_2 > 0$  に対して、

$$H_{a_1, a_2} := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{a_2^2} = 1 \right\} \quad (1.3)$$

とおく。  $H_{a_1, a_2}$  は双曲線である。この曲線に対して2直線

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x}{a_1} + \frac{y}{a_2} = 0 \right\} \quad (1.4)$$

と

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x}{a_1} - \frac{y}{a_2} = 0 \right\} \quad (1.5)$$

を, この双曲線の漸近線という.

タイプ3: 放物線  $a > 0$  に対して,

$$P_a := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax^2 \right\} \quad (1.6)$$

とおく.  $P_a$  は放物線である.

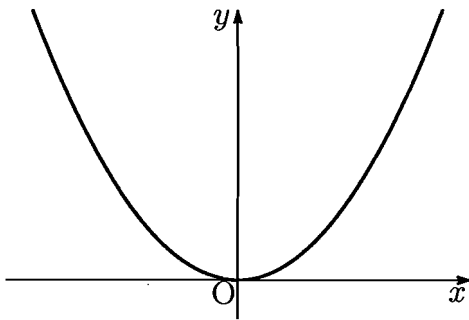


図 1.3: 放物線

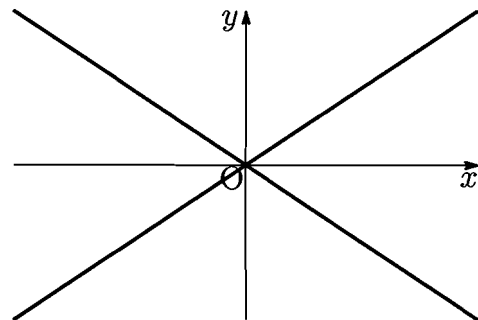


図 1.4: 平行でない2直線

タイプ4: 平行でない2直線  $a_1, a_2 > 0$  に対して,

$$\begin{aligned} GP_{a_1, a_2} &:= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left( \frac{x}{a_1} - \frac{y}{a_2} \right) \left( \frac{x}{a_1} + \frac{y}{a_2} \right) = 0 \right\} \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{a_2^2} = 0 \right\} \end{aligned} \quad (1.7)$$

とおく.  $GP_{a_1, a_2}$  は2つの直線

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x}{a_1} + \frac{y}{a_2} = 0 \right\}$$

と

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x}{a_1} - \frac{y}{a_2} = 0 \right\}$$

の和集合である.

タイプ5：平行な2直線  $a \geq 0$  に対して,

$$PP_a := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-a)(x+a) = 0\} \quad (1.8)$$

とおく.  $a > 0$  のとき,  $PP_a$  は平行な異なる2直線である.  $a = 0$  のとき,  $PP_a$  は2直線が重なってできる直線  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$  である.

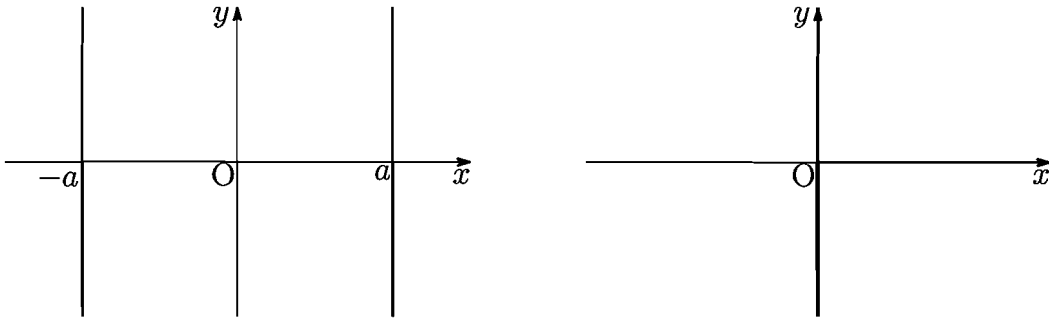


図 1.5: 平行な2直線

タイプ6：1点集合

$$EP := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0\} \quad (1.9)$$

とおく.  $EP$  は1点 (原点) からなる集合である.

以上が6つのタイプであるが, 特に楕円, 双曲線, 放物線を非退化円錐曲線という. 各タイプの円錐曲線の向きを保つ合同変換による像は再び同じタイプになる.

**定理 1.1**  $C$  を円錐曲線 (空集合でない) とする. このとき,  $\varphi(C)$  がタイプ1~6の円錐曲線となるような向きを保つ合同変換  $\varphi$  が存在する.

### 1.1.2 定理 1.1 の証明のための準備

定理 1.1 の証明をはじめる前に円錐曲線 (1.1) において,  $b_1 = b_2 = c = 0$  の場合について, 2変数の2次形式,

$$q(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 \quad (1.10)$$

を考える.

$a_{11} \neq 0$  とすると

$$\begin{aligned} q(x, y) &= a_{11} \left\{ x^2 + 2 \frac{a_{12}}{a_{11}} xy + \left( \frac{a_{12}}{a_{11}} y \right)^2 \right\} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}} y^2 + a_{22} y^2 \\ &= a_{11} \left( x + \frac{a_{12}}{a_{11}} y \right)^2 + \frac{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}{a_{11}} y^2 \end{aligned}$$

と変形される. ここで, 平方完成の剰余の項の係数について

$$D_q := a_{11} a_{22} - a_{12}^2 \quad (1.11)$$

とおく. この  $D_q$  を 2 次形式  $q$  の判別式という.

**補題 1.2**  $q(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$  を 2 変数の 2 次形式とする.

- i)  $D_q \neq 0$  とすると,  $(0, 0)$  の周りの回転  $R$  と,  $a'_1 a'_2 = D_q$  となる実数  $a'_1, a'_2$  が存在して,

$$(q \circ R)(x, y) = a'_1 x^2 + a'_2 y^2$$

が成り立つ.

- ii)  $D_q = 0$  とすると,  $(0, 0)$  の周りの回転  $R$  と, 実数  $a'$  が存在して,

$$(q \circ R)(x, y) = a' x^2$$

が成り立つ.

**証明**

$$\theta \in \mathbb{R}, \psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta),$$



とすると

$$\begin{aligned}
(q \circ \psi)(x, y) &= a_{11}(x \cos \theta - y \sin \theta)^2 + a_{22}(x \sin \theta + y \cos \theta)^2 \\
&\quad + 2a_{12}(x \cos \theta - y \sin \theta)(x \sin \theta + y \cos \theta) \\
&= [a_{11} \cos^2 \theta + 2a_{12} \sin \theta \cos \theta + a_{22} \sin^2 \theta]x^2 \\
&\quad + 2[-a_{11} \sin \theta \cos \theta + a_{12}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + a_{22} \sin \theta \cos \theta]xy \\
&\quad + [a_{11} \sin^2 \theta + 2a_{12} \sin \theta \cos \theta + a_{22} \cos^2 \theta]y^2 \\
&= [a_{11} \cos^2 \theta + a_{12} \sin 2\theta + a_{22} \sin^2 \theta]x^2 \\
&\quad + [(a_{22} - a_{11}) \sin 2\theta + 2a_{12} \cos 2\theta]xy \\
&\quad + [a_{11} \sin^2 \theta + a_{12} \sin 2\theta + a_{22} \cos^2 \theta]y^2
\end{aligned}$$

ここで  $\theta$  を

$$(a_{22} - a_{11}) \sin 2\theta + 2a_{12} \cos 2\theta = 0 \quad (1.12)$$

を満たすように選ぶことができるので

$$\begin{aligned}
a'_1 &:= a_{11} \cos^2 \theta + a_{12} \sin 2\theta + a_{22} \sin^2 \theta \\
a'_2 &:= a_{11} \sin^2 \theta - a_{12} \sin 2\theta + a_{22} \cos^2 \theta
\end{aligned}$$

とおくと,

$$(q \circ \psi)(x, y) = a'_1 x^2 + a'_2 y^2. \quad (1.13)$$

さらに,

$$\begin{aligned}
a'_1 a'_2 &= (a_{11}^2 + a_{22}^2) \sin^2 \theta \cos^2 \theta - a_{12}^2 \sin^2 2\theta + a_{11} a_{22} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\
&\quad + a_{12} \sin 2\theta [a_{11} (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) + a_{22} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)] \\
&= (a_{11}^2 - 2a_{11} a_{22} + a_{22}^2) \sin^2 \theta \cos^2 \theta - a_{12}^2 \sin^2 2\theta \\
&\quad + a_{11} a_{22} (\sin^4 \theta + 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \cos^4 \theta) + a_{12} (a_{22} - a_{11}) \sin 2\theta \cos 2\theta \\
&= a_{11} a_{22} + \frac{(a_{22} - a_{11})^2}{4} \sin^2 2\theta + a_{12} (a_{22} - a_{11}) \sin 2\theta \cos 2\theta + a_{12}^2 (\cos^2 2\theta - 1) \\
&= a_{11} a_{22} + \frac{\{(a_{22} - a_{11}) \sin 2\theta + 2a_{12} \cos 2\theta\}^2}{4} - a_{12}^2 \\
&= a_{11} a_{22} - a_{12}^2 = D_q \quad \left( \because (1.12) \text{ による} \right)
\end{aligned}$$

$a'_1 \neq 0$  のとき, 回転  $R$  をこの  $\psi$  とおく.

$a'_1 = 0$  のときは  $D_q = 0$ . この場合は  $a' := a'_2$ , 回転  $R$  を  $\psi$  と  $90^\circ$  の回転の合成変換とすれば,  $(q \circ R)(x, y) = a'x^2$ .

以上で補題 1.2 が示された. □

**系 1.3** 2変数の2次形式  $q$  に対して, 次が成り立つ.

i)  $D_q > 0 \iff q(x, y) \neq 0 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$ .

ii)  $D_q = 0 \iff q(x, y) = \pm \ell(x, y)^2$   
となる1次形式  $\ell(x, y) = ax + by$  ( $a \neq 0$  または  $b \neq 0$ ) が存在する.

iii)  $D_q < 0 \iff q(x, y) = (ax + by)(cx + dy)$   
となる  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ,  $ad - bc \neq 0$  が存在する.

**証明** 補題 1.2 に現れた特別な2次形式  $a'_1x^2 + a'_2y^2$  の場合で考える.

i)  $D_q > 0 \iff a'_1a'_2 > 0 \iff a'_1, a'_2$  が同符号のとき  
 $(x, y) \neq (0, 0) \Rightarrow a'_1x^2 + a'_2y^2 > 0$  または,  $a'_1x^2 + a'_2y^2 < 0$

ii)  $D_q = 0 \iff a'_1a'_2 = 0 \iff a'_1 = 0$ , または  $a'_2 = 0$  のとき  
 $a'_1x^2 + a'_2y^2 = \pm \beta^2y^2 = \pm(\beta y)^2$   
または,  $a'_1x^2 + a'_2y^2 = \pm \alpha^2x^2 = \pm(\alpha x)^2$

iii)  $D_q < 0 \iff a'_1a'_2 < 0 \iff a'_1, a'_2$  が異符号のとき  
 $a'_1x^2 + a'_2y^2 = \alpha^2x^2 - \beta^2y^2 = (\alpha x + \beta y)(\alpha x - \beta y)$   
または,  $a'_1x^2 + a'_2y^2 = -(\alpha^2x^2 - \beta^2y^2) = -(\alpha x + \beta y)(\alpha x - \beta y)$

となり, それぞれの場合で系が成立する.

一般の場合も, 補題 1.2 を適用すると, この特別な場合に帰着することから, 一般に成立する. □

### 1.1.3 定理 1.1 の証明

$(a_{11}, a_{12}, a_{22}) \neq (0, 0, 0)$  に対して,

$$f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c$$

とおき, さらに  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}$  とする. 2次形式

$$q(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$$

を単に  $q$  と表す.

**case I**  $D_q \neq 0$  のとき.

補題 1.2 より, 回転  $R$  と  $a'_1 a'_2 = D_q$  となる  $a'_1, a'_2$  が存在して,

$$(q \circ R)(x, y) = a'_1 x^2 + a'_2 y^2$$

が成り立つ. このとき,

$$(f \circ R)(x, y) = a'_1 x^2 + 2b'_1 x + a'_2 y^2 + 2b'_2 y + c, \quad b'_1, b'_2 \in \mathbb{R}$$

となる.  $a'_1 a'_2 \neq 0$  だから, 平行移動

$$T: (x, y) \mapsto \left( x - \frac{b'_1}{a'_1}, y - \frac{b'_2}{a'_2} \right)$$

とすると, ある  $c' \in \mathbb{R}$  に対して

$$(f \circ R \circ T)(x, y) = a'_1 x^2 + a'_2 y^2 - c'$$

が成り立つ. ここで  $R \circ T$  そして, その逆変換  $(R \circ T)^{-1}$  は向きを保つ合同変換であり,

$$\varphi := (R \circ T)^{-1}$$

とおくと

$$\mathbf{x} \in \varphi(C) \iff \varphi^{-1}(\mathbf{x}) \in C \iff (f \circ R \circ T)(\mathbf{x}) = 0$$

すなわち

$$\varphi(C) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a'_1 x^2 + a'_2 y^2 = c' \right\}.$$

ここで case I をさらに場合分けする.

**case Ia**  $c' \neq 0$  のとき.

$$\varphi(C) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a'_1 x^2 + a'_2 y^2 = c' \right\}.$$

において,

$D_q > 0$  のとき,  $\frac{a'_1}{c'}$  と  $\frac{a'_2}{c'}$  は同符号である.

これらが負のときは  $\varphi(C) = \emptyset$ . したがって  $C = \emptyset$ .

正のときは  $\varphi(C)$  は楕円 (**タイプ1**) で,  $a_1 := \sqrt{\frac{c'}{a'_1}}$ ,  $a_2 := \sqrt{\frac{c'}{a'_2}}$  とおくと

$$E_{a_1, a_2} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} = 1 \right\}$$

$D_q < 0$  のとき,  $\frac{a'_1}{c'}$  と  $\frac{a'_2}{c'}$  は異符号である.

$\frac{a'_1}{c'} < 0$  であるときは  $\varphi$  を  $\varphi$  と  $90^\circ$  回転の合成変換に置き換えることで  $\frac{a'_1}{c'} > 0$  とできる. このとき  $\varphi(C)$  は双曲線 (**タイプ2**) であり,  $a_1 := \sqrt{\frac{c'}{a'_1}}$ ,  $a_2 := \sqrt{-\frac{c'}{a'_2}}$  とおくと

$$H_{a_1, a_2} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{a_2^2} = 1 \right\}$$

**case Ib**  $c' = 0$  のとき.

$D_q > 0$  のとき, 系 1.3 の i) より  $\varphi(C)$  は1点集合 (**タイプ6**) である.

$D_q < 0$  のとき, 系 1.3 の iii) より  $\varphi(C)$  は2つの直線の和集合 (**タイプ4**) であり,

$a_1 := \sqrt{\frac{1}{|a'_1|}}$ ,  $a_2 := \sqrt{\frac{1}{|a'_2|}}$  とおくと

$$GP_{a_1, a_2} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{a_2^2} = 0 \right\}$$

**case II**  $D_q = 0$  のとき.

補題 1.2 より, 回転  $R$  と  $a' \in \mathbb{R}$ ,  $a' \neq 0$ ,  $b'_1, b'_2 \in \mathbb{R}$  が存在して,

$$(f \circ R)(x, y) = a'_1 x^2 + 2b'_1 x + 2b'_2 y + c$$

となる. 平行移動  $T_1 : (x, y) \mapsto (x - \frac{b'_1}{a'_1}, y)$  とすると, ある  $c' \in \mathbb{R}$  に対して

$$(f \circ R \circ T_1)(x, y) = a'_1 x^2 + 2b'_2 y + c'.$$

ここで case II もさらに場合分けする.

**case IIa**  $b_2 \neq 0$  のとき.

平行移動  $T_2 : (x, y) \mapsto (x, y - \frac{c'}{2b_2})$  とすると,

$$(f \circ R \circ T_1 \circ T_2)(x, y) = a'x^2 + 2b_2y.$$

ここで,  $S$  を写像  $(x, y) \mapsto (-x, -y)$  とし,

$$\varphi := \begin{cases} (R \circ T_1 \circ T_2)^{-1} & (a'b_2 < 0 \text{ のとき}) \\ (R \circ T_1 \circ T_2 \circ S)^{-1} & (a'b_2 > 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

とおく. このとき,  $a := |\frac{a'}{2b_2}|$  とおくと

$$\varphi(C) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax^2 \right\}.$$

すなわち,  $\varphi(C)$  は放物線 (タイプ 3) である.

**case IIb**  $b_2 = 0$  のとき.  $\varphi := (R \circ T_1)^{-1}$  とおく.

$a'$  と  $c'$  が同符号のとき  $\varphi(C) = \emptyset$ . したがって  $C = \emptyset$ .

$c' = 0$  または  $a'$  と  $c'$  が異符号のとき

$$\varphi(C) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \pm \sqrt{\left| \frac{c'}{a'} \right|} \right\}$$

これは平行な直線の組, または重なった直線 (タイプ 5) である.

以上で定理 1.1. が示された. □

**補足** 上述の証明をまとめると次のようになる.

- $D_q > 0 \iff C$  は楕円 あるいは 1 点集合 (タイプ 1 or 6).
- $D_q = 0 \iff C$  は放物線 あるいは 平行な 2 直線,  
あるいは重なった直線 (タイプ 3 or 5).
- $D_q < 0 \iff C$  は双曲線 あるいは 1 点で交わる 2 直線 (タイプ 2 or 4).

## 1.2 非退化な円錐曲線の性質

この節では、前節の標準化された円錐曲線のうち、非退化なもの（タイプ1, 2, 3）のみを考察する。

### 1.2.1 古典的な定義（高校数学における定義）

**定理 1.4**  $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$  と  $\mathbf{f}' = (f'_1, f'_2)$  を  $\mathbb{R}^2$  の 2 点,  $2r$  を  $\mathbf{f}$  と  $\mathbf{f}'$  との距離  $\|\mathbf{f}\mathbf{f}'\|$  より大きくとる. このとき,  $\|\mathbf{m}\mathbf{f}\| + \|\mathbf{m}\mathbf{f}'\| = 2r$  となる  $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^2$  の集合は楕円である. 逆に, 1つの楕円に対して  $\mathbf{f}$  と  $\mathbf{f}'$  の組は一意的に定まり,  $r$  も一意的に定まる.  $\mathbf{f}$  と  $\mathbf{f}'$  が一致するとき, この楕円は半径  $r$  の円である.

**注意** 定理 1.4 から楕円の作図法がわかる. 長さ  $2r$  の紐を用意し, 2 点  $\mathbf{f}$  と  $\mathbf{f}'$  に端を結び固定する. 紐の 1 点でペンを垂直に立て, 紐が張った状態のままペンを一周移動すると楕円が得られる.  $\mathbf{f}$  と  $\mathbf{f}'$  をこの楕円の焦点という. 定理 1.4 の前半部分の記述は古典的な楕円の定義として知られており, 現在の高等学校での定義としても使われている. したがって定理 1.4 は §1.1 における楕円の定義と古典的な楕円の定義の同値性を示している.

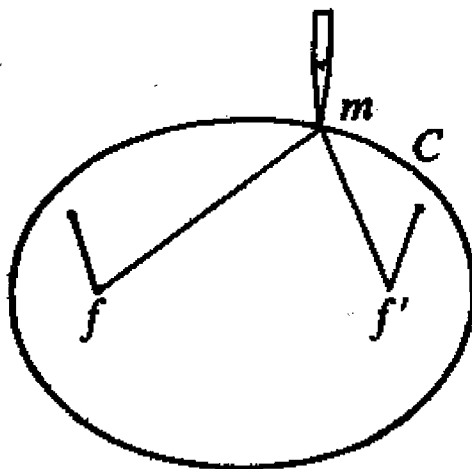


図 1.6: 楕円の作図法

証明  $\mathbf{f} = (c, 0)$ ,  $\mathbf{f}' = (-c, 0)$  となるように軸をとると  $\mathbf{m} = (x, y)$  に対して,

$$\begin{cases} \|\mathbf{m}\mathbf{f}'\|^2 + \|\mathbf{m}\mathbf{f}\|^2 = 2(x^2 + y^2 + c^2) \\ \|\mathbf{m}\mathbf{f}'\|^2 - \|\mathbf{m}\mathbf{f}\|^2 = 4cx \end{cases}$$

となる.  $\|\mathbf{m}\mathbf{f}'\| + \|\mathbf{m}\mathbf{f}\| = 2r > 2c > 0$  とおくと,

$$\|\mathbf{m}\mathbf{f}'\| - \|\mathbf{m}\mathbf{f}\| = \frac{2cx}{r}$$

であり, これから

$$\|\mathbf{m}\mathbf{f}'\| = r + \frac{cx}{r} \quad \text{かつ} \quad \|\mathbf{m}\mathbf{f}\| = r - \frac{cx}{r}$$

がわかる. こうして常に

$$\left(r + \frac{cx}{r}\right)^2 + \left(r - \frac{cx}{r}\right)^2 = 2(x^2 + y^2 + c^2),$$

すなわち

$$(r^2 - c^2)\left(\frac{x^2}{r^2} - 1\right) + y^2 = 0$$

がいえる.

さらに  $r = a_1$  とおき,  $a_2^2 = a_1^2 - c^2$  とすると, 楕円  $\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} = 1$  が得られる.

逆に  $E$  を楕円とする.

$$E = \left\{ \mathbf{m} \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} = 1 \right\} \quad (a_1 \geq a_2 \geq 0)$$

としてよい. ここで,  $r := a_1$ ,  $c := \sqrt{a_1^2 - a_2^2}$ ,  $\mathbf{f} := (c, 0)$ ,  $\mathbf{f}' := (-c, 0)$  とおくと,

$$E = \left\{ \mathbf{m} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\mathbf{m}\mathbf{f}'\| + \|\mathbf{m}\mathbf{f}\| = 2r \right\}$$

である. さらに  $\mathbf{p}, \mathbf{p}' \in \mathbb{R}^2$ ,  $r' > 0$  に対して,

$$E = \left\{ \mathbf{m} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\mathbf{m}\mathbf{p}'\| + \|\mathbf{m}\mathbf{p}\| = 2r' \right\}$$

であるとする.  $\mathbf{p} = (c', 0)$ ,  $\mathbf{p}' = (-c', 0)$  である  $c'$  が存在するが,

$$r' = a_1, \quad a_2'^2 = r'^2 - c'^2 \quad \text{すなわち} \quad r = r', \quad \mathbf{p} = \pm\mathbf{f}, \quad \mathbf{p}' = \pm\mathbf{f}'$$

となるので一意性が言える. □

定理 1.5  $\mathbf{f}, \mathbf{f}' \in \mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{f} \neq \mathbf{f}'$ ,  $2r < \|\mathbf{f}\mathbf{f}'\|$  とする. このとき

$$\left\{ \mathbf{m} \in \mathbb{R}^2 \mid \left| \|\mathbf{m}\mathbf{f}'\| - \|\mathbf{m}\mathbf{f}\| \right| = 2r \right\}$$

は双曲線である. 逆に, 1つの双曲線に対して  $\mathbf{f}$  と  $\mathbf{f}'$  の組と  $r$  は一意的に定まる.

$\mathbf{f}$  と  $\mathbf{f}'$  をこの双曲線の焦点という.  $\mathbf{f} := (c, 0)$ ,  $\mathbf{f}' := (-c, 0)$  とすると,

$$\left\{ \mathbf{m} \in \mathbb{R}^2 \mid \left| \|\mathbf{m}\mathbf{f}'\| - \|\mathbf{m}\mathbf{f}\| \right| = 2r \right\} = \left\{ \mathbf{m} \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{c^2 - r^2} = 1 \right\}.$$

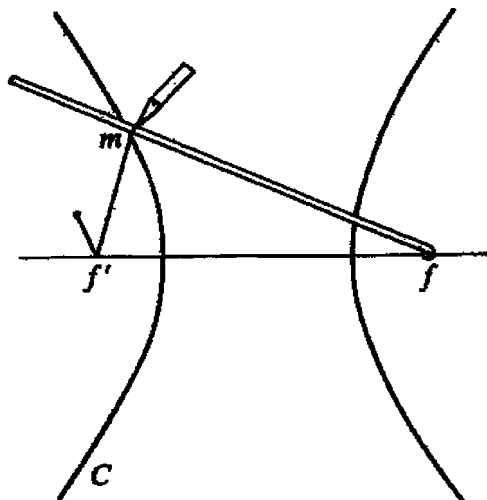


図 1.7: 双曲線の作図法

証明  $\mathbf{f} = (c, 0)$ ,  $\mathbf{f}' = (-c, 0)$  となるように軸をとると  $\mathbf{m} = (x, y)$  に対して,

$$\begin{cases} \|\mathbf{m}\mathbf{f}'\|^2 + \|\mathbf{m}\mathbf{f}\|^2 = 2(x^2 + y^2 + c^2) \\ \|\mathbf{m}\mathbf{f}'\|^2 - \|\mathbf{m}\mathbf{f}\|^2 = 4cx \end{cases}$$

となる.  $x > 0$  のとき,  $\|\mathbf{m}\mathbf{f}'\| - \|\mathbf{m}\mathbf{f}\| = 2r > 0$  とおくと,

$$\|\mathbf{m}\mathbf{f}'\| + \|\mathbf{m}\mathbf{f}\| = \frac{2cx}{r}$$

であり, これから

$$\|\mathbf{m}\mathbf{f}'\| = r + \frac{cx}{r} \quad \text{かつ} \quad \|\mathbf{m}\mathbf{f}\| = -r + \frac{cx}{r}$$



がわかる. こうして常に

$$\left(r + \frac{cx}{r}\right)^2 + \left(r - \frac{cx}{r}\right)^2 = 2(x^2 + y^2 + c^2),$$

すなわち

$$(r^2 - c^2)\left(\frac{x^2}{r^2} - 1\right) + y^2 = 0$$

がいえる.

さらに  $r = a_1$  とおき,  $a_2^2 = c^2 - a_1^2$  とすると, 双曲線  $\frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{a_2^2} = 1$  が得られる.  $x < 0$  のときも同様.

逆に  $H$  を双曲線とする.

$$H = \left\{ \mathbf{m} \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{a_2^2} = 1 \right\}$$

としてよい. ここで,  $r := a_1$ ,  $c := \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ ,  $\mathbf{f} := (c, 0)$ ,  $\mathbf{f}' := (-c, 0)$  とおくと,

$$H = \left\{ \mathbf{m} \in \mathbb{R}^2 \mid \left| \|\mathbf{m}\mathbf{f}'\| - \|\mathbf{m}\mathbf{f}\| \right| = 2r \right\}$$

である. さらに  $\mathbf{p}, \mathbf{p}' \in \mathbb{R}^2$ ,  $r' > 0$  に対して,

$$H = \left\{ \mathbf{m} \in \mathbb{R}^2 \mid \left| \|\mathbf{m}\mathbf{p}'\| - \|\mathbf{m}\mathbf{p}\| \right| = 2r' \right\}$$

であるとする.  $\mathbf{p} = (c', 0)$ ,  $\mathbf{p}' = (-c', 0)$  である  $c'$  が存在するが,

$$r' = a_1, \quad a_2^2 = c'^2 - r'^2 \quad \text{すなわち} \quad r = r', \quad \mathbf{p} = \pm\mathbf{f}, \quad \mathbf{p}' = \pm\mathbf{f}'$$

となるので一意性が言える. □

**定理 1.6**  $g$  を  $\mathbb{R}^2$  内の直線,  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^2$  を  $g$  上にはない点とする. また  $\mathbf{m}$  に対して,

$$d(\mathbf{m}, g) := \inf_{\mathbf{y} \in g} \|\mathbf{m}\mathbf{y}\|$$

を  $\mathbf{m}$  と  $g$  の距離とする. このとき,  $\|\mathbf{m}\mathbf{f}\| = d(\mathbf{m}, g)$  となる  $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^2$  の集合は放物線である. 逆に, 1つの放物線に対して点  $\mathbf{f}$  と直線  $g$  は一意的に定まる.  $\mathbf{f}$  をこの放物線の焦点といい,  $g$  を準線という.

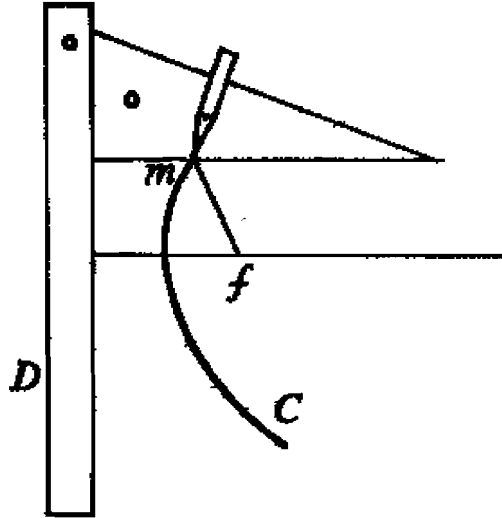


図 1.8: 放物線の作図法

証明  $g = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = -c \right\}$ ,  $f = (c, 0)$  となるように軸をとると  $\mathbf{m} = (x, y)$  に対して,

$$d(\mathbf{m}, g) = |x + c|, \quad \|\mathbf{m}f\|^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

となる.  $\|\mathbf{m}f\|^2 = d(\mathbf{m}, g)^2$  より

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = x^2 + 2cx + c^2 \iff y^2 = 4cx$$

でとなり, これは放物線である.

逆に  $P$  を

$$P = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = 4cx \right\}$$

となる放物線とする. ここで,  $f' \in \mathbb{R}^2$  と直線  $g'$  があって,

$$\|\mathbf{m}f'\| = d(\mathbf{m}, g')$$

であるとする.  $f'$  は放物線の対称軸  $y = 0$  上にあり,  $g'$  は対称軸に直交するので

$$g' = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = -c' \right\}, \quad f' = (c', 0)$$

と表せる. ここで  $P$  上の点  $(c, 2c)$  から  $f', g'$  までの距離は等しいので

$$\|\mathbf{m}f'\|^2 = d(\mathbf{m}, g')^2 \Rightarrow (c - c')^2 + (2c)^2 = |c + c'|^2 \quad \therefore c = c'$$

すなわち  $f' = f, g' = g$  となるので一意性が言える. □

定理 1.4, 定理 1.5, 定理 1.6 から 2 次式の零点集合としての円錐曲線の定義と焦点をに関する円錐曲線の (高等学校の教科書での) 定義が同値であることが示された. このことは次のようにまとめられる.

$$\|\mathbf{m}f\| + \|\mathbf{m}f'\| = \text{一定} \iff \text{楕円} \tag{1.14}$$

$$\|\mathbf{m}f'\| - \|\mathbf{m}f\| = \text{一定} \iff \text{双曲線} \tag{1.15}$$

$$\|\mathbf{m}f\| = d(\mathbf{m}, g) \iff \text{放物線} \tag{1.16}$$

### 1.2.2 単焦点の性質

**命題 1.7**  $g$  を  $\mathbb{R}^2$  内の直線,  $f \in \mathbb{R}^2$  を  $g$  上にはない点, また  $e$  を正の実数とすると,  $\mathbb{R}^2$  における非退化円錐曲線の空でない像 (円を除く) は

$$\left\{ \mathbf{m} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\mathbf{m}f\| = e \cdot d(\mathbf{m}, g) \right\}$$

という形の  $\mathbb{R}^2$  の部分集合である.

**証明**  $x = h$  を  $g$  の方程式とし,  $f$  の座標を  $(c, 0)$  とする. 求める部分集合は

$$(x - c)^2 + y^2 = e^2(x - h)^2 \tag{1.17}$$

で表せる.

$e \neq 1$  のとき,  $h = \frac{c}{e^2}$  とおくことでタイプ 1 またはタイプ 2 の方程式に帰着する.

$$\frac{x^2}{(c/e)^2} + \frac{y^2}{(1 - e^2)(c/e)^2} = 1$$

$e = 1$  のとき,  $h = -c$  とすると

$$y^2 = 4cx.$$

逆に、タイプ1、タイプ2、タイプ3の方程式は

$$\begin{array}{llll}
 c = \sqrt{a_1^2 - a_2^2} & e = \frac{c}{a_1}, & h = \frac{c}{e^2} & \text{楕円 } (a_1 > a_2 \text{ のとき}), \\
 c = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} & e = \frac{c}{a_1}, & h = \frac{c}{e^2} & \text{双曲線,} \\
 & e = 1 & & \text{放物線.}
 \end{array}$$

とおくことで(1.17)の形に書ける.

□

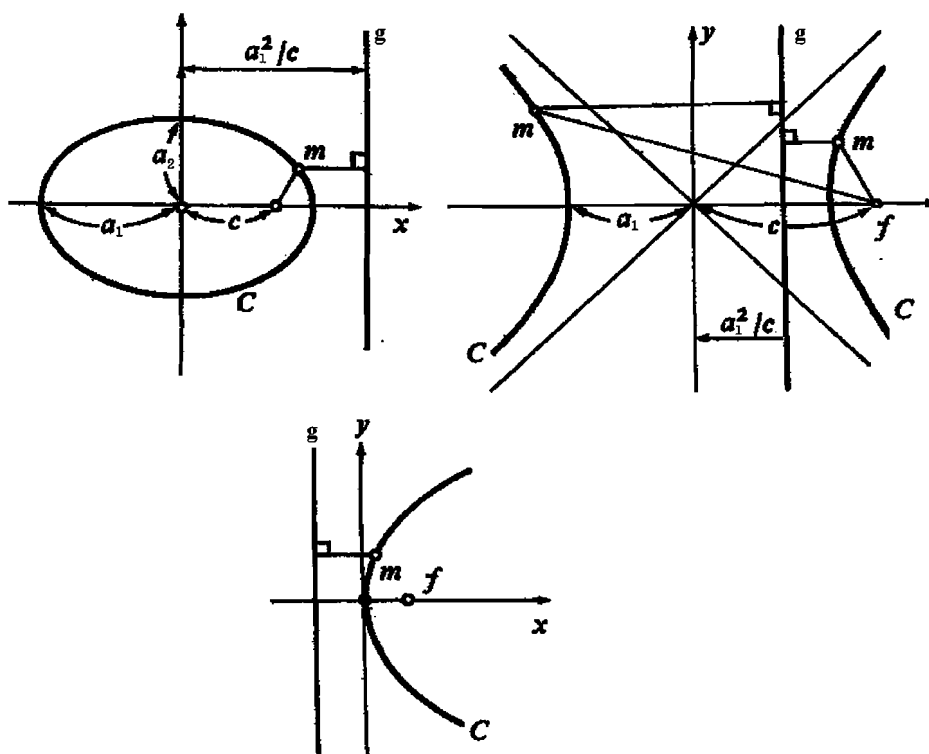


図 1.9: 焦点と準線からの距離の比：離心率

このとき、正の実数  $e$  を  $C$  の離心率という；楕円（放物線、双曲線）の場合は  $e < 1$ （それぞれ、 $e = 1$ ,  $e > 1$ ）となる。上の点  $f$  を  $C$  の焦点、 $g$  を準線という。楕円と双曲線は  $x$  軸（焦点軸）上に2つの焦点をもち、放物線は焦点を  $x$  軸上に1つだけもつ。

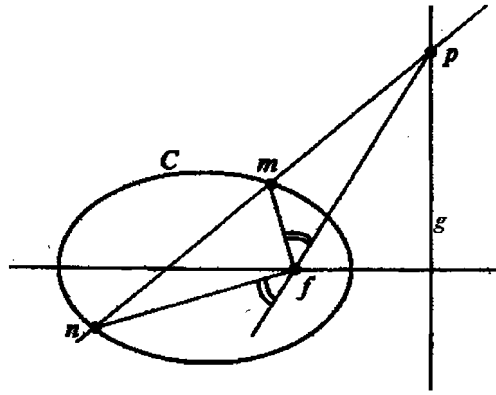


図 1.10: 準線上の点から引いた直線と円錐曲線の交点

$m, n \in C$  と  $p = g \cap mn$  を考える. そのとき  $pf$  は  $\angle mfn$  の外角の二等分線である. これは次が成り立つからである.

$$\frac{pm}{pn} = \frac{d(m, g)}{d(n, g)} = \frac{fm}{fn}.$$

ここで,  $n \rightarrow m$  とすると, 交線の極限として接線を得る.  $m$  での  $C$  の接線  $T$  が  $\angle mfp = \frac{\pi}{2}$  となる点  $p$  で  $g$  と交わることを示している. これは接線の作図法も与える (図 1.11).

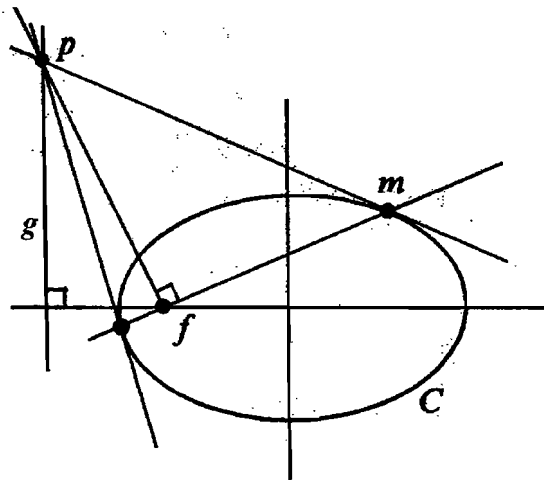


図 1.11: 準線上の点から引いた円錐曲線の接線

### 1.2.3 複焦点の性質

$f, f'$  と  $g, g'$  を2つの焦点とその (放物線や円ではない) 円錐曲線  $C$  の準線とする. 単焦点での性質より, 任意の  $m \in C$  に対して:

$$d(m, g) + d(m, g') = d(g, g') \quad \text{楕円の場合,}$$

$$|d(m, g) - d(m, g')| = d(g, g') \quad \text{双曲線の場合.}$$

が成り立つ. ここで単焦点の性質より  $\|mf\| = e \cdot d(m, g)$  なので

$$\|mf\| + \|mf'\| = e \cdot d(g, g') \quad \text{楕円の場合,}$$

$$\left| \|mf\| - \|mf'\| \right| = e \cdot d(g, g') \quad \text{双曲線の場合.}$$

となり, (1.14), (1.15) が得られる.

**接線** 単焦点での性質より,  $m$  での  $C$  の接線は双曲線 (楕円) の場合  $\angle fmf'$  の内角 (外角) 二等分線であることが導ける.

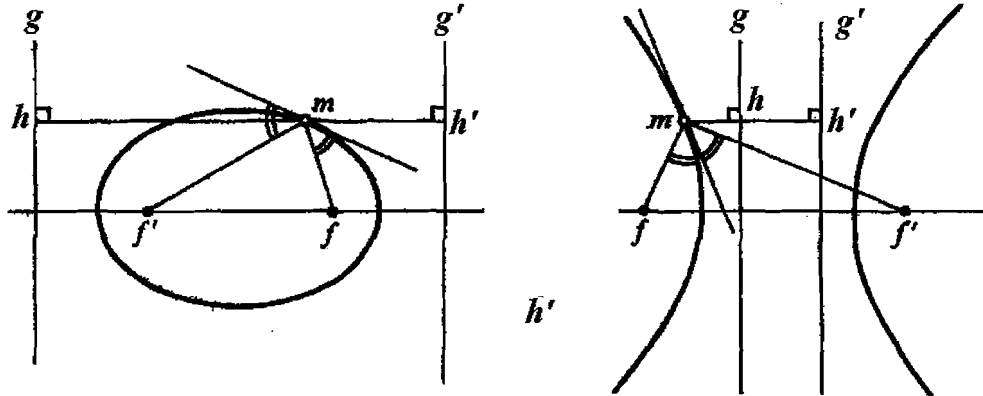


図 1.12: 2つの準線と2つの焦点の位置関係

**1つの焦点に関する垂足曲線** ある点  $p$  を含まない直線  $L$  に対して, 点  $p$  から下ろした垂線との交点を垂線の足という. この直線  $L$  が変化するときの垂線の足が描く曲線を垂足曲線 (pedal curve) という. (図 1.13)

$C$  が楕円であるとき,  $m$  での  $C$  の接線  $T$  に関する  $m$  の折り返し  $m'$  をとると,  $m'$  は焦点  $f$  を中心とする半径  $\|mf\| + \|mf'\|$  の円周上の点であり, 焦点  $f'$  に関する  $C$  の垂足曲線は  $C$  と同心かつ焦点軸の両端の2点で  $C$  と接する円である.

$C$ が放物線するとき、 $m$ での $C$ の接線 $T$ が $mf$ と $m$ を通る軸の平行線の二等分線である。このとき、垂足曲線は頂点での $C$ の接線である。

$C$ が双曲線であるときも、楕円の場合と同様、 $m'$ は焦点 $f$ を中心とする半径 $|\|mf\| - \|mf'\||$ の円周上の点であり、焦点 $f'$ に関する $C$ の垂足曲線は $C$ と同心かつ焦点軸の両端の2点で $C$ と接する円である。

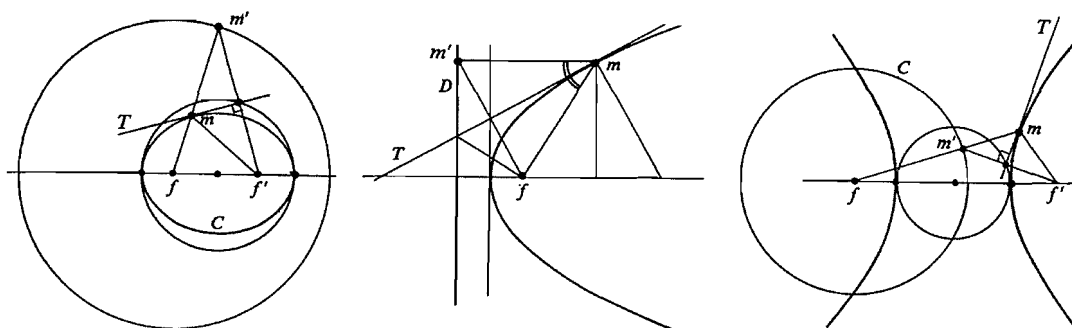


図 1.13: 垂足曲線

#### 1.2.4 空間的な性質

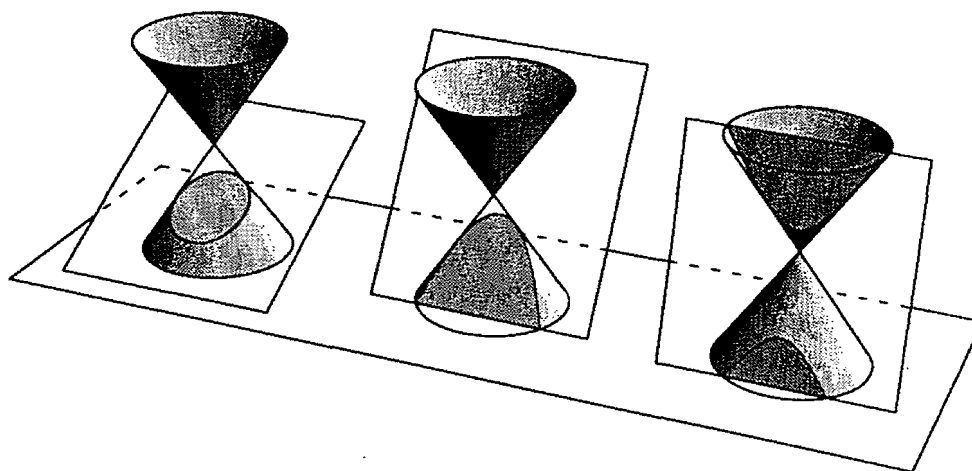


図 1.14: 円錐面の断面としての円錐曲線

“円錐曲線”ということば 円錐曲線はB.C.4世紀以来知られている。それらが実際に円錐面を平面で切ったときに得られる曲線であることを証明し、最初にそれらを“円錐曲線 (conic section)”と呼んだのはアポロニウス (Appolonius)(B.C.2世紀)であった。楕円 (ellipse), 放物線 (parabola), 双曲線 (hyperbola) という言葉は、アポ

ロニウスが“不足する (ellipsis)”, “一致する (parabole)”, “超越する (hyperbole)”, と呼んだことが語源とされている。

また, 回転錐の断面として定義された円錐曲線と, その単焦点または複焦点の性質により定義された円錐曲線との同値性を証明したのはベルギー人のダンデリン (Dandelin) とケトレ (Quételet) であった。

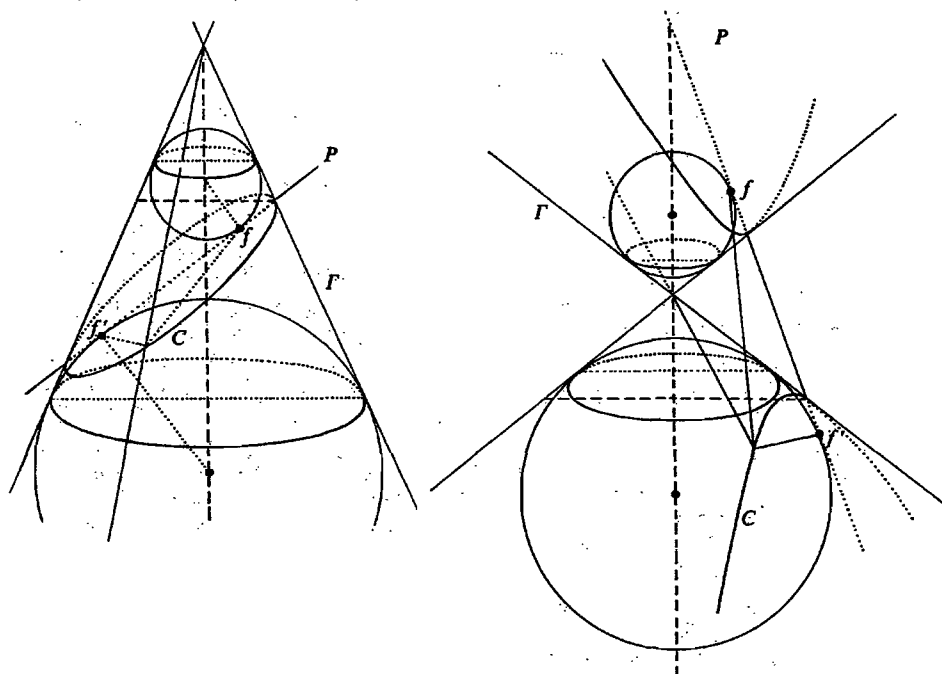


図 1.15: ダンデリンの球 (複焦点)

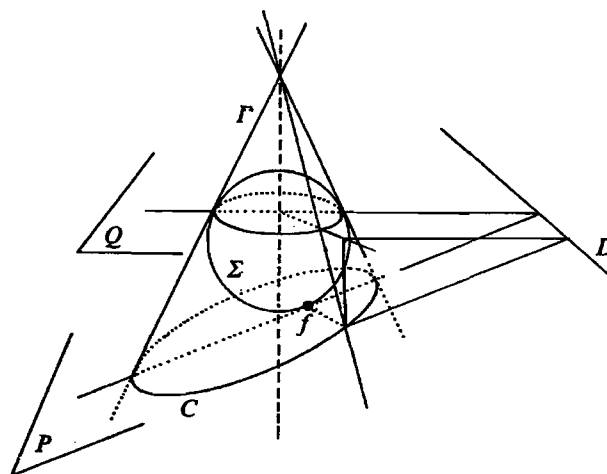


図 1.16: ダンデリンの球 (単焦点)

図 1.15 は複焦点の性質を, また図 1.16 は単焦点の性質を示している. これらの



性質は次のことに気をつければ示される：

- i) 任意の球の外点から球面に引いた2つの接線分は同じ長さをもつ
- ii) 錐  $\Gamma$  に内接し切断面  $P$  に接する少なくとも1つの球面  $\Sigma$  が存在する
- iii)  $Q$  が球面  $\Sigma$  と 錐  $\Gamma$  の接円を含む平面であるとき, 錐  $\Gamma$  上の点  $\mathbf{m}$  に対して,
 
$$\frac{d(\mathbf{m}, Q)}{d(\mathbf{m}, \Sigma \cap Q)} = \text{一定} \text{ が成り立つ}$$
- iv)  $D$  が  $D = P \cap Q$  を満たす交線であるとき, 切断面  $P$  上の点  $\mathbf{m}$  に対して,
 
$$\frac{d(\mathbf{m}, Q)}{d(\mathbf{m}, D)} = \text{一定} \text{ が成り立つ.}$$

### 1.3 共焦点円錐曲線

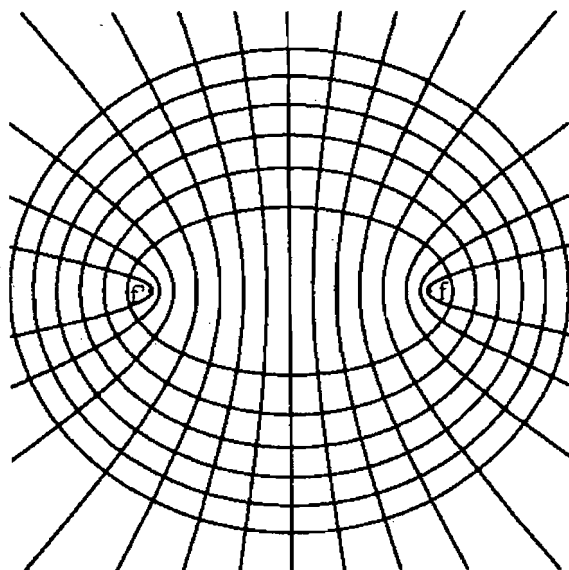


図 1.17: 共焦点円錐曲線

2つの円錐曲線が焦点を共有しているとき**共焦点**であるという. 2つの焦点が  $\mathbf{f} = (c, 0)$ ,  $\mathbf{f}' = (-c, 0)$  で与えられるとき, 共焦点である円錐曲線は次の方程式で与えられる.

$$C_\lambda := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{c^2 + \lambda} + \frac{y^2}{\lambda} = 1 \right\}, \quad (-c^2 < \lambda < 0, 0 < \lambda) \quad (1.18)$$

直交する2つの接線 焦点  $f, f'$  をもつ共焦点円錐曲線について,  $p$  は直線  $ff'$  上にない  $\mathbb{R}^2$  の点とする. 定理 1.4, 定理 1.5 より, 点  $p$  を通る楕円と双曲線はそれぞれ1つだけ存在する. さらに, 複焦点の性質より, その楕円, 双曲線の点  $p$  におけるそれぞれの接線は  $\angle fpf'$  の外角, 内角の2等分線であるので, 2接線は直交する.

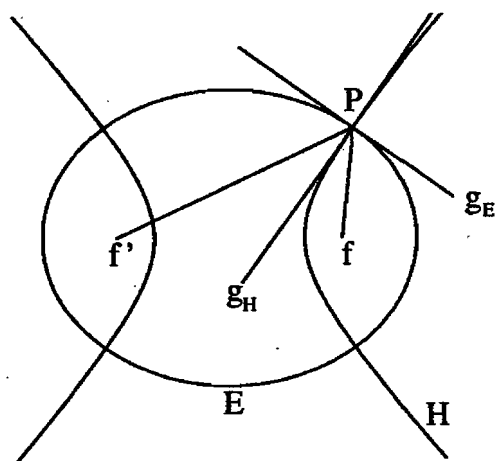


図 1.18: 楕円と双曲線の接線は直交

さらに, 次の定理が成り立つ.

**定理 1.8 (ポンスレーの小定理)** 焦点  $f, f'$  をもつ共焦点円錐曲線を  $C_\lambda$  とする. ここで  $g$  と  $g'$  が点  $p \notin C_\lambda$  から円錐曲線  $C_\lambda$  へ引いた異なる2本の接線であるとき, 対  $\{pf, pf'\}$  と  $\{g, g'\}$  は同じ2等分線をもつ.

**証明** 円錐曲線  $C_\lambda$  が楕円である場合を証明する. 双曲線の場合は同様にできる.

上述の事実より, 点  $p$  を通り,  $f, f'$  を焦点にもつ楕円と双曲線がそれぞれ1つずつ存在しその2つの接線は  $\angle fpf'$  の外角, 内角の2等分線である. ここで  $\angle fpf'$  の外角, すなわち楕円の接線  $t$  と  $\{pf, pf'\}$  がなす角を  $\beta$  とし, また点  $p$  からの2本の接線  $g$  と  $g'$  と楕円の接線  $t$  がなす角をそれぞれ  $\alpha, \alpha'$  とするとき,  $\alpha = \alpha'$  なることを示す. (図 1.19)

2本の接線  $g$  と  $g'$  と円錐曲線  $C_\lambda$  の接点を  $q, q'$ ,  $\tilde{f}$  を  $f$  の直線  $g$  に関する鏡映,  $\tilde{f}'$  を  $f'$  の直線  $g'$  に関する鏡映とする.  $r$  と  $r'$  をそれぞれ  $g$  と  $g'$  上にとり,  $q$  が  $r$

と  $p$  の間,  $q'$  が  $r'$  と  $p$  の間となるように  $r$  と  $r'$  をとる. このとき

$$\angle fqr = \angle r\tilde{q}\tilde{f} = \angle pqf' \quad \text{かつ} \quad \angle f'q'r' = \angle r'q'\tilde{f}' = \angle pq'f$$

したがって, 点  $f, q', \tilde{f}'$  と点  $f', q, \tilde{f}$  はそれぞれ同一直線上にある. また,  $\tilde{f}$  は  $f$  の直線  $g$  に関する鏡映なので

$$\|\tilde{f}f'\| = \|qf'\| + \|q\tilde{f}\| = \|qf'\| + \|qf\|$$

同様に

$$\|\tilde{f}'f\| = \|q'f\| + \|q'\tilde{f}'\| = \|q'f\| + \|q'f'\|$$

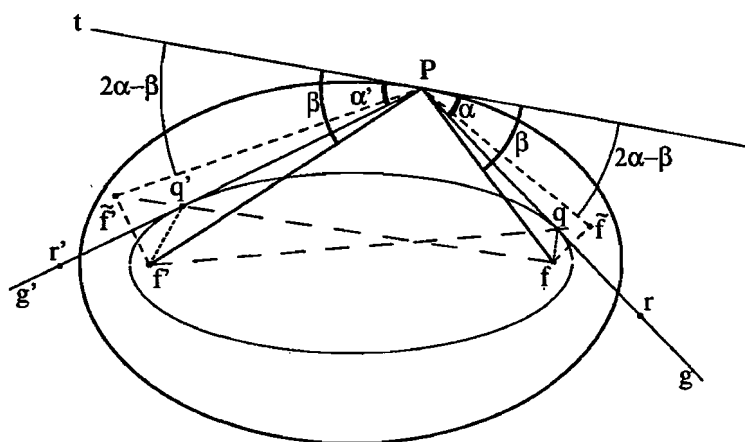


図 1.19: 共焦点な円錐曲線への接線は角の 2 等分線

さらに, 楕円  $C_\lambda$  の定義から,  $\|qf'\| + \|qf\| = \|q'f'\| + \|q'f\|$  なので,

$$\|\tilde{f}f'\| = \|\tilde{f}'f\|$$

以上より,  $\triangle p\tilde{f}'f$  と  $\triangle p\tilde{f}f'$  が合同であり, 2つの3角形は点  $p$  を中心とする回転で一致する. そのときの回転量は  $\angle fpf = \angle f'pf'$  すなわち,

$$2(\beta - \alpha) = 2(\beta - \alpha')$$

となり,  $\alpha = \alpha'$  が結論される. □

## 1.4 パスカルの定理とその応用

### 1.4.1 パスカル (Pascal) の定理

定理 1.9 (パスカル) 円錐曲線上の 6 点  $a, b, c, d, e, f$  につくられる 3 組の対辺  $ab$  と  $de$ ,  $cd$  と  $fa$ ,  $ef$  と  $bc$  の交点は共線である.

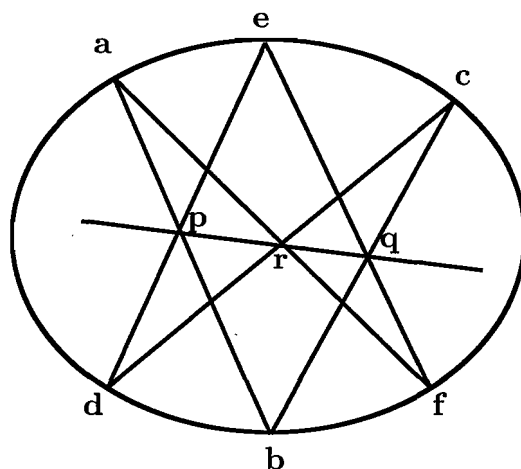


図 1.20: パスカルの定理

証明 円錐曲線上の 2 点  $a, b$  を結ぶ直線を  $ab = 0$  で表す. すると, 円錐曲線は 4 点  $a, b, c, d$  を通るので, その方程式は

$$ab \cdot cd - kbc \cdot ad = 0 \quad (1.19)$$

と表される. 同様に, 円錐曲線は 4 点  $a, d, e, f$  も通るので, その方程式は

$$de \cdot fa - k'ef \cdot ad = 0 \quad (1.20)$$

とも表せる. 2 式は同一の円錐曲線を表すので, ある実数  $h$  に対して恒等的に,

$$ab \cdot cd - kbc \cdot ad = h(de \cdot fa - k'ef \cdot ad)$$

すなわち,

$$ab \cdot cd - hde \cdot fa = (kbc - hk'ef)ad$$

が成り立つ. この式の値を 0 にする点の集合を考える.

右辺は 1 次式の積に分解されているので 2 本の直線を表している. その 1 本は直線  $ad = 0$  であり, もう 1 本は直線  $bc = 0$  と  $ef = 0$  の交点  $q$  を通る直線である.

また, 点  $a$  と点  $d$  は左辺を 0 にするのは明らかである. さらに, 直線  $ab = 0$  と  $de = 0$  の交点  $p$  と直線  $cd = 0$  と  $fa = 0$  の交点  $r$  も左辺を 0 にする.

点  $p, r$  は直線  $ad = 0$  上にないので, 点  $q$  を通る直線上にある. すなわち, 対辺  $ab$  と  $de$ ,  $cd$  と  $fa$ ,  $ef$  と  $bc$  の交点  $p, r, q$  は共線である.  $\square$

### 1.4.2 パスカルの定理の系

系 1.10 (パップス) 直線  $l$  上の 3 点  $a, b, c$  と  $l$  と異なる直線  $l'$  上の 3 点  $a', b', c'$  があるとき, 3 組の辺  $(ab', a'b)$ ,  $(bc', b'c)$ ,  $(ca', c'a)$  の交点は共線である.

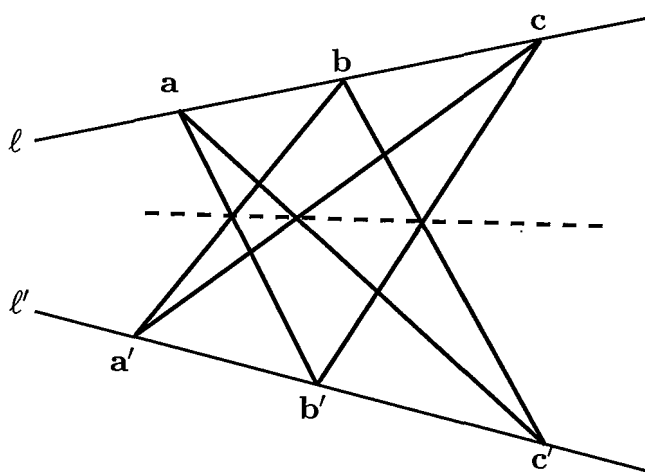


図 1.21: パップスの定理

証明 パスカルの定理で円錐曲線が 2 直線に退化した場合と考えればよい.  $\square$

後の第3章で述べる幾何学における双対原理より、パスカルの定理の双対として次の結果が得られる。

系 1.11 (ブリアンション) 円錐曲線上の6点  $a, b, c, d, e, f$  で接する6直線で作られる6辺形の対角線は共点であるか、またはすべて平行である。

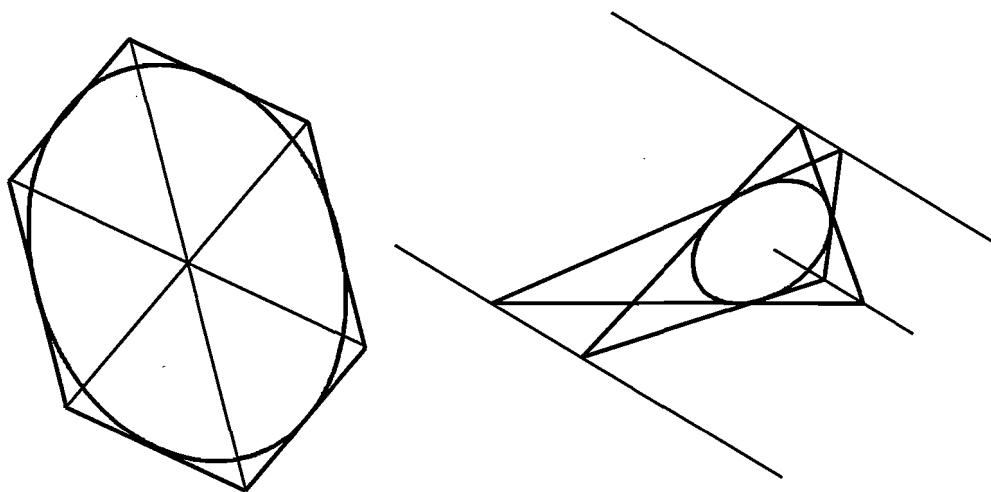


図 1.22: ブリアンションの定理

## 第2章 射影変換, 複比, 対合

**実像と影** 西欧ではルネッサンス期に既に確立された遠近画法は射影のアイデアを取り入れた描画法であった. 下の図でも分かる通り 1 点から出た光に対する物体 (原像) とその影 (像) では, 分点の比や平行性が保存されない. すなわち, 射影が線形写像ではないことを示している.

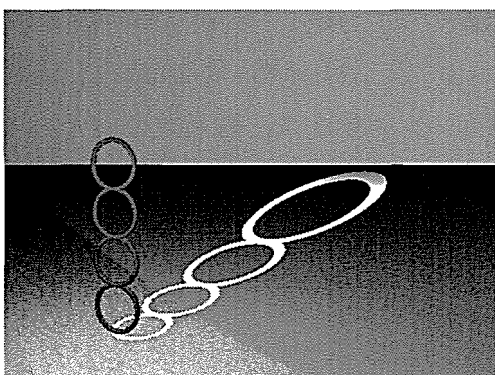


図 2.1: 射影は分点の比を保存しない

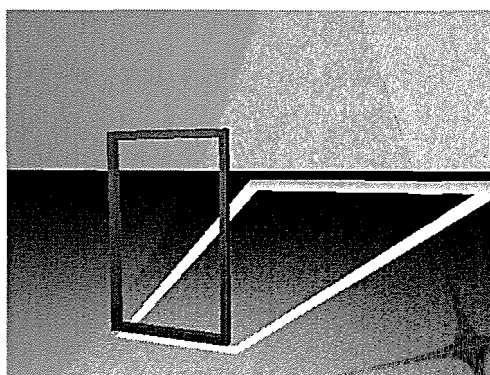


図 2.2: 射影は平行性を保存しない

“幾何学とは変換で不変な図形の性質を研究する分野”<sup>1</sup>である. したがって射影幾何学とは,  $f: \text{原像} \mapsto \text{像}$  という射影変換における不変な性質 (射影的性質) を調べることであり, それによって変換の特徴づけを考える.

この章は射影平面での幾何学を扱うための準備をする. §2.1 では, 射影変換の不変量である“複比 (非調和比)” という概念を導入する. §2.2 では, 複比の性質について考察する. §2.3 では, 射影幾何学で大切な役割を果たす“対合” という概念を導入する.

<sup>1</sup>クラインのエルランゲン・プログラムによる

## 2.1 射影変換, 複比

### 2.1.1 配景と射影

点  $p$  を通る直線  $l_1, l_2, l_3, \dots$  の集合を線束といい,  $\{l_1, l_2, l_3, \dots\}_p$  または  $\{l_i\}_p$  で表し, 点  $p$  を線束の中心という. また直線  $L$  上の点  $a_1, a_2, a_3, \dots$  の集合を点列といい,  $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}_L$  または  $\{a_i\}_L$  と表す.

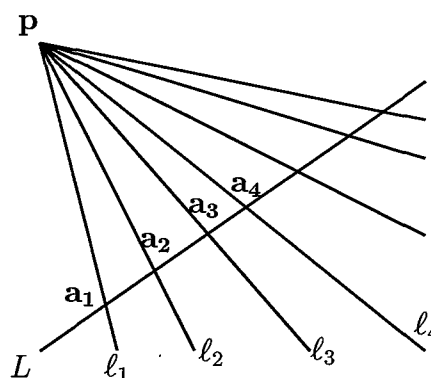


図 2.3: 配景的対応

**配景的対応** 線束  $\{l_1, l_2, l_3, \dots\}_p$  と交わる (点  $p$  を通らない) 直線  $L$  による自然な 1 対 1 対応が線束  $\{l_1, l_2, l_3, \dots\}_p$  と点列  $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}_L$  の間に考えられ, 点  $p$  から直線  $L$  に射影する, 直線  $L$  で線束  $\{l_1, l_2, l_3, \dots\}_p$  を切断するという. また, その対応は配景的 (perspective) であるといい,

$$\{l_1, l_2, l_3, \dots\}_p \bar{\wedge} \{a_1, a_2, a_3, \dots\}_L$$

と表し, そのように対応させることを配景写像という.

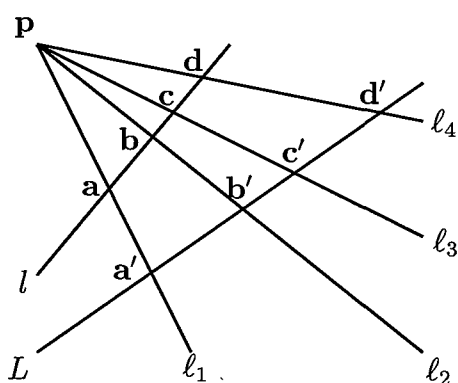


図 2.4: 配景的対応

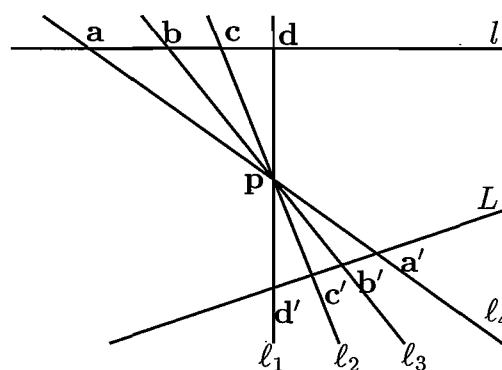


図 2.5: 配景的対応

これより, 点列から点列への配景写像が考えられる.



直線  $l$  上の点列  $\{a, b, c, d\}_l$  から直線  $L$  上の点列  $\{a', b', c', d'\}_L$  への対応において、対応点を結んだ直線が共点である、すなわち、2つの点列にある線束による1対1対応が定められるとき、2つの点列の対応は配景的であるといい、

$$\{a, b, c, d\}_l \bar{\wedge} \{a', b', c', d'\}_L$$

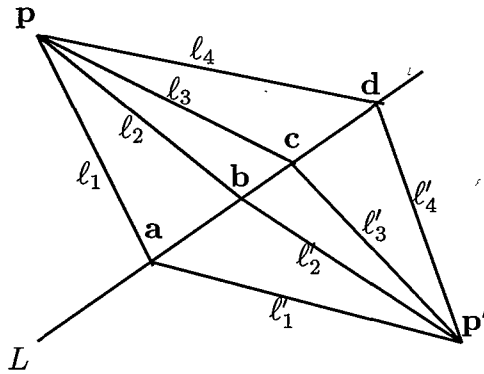


図 2.6: 配景的対応

と表す。

同様に、点  $p$  を通る線束  $\{l_1, l_2, l_3, l_4\}_p$  から点  $p'$  を通る線束  $\{l'_1, l'_2, l'_3, l'_4\}_{p'}$  への対応を考えると、対応する直線の交点が共線であるとき、すなわち、2つの線束が1つの点列によって1対1対応が定められるとき、2つの線束の対応は配景的であるといい、

$$\{l_1, l_2, l_3, l_4\}_p \bar{\wedge} \{l'_1, l'_2, l'_3, l'_4\}_{p'}$$

と表す。

2つ以上の配景写像の合成で得られる点列（線束）はもとの点列（線束）と必ずしも“配景的対応”を満たさない。すなわち、“配景的対応”は推移的ではない<sup>2</sup>ので、配景的対応は同値関係ではない。そこで、有限回の配景写像で得られる、点列と点列、線束と線束、点列と線束の対応を射影的 (projective) という。また、そのように対応させることを射影変換あるいは射影写像という。“射影的対応”とは、配景写像での不変量だけに注目するので同値関係を満たす対応関係である。配景的対応の記号“ $\bar{\wedge}$ ”と区別して、射影的対応は“ $\wedge$ ”という記号を用いて表し、例えば次のように使う。

$$\begin{aligned} \{a, b, c, d\}_l \bar{\wedge} \{a', b', c', d'\}_L \bar{\wedge} \{a'', b'', c'', d''\}_{L'} \\ \implies \{a, b, c, d\}_l \wedge \{a'', b'', c'', d''\}_{L'} \end{aligned}$$

<sup>2</sup>例えば、2つの線束がいくつかの配景写像で対応がついても、その交点の軌跡が直線ではなく2次曲線になる場合がある。

### 2.1.2 メネラウスの定理からの考察

高等学校の教科書にも登場する次の定理を利用して射影変換の不変量を導く.

**定理 2.1 (Menelaus)**  $\triangle abc$  の辺  $bc, ca, ab$ , またはその延長上の 3 点  $x, y, z$  が共線であるための必要十分条件は

$$\frac{az}{zb} \cdot \frac{bx}{xc} \cdot \frac{cy}{ya} = -1 \quad (2.1)$$

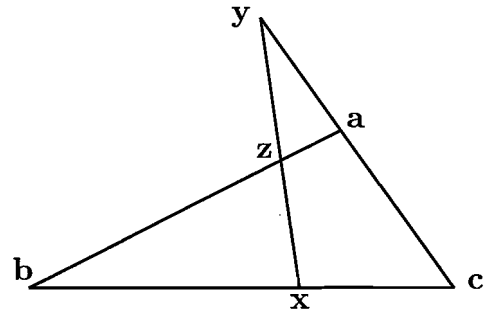


図 2.7: メネラウスの定理

この定理を既知として下図を考える.

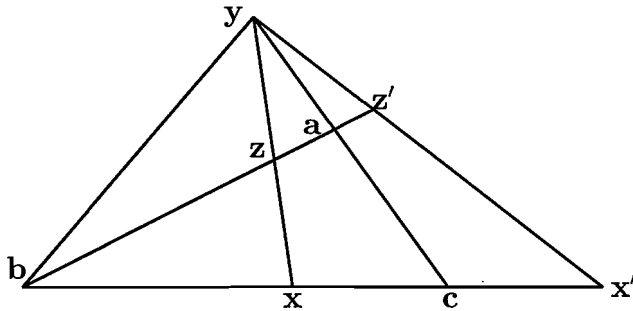


図 2.8: 射影変換の不変量

点  $y$  を通る線束は直線  $bz'$  上の点列  $\{b, z, a, z'\}_{bz'}$  を直線  $bx'$  上の点列  $\{b, x, c, x'\}_{bx'}$  に対応させる配景写像を与える.

ここで分点の比に関する射影的性質を調べるために  $\triangle abc$  と 3 点  $x, y, z$  に関してメネラウスの定理を適用すると

$$\frac{az}{zb} \cdot \frac{bx}{xc} \cdot \frac{cy}{ya} = -1 \quad (2.2)$$

次に  $\triangle abc$  と 3 点  $x', y, z'$  に関してメネラウスの定理を適用すると

$$\frac{az'}{z'b} \cdot \frac{bx'}{x'c} \cdot \frac{cy}{ya} = -1 \quad (2.3)$$

ここで (2.2)(2.3) を辺々割って整理すると

$$\frac{az}{zb} \cdot \frac{bz'}{z'a} = \frac{cx}{xb} \cdot \frac{bx'}{x'c} \quad \left( \frac{az}{zb} : \frac{az'}{z'b} = \frac{cx}{xb} : \frac{cx'}{x'b} \right) \quad (2.4)$$

が得られる. 配景的対応で

$$b \longleftrightarrow b, \quad z \longleftrightarrow x, \quad a \longleftrightarrow c, \quad z' \longleftrightarrow x'.$$

なので、(2.4) 式は配景写像の前後で対応する4点の2つの分点比の比が不変であることを示す。この2つの分点比は“複比”と呼ばれ、点列から点列への射影変換に関する不変量である。

定義 2.2 直線上の4点  $a, b, c, d$  の分点比の比

$$\frac{ac}{cb} \cdot \frac{bd}{da} \quad \left( \text{または, } \frac{ac}{cb} : \frac{ad}{db} \right) \quad (2.5)$$

を点列の複比といい、 $[a, b, c, d]_L$  と表す。

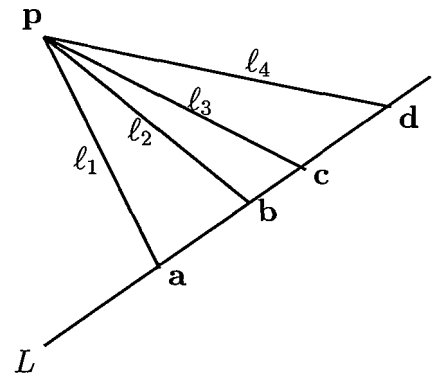


図 2.9: 複比

さらに、点列の複比は点  $p$  を1つの頂点とする三角形の面積比としても解釈でき、

$$\begin{aligned} \frac{ac}{cb} \cdot \frac{bd}{da} &= \frac{\Delta_{pac}}{\Delta_{pcb}} \cdot \frac{\Delta_{pbd}}{\Delta_{pda}} \\ &= \frac{\|pa\| \cdot \|pc\| \sin \angle apc}{\|pc\| \cdot \|pb\| \sin \angle cpb} \cdot \frac{\|pb\| \cdot \|pd\| \sin \angle bpd}{\|pd\| \cdot \|pa\| \sin \angle dpa} \\ &= \frac{\sin \angle apc}{\sin \angle cpb} \cdot \frac{\sin \angle bpd}{\sin \angle dpa} \end{aligned} \quad (2.6)$$

が成り立つ。このとき、最後の式は点列の位置にはよらずに4本の直線のなす角のみに依存しているので、これを線束の複比といい、 $[l_1, l_2, l_3, l_4]_p$  と表す。

(2.6) は、“射影”や“切断”で複比は不変であることを示しており、点列と線束で区別する必要がないので、今後は単に複比 (cross-ratio) という。

## 2.2 複比の性質

### 2.2.1 座標変換関数としての複比

前節で導入した複比 (2.5) について、 $d$  を変数とする関数、すなわち

$$f_{a,b,c}(d) := [a, b, c, d]_L = \frac{ac}{cb} \cdot \frac{bd}{da} \quad \left( = \frac{(c-a)(d-b)}{(b-c)(a-d)} \right) \quad (2.7)$$

と見る.  $\frac{1}{0} = \infty$  とすると,

$$f_{a,b,c}(a) = \frac{ac}{cb} \cdot \frac{ba}{aa} = \infty, \quad f_{a,b,c}(b) = \frac{ac}{cb} \cdot \frac{bb}{ba} = 0, \quad f_{a,b,c}(c) = \frac{ac}{cb} \cdot \frac{bc}{ca} = 1.$$

が成り立つので,

$$a \longleftrightarrow \infty, \quad b \longleftrightarrow 0, \quad c \longleftrightarrow 1.$$

という対応がわかる. 直線  $L$  を座標を入れた直線とすると,

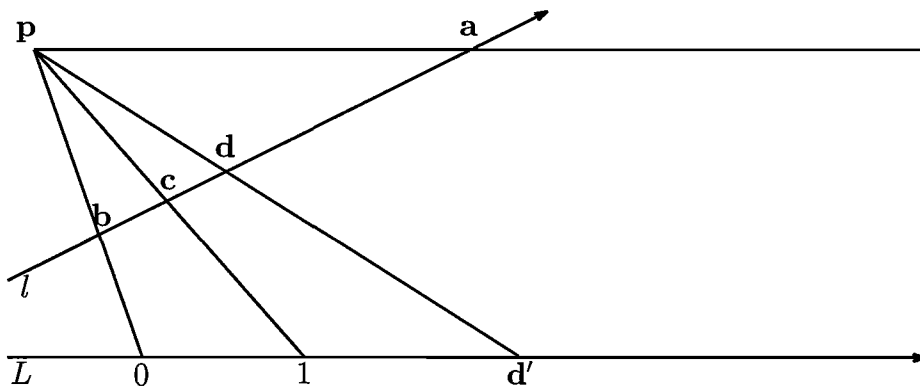


図 2.10: 座標への対応

図 2.10 のような配景的対応が考えられるので,

$$\{a, b, c, d\}_l \bar{\wedge} \{\infty, 0, 1, d'\}_L.$$

このとき, 複比は不変なので

$$[a, b, c, d]_l = [\infty, 0, 1, d']_L$$

が成り立ち,  $\frac{\infty - 1}{\infty - d'} = 1$  と考えると,

$$[a, b, c, d]_l = \frac{\infty - 1}{1 - 0} \cdot \frac{d' - 0}{\infty - d'} = d' \quad (2.8)$$

が得られる. すなわち, 直線と直線の間での射影変換では  $\infty, 0, 1$  に相当する点として  $a, b, c$  を決めると, 4 番目の点  $d$  の座標がその複比によって一意に定ま

る. このような基準になる3つの点の組(無限遠点, 原点, 単位点)を射影直線における射影基(あるいは基点系)という.

**複比の意味** 図2.10は,  $p$ を視点として無限に伸びる数直線  $L$ を直線  $l$ に1点透視している様子を表す図とも解釈できる. そのとき直線  $l$ 上で, 点  $a$ は対応点  $\infty$ を, 点  $b$ は対応点  $0$ を, 点  $c$ は対応点  $1$ をそれぞれ表す. (2.8)式は複比  $[a, b, c, d]_l$ が対応点  $d'$ の座標と一致することを示している. すなわち, 複比  $[a, b, c, d]_l$ は無遠点を含む直線  $L$ の座標変換関数であるといえる.

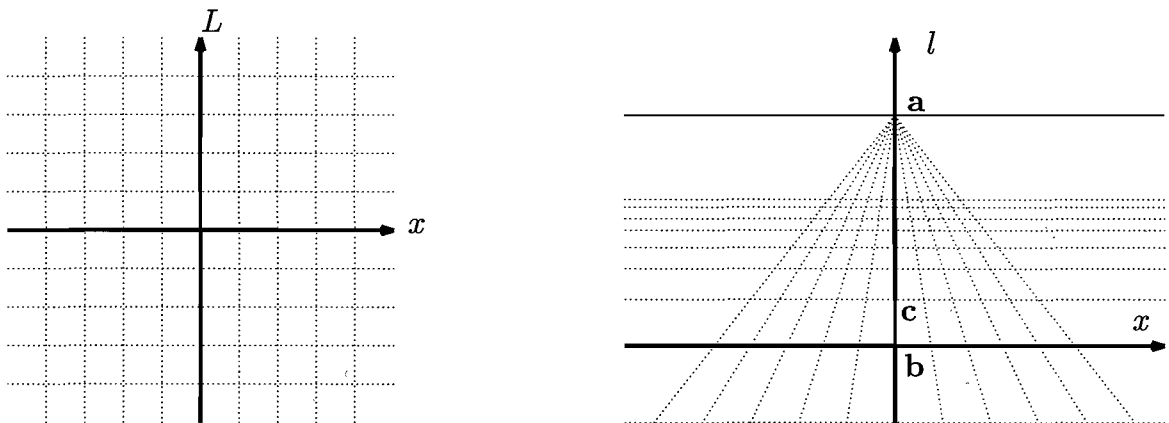


図 2.11: 等間隔の座標も無限遠をいれると等間隔では描けない

次の2つの双対な結果は上の議論から得られる.

**命題 2.3**  $\{a, b, c, d\}$ を同一直線上の異なる点, また  $\{a, b', c', d'\}$ も同様とする. すると, 3直線  $bb', cc', dd'$ が1点で交わる時, またそのときに限り  $[a, b, c, d] = [a, b', c', d']$ となる.

**系 2.4**  $\{l_1, l_2, l_3, l_4\}$ を射影平面の同じ線束における異なる直線とし, また  $\{l_1, l_2, l'_3, l'_4\}$ も同様とする. すると, 3交点  $l_2 \cap l'_2, l_3 \cap l'_3, l_4 \cap l'_4$ が同一直線上にあるとき, またそのときに限り  $[l_1, l_2, l_3, l_4] = [l_1, l_2, l'_3, l'_4]$ となる.

## 2.2.2 置換の作用

$\{a, b, c, d\}$  は直線  $L$  上の異なる 4 点とする. このとき, その 4 点の複比は順序に依存する; その依存性は次のように表される.

命題 2.5  $[a, b, c, d]_L = [b, a, c, d]_L^{-1} = [a, b, d, c]_L^{-1}$

$$[a, b, c, d]_L + [a, c, b, d]_L = 1.$$

証明  $[a, b, c, d]_L = \frac{ac}{cb} \cdot \frac{bd}{da}$

$$[b, a, c, d]_L = \frac{bc}{ca} \cdot \frac{ad}{db} = \frac{cb}{ac} \cdot \frac{da}{bd} = \left( \frac{ac}{cb} \cdot \frac{bd}{da} \right)^{-1}$$

$$[a, b, d, c]_L = \frac{ad}{db} \cdot \frac{bc}{ca} = \frac{bc}{ca} \cdot \frac{ad}{db} = \frac{cb}{ac} \cdot \frac{da}{bd} = \left( \frac{ac}{cb} \cdot \frac{bd}{da} \right)^{-1}$$

以上より第 1 式が示された.

$$\begin{aligned} [a, b, c, d]_L + [a, c, b, d]_L &= \frac{ac}{cb} \cdot \frac{bd}{da} + \frac{ab}{bc} \cdot \frac{cd}{da} \\ &= \frac{ba \cdot dc + ac \cdot db}{bc \cdot da} \\ &= \frac{ba \cdot (db + bc) + (bc - ba) \cdot db}{bc \cdot da} \\ &= \frac{ba \cdot bc + bc \cdot db}{bc \cdot da} \\ &= \frac{bc \cdot (db + ba)}{bc \cdot da} = \frac{bc \cdot da}{bc \cdot da} = 1 \quad \square \end{aligned}$$

命題 2.5 より次の系が成り立つ.

系 2.6  $[a, b, c, d]_L = [c, d, a, b]_L = [b, a, d, c]_L = [d, c, b, a]_L$

系 2.7  $a, b, c, d$  の順列の個数は  $24 (= 4!)$  あるので, その並べ替えによって複比は高々 6 つの値をとる.  $[a, b, c, d]_L = k$  であるとき, 残りの値は次の 5 つであ

る。(系 2.6 より同じ値になるものが各 4 つある)

$$\frac{1}{k}, 1-k, 1-\frac{1}{k}, \frac{1}{1-k}, \frac{k}{k-1}.$$

**証明** 実際に計算して 5 つの値が得られるものを示す.

$$\begin{aligned} [b, a, c, d]_L &= [c, d, b, a]_L = [a, b, d, c]_L = [d, c, a, b]_L = \frac{1}{k}, \\ [a, c, b, d]_L &= [b, d, a, c]_L = [c, a, d, b]_L = [d, b, c, a]_L = 1-k, \\ [b, c, a, d]_L &= [a, d, b, c]_L = [c, b, d, a]_L = [d, a, c, b]_L = 1-\frac{1}{k}, \\ [c, a, b, d]_L &= [b, d, c, a]_L = [a, c, d, b]_L = [d, b, a, c]_L = \frac{1}{1-k}, \\ [c, b, a, d]_L &= [a, d, c, b]_L = [b, c, d, a]_L = [d, a, b, c]_L = \frac{k}{k-1}. \quad \square \end{aligned}$$

### 2.2.3 調和分割

**定義 2.8** 同一直線上の 4 点  $\{a, b, c, d\}$  が,  $[a, b, c, d] = -1$  を満たし, 次の条件のどちらかを満たすとき **調和分割** であるという.

3 点が一致してかつ 4 番目の点が異なる, または, すべての点が互いに異なる

**例**  $a, b, c$  が直線  $L$  上にあるとき,

$$a, b, c, \infty_L \text{ が調和分割である} \iff c \text{ が } ab \text{ の中点である.}$$

**例** 数直線上の座標が  $a, b, c, d$  となる 4 点  $a, b, c, d$  について

$$a, b, c, d \text{ が調和分割である} \iff 2(ab + cd) = (a + b)(c + d)$$

$$a = 0 \text{ ならば, } \frac{2}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d}, \text{ また, } b = -a \text{ であれば, } a^2 = b^2 = cd \text{ が成り立つ.}$$

**完全四角形** 4 点  $\{a, b, c, d\}$  は, どの 3 点も同一直線上にないとする. そのうちの 2 点を通る 6 直線からなる図形を **完全四角形** という. このとき,  $e$  を直線  $ab$  と  $cd$  の交点,  $f$  を直線  $ad$  と  $bc$  の交点,  $g$  を直線  $ac$  と  $bd$  の交点,  $h$  を直線  $ac$  と  $ef$  の交点とする

$a, c, g, h$  は調和分割になる.

このことは高校数学にも登場する以下のチェバの定理を用いると容易に示せる.

**定理 2.9 (Ceva)**  $\triangle abc$  の頂点  $a, b, c$  とその各対辺, または延長上の 3 点  $x, y, z$  を結ぶ直線  $ax, by, cz$  が共点であるための必要十分条件は

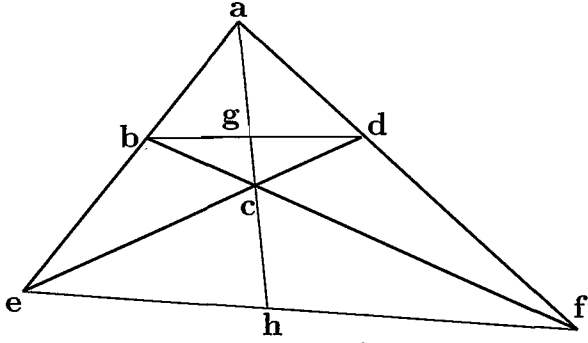


図 2.12: 完全四角形

$$\frac{az}{zb} \cdot \frac{bx}{xc} \cdot \frac{cy}{ya} = 1 \tag{2.9}$$

実際, 図 3.13 において  $\triangle ace$  と 3 点  $b, d, h$  に関してチェバの定理を適用すると

$$\frac{ah}{hc} \cdot \frac{cd}{de} \cdot \frac{eb}{ba} = 1 \tag{2.10}$$

次に  $\triangle ace$  と 3 点  $b, d, g$  に関してメネラウスの定理を適用すると

$$\frac{ag}{gc} \cdot \frac{cd}{de} \cdot \frac{eb}{ba} = -1 \tag{2.11}$$

ここで (2.11)(2.10) を辺々割って整理すると

$$\frac{ag}{gc} \cdot \frac{hc}{ah} = -1 \iff \frac{ag}{gc} \cdot \frac{ch}{ha} = -1$$

すなわち,  $[a, c, g, h] = -1$  なので,  $a, c, g, h$  は調和分割になる. □

**定義 2.10**  $[a, b, m, n] = -1$  を満たすとき,  $n$  と  $m$  は  $a, b$  に関して調和共役であるという. これを分点比で考えると, 点  $a, b$  に関する同じ比の内分点と外分点の関係に他ならない.



## 2.3 対合

### 2.3.1 2点を交換する射影変換

**定理 2.11** 直線  $L$  を自身に写す射影変換  $\varphi$  において  $\varphi(a) = a'$ ,  $\varphi(a') = a$  となる1組の点対  $(a, a')$  ( $a \neq a'$ ) があれば, 他の任意の点  $p$  に対して  $\varphi(p) = p'$ ,  $\varphi(p') = p$  を満たす. このとき, 射影変換  $\varphi$  を対合といい,

$$\varphi = \varphi^{-1} \iff \varphi^2 = \text{Id}_L \quad (\text{恒等写像}) \quad (2.12)$$

で定義される. また, 互いに写り合う点対  $(p, p')$  は対合をなすといい, 点対  $(p, p')$  を対合  $\varphi$  における共役点という.

**証明**  $a, a'$  と異なる任意の点  $p \in L$  をとる.  $\varphi(p) = p'$ ,  $\varphi(p') = p''$  としたとき,  $p'' = p$  となることを示す.

射影的対応

$$\{a, a', p, p'\}_L \cap \{a', a, p', p''\}_L \cap \{a, a', p'', p'\}_L$$

において, 最左辺と最右辺を比べると, 3点  $a, a', p'$  が自身に対応している. 一般に, 射影変換では複比が保存されるので, もし写像の固定点が3つ以上あれば恒等写像になる. すなわち, この射影変換は恒等写像であり,  $p'' = p$  がいえる.  $\square$

### 六点図形

**定義 2.12** 完全四角形  $p_1p_2p_3p_4$  の各辺とその頂点を通らない1直線  $L$  との6個の交点からなる図形を六点図形といい,  $Q(abc, a'b'c')$  と表す.

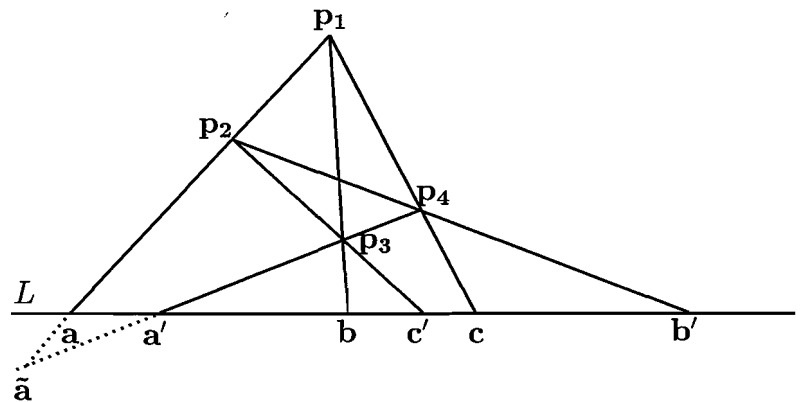


図 2.13: 六点図形

この六点図形の記号で  $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{a}'$ ,  $\mathbf{b}$  と  $\mathbf{b}'$ ,  $\mathbf{c}$  と  $\mathbf{c}'$  は互いに完全四角形の対辺と  $L$  の交点になっている. これらの点対のうち 2 対までは一致してもよい. 六点図形は, それを定義する完全四角形のとり方に無関係であり, 6 点のうち 5 点が決まると残りの 1 点も決定する.

この六点図形について, 次の定理が成り立つ.

**定理 2.13** 六点図形  $Q(\mathbf{abc}, \mathbf{a'b'c'})$  において,  $(\mathbf{a}, \mathbf{a}')$ ,  $(\mathbf{b}, \mathbf{b}')$ ,  $(\mathbf{c}, \mathbf{c}')$  を互いに写り合う点対とする射影変換  $\varphi$  がただ 1 つ存在する. このとき,  $\varphi$  は対合である.

**証明** 定理 2.11 より,  $(\mathbf{a}, \mathbf{a}')$  が互いに写り合う点対であれば  $(\mathbf{b}, \mathbf{b}')$ ,  $(\mathbf{c}, \mathbf{c}')$  も共役な点対となるので,  $\varphi(\mathbf{a}) = \mathbf{a}'$ ,  $\varphi(\mathbf{a}') = \mathbf{a}$  となる射影変換が存在することを示す.

図 2.13 における配景的, あるいは射影的対応

$$\{\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{c}\}_l \bar{\wedge} \{\tilde{\mathbf{a}}, \mathbf{a}', \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4\}_{\mathbf{p}_3\mathbf{p}_4} \bar{\wedge} \{\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{c}', \mathbf{b}'\}_L \bar{\wedge} \{\mathbf{a}', \mathbf{a}, \mathbf{b}', \mathbf{c}'\}_L$$

において, 最左辺から最右辺への対応は射影的なので, 対応する点の順に

$$\varphi(\mathbf{a}) = \mathbf{a}', \varphi(\mathbf{a}') = \mathbf{a}, \varphi(\mathbf{b}) = \mathbf{b}', \varphi(\mathbf{c}) = \mathbf{c}'$$

が成り立つ. 対合では  $\varphi = \varphi^{-1}$  となるので, 逆向きの対応を考えると

$$\varphi(\mathbf{b}') = \mathbf{b}, \varphi(\mathbf{c}') = \mathbf{c}$$

も成り立つことから,  $(\mathbf{a}, \mathbf{a}')$ ,  $(\mathbf{b}, \mathbf{b}')$ ,  $(\mathbf{c}, \mathbf{c}')$  は共役点対である. 唯一性については, 射影変換は対応する 3 点が決まると, ただ 1 つの射影変換が定まることからいえる. □

### 2.3.2 対合の固定点

射影変換では複比が保存されるので, もし写像で固定されている点が 3 つ以上あるならば恒等変換になる. したがって, 恒等変換ではない射影変換は高々 2 つの固定点をもつ.

ここで具体的に対合を調べるために、(2.7) で登場した座標変換関数を用いる。(2.7) は数直線から数直線への射影変換が一次分数関数で表せることを示しているので、対合  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  を

$$\varphi(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

とおく。全単射なので  $ad - bc \neq 0$ 、また恒等変換は除外するので  $b = c = 0$ 、かつ  $a = d$  の場合も考えない。

ここで対合の定義 (2.12) より、 $\varphi^2$  が恒等変換なので

$$\varphi^2(x) = \frac{a\frac{ax+b}{cx+d} + b}{c\frac{ax+b}{cx+d} + d} = \frac{(a^2 + bc)x + b(a + d)}{c(a + d)x + (bc + d^2)}$$

について

$$b(a + d) = c(a + d) = 0 \quad \text{かつ} \quad a^2 + bc = bc + d^2$$

が成り立つ。 $a + d \neq 0$  の場合は恒等変換になるので不適。よって、 $a + d = 0$  であり、一般に対合は

$$\varphi(x) = \frac{ax + b}{cx - a} \quad (a^2 + bc \neq 0) \tag{2.13}$$

と表せる。

対合の固定点を求めるためには方程式

$$x = \frac{ax + b}{cx - a} \quad \Leftrightarrow \quad cx^2 - 2ax - b = 0$$

を解けばよい。ここで  $a^2 + bc \neq 0$  なので、方程式の実数解、すなわち固定点の個数は 2 個または 0 個となる。したがって、対合が固定点を持てば必ず 2 つある。<sup>3</sup>

### 対合の固定点と共役点对

**定理 2.14** もし対合  $\varphi$  が固定点をもてば、それは 2 つの固定点  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  をもち、またそれは任意の  $\mathbf{m}$  に対して、 $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{m}, \varphi(\mathbf{m})] = -1$  が成り立つ。

---

<sup>3</sup> $c = 0$  のとき、数直線上の無限遠点も解の 1 つとする。

証明 対合  $\varphi$  により

$$\varphi(\mathbf{a}) = \mathbf{a}, \varphi(\mathbf{b}) = \mathbf{b}, \varphi(\varphi(\mathbf{m})) = \mathbf{m}$$

と写るので,

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{m}, \varphi(\mathbf{m})] = [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \varphi(\mathbf{m}), \mathbf{m}]$$

が成り立つ. ところが命題 2.5 より

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \varphi(\mathbf{m}), \mathbf{m}] = [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{m}, \varphi(\mathbf{m})]^{-1}$$

なので,

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{m}, \varphi(\mathbf{m})]^2 = 1$$

となる.

もし,  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{m}, \varphi(\mathbf{m})] = 1$  ならば, 対合の固定点が 3 個以上となり不合理である. したがって,

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{m}, \varphi(\mathbf{m})] = -1$$

が成り立つ. □

定理 2.14 は, 対合の共役点対が, 対合の固定点に関して調和共役であることを示している. このことは, 図 2.13 において,  $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$  かつ  $\mathbf{c} = \mathbf{c}'$  として, 2 つの共役点対が一致する場合の次の図でも確かめられる.

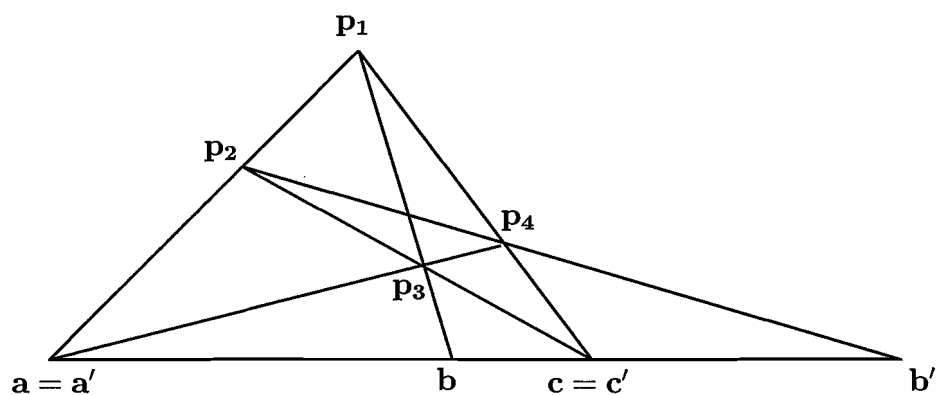


図 2.14: 調和分割を与える六点図形

## 第3章 射影円錐曲線

この章は射影平面での幾何学を扱う. §3.1 では, 射影平面の考え方と, それを記述する同次座標という概念を導入する. §3.2 では, 射影平面における射影変換や複比の性質について, 書き直す. §3.3 では, 改めてアフィン平面での円錐曲線を見直す.

### 3.1 射影平面, 同次座標

**定義 3.1**  $\{0\}$  を除く 3次元ベクトル空間  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  の 2点  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  において,

$$\mathbf{a} \sim \mathbf{b} \iff \mathbf{a} = k\mathbf{b} \quad (\exists k \in \mathbb{R}) \quad (3.1)$$

と定めると, 関係  $\sim$  は同値関係を満たす. この関係  $\sim$  による商集合  $(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) / \sim$  を  $P_2(\mathbb{R})$  と表し, 射影平面という.

これを座標で表わすとき, (3.1) の関係を扱いやすくする次の座標系を導入する.

**定義 3.2** (3.1) で定められる同値類に属する集合

$$\left\{ (x, y, z) \mid (x, y, z) \sim (X, Y, Z), (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \right\}$$

は  $P_2(\mathbb{R})$  では 1 点を表し, その代表元を  $[X, Y, Z]$  と表す. このような点の表し方を同次座標 (homogeneous coordinates) (あるいは, 斉次座標) といい,  $P_2(\mathbb{R})$  の点を表す. この座標と区別して用いる  $\mathbb{R}^2$  の直交座標  $(x, y)$  を非同次座標 (あるいは, 非斉次座標) という.

**同次座標と非同次座標の対応** 同次座標は、 $\mathbb{R}^3$  の原点を通らない平面で切断することで、非同次座標との対応が定まる. 例えば、 $Z = 1$  という平面で切断すると、 $Z \neq 0$  のとき、同次座標は次のように非同次座標に対応する.

$$x = \frac{X}{Z}, \quad y = \frac{Y}{Z} \quad (3.2)$$

ところが、同次座標では  $Z = 0$  の場合もあるので、この場合に非同次座標では対応する要素がない. そこで  $\mathbb{R}^3$  における平面  $Z = 1$  上の点と同値な要素を持たない集合

$$l_\infty = \{[X, Y, Z] \mid Z = 0, [X, Y, Z] \in P_2(\mathbb{R})\}$$

を無限遠線といい、 $P_2(\mathbb{R})$  における  $\mathbb{R}^2$  に対応する集合の補集合になっている.

これで  $P_2(\mathbb{R})$  と  $\mathbb{R}^2 \cup l_\infty$  の間に全単射な対応が見ついた. 関係式 (3.2) の左辺を右辺に置き換えることを、非同次座標の同次化という.

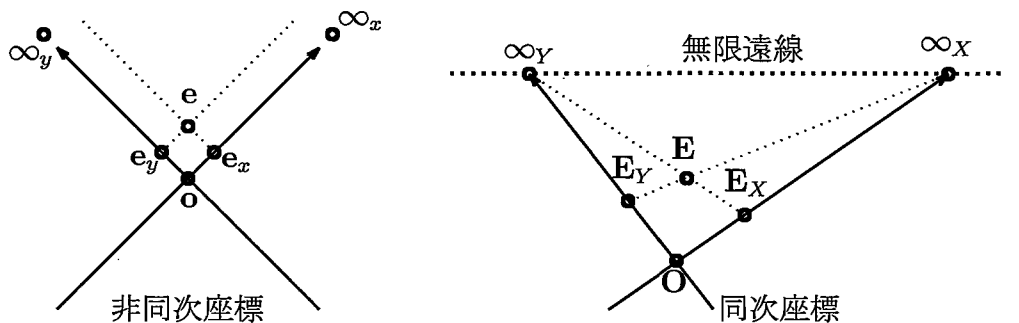


図 3.1: 射影基

**射影平面における基底** 第 2 章で考察した直線と直線の間での射影変換では  $\infty, 0, 1$  に相当する点を決めると、4 番目の点  $d$  の座標がその複比によって一意に定められた. 同様に、射影平面では、基準になる 4 つの点の組 ( $x$  方向無限遠点,  $y$  方向無限遠点, 原点, 単位点) を射影基 (projective basis) (あるいは基点系) という. それぞれの点を同次座標で、次のように表す.

$$\infty_x [1, 0, 0], \quad \infty_y [0, 1, 0], \quad O [0, 0, 1], \quad E [1, 1, 1]$$

非同次座標では、単位点  $e$  は、 $(x, y) = (1, 1)$  であり、点  $e$  を通り  $x$  軸 ( $y$  軸) に平行な直線と  $y$  軸 ( $x$  軸) の交点で、 $y$  軸上の単位点  $e_y$  ( $x$  軸上の単位点  $e_x$ ) を定める.

同次座標では, 単位点  $\mathbf{E}$  は,  $[X, Y, Z] = [1, 1, 1]$  であり, 点  $\mathbf{E}$  と  $\infty_X(\infty_Y)$  を結ぶ直線と点  $\mathbf{O}$  と  $\infty_Y(\infty_X)$  を結ぶ直線の交点で, 点  $\mathbf{O}$  と  $\infty_Y(\infty_X)$  を結ぶ直線上の単位点  $\mathbf{E}_Y(\mathbf{E}_X)$  を定める.

以上のように構成することで, 射影平面上でも座標での考察が可能になる.

**射影平面における直線**  $\mathbb{R}^3$  における原点を通る平面は, 一般に  $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$  と表せるので, 関係  $\sim$  で射影すると  $P_2(\mathbb{R})$  における直線を表し, これを  $P_2(\mathbb{R})$  射影直線といい, 次のように表す.

$$\alpha X + \beta Y + \gamma Z = 0 \quad (3.3)$$

**射影平面における射影変換** 第2章の図2.2でもわかるように, 平面から平面への射影でも“直線は直線に写る”. また, その直線上の任意の4点も対応する直線上に写る場合は第2章のアイデアが適用できるので複比が不変である.

ここで, 次の命題を引用する.

**命題 3.3**<sup>1</sup>  $P_2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \cup l_\infty$  と表すとき,  $P_2(\mathbb{R})$  の射影変換  $\varphi$  で, 無限遠線  $l_\infty$  全体を固定するものは,  $\mathbb{R}^2$  のアフィン変換  $\tilde{\varphi}$  を引き起こす. 逆に,  $\mathbb{R}^2$  の任意のアフィン変換は,  $P_2(\mathbb{R})$  の射影変換に一意に延長される.

この命題により,  $\mathbb{R}^2$  のアフィン変換  $\tilde{\varphi}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\tilde{\varphi}: \begin{cases} x = a_0x' + a_1y' + a_2 \\ y = b_0x' + b_1y' + b_2 \end{cases}, \quad \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad (3.4)$$

の延長として,  $P_2(\mathbb{R})$  の射影変換  $\varphi: P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$

$$\varphi: [X', Y', Z'] \mapsto [X, Y, Z]$$

<sup>1</sup>証明は, 参考文献 [9] の p92, 93 参照.

$$\begin{cases} \lambda X = a_0 X' + a_1 Y' + a_2 Z' \\ \lambda Y = b_0 X' + b_1 Y' + b_2 Z' \\ \lambda Z = c_0 X' + c_1 Y' + c_2 Z' \end{cases}, \quad \lambda \neq 0, \quad \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad (3.5)$$

が得られる。(3.5)は、次のような行列を用いた表現とも同値であり、これにより“射影直線が射影直線に写ること”と“複比が不変であること”が示される。<sup>2</sup>

$$\lambda \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a'_0 & a'_1 & a'_2 \\ b'_0 & b'_1 & b'_2 \\ c'_0 & c'_1 & c'_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix}, \quad \lambda \neq 0, \quad \begin{vmatrix} a'_0 & a'_1 & a'_2 \\ b'_0 & b'_1 & b'_2 \\ c'_0 & c'_1 & c'_2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad (3.6)$$

$$\text{ただし,} \quad \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} a'_0 & a'_1 & a'_2 \\ b'_0 & b'_1 & b'_2 \\ c'_0 & c'_1 & c'_2 \end{pmatrix}$$

**射影基のとり方** 線型代数の場合と同様、数式による表現は座標（基底）のとり方に依存する。

ここで、次の命題を引用する。

**命題 3.4 (射影幾何学の基本定理)**<sup>3</sup>  $P_2(\mathbb{R})$ 上の任意の異なる4点  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$  を、任意の異なる4点  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4$  にうつす射影変換がただ1つ存在する。ただし、 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$  , および  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4$  のどの3点も同一射影直線上にないものとする。

どの3点も同一射影直線上にない4点として、例えば射影基

$$\infty_X[1, 0, 0], \quad \infty_Y[0, 1, 0], \quad \mathbf{O}[0, 0, 1], \quad \mathbf{E}[1, 1, 1]$$

が選べるので、この命題から次がいえる。

**系 3.5** どの3点も同一直線上にない任意の異なる4点は、射影基として選べる。

<sup>2</sup>証明は、参考文献 [9] の p94, 95 参照。

<sup>3</sup>証明は、参考文献 [9] の p96, 97 参照。



### 3.2 射影円錐曲線

非同次座標での円錐曲線は

$$ax^2 + 2by + a'y^2 + 2b'x + 2b''xy + a'' = 0$$

という形であった. これを同次化することで射影円錐曲線は得られる.  $[X, Y, Z]$  を射影平面  $P_2(\mathbb{R})$  での同次座標として, (3.2) を適用すると,

$$a\left(\frac{X}{Z}\right)^2 + 2b\left(\frac{Y}{Z}\right) + a'\left(\frac{Y}{Z}\right)^2 + 2b'\left(\frac{X}{Z}\right) + 2b''\left(\frac{X}{Z}\right)\left(\frac{Y}{Z}\right) + a'' = 0$$

すなわち,

$$aX^2 + 2bYZ + a'Y^2 + 2b'XZ + 2b''XY + a''Z^2 = 0 \quad (3.7)$$

が得られ, これを射影円錐曲線という.

**射影基のとり方の例**  $p = [1, 0, 0]$ ,  $q = [0, 1, 0]$ ,  $r = [0, 0, 1]$ ,  $s = [1, 1, 1]$  を射影基としたとき, 具体的に円錐曲線の方程式がどのように表現されるか見てみる. ここで, 射影基を選ぶことは射影変換を施すことであるが, 射影変換 (3.5) によって, 円錐曲線は円錐曲線に写るので, (3.7) で考えて一般性を失わない.

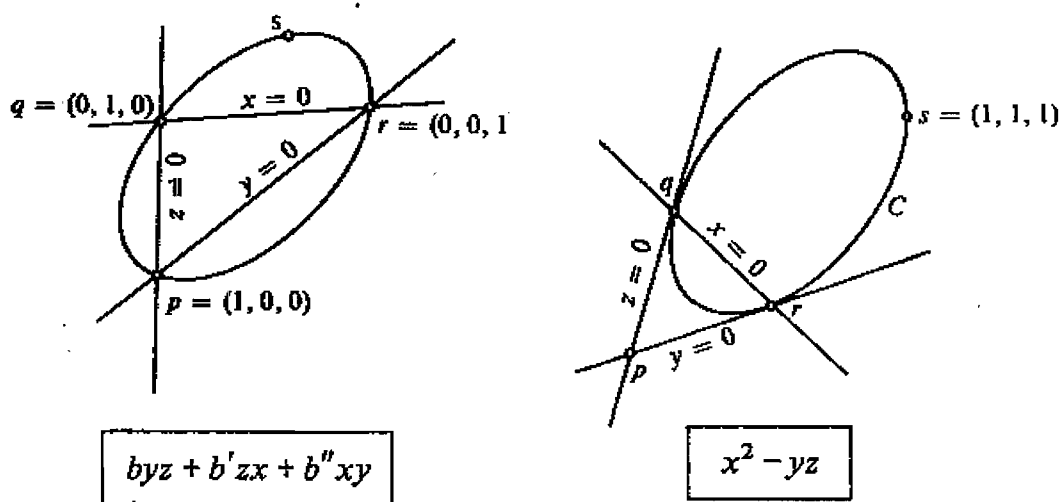


図 3.2: 射影基のとり方による円錐曲線

例 3.6 3点  $p, q, r$  が円錐曲線  $C$  を通る  $\iff a = a' = a'' = 0$

例 3.7 4点  $p, q, r, s$  が円錐曲線  $C$  を通る

$$\iff a = a' = a'' = 0, \text{ かつ, } b + b' + b'' = 0$$

例 3.8  $pq$  が  $q$  で,  $pr$  が  $r$  で, それぞれ  $C$  に接する  $\iff aX^2 + 2bYZ = 0$

例 3.9  $pq$  が  $q$  で,  $pr$  が  $r$  で, それぞれ  $C$  に接し,  $C$  が  $s$  を通る  $\iff X^2 - YZ = 0$

これらの例は, 射影基の条件を考慮すると, どれもが円錐曲線の標準形と見なせるものである. もちろん, 条件を決めれば他にも標準形と見なせる式は作れる.

### 射影円錐曲線の決定

命題 3.10 どの3点も一直線上にないように,  $P_2(\mathbb{R})$  の5点が与えられたとき, その5点を通る円錐曲線がただ1つ存在する.

証明 系 3.5 より5点のうちの最初の4点で構成される射影基をとることができ, それらの点を  $p, q, r, s$  とおく. この座標枠での,  $C$  の方程式は前述の例 3.7 より,  $bY(Z - X) + b'X(Z - Y) = 0$  という形になる.

$t = [X_0, Y_0, Z_0]$  を5番目の点とすると,  $t$  が直線  $pq, qr, rp, ps, qs, rs$  のどれにも含まれないということは  $X_0, Y_0, Z_0$  はどれも互いに異なり, かつ0でないということであり,  $bY_0(Z_0 - X_0) + b'X_0(Z_0 - Y_0) = 0$  が,  $bb' \neq 0$  かつ  $b + b' \neq 0$  を満たす, ただ1つの解  $(b, b')$  をもつ.

さらに, 付随する2次形式に現れる行列  $A$  に関して,  $\det A = bb'b'' \neq 0$  であるので, 円錐曲線  $bYZ + b'ZX + b''XY = 0$  が非退化であることも示している.  $\square$

### 3.2.1 円錐曲線上の4点の複比

#### よいパラメータ表示

$P_2(\mathbb{R})$  において, 円錐曲線  $C$  と直線  $l$  は高々2点を共有する. もし, 共有点が  $m$  であれば,  $l$  が  $m$  での  $C$  の接線でなければ,  $l$  は  $m$  以外の点で必ずもう1点で  $C$  と交わるので,  $m$  を通る各直線  $l$  に点  $l \cap C$  を対応させる写像が考えられる.

定点  $\mathbf{m} \in P_2(\mathbb{R})$  に対して,  $\mathbf{m}$  を通る  $P_2(\mathbb{R})$  の線束を  $\{\ell\}_{\mathbf{m}}$  と表す. 右の図のように,  $\mathbf{m} \in C$  に対して, 直線  $\ell \in \{\ell\}_{\mathbf{m}}$  に  $\mathbf{n} \in \ell \cap C$  を対応させる.  $\{\ell\}_{\mathbf{m}}$  は,  $\tilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  と同一視できるので, この写像は全単射:  $\tilde{\mathbb{R}} \rightarrow C$  と考えられる. この全単射を, 非退化円錐曲線のよいパラメーター表示という.

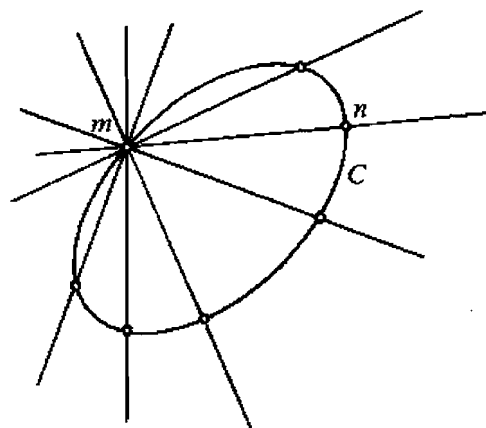


図 3.3:  $\mathbf{m}$  を通る線束

**命題 3.11** 非退化円錐曲線  $C$  と  $\mathbf{m} \in C$  に対して, 次のように写像を定める.

$$\pi_{\mathbf{m}} : C = \text{im}(\alpha) \ni \mathbf{n} \mapsto \mathbf{mn} \in \{\ell\}_{\mathbf{m}}$$

すると,  $\pi_{\mathbf{m}}$  は全単射であり, 各  $\mathbf{m}$  と  $\mathbf{n} \in C$  に対して合成写像

$$\pi_{\mathbf{n}} \circ \pi_{\mathbf{m}}^{-1} : \{\ell\}_{\mathbf{m}} \rightarrow \{\ell'\}_{\mathbf{n}}$$

は射影変換である.

逆に,  $P_2(\mathbb{R})$  において  $\mathbf{m}$  と  $\mathbf{n}$  が異なり  $f : \{\ell\}_{\mathbf{m}} \rightarrow \{\ell'\}_{\mathbf{n}}$  が射影変換であれば,

$$\text{im}(\alpha) = \left\{ \ell \cap f(\ell) \mid \ell \in \{\ell\}_{\mathbf{m}} \right\}$$

を満たす  $P_2(\mathbb{R})$  における円錐曲線  $\alpha$  が存在する. この円錐曲線は  $\mathbf{m}$  と  $\mathbf{n}$  を通り,  $f(\mathbf{mn}) = \mathbf{mn}$  のときだけ退化し, その場合は  $\mathbf{mn}$  ともう 1 つの直線からなる.

**証明** 全単射であることは円錐曲線と直線が高々 2 点を共有することから言える.  $\mathbf{m}, \mathbf{n} \in C$  であれば,  $\mathbf{m} = [0, 1, 0]$ ,  $\mathbf{n} = [0, 0, 1]$  かつ円錐曲線  $\alpha$  が  $X^2 - YZ = 0$  という方程式をもつような射影枠をとる.

このとき,

$\{\ell\}_{\mathbf{m}}$ : 方程式  $\lambda X + \mu Z = 0$  という直線  $\ell$  からなる.

$\{\ell'\}_{\mathbf{n}}$ : 方程式  $\lambda' X + \mu' Y = 0$  という直線  $\ell'$  からなる.

$\ell \cap \ell' \in C$  となるためには  $\lambda\lambda' = \mu\mu'$  となることが必要十分である. これは  $\frac{\lambda}{\mu}$  と  $\frac{\lambda'}{\mu'}$  の間に逆数の関係を与えるので, これで 2 つの線束間での射影変換がいえる.

逆について、 $f(\mathbf{mn}) = \mathbf{mn}$  の場合は、 $\mathbf{mn}$  と異なる  $l_1, l_2 \in \{l\}_m$  と  $l'_1, l'_2 \in \{l\}_n$  それぞれの 2 交点と、その交点を結ぶ直線と  $\mathbf{mn}$  の交点は一直線上にあり、その 3 点で 4 番目の点が決まるので、任意の交点はその直線上にある。

一方、 $\mathbf{m}, \mathbf{n}$  と  $l \cap f(l)$  ( $l \neq \mathbf{mn}$ ) で得られる異なる 3 点を選んで、命題 3.10 よりただ 1 つの円錐曲線が決まる。 □

**注意 3.12 (円錐曲線の別の定義)** 命題 3.11 では、数式による円錐曲線の定義から出発して“射影的対応がつく 2 つの線束の対応する直線の交点が円錐曲線上にある”という結果を得たが、逆に、この性質そのものを円錐曲線の定義とする方法もある。例えば、参考文献 [6] では、

平面上の異なる中心をもつ 2 つの線束が配景的でなく射影的關係にあるとき、対応直線の交点の集合を点円錐曲線または 2 次曲線という。

と定義されている。さらに、命題 3.11 の双対を考える。もし  $f: l \rightarrow l'$  が  $P_2(\mathbb{R})$  における 2 直線間の射影変換であれば、 $l$  上にある  $\mathbf{m}$  に対してできる、直線  $\mathbf{m}f(\mathbf{m})$  の包絡線は  $P_2(\mathbb{R})$  において  $l$  と  $l'$  に接する円錐曲線であることがいえる。

これに関しても、上述の参考文献 [6] では点円錐曲線と同様に、

平面上の異なる直線上の 2 つの点列が配景的でなく射影的關係にあるとき、対応点を結ぶ直線の集合を線円錐曲線または 2 級曲線という。

という表現で、この性質自体を定義としている。

### 円錐曲線上の 4 点の複比

$C$  を非退化円錐曲線とし、 $C$  上の 4 点  $m_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) は互いに異なるとする。命題 3.11 により、円錐曲線上の異なる 2 点に関するそれぞれの点を通る線束間の射影変換が考えられるようになった。射影変換は複比を不変にするので、4

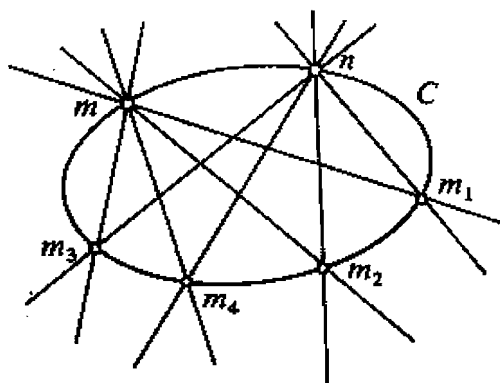


図 3.4: 円錐曲線上の複比

直線  $mm_i$  の複比  $[mm_i]$  は点  $m \in C$  のとり方によらない.  $m \in C$  のとり方によらないので, 単に  $C$  上の4点  $m_i$  の複比といい,  $[m_i]$  または,  $[m_i]_C$  と表わす. もし,  $m_i$  のうちちょうど3つが同じ点であれば,  $[m_i] = -1$  と定める.<sup>4</sup>

さらに, 射影変換  $f$  で円錐曲線  $C$  が別の円錐曲線  $f(C)$  にうつるときも複比は不変なので,  $(m_i)_{i=1,2,3,4} \subset C$  のとき, 任意の  $P_2(\mathbb{R})$  での射影変換  $f$  に対して

$$[f(m_i)]_{f(C)} = [m_i]_C$$

がいえる.

### 応用例：パスカルの定理

$C$  を非退化円錐曲線の像とし,  $a, b, c, d, e, f$  をそのうち高々3組の2重点をもつ  $C$  上の6点とする. そのとき3点  $ab \cap de$ ,  $bc \cap ef$ ,  $cd \cap fa$  は同一直線上にある.

証明  $x = bc \cap ed$ ,  $y = cd \cap ef$ ,  $z = ab \cap de$ ,  $t = af \cap dc$  とすると,

$$[z, x, d, e]_{ze} = [ba, bc, bd, be]_b = [fa, fc, fd, fe]_f = [t, c, d, y]_{tc}$$

となり,  $zt, xc, ey$  は命題 2.3 により1点で交わる. □

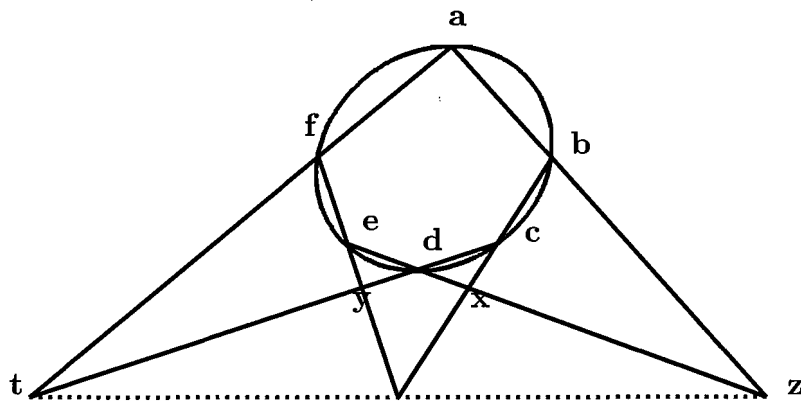


図 3.5: パスカルの定理

<sup>4</sup>定義 2.8 参照

### 円錐曲線上の4点での接線の複比

注意 3.12 から, 円錐曲線は射影的関係にある2つの直線上の点列の対応点を結ぶ直線の包絡線としても定義される. 逆に, 円錐曲線に接する4点での接線の複比を,  $C$  上のある接線と与えられた4本の接線との4つ交点の複比として定義できる. この複比は円錐曲線上の4つの接点の複比とも一致している.

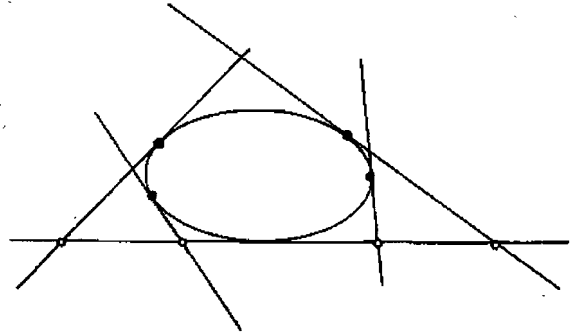


図 3.6: 4接線の複比

### 応用例：ブリアンションの定理

6角形がある非退化円錐曲線に外接しているとき, 3本の対角線は1点で交わる.

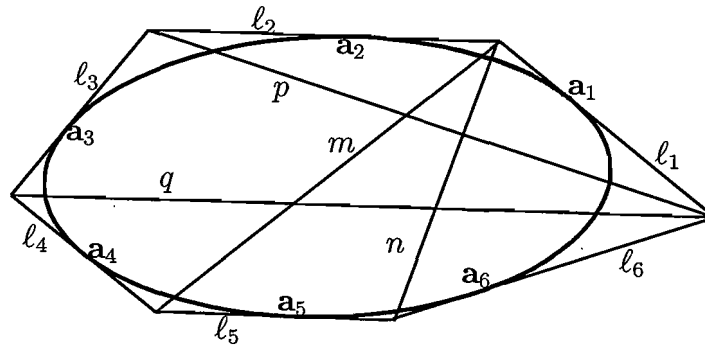


図 3.7: ブリアンションの定理

証明 上の図のように対角線  $p, q, m, n$  をおくと,

$$\begin{aligned} [l_1, p, q, l_6] &= [l_1, p, q, l_6]_{l_3} = [a_1, a_2, a_4, a_6]_C \\ &= [l_1, l_2, m, l_6]_{l_5} = [l_1, l_2, m, n] \end{aligned}$$

となり, 最左辺と最右辺で対応している各2直線の交点  $p \cap l_2, q \cap m, l_6 \cap n$  は系 2.4 により同一直線上にある.  $\square$

応用例： $n = 3$  の場合のポンスレーの大定理

$\mathcal{T}$  と  $\mathcal{T}'$  を非退化円錐曲線の像  $C$  に内接する三角形とすると、 $\mathcal{T}$  と  $\mathcal{T}'$  の6辺すべてに接する円錐曲線  $\Gamma$  が存在する。

系 3.13 もし円錐曲線  $C$  と  $\Gamma$  について  $C$  に内接し  $\Gamma$  に外接する三角形  $\mathcal{T}$  が1つ存在すれば、その点から  $\Gamma$  に異なる2本の接線を引くことが出来る各点  $a \in C$  に対して1つずつ、そのような三角形は他にいくらでも存在する。

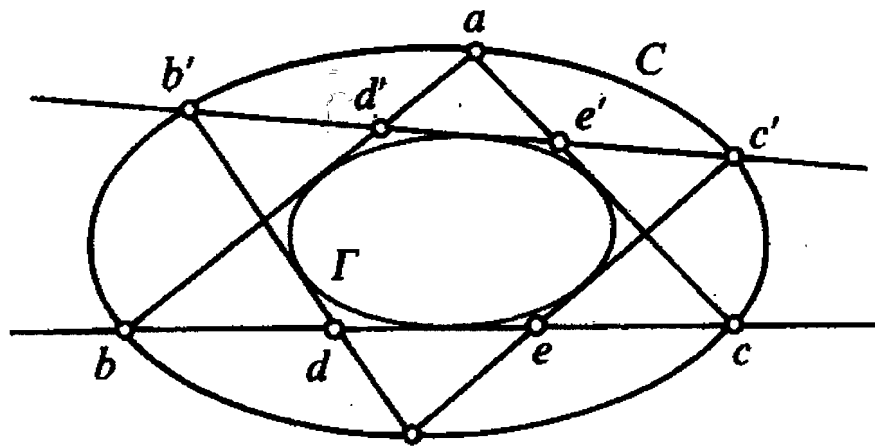


図 3.8:  $n = 3$  の場合のポンスレーの大定理

証明 射影的關係にある2つの直線上の点列の対応点を結ぶ直線の包絡線として円錐曲線が定義されることを図 3.8 の直線  $bc$  と  $b'c'$  に適用する. 三角形に内接する円錐曲線の接点の複比として考えると,

$$[b, d, e, c]_{bc} = [d', b', c', e']_{b'c'}$$

である. これらの複比はどちらも  $[b, b', c', c]_C$  に等しい. □

### 3.2.2 非退化円錐曲線における極関係

ここでは、円錐曲線は非退化であるとする。射影空間における円錐曲線は、(3.7)において

$$aX^2 + 2bYZ + a'Y^2 + 2b'XZ + 2b''XY + a''Z^2 = 0$$

と表された。これは2次形式であることから、行列を用いて

$$\begin{bmatrix} X & Y & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b' & b & a'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = 0 \quad (3.8)$$

とも表される。さらに、

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b' & b & a'' \end{bmatrix}$$

とおくと、(3.8)は

$${}^t\mathbf{x}A\mathbf{x} = 0$$

と表せる。ここで、 $\Pi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = {}^t\mathbf{x}A\mathbf{y}$ とおくと、(3.8)は

$$\Pi(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$$

と書くことで、円錐曲線を表す。ここで、 $\Pi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ を極形式という。

#### 円錐曲線に関する共役

**定義 3.14** 円錐曲線  $C$  の方程式を  $\Pi(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$  とする。射影平面  $P_2(\mathbb{R})$  の2点  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  に対して、 $\Pi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$  をみたすとき、点  $\mathbf{x}$  と点  $\mathbf{y}$  とは、円錐曲線  $C$  に関して共役であるといい、 $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$  と表す。

$\Pi(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}) = 0$  をみたす点の集合  $\{\mathbf{y}\}$  について考える。もし、2点  $\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1$  が  $\{\mathbf{y}\}$  の要素であるとすれば

$$\Pi(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = 0 \quad \text{かつ} \quad \Pi(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_1) = 0$$



であるが、 $\Pi(\cdot, \cdot)$  は線形なので

$$\Pi(\mathbf{x}_0, \lambda \mathbf{y}_0 + \mu \mathbf{y}_1) = \lambda \Pi(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) + \mu \Pi(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_1) = 0 \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

が成り立ち、これは直線  $\mathbf{y}_0\mathbf{y}_1$  上のすべての点  $\mathbf{y}$  で、 $\Pi(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}) = 0$  を満たし、 $\mathbf{x}_0$  と共役であることを意味する。点  $\mathbf{x}_0$  を固定すると  $\Pi(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}) = 0$  は 1 次の方程式となるので求める集合が直線であることがわかる。この直線を  $\mathbf{x}_0^\perp$  と表す。

さらに、点  $\mathbf{x}_0$  が円錐曲線  $C$  上にある、すなわち  $\Pi(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0) = 0$  をみたすとき、 $\Pi(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}) = 0$  は点  $\mathbf{x}_0$  を通る直線であるが、もし同じ直線上に  $\Pi(\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_0) = 0$  をみたす点  $\mathbf{y}_0 (\neq \mathbf{x}_0)$  があれば、 $\Pi(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = 0$  となり、すべての実数  $\lambda, \mu$  に対して

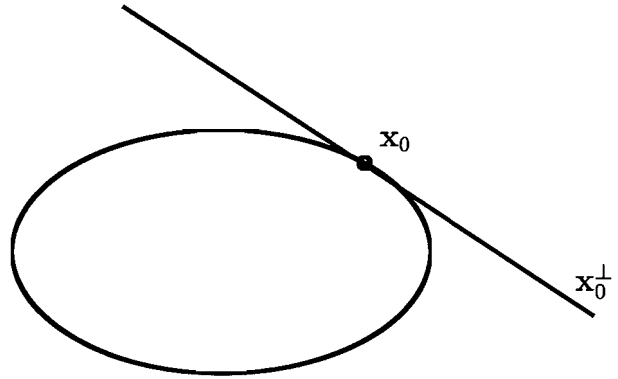


図 3.9: 円錐曲線上の点の共役直線

$$\Pi(\lambda \mathbf{x}_0 + \mu \mathbf{y}_0, \lambda \mathbf{x}_0 + \mu \mathbf{y}_0) = \lambda^2 \Pi(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0) + \lambda \mu \Pi(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) + \mu^2 \Pi(\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_0) = 0$$

となるので、直線  $\mathbf{x}_0\mathbf{y}_0$  が円錐曲線に含まれる、これは円錐曲線が非退化である仮定に矛盾している。すなわち、直線  $\Pi(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}) = 0$  が円錐曲線  $C$  上の点を通れば 1 点だけなので、これは接線に他ならない。

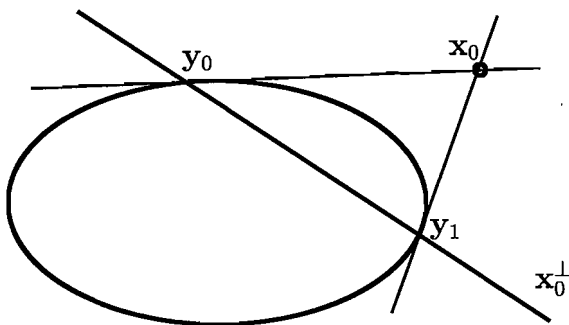


図 3.10: 極と極線

再び、一般の ( $\mathbf{x}_0$  が円錐曲線  $C$  上ではない) 場合  $\Pi(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}) = 0$  に戻す。もし直線  $\Pi(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}) = 0$  上に  $\Pi(\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_0) = 0$  を満たす円錐曲線  $C$  と直線  $\mathbf{x}_0^\perp$  の交点  $\mathbf{y}_0$  があれば、

$$\Pi(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = 0$$

が成り立つ。また、その点における

$C$  の接線は  $\Pi(x, y_0) = 0$  で表されるので、この式は点  $x_0$  が点  $y_0$  における  $C$  の接線上にあることを示している。円錐曲線と直線の交点は一般に2つあるので、他方の交点  $y_1$  でも同じことが言えるので、このとき点  $x_0$  は  $C$  上の異なる2点から引いた接線の交点である。言い換えると、直線  $\Pi(x_0, y) = 0$  は点  $x_0$  から  $C$  に引いた2本の接線の接点を結ぶ直線（割線とも言う）である。

もし直線  $\Pi(x_0, y) = 0$  上に円錐曲線  $C$  との交点が無いならば、直線  $x_0^\perp$  と  $C$  は交わらない。ところがこの直線上の異なる2点  $y_0, y_1$  からはそれぞれ  $C$  に2本の接線が引けるので上と同様に、2本の割線が考えられ、その2

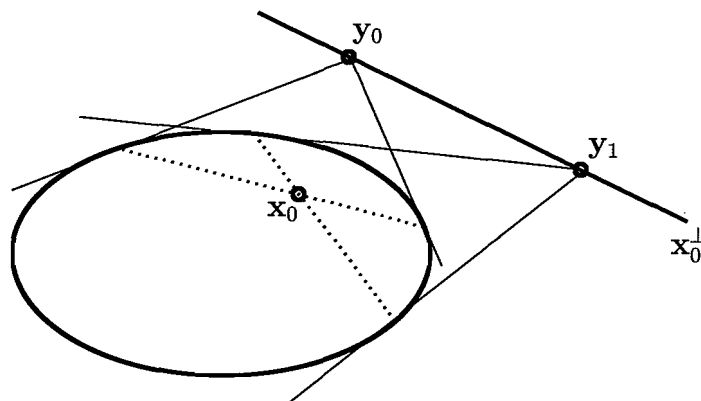


図 3.11: 極と極線

直線の交点を  $x_0$  とおけば、 $\Pi(x, y_0) = 0$  かつ  $\Pi(x, y_1) = 0$  となるので、直線  $y_0 y_1$  が求める直線である。言い換えると、直線  $\Pi(x_0, y) = 0$  はその任意の点からの割線が点  $x_0$  を通る直線である。

以上で、円錐曲線  $C$  (2次形式  $\Pi(x, x) = 0$ ) に関する点とそれに対応する直線の関係が明らかになった。このときの点を極 (pole) といい、対応する直線を極線 (polar) という。また、上のように2次形式を0にする点と直線の関係を極関係 (polarity) という。

一般に、

平面幾何学では“点”と“線”に関する命題が正しければ、その命題の  
“点”と“線”という語を入れ換えた命題も正しい

ことが知られている。このことは双対原理といい、このように語を入れ替えることを双対をとるといふ。この原理は幾何学の基礎を構成する公理系で議論される。極関係は自己双対な関係である。

### 極、極線による円錐曲線の調和分割

**命題 3.15** 円錐曲線  $C$  上にない任意の点  $x_0$  の極線  $x_0^\perp$  上の点  $y_0$  と  $x_0$  を結んだ直線が円錐曲線  $C$  と交わるように点  $y_0$  をとる. このとき この直線と  $C$  との交点  $p_0, q_0$  に対して,  $[x_0, y_0, p_0, q_0]_{x_0y_0} = -1$  が成り立つ. すなわち  $x_0$  と  $y_0$  は 2 点  $p_0, q_0$  によって調和分割される.

**証明** いま, これらの点を通る直線  
上の点は  $x_0 + ty_0$  と表せる. この直  
線と  $C$  との交点  $p_0, q_0$  に対して,

$$p_0 = x_0 + t_1 y_0, \quad q_0 = x_0 + t_2 y_0$$

となる実数  $t_1, t_2$  が存在する.

ここで,  $p_0, q_0$  は  $C$  上にあるので,  
 $t_1, t_2$  は

$$\Pi(x_0 + ty_0, x_0 + ty_0) = 0$$

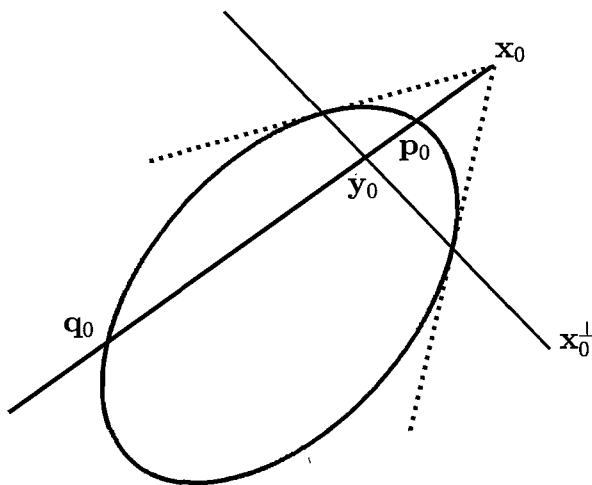


図 3.12: 円錐曲線と直線による調和分割

すなわち,

$$\Pi(x_0, x_0) + 2\Pi(x_0, y_0)t + \Pi(y_0, y_0)t^2 = 0$$

を満たし, 2 次方程式の 2 つの解である. さらに, 2 点  $x_0, y_0$  は共役より,  
 $\Pi(x_0, y_0) = 0$  を満たし, 2 次方程式の解と係数の関係より

$$t_1 + t_2 = 2\Pi(x_0, y_0) = 0 \tag{3.9}$$

が成り立つ.

ここで複比  $[x_0, y_0, p_0, q_0]_{x_0y_0}$  を考える. 定義より

$$[x_0, y_0, p_0, q_0]_{x_0y_0} = \frac{x_0 p_0}{p_0 y_0} \cdot \frac{y_0 q_0}{q_0 x_0} = \frac{t_1}{1} \cdot \frac{1}{t_2} = \frac{t_1}{t_2}$$

となるが (3.9) より, この値は  $-1$  である. □

### 3.2.3 円錐曲線における対合

**定義 3.16** 円錐曲線  $C$  の射影変換とは, 複比を保存する  $C$  の全単射  $\varphi$  のことである.  $\varphi^2 = \text{Id}_C$  かつ  $\varphi \neq \text{Id}_C$  のとき, 射影変換  $\varphi$  を対合という.  $C$  の射影変換群を  $GP(C)$  と表す.

円錐曲線  $C$  の対合は, 射影直線における対合の意味と一致する.  $C$  の与えられた 3 点を他の 3 点にうつす射影変換はただ 1 つ存在する.

**定理 3.17**  $\varphi \in GP(C)$  に対して,  $\mathbf{m} \neq \mathbf{n}$  なる  $C$  上の任意の 2 点を取り  $\mathbf{m}' = \varphi(\mathbf{m})$  とおくと, 条件  $\mathbf{n}' = \varphi(\mathbf{n})$  となることと,  $\mathbf{m}'\mathbf{n} \cap \mathbf{m}\mathbf{n}' \in \Delta$  であることが同値となるような  $P_2(\mathbb{R})$  の直線  $\Delta$  が存在する.  $\Delta$  を  $\varphi$  の (射影) 軸という.  $\varphi$  の固定点は,  $\Delta \cap C$  の点である.

**証明**  $(\mathbf{a}_i)_{i=1,2,3,4,5}$  を  $C$  上の点, さらに,  $\mathbf{a}'_i = \varphi(\mathbf{a}_i)$  かつ  $s_{ij} = \mathbf{a}_i\mathbf{a}'_j \cap \mathbf{a}'_i\mathbf{a}_j$  とする.  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  は異なり,  $\Delta$  を直線  $s_{12}s_{13}$  と仮定する. 命題 2.3 と円錐曲線上の 4 点での複比の定義によって点  $s_{14}$  と  $s_{15}$  は,  $\Delta$  に含まれる. パスカルの定理 (そしてその逆) によって, 点  $s_{45}$  は,  $\Delta$  に含まれる (また逆もいえる).  $\square$

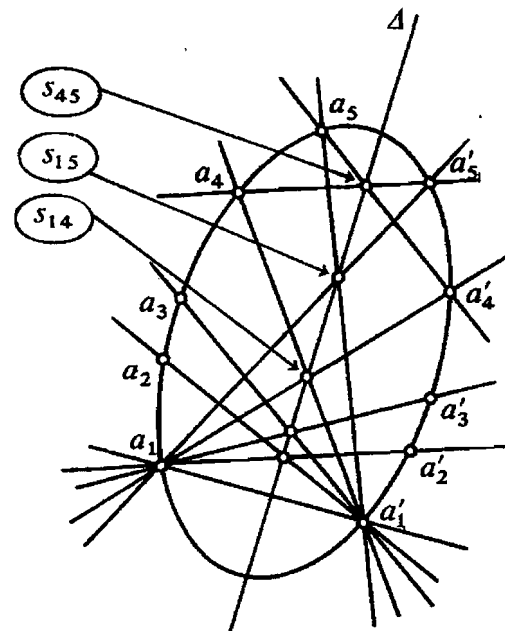


図 3.13: 射影軸

パスカルの定理における共線な 3 点を通る直線は, 定理 3.17 の射影軸である. また, パスカルの定理と同様に, 射影軸が円錐曲線と共有点をもたない場合もあり, そのとき  $\varphi$  の固定点 ( $\Delta \cap C$ ) は存在しない. 次の例はその場合である.

**例 3.18** 円の回転は射影変換である.

系 3.19 (Frégier) 全単射  $\varphi \in GP(C)$  が対合であれば, またその場合に限り, 任意の  $\mathbf{m} \in C$  に対して

$$\{\mathbf{m}, \varphi(\mathbf{m})\} = C \cap \delta \mathbf{m}$$

となる  $\delta \in P_2(\mathbb{R}) \setminus C$  が存在する. 点  $\delta$  を,  $\varphi$  の Frégier 点という.

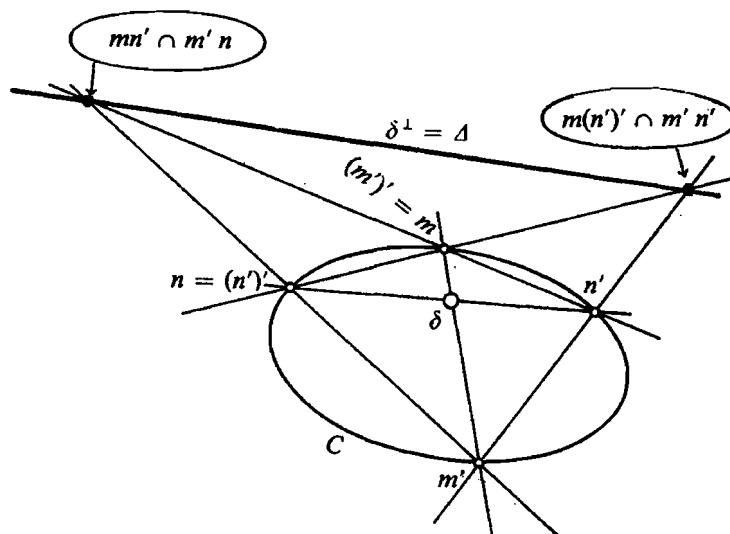


図 3.14: Frégier 点

証明 必要性:  $\varphi \in GP(C)$  が対合であるとき, 2組の共役点对を  $\mathbf{m}, \varphi(\mathbf{m})$  と  $\mathbf{n}, \varphi(\mathbf{n})$  とする. その点对を結ぶ直線の交点を  $\delta$  とし, さらに  $C$  上に  $\mathbf{p}$  と  $\mathbf{p}'$  ( $C$  と  $\delta \mathbf{p}$  のもう1つの交点) をとると,

$$\{\mathbf{m}, \varphi(\mathbf{m}), \mathbf{n}, \mathbf{p}\}_C \bar{\wedge} \{\mathbf{m}, \varphi(\mathbf{m}), \delta, [\mathbf{m}\varphi(\mathbf{m}) \cap \varphi(\mathbf{n})\mathbf{p}]\}$$

$$\bar{\wedge} \{\mathbf{m}, \varphi(\mathbf{m}), \mathbf{p}', \varphi(\mathbf{n})\}_C \bar{\wedge} \{\varphi(\mathbf{m}), \mathbf{m}, \varphi(\mathbf{n}), \mathbf{p}'\}_C$$

が成り立つので,  $\mathbf{p}$  と  $\mathbf{p}'$  も共役点对である. すなわち 任意の  $\mathbf{m} \in C$  に対して,  $\{\mathbf{m}, \varphi(\mathbf{m})\} = C \cap \delta \mathbf{m}$  がいえる.

十分性:  $\{\mathbf{m}, \varphi(\mathbf{m})\} = C \cap \delta \mathbf{m}$  は,  $\delta$  に対する, 対合を定めている. □

例 3.20  $C$  が中心  $\delta$  をもつユークリッド平面における円であり,  $a \in C$  が任意であるとき,  $\delta$  によって決定される  $C$  の対合は点をそれぞれ中心と反対にとる対応であり, また  $\pi_a$  によって決定される  $\{\ell\}_a$  の対合は直線をそれぞれ直交するものへの対応としてとれる.

応用

射影的対応の3つの  
 点対があるとき、射影  
 軸が決まるので、定理  
 (3.17)は射影変換の下  
 で任意の点の像に対し  
 て、作図法を与える。  
 対合の場合、それらが  
 Frégier 点を決定する  
 ので、2対の射影的対  
 応の点対で十分であ  
 る。特に、対合の固定点

はFrégier 点から引いた  $C$  への接線の接点である。そして、2つの対合に共通な射影的対応の1つの点対は2つのFrégier 点を結ぶ直線と  $C$  の2つの交点である。

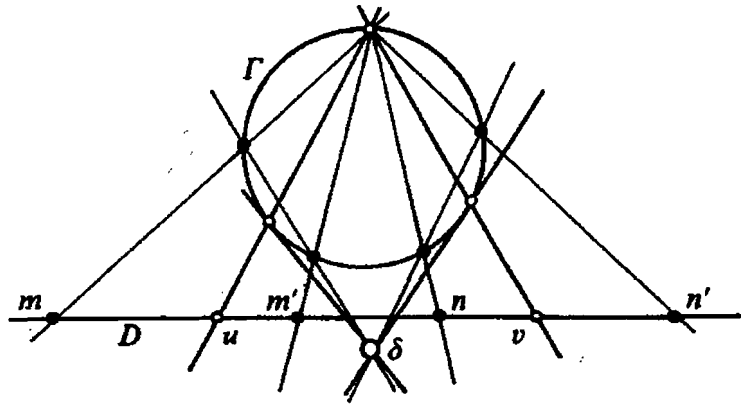


図 3.15: 射影変換の対応点の作図

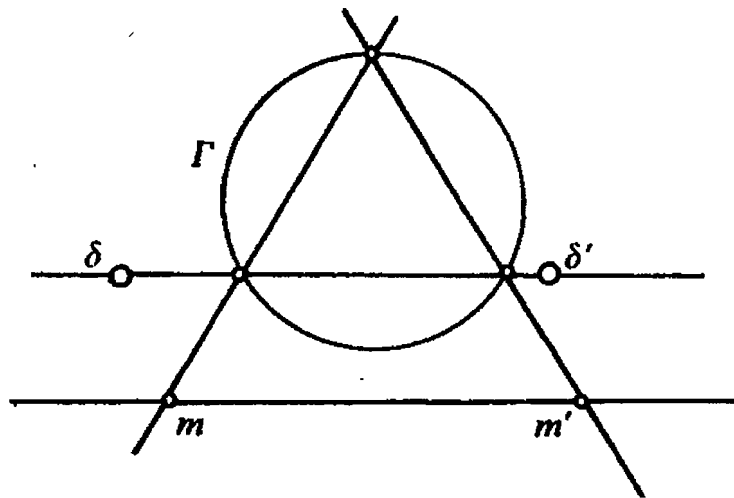


図 3.16: 2つの対合に共通な対応する点対

### 3.3 アフィン円錐曲線

#### 方程式

ここでは、射影平面の立場で考察した前節までの内容について、アフィン平面に限定して考える。円錐曲線  $C$  の方程式は

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

と表す。次に、いくつかの性質をあげる。

- $\begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0$  のとき、円錐曲線  $C$  は非退化である。
- $C$  における無限遠点の方向は  $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0$ 、または  $m$  で対応する直線の傾きを表すときは、 $cm^2 + 2bm + a = 0$  を与えられる。  
( $m = \infty$  の場合に気をつけなければならない。)
- 非退化円錐曲線  $C$  は  $\begin{cases} ac - b^2 > 0 \text{ のとき} & \text{楕円} \\ ac - b^2 = 0 \text{ のとき} & \text{放物線} \\ ac - b^2 < 0 \text{ のとき} & \text{双曲線} \end{cases}$  となる。
- 中心は方程式  $ax + by + d = 0$  と  $bx + cy + e = 0$  で与えられる。

#### よいパラメーター表示

3.2.1 より、点  $\mathbf{a} \in C$  を通り回転する直線  $l$  を考えて  $C \cap l$  のもう 1 つの共有点に対するパラメーターとして  $l$  の傾き  $m$  をとれば、よいパラメーター表示は得られる。

具体的には、射影座標での円錐曲線の方程式は例 3.9 の方程式  $X^2 - YZ = 0$  を標準形と考えることができるので、座標を  $[m, m^2, 1]$  とすれば、傾き  $m$  をパラメーターとする円錐曲線が表される。さらに、この座標を射影変換 (3.5) を施したあとで  $Z = 1$  に射影すると

$$x = \frac{a_1 m^2 + a_0 m + a_2}{c_1 m^2 + c_0 m + c_2}, \quad y = \frac{b_1 m^2 + b_0 m + b_2}{c_1 m^2 + c_0 m + c_2}$$

という、よいパラメーター表示は得られる。

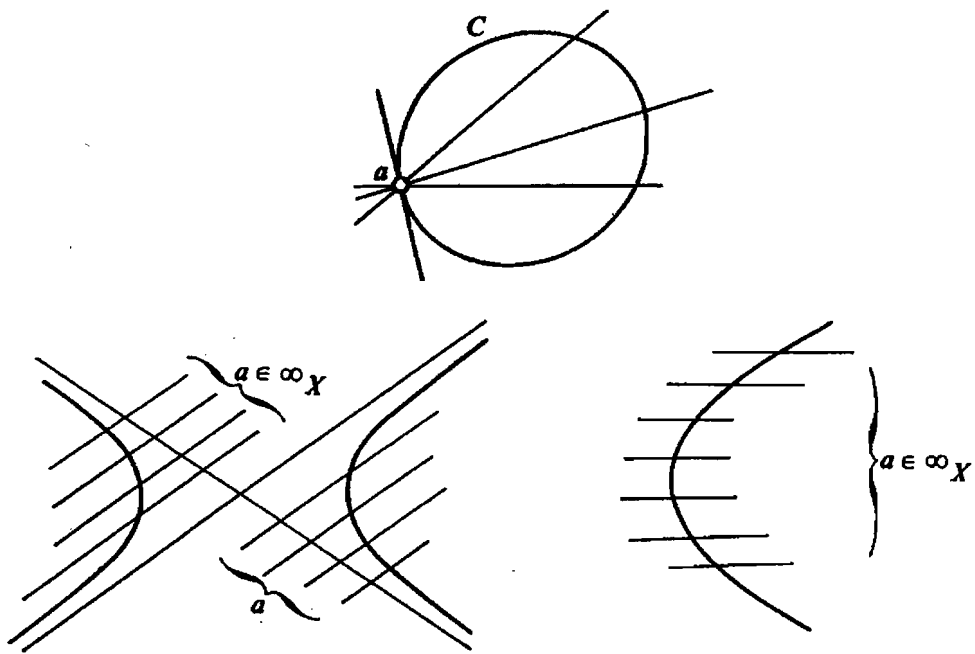


図 3.17: よいパラメーター表示

$C$  が放物線または双曲線であるとき、 $a \in \infty_X \cap C$  にとる場合もある。これは  $C$  が平行線の族と交わるのと同じである。これは関数のグラフがそれぞれ放物線と双曲線であることを示す方法でもあり、よく知られたパラメーター表示

$$x \mapsto \alpha x^2 + \beta x + \gamma \quad x \mapsto \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$$

が得られる。



### 5点を通る円錐曲線の作図

パスカルの定理は、5点で定義される円錐曲線  $C$  の6番目の点の作図法を示している。また、下の図は、 $C$  上の点での接線の作図法を示している。

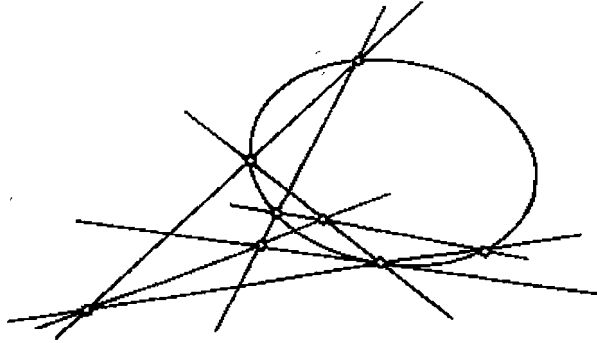


図 3.18: 接線の作図

### 4直線に接する放物線

通る5点で円錐曲線は決まるという性質とその双対のアイデアから、 $l_\infty$  と与えられた (どの2本も平行でなく、どの3本も共点でない) 4直線  $D_i$  に接するただ1つの円錐曲線 (すなわち、放物線) がある。

この放物線の作図法は、下の (ブリアンションの) 図のように、まず  $D_1$  と  $D_2$  の平行線を引くことで  $D_1$  と  $D_2$  の接点が見つかる。すると、その2つの接点の中点と  $D_1$  と  $D_2$  の交点を結ぶことで軸の方向をわかり、同様の方法で残りも決まる。

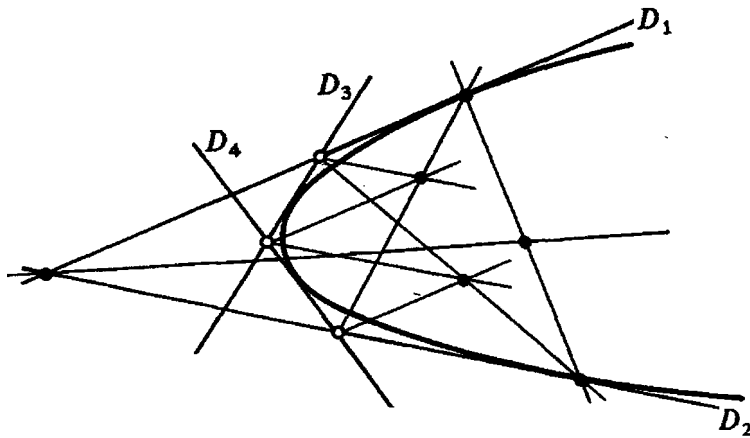


図 3.19: 放物線の作図

## 第4章 射影円錐曲線束

この章は第3章で考えた射影円錐曲線の応用を扱う. §4.1では, 円錐曲線束の導入とデザルグ対合についての考察をする. §4.2では, 射影平面における2つの円錐曲線の交わりと, そのタイプ別の円錐曲線束について考える. §4.3では, この論文の目標であり, 射影幾何学で最も美しい結果といわれるポンスレーの大定理の証明をする.

### 4.1 円錐曲線束

**定義 4.1**  $q, q'$  を同次座標2次形式とする.  $\alpha = p(q), \alpha' = p(q')$ , すなわち,  $q = 0, q' = 0$  という方程式をもつ異なる2つの円錐曲線  $\alpha$  と  $\alpha'$  に対して,

$$\mathcal{F} := \{\lambda q + \lambda' q' \mid (\lambda, \lambda') \neq (0, 0)\}$$

で与えられる円錐曲線の方程式の集合を考える. この形の方程式はスカラー倍で不変であることから,  $\lambda + \lambda' = 1$  としても構わないので,  $\mathcal{F}$  は, 射影円錐曲線の空間  $PQ(\mathbb{R}^3)$  における直線  $\mathcal{F} = \langle \alpha, \alpha' \rangle$  を意味する. この形で定義される円錐曲線の集合を円錐曲線束という.

命題 3.11 より,  $\{\mathbf{m}_i\}_{i=1,2,3,4}$  が  $P_2(\mathbb{R})$  における点であるとき,  $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_3, \mathbf{m}_4$  をすべて通る  $\alpha$  が表す円錐曲線の集合は, 一般に束をなす.

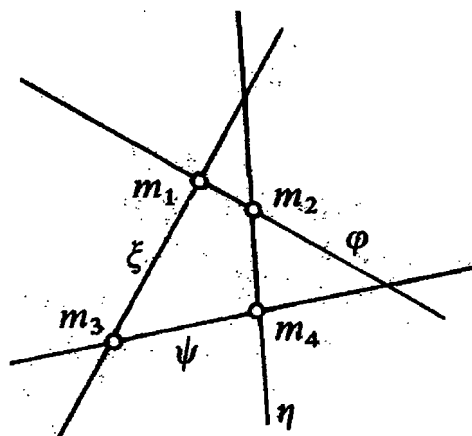


図 4.1: 4直線からなる円錐曲線束

例 4.2 4直線  $\mathbf{m}_1\mathbf{m}_2$ ,  $\mathbf{m}_3\mathbf{m}_4$ ,  $\mathbf{m}_1\mathbf{m}_3$ ,  $\mathbf{m}_2\mathbf{m}_4$  の方程式が, それぞれ  $\varphi = 0$ ,  $\psi = 0$ ,  $\xi = 0$ ,  $\eta = 0$  であるとき,  $\{\mathbf{m}_i\}_{i=1,2,3,4}$  をすべて通る円錐曲線束  $\mathcal{F}$  は方程式  $\lambda\varphi\psi + \lambda'\xi\eta = 0$  により定義される.

定義 4.3  $P_2(\mathbb{R})$  の部分集合  $\bigcap_{\alpha \in \mathcal{F}} \text{im}(\alpha)$  を, 束  $\mathcal{F}$  の基といい,  $\text{base}(\mathcal{F})$  と表す.

$P_2(\mathbb{R})$  では, 一般に, 束  $\mathcal{F}$  と点  $\mathbf{m}$  が与えられたとき, 通る5点が定まるので,  $\mathbf{m}$  を通る  $\mathcal{F}$  のただ1つの円錐曲線が決まる.

2次形式に付随する行列 束  $\mathcal{F}$  における退化円錐曲線を考察する.  $q, q'$  を  $\mathcal{F}$  を定義する円錐曲線とし, また  $q, q'$  に付随する行列をそれぞれ,  $A, A'$  とする.

行列  $\lambda A + \lambda' A'$  をもつ方程式が退化円錐曲線であるとき, またそのときに限り

$$\det(\lambda A + \lambda' A') = 0$$

この行列式は変数  $\lambda, \lambda'$  をもつ3次の同次多項式なので, その方程式は高々3個の異なる根をもつか, あるいは恒等的にみたす. このように,  $\mathcal{F}$  におけるすべての円錐曲線が退化しているか, あるいは  $\mathcal{F}$  が高々3個の退化円錐曲線を含むかのどちらかである. 恒等的に  $\det(\lambda A + \lambda' A') = 0$ , すなわち, そのすべての円錐曲線が退化しているとき束は退化しているという.

### 円錐曲線束と対合

定理 4.4 (デザルグの対合定理)  $\mathcal{F}$  を  $P_2(\mathbb{R})$  における非退化円錐曲線束とする. 直線  $l$  は  $\mathcal{F}$  のどの基も通らない, また  $\mathcal{F}$  の退化円錐曲線の像に含まれないとき  $l$  は  $\mathcal{F}$  に関してよいという.  $l$  が  $\mathcal{F}$  に関してよい直線るとき, 任意の  $\alpha \in \mathcal{F}$  に対して, 交点  $\text{im}(\alpha) \cap l$  がある  $\mathbf{m} \in l$  に対して  $\{\mathbf{m}, \varphi(\mathbf{m})\}$  という形である,  $l$  の対合  $\varphi$  が存在する.  $\varphi$  の固定点は  $l$  と  $l$  が接する  $\alpha \in \mathcal{F}$  の接点である. 特に,  $l$  に接する円錐曲線は  $\mathcal{F}$  に0個または2個ある.

**証明** 2直線  $ab, cd$  からなる退化円錐曲線  $q_1$  と, 2直線  $ac, bd$  からなる退化円錐曲線  $q_2$  からなる非退化円錐曲線  $C: \lambda q_1 + \mu q_2 = 0$  と 4点  $a, b, c, d$  のどれも通らない直線  $l$  の共有点を図のようにとる.

このとき,

$$\{p_1, p_2, p, q\}_l \bar{\wedge} \{ab, ac, ap, aq\} \bar{\wedge} \{db, dc, dp, dq\} \\ \bar{\wedge} \{q_2, q_1, p, q\}_l \bar{\wedge} \{q_1, q_2, q, p\}_l$$

となるので, 任意の  $\lambda, \mu$  に対して, 円錐曲線束に含まれる円錐曲線  $C$  の  $l$  との交点は, 対合の共役対  $\{p, q\}$  となる. すなわち, このように束の基から対合を構成できるので題意の対合は存在する.

また, 第2章で見たように直線上での対合の固定点は2個または0個である.

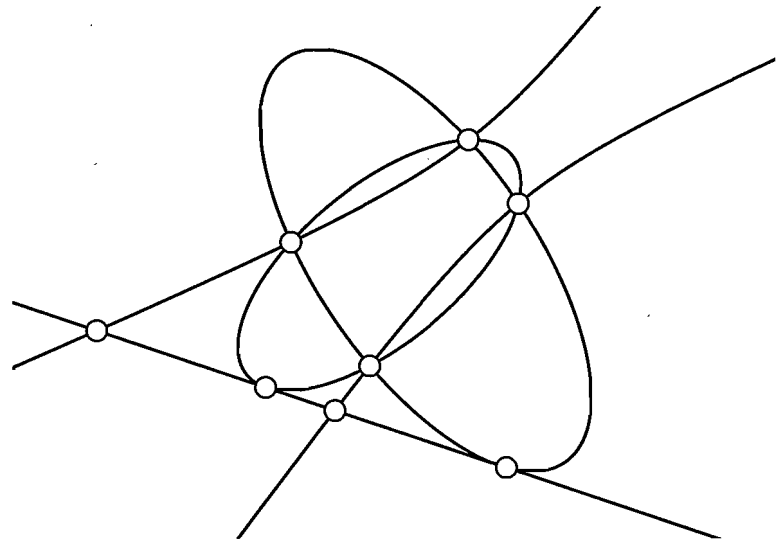


図 4.2: デザルグの対合

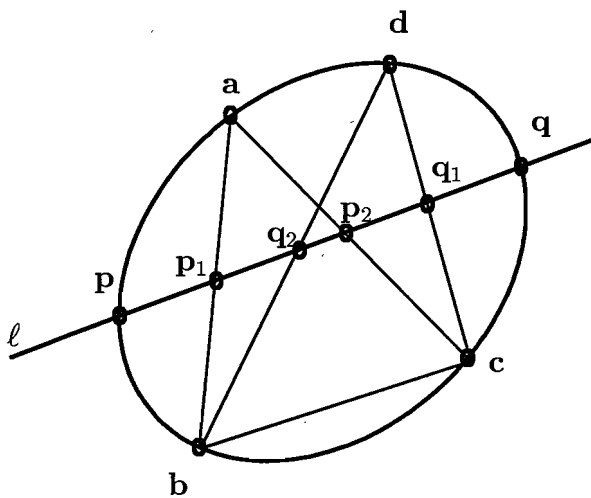


図 4.3: デザルグの対合

$\mathcal{F}$  において共役対  $\{m, \varphi(m)\}$  が固定点であることは, その点が  $l$  に接する円錐曲線の接点となることに対応している. すなわち,  $l$  に接する円錐曲線が2個または0個存在する (対合の固定点の具体的な作図法は 3.2.3 の応用, 参照).  $\square$

## 4.2 2つの円錐曲線の交わり

$\varphi$  を  $\mathbb{R}^2$  上での  $n$  次同次多項式 ( $n \leq 4$ ) とする. もし  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  が  $\varphi(a, b) = 0$  をみたすとき, 任意の  $k \in \mathbb{R}$  に対して  $\varphi(ka, kb) = 0$  が成り立ち, そして  $\varphi(a, b) = 0$  のときに  $\mathbf{m} = p(a, b)$  である点  $\mathbf{m} \in \tilde{\mathbb{R}}$  として  $\tilde{\mathbb{R}} = P_2(\mathbb{R})$  における  $\varphi$  の根を定義できる. 点  $(a, b) \neq (0, 0)$  を与えると,  $\mathbb{R}^*$  におけるスカラー倍を無視すると  $\omega(a, b) = 0$  をみたす  $\mathbb{R}^2$  上のただ1つの1次式  $\omega$  は,

$$\omega : (\lambda, \mu) \mapsto b\lambda - a\mu$$

である. これから, 次の補題がいえる.

**補題 4.5**  $n \leq 4$  のとき,  $\mathbb{R}^2$  上での 0 でない  $n$  次同次多項式  $\varphi$  を考える.

i)  $\mathbf{m}$  が  $\varphi$  の根であるための必要十分条件は  $\varphi = (b\lambda - a\mu)\psi$  であるような  $(n-1)$  次同次多項式  $\psi$  が存在することである. 定義により,  $\mathbf{m}$  の位数とは,  $\mathbf{m}$  が  $\psi$  の根でないとき,  $\varphi = (b\lambda - a\mu)^\omega \psi$  [このとき  $\psi$  は  $(n-\omega)$  次同次多項式] となるような  $\omega$  のことである.  $R(\varphi) = \{(\mathbf{m}_i, \omega_i)\}_{i=1, \dots, k}$  によって  $\omega_i$  が  $\mathbf{m}_i$  の位数である  $\tilde{\mathbb{R}}$  における  $\varphi$  の異なる根  $\mathbf{m}_i$  の集合を表す. 2つの同次多項式について,  $R(\varphi) = R(\varphi')$  と書くことは  $\varphi$  と  $\varphi'$  が同じ根をもち, また各根は同じ位数を持つことを意味する.

ii)  $\mathbf{m}_i = p(a_i, b_i)$  に対して, 多項式  $\psi$  が根を持たなければ,  $\varphi = \prod_{i=1}^k (b_i\lambda - a_i\mu)^{\omega_i} \psi$  である. このとき,  $\sum_{i=1}^k \omega_i = n$ , または  $\sum_{i=1}^k \omega_i \leq n-2$ .

iii)  $R(\varphi) = R(\varphi')$ , かつ  $\sum_{i=1}^k \omega_i = n$  のとき,  $\varphi' = k\varphi$  ( $k \in \mathbb{R}^*$ ) である.

iv) もし  $f \in GP(\mathbb{R}^2)$  であれば,  $R(\varphi \circ f) = \{f^{-1}(\mathbf{m}_i), \omega_i\}_{i=1, \dots, k}$  である.

以上のことは  $\mathbb{R}$  上の一般の多項式に対して,  $\frac{\lambda}{\mu} = x$  と未知数を置き換えることで示される. このとき, 根が  $p(1, 0) = \infty \in \tilde{\mathbb{R}}$  となるかもしれないが, 相同写像を適用すると, 有限な根だけが存在するようになるので,  $\infty$  は根ではなくなる.

### 4.2.1 円錐曲線と非退化円錐曲線の交わり

$\alpha$  を像  $C$  をもつ非退化円錐曲線とし, また  $\alpha'$  を非退化とは限らない多項式  $q'$  をもつ別の円錐曲線とする.  $\alpha$  に対する標準の方程式として  $Y^2 - XZ = 0$  を用いると,  $\alpha$  のよいパラメーター表示  $f$  によって, その同次座標を  $[\lambda^2, \lambda\mu, \mu^2]$  とできる.

$C'$  が  $\alpha'$  の像であるとき  $\mathbf{m} = p(x) \in C \cap C'$  であれば,  $q'(x) = 0$  である. そのような  $\mathbf{m}$  を求めるには  $x = (\lambda, \mu)$  とするとき, その同次座標  $[\lambda^2, \lambda\mu, \mu^2]$  を方程式  $q'$ , すなわち

$$aX^2 + a'Y^2 + a''Z^2 + 2bYZ + 2b'ZX + 2b''XY$$

に代入した同次式

$$a\lambda^4 + 2b''\lambda^3\mu + (a' + 2b')\lambda^2\mu^2 + 2b\lambda\mu^3 + a''\mu^4 \quad (4.1)$$

の根を求めればよい.

このとき,  $\mathbf{m} \in C \cap C'$  に対して,  $f^{-1}(\mathbf{m})$  の位数は,  $\alpha$  と  $\alpha'$  にのみ依存し,  $q'$  あるいは  $C$  に対するよいパラメーター表示のとり方には無関係である.

**定義 4.6**  $\mathbf{m} \in C \cap C'$  であるとき,  $f^{-1}(\mathbf{m})$  の位数を  $\mathbf{m}$  の位数といい,  $\omega(\mathbf{m})$  と表す.  $\mathbf{m}'$  が  $C \cap C'$  を通り, また  $\omega_i$  が  $\mathbf{m}_i$  の位数であるとき,  $C \square C' = \{(\mathbf{m}_i, \omega_i)\}_{i=1, \dots, k}$  と表す.  $\omega(\mathbf{m}) \geq 2$  ( $\omega(\mathbf{m}) \geq 3, \omega(\mathbf{m}) = 4$ ) であるとき,  $C'$  は  $\mathbf{m}$  で  $C$  に接する (重接触する, 超接触する) という.

$\mathbf{m} \notin C \cap C'$  のとき,  $\omega(\mathbf{m}) = 0$  とする.

$q$  と  $q'$  の条件は (4.1) と同じとして, 点  $\mathbf{m} = p([1, 0, 0])$  について  $\omega(\mathbf{m})$  を計算してみる.  $\mathbf{m} = f(p(1, 0))$  なので,  $\omega(\mathbf{m})$  は (4.1) の根のように  $x = (1, 0)$  の位数のことである.

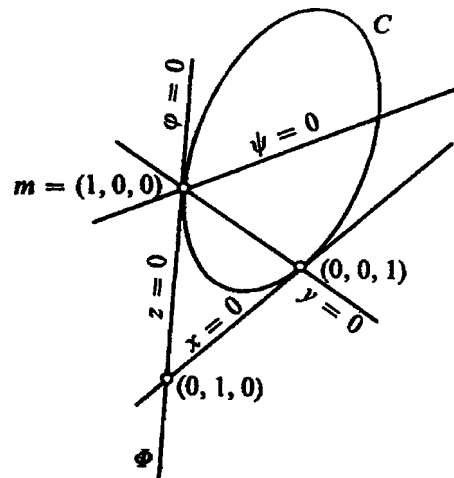


図 4.4:  $[1, 0, 0]$  についての位数

このとき, 次が成り立つ.

**命題 4.7**

$$\text{i) } \omega(\mathbf{m}) \geq 1 \iff a = 0 ;$$

$$\text{ii) } \omega(\mathbf{m}) \geq 2 \iff a = b'' = 0 ;$$

$$\text{iii) } \omega(\mathbf{m}) \geq 3 \iff a = b'' = a' + 2b' = 0 ;$$

$$\text{iv) } \omega(\mathbf{m}) = 4 \iff a = b'' = a' + 2b' = b = 0 .$$

i)  $\omega(\mathbf{m}) \geq 1$  の場合,  $\mathbf{m} \in C'$  となる条件は,  $a = 0$ .

ii)  $\omega(\mathbf{m}) \geq 2$  の場合,  $\alpha'$  に関する  $[X_0, Y_0, Z_0]$  の極線は次の方程式をもつ.

$$aX_0X + a'Y_0Y + a''Z_0Z + b(Y_0Z + Z_0Y) + b'(Z_0X + X_0Z) + b''(X_0Y + Y_0X) = 0$$

特に,  $\alpha'$  に関する  $\mathbf{m} = [1, 0, 0]$  の極線  $\mathbf{m}^\perp$  は

$$aX + b'Z + b''Y = 0$$

なので, 条件  $a = 0$  より,  $\mathbf{m} \in C'$  である. また条件  $b'' = 0$  より,  $\mathbf{m}$  での  $\alpha$  の接線  $Z = 0$  が,  $\mathbf{m}$  で  $\alpha'$  にも接していることを示している.

iii)  $\omega(\mathbf{m}) \geq 3$  の場合,

$$q' = a'(Y^2 - XZ) + Z(2bY + a''Z),$$

( $Z = 0$  は  $\mathbf{m}$  での  $C$  の接線,  $2bY + a''Z = 0$  は  $\mathbf{m}$  を通る直線), すなわち  $k \in \mathbb{R}$  かつ  $\varphi, \psi$  は 0 でない 1 次式,  $\varphi$  が  $\mathbf{m}$  での  $\alpha$  の接線  $\Phi$  の方程式である場合は,  $q' = kq + \varphi\psi$  と書ける. 逆に, もし  $\Phi$  の方程式  $\varphi$  を持つとき  $q' = kq + \varphi\psi$  であれば,  $\omega(\mathbf{m}) \geq 3$  である (方程式  $\psi$  をもつ直線は点  $\mathbf{m}$  を通る).

iv)  $\omega(\mathbf{m}) = 4$  の場合,  $\varphi$  が  $\mathbf{m}$  での  $\alpha$  の接線の方程式であるとき,  $q' = kq + \varphi^2$  と表される, また逆も言える.

以下の命題はこの状況をまとめたものである：

**命題 4.8** 方程式  $q$  と像  $C$  をもつ非退化円錐曲線  $\alpha$ , と  $C$  と異なる像  $C'$  をもつ任意の円錐曲線  $\alpha'$  が与えられているとき, 点  $\mathbf{m} \in C \cap C'$  と  $\mathbf{m}$  での  $\alpha$  の接線  $\Phi$  の方程式  $\varphi$  を考える. すると,

- i)  $\omega(\mathbf{m}) \geq 2 \iff \Phi$  は  $\alpha'$  に接する；
- ii)  $\omega(\mathbf{m}) \geq 3 \iff \alpha'$  の方程式は  $q' = kq + \varphi\psi$  という形になる；
- iii)  $\omega(\mathbf{m}) \geq 4 \iff \alpha'$  の方程式は  $q' = kq + \varphi^2$  という形になる.

**系 4.9** もし  $C$  と  $C'$  がどちらも非退化であるならば,  $C \square C' = C' \square C$  である.

このことは,  $C \square C'$  に対する可能な場合に関する次の表を調べることでいえる.

タイプ	$C \square C'$	$\sum_{i=1}^k \omega_i$	$\#(C \cap C')$	位数 $\geq 2$ の点	位数 4 の点
	$(a, 1)$	1	1	0	0
	$(a, 1), (b, 1)$	2	2	0	0
	$(a, 2)$	2	1	1	0
I	$(a, 1), (b, 1), (c, 1), (d, 1)$	4	4	0	0
II	$(a, 2), (b, 1), (c, 1)$	4	3	1	0
III	$(a, 2), (b, 2)$	4	2	2	0
IV	$(a, 3), (b, 1)$	4	2	1	0
V	$(a, 4)$	4	1	1	1

表 4.1: 2 曲線の交わりのタイプ

左端の項目：“タイプ” については, このあと考察する  $\sum_{i=1}^k \omega_i = 4$  の場合における, タイプの分類として用いる.



**定理 4.10** 像  $C$  をもつ非退化円錐曲線  $\alpha$ , と  $C$  と異なる像  $C'$  と  $C''$  をもつ任意の円錐曲線  $\alpha'$  と  $\alpha''$  を考える.  $C \square C' = \{(\mathbf{m}_i, \omega_i)\}_{i=1, \dots, k}$  とする. すると

i)  $\sum_{i=1}^k \omega_i$  がとる値は  $0, 1, 2$  または  $4$  ;

ii)  $\sum_{i=1}^k \omega_i = 4$  であるとき,  
 $C \square C' = C \square C'' \iff C''$  は  $\alpha$  と  $\alpha'$  で決められる束に含まれる ;

iii)  $f : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2'(\mathbb{R})$  が  $P_2(\mathbb{R})$  と別の射影平面  $P_2'(\mathbb{R})$  との射影変換であれば,

$$f(C) \square f(C') = f(C \square C') = \{(f(\mathbf{m}_i), \omega_i)\}_{i=1, \dots, k} .$$

**証明**

(i) の部分は上の議論と補題 4.5 (v) から得られる.

(iii) の部分は射影変換  $f$  の同型性からいえる.

(ii) を証明する.  $q, q', q''$  を  $\alpha, \alpha', \alpha''$  の方程式とし,  $g$  を  $\alpha$  のよいパラメーター表示とし, また  $\varphi' = q' \circ g$  かつ  $\varphi'' = q'' \circ g$  とおく. 補題 4.5 の表記法において,  $C \square C' = C \square C''$  であれば  $R(\varphi') = R(\varphi'')$  である. そのとき, 補題 4.5(iii) はある  $k \in \mathbb{R}^*$  に対して  $\varphi'' = k\varphi'$  であり, ゆえに  $(q'' - kq') \circ g = 0$ . これより,  $q'' - kq' = hq$  ( $h \in \mathbb{R}$ ) がいえる. このとき, 方程式  $q'' = kq' + hq$  をもつ  $\alpha''$  は,  $\alpha$  と  $\alpha'$  によって決められる束に含まれることを示している. 逆は明らかである.  $\square$

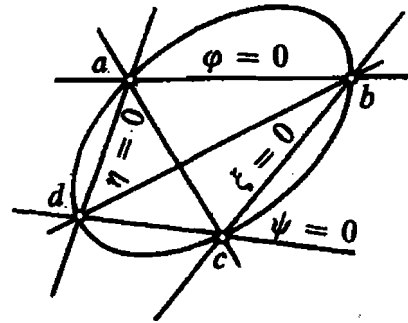
**注意 4.11** 上の定理の (i) について, ベズー (Bézout) の定理によると

一般に, 代数的に閉じた体上での  $m$  次平面曲線と  $n$  次平面曲線の交点の個数は重複を込めて  $mn$  個である.

ことが知られている. この場合, 実数体  $\mathbb{R}$  は代数的閉体ではないので, 交点数は重複を含めて必ずしも  $2 \times 2 = 4$  とはならない.

### 4.2.2 交わりの例

ここでは表 4.1 で示された 5 つの交わりのタイプの例を与え、同時に  $\alpha$  と  $\alpha'$  より定まる束における退化円錐曲線について考察する。



#### 異なる 4 点を通る場合 (タイプ I)

$a, b, c, d$  を 4 点, また直線  $ab, cd, bc, da$  の方程式をそれぞれ  $\varphi = 0, \psi = 0, \xi = 0, \eta = 0$  とする. これら 4 点を通る円錐曲線束  $\mathcal{F}$  は  $\{k\varphi\psi + h\xi\eta = 0 \mid (k, h) \in \tilde{\mathbb{R}}\}$  である (例 4.2 参照). 明らかに, この束は 3 つの退化円錐曲線, すなわち, 直線  $\{ab, cd\}, \{ac, db\}, \{ad, bc\}$  の対を含んでいる. 下の図からもわかるように, 3 点  $p = ab \cap cd, q = ac \cap db, r = ad \cap bc$  は  $\mathcal{F}$  のすべての円錐曲線に関して  $p \perp q, q \perp r, p \perp r$  をみたす.<sup>1</sup>

図 4.5:  $[1, 0, 0]$  についての位数

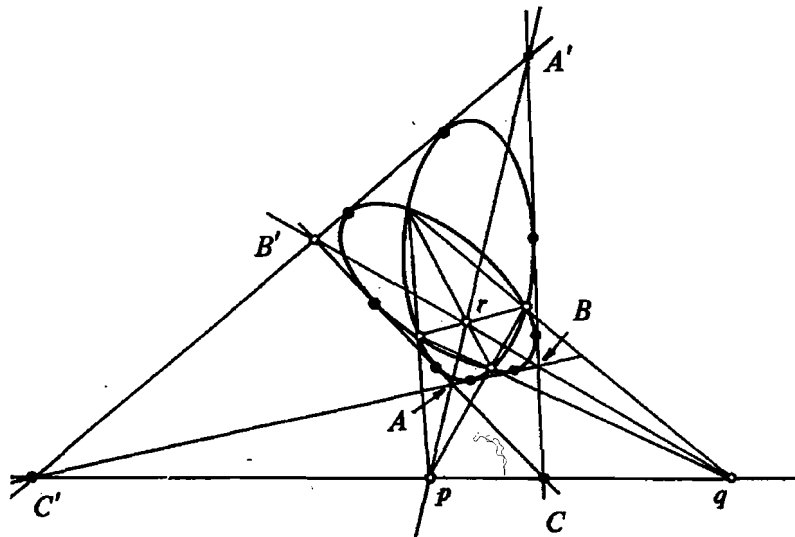


図 4.6: 異なる 4 点を通る場合

逆に, 3 点  $p, q, r$  を自極的な 3 点にもつ方程式を (3.7) で考える. 例えば, 点  $p = [1, 0, 0]$  に対する極線  $p^\perp$  として  $qr : aX + b'Z + b''Y = 0$  が得られるが, この直線は  $q, r$  を通るので,  $X = 0$  でもある. これより  $a \neq 0, b' = b'' = 0$  がいえる.  $q, r$

<sup>1</sup>この性質を自極的といい, 自極的な 3 点からなる三角形を自極三角形という.

に対しても同様に考えて、 $a \neq 0, a' \neq 0, a'' \neq 0, b = b' = b'' = 0$ . さらに、 $\mathcal{F}$ のすべての円錐曲線が  $\mathbf{s}$  を通るとき、円錐曲線の方程式は  $k(X^2 - Z^2) + h(Y^2 - Z^2) = 0$  ( $(k, h) \in \tilde{\mathbb{R}}$ ) という形になる. こうして、 $X^2, Y^2, Z^2$  の係数が異なるいくつかの曲線に対して、ただ1つの直交基、そして、その曲線に関するただ1つの自極三角形が存在が出来る. 自極三角形の唯一性から次のことが出来る.

$\alpha$  と  $\alpha'$  が異なる4本の共通接線をもつとき、それらの6つの交点はすべて三角形  $\{p, q, r\}$  とは異なる. これを見るために、3.2.2 で導入された双対関係を適用する.  $\alpha$  と  $\alpha'$  の共通接線は  $\alpha^*$  と  $\alpha'^*$  に共通する点であり、そしてその3直線  $AA', BB', CC'$  は  $\alpha$  と  $\alpha'$  そしてそれらの形式が2つの円錐曲線に関して自極的である三角形に関しての共役な点対になっている.

### 接点を1つもつ場合 (タイプII)

はじめの3点が交点  $a, b, c$  ( $a$  は接点) となる射影枠をとる.  $a$  での共通接線  $\Phi$  の方程式は  $X + Y = 0$  と仮定する. そのとき  $\mathcal{F}$  は方程式

$$\{kY(X + Z) + hXZ = 0 \mid (k, h) \in \tilde{\mathbb{R}}\}$$

をもつ円錐曲線から成る. 2つの退化円錐曲線が、 $\{ab, ac\}$  と  $\{\Phi, bc\}$  にそれぞれ対応する、 $XZ = 0$  と  $Y(X + Z) = 0$  で与えられる.

$\det A = k^2h/4$  なので、これ以外にはない.

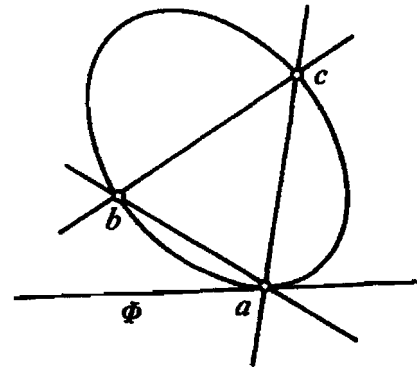


図 4.7: 接点を1つもつ場合

### 2つの接点がある場合 (タイプIII)

例 3.8 より、 $\Phi$  での円錐曲線は  $a$  と  $b$  が接点で  $c$  がその2つの共通接線の交点であるとき、基  $\{a, b, c\}$  において  $kX^2 + hYZ = 0$  という方程式をもつ.  $\mathcal{F}$  での退化円錐曲線は  $\{ca, cb\}$  と2重直線  $ab$  である.

$\det A = -kh^2/4$  なので、これ以外にない.

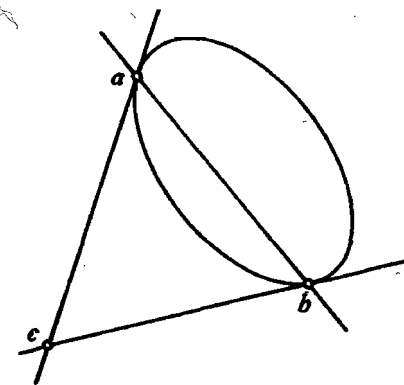


図 4.8: 2つの接点がある場合

### 重接触円錐曲線の場合 (タイプIV)

命題 4.7 より  $\mathcal{F}$  における円錐曲線は  $k(Y^2 - ZX) + hYZ = 0$  で与えられると仮定する. それらのすべては  $Y^2 - XZ = 0$  と  $a$  で重接触し  $b$  を通る. 束はその像が  $\{ab, \Phi\}$  であるただ1つの退化円錐曲線をもつ.

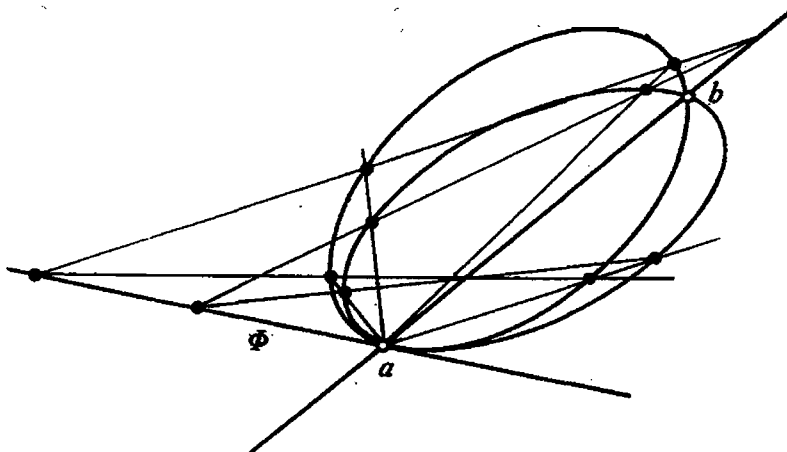


図 4.9: 重接触円錐曲線の場合

### 超接触円錐曲線の場合 (タイプV)

命題 4.7 より,  $\mathcal{F}$  は  $k(Y^2 - ZX) + hZ^2 = 0$  と表すことができる. 方程式が  $Z^2 = 0$ , また像が接線  $\Phi$  (2重線) であるただ1つの退化円錐曲線が存在する.  $\mathcal{F}$  の要素の円錐曲線から他の円錐曲線を作図する方法は右図で与えられる.

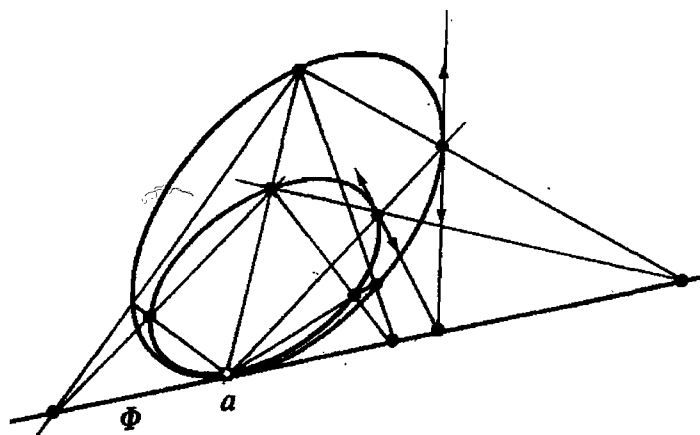


図 4.10: 超接触円錐曲線の作図

ユークリッド空間の場合, 2つの曲線は同じ曲率を持たなければならないが, これだけでは不十分で, 円錐曲線が  $a$  を通る共通の (Euclid) 対称軸を持つ場合は重接触が超接触を意味する.

図 4.12 は楕円の頂点に重接触している (ゆえに超接触している) 円を表している. また, その中心の見つけ方の作図法を与えている.

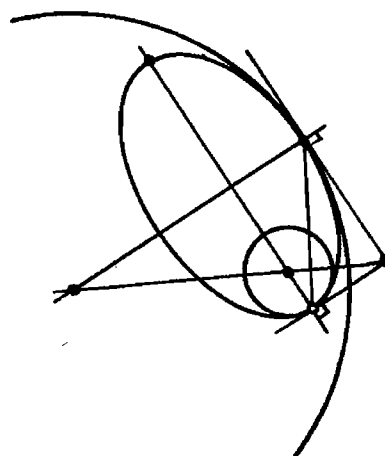


図 4.11: 超接触している円

**注意 4.12** 2つの円錐曲線の交点を求めることは実際には4次方程式を解くことである.

しかしながら, もし円錐曲線で定まる束  $\mathcal{F}$  における退化円錐曲線がわかれば, 問題は2つの2次の方程式を解くことに帰着する.  $\mathcal{F}$  の退化円錐曲線を見つけるということは, 3次方程式を解くことである. 任意の4次方程式は(4.1)の形で計算されるので, 一般に4次方程式は3次方程式に帰着されると結論できる (そして結果的には冪根の解をもつ).

4.2.2における5つのタイプの考察は束  $\mathcal{F}$  の退化円錐曲線  $C''$  を選ぶことと  $C''$  と  $C$  の交点の位数を数え上げることで, 以下のルールにしたがって  $C \square C'$  が計算されることを示している.

(右図参照)

- i) 単接触点があるとき, その点の位数は2.
- ii) 点が  $C''$  を構成する両方の直線上にあるとき, その位数を2倍に数える.
- iii)  $C''$  が2重線であるとき, すべての位数を2倍に数える.

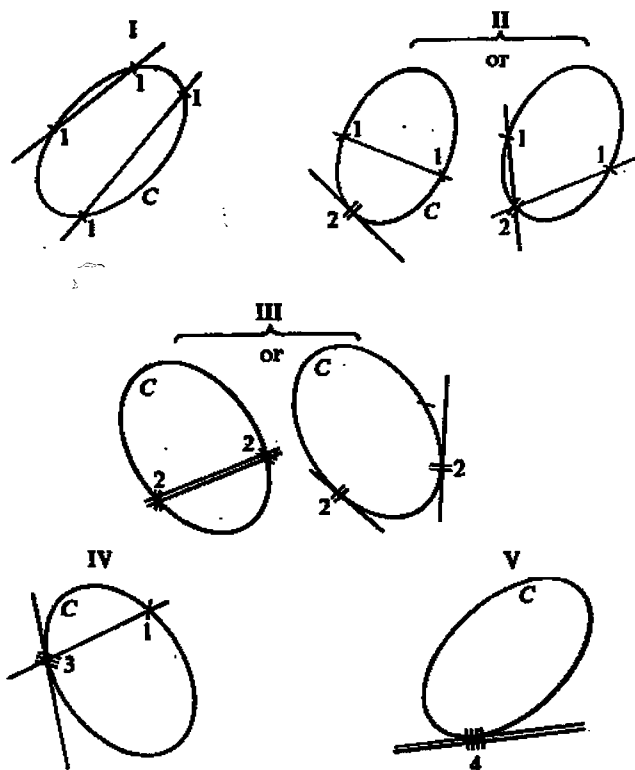


図 4.12: 超接触円錐曲線の場合

### 4.2.3 射影変換と重接触円錐曲線

$P_2(\mathbb{R})$  の直線  $D$  と点  $a \in D$  を与えると、点ごとに  $D$  を固定し、また  $a$  を通るある直線  $S$  を不変にする  $P_2(\mathbb{R})$  の射影変換  $f$  が存在する. そのような射影変換を軸  $D$  と中心  $a$  をもつ相応という. 相応は  $D$  と  $a$  と同一直線上の 2 点  $(m, f(m))$

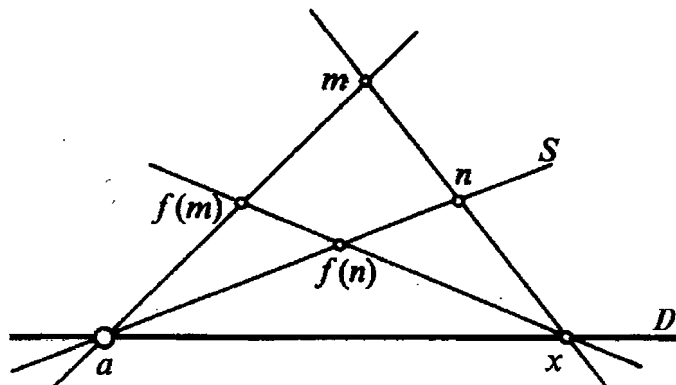


図 4.13: 相応

が与えられると決まる. それは  $D$  の外部で固定点をもたない.

これを証明するのは、 $D$  を無限遠に飛ばせば十分である. すると  $f$  のアフィン平面  $F \setminus D$  への制限が  $a$  方向のベクトルによる平行移動になることがわかる.

$D$  の方程式が  $Z = 0$  であり  $a = p([1, 0, 0])$  である同次座標では、 $f$  の行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

という形になる.

**命題 4.13**  $C$  と  $C'$  を、点  $a \in C \cap C'$  において同じ接線  $T$  をもつ、非退化円錐曲線とする.  $C$  と  $C'$  が  $a$  で重接触するための必要十分条件は中心  $a$  と軸  $D$  をもち  $f(C) = C'$  となる相応  $f$  が存在することである. さらに、 $C$  と  $C'$  が超接触している場合またその場合に限り  $D = T$  となる.

**証明**  $f$  を中心  $a$  と軸  $D$  をもつ相応とする.

$D \neq T$  のとき、 $b$  を  $D \cap C$  の 2 番目の点とする. すると、 $f(C)$  は  $a$  で  $T$  に接し  $b$  を含む円錐曲線である. 一方、 $C$  と  $f(C)$  は  $a$  と  $b$  以外に共通な点を持たない. 表 4.1 より、これは  $C$  と  $f(C)$  の交点がタイプ IV であることを意味する.

$D = T$  かつ  $Z = 0$  が  $D$  の方程式ならば,

$$q = a'Y^2 + a''Z^2 + 2bYZ + 2b'ZX$$

と書ける (命題 4.7 参照). しかし  $f: [X, Y, Z] \mapsto [X + \alpha Z, Y, Z]$  という形であり, そして  $f^{-1}: [X, Y, Z] \mapsto [X - \alpha Z, Y, Z]$  で与えられ, また  $f(C)$  の方程式は

$$q' = a'Y^2 + a''Z^2 + 2bYZ + 2b'ZX - 2b'\alpha Z^2$$

で与えられることがわかる. また命題 4.8 より,  $f(C)$  は  $C$  に超接触している.

逆に,  $C$  と  $C'$  は  $\mathbf{a}$  で重接触しているとし,  $\mathbf{m} \neq \mathbf{m}'$  のときに  $\mathbf{m}(\mathbf{m}')$  を  $\mathbf{a}$  を通る直線と  $C(C')$  との 2 番目の交点とする.  $C$  と  $C'$  が超接触しない限りは  $\mathbf{b} \in C \cap C'$  は  $\mathbf{a}$  と異なるので,  $D = \mathbf{ab}$  とする. すると軸  $D$  と中心  $\mathbf{a}$  をもつ  $\mathbf{m}$  から  $\mathbf{m}'$  へとうつす写像  $f$  は, 上と定理 4.10(ii) により,  $C$  と  $C'$  で定まる束に属する円錐曲線  $C'' = f(C)$  を生じる. しかし  $f(\mathbf{m}) = \mathbf{m}' \in C \cap C'$  であり, 故に  $C'' = C'$ .  $\square$

#### 4.2.4 円錐曲線束のタイプ

**命題 4.14**  $P_2(\mathbb{R})$  を射影平面,  $\alpha$  を  $P_2(\mathbb{R})$  の像  $C$  をもつ非退化円錐曲線, また  $\mathbf{m}_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) を  $\sum_{i=1}^k \omega_i = 4$  となるような位数  $\omega_i (\geq 1)$  をもつ  $C$  の点とする. すると, 集合

$$\mathcal{F} = \{\alpha \mid C' = \text{im}(\alpha'), C \square C' = \{(\mathbf{m}_i, \omega_i)\}_{i=1, \dots, k}\}$$

は, (このタイプの束は**完全**と呼ばれる) 表 4.1 による**タイプ**に関連付けられる. 集合  $\{(\mathbf{m}_i, \omega_i)\}_{i=1, \dots, k}$  は  $\mathcal{F}$  にのみ依存し,  $\alpha$  に無関係である. 特に,  $\mathcal{F}$  のタイプは  $\alpha$  に依存しない. 2 つの完全な束  $\mathcal{F}$  と  $\mathcal{F}'$  を与えると,  $\mathcal{F}$  から  $\mathcal{F}'$  への射影変換  $f$  は 2 つの束が同じタイプになる場合またその場合にかぎり存在する.

**証明**  $\mathcal{F}$  が束であることを示すためには, 4.2.2 の  $C \square C' = \{(\mathbf{m}_i, \omega_i)\}$  である円錐曲線  $C'$  を示す例を挙げ, 定理 4.10 を適用すればよい. 系 4.9 でタイプは  $C$  に依存せず,  $\mathcal{F}$  にのみ依存することを導いた.

$\mathcal{F}$  と  $f(\mathcal{F})$  が同じタイプであることは定理 4.10(iii) からいえる.

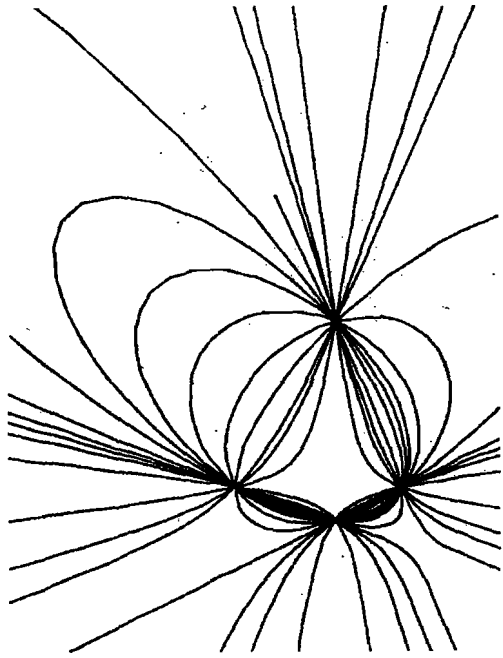


図 4.14: タイプ I

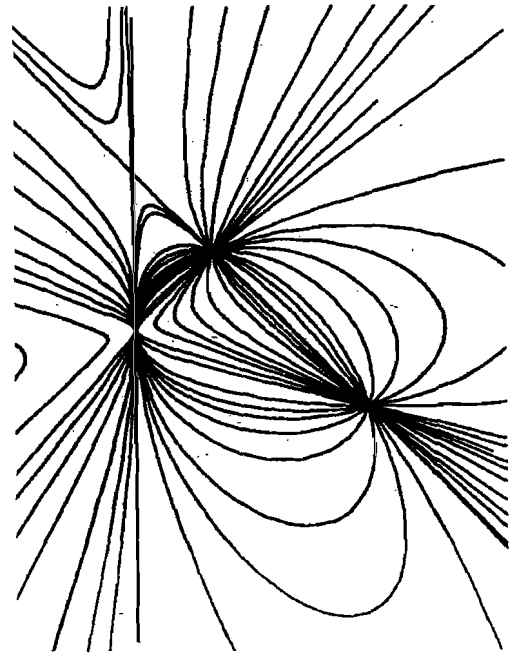


図 4.15: タイプ II

タイプ I, II, IIIのときの逆については, 要素  $\{a, b, c, d\}$ ,  $\{a, b, c, \Phi\}$ ,  $\{a, b, c\}$  により, 束はそれぞれ well-defined であるということ, そして命題 3.4(射影幾何学の基本定理)を使う. タイプ IV, Vについてはこの説明が使えない. なぜならそのとき束を決めるためには円錐曲線を持つことが必要であり, また2つの円錐曲線は射影変換の下で常に共役とは限らないからである. 射影変換の作用の下で, 固定された円錐曲線の場合に帰着する. するとタイプ IV は  $C$  の2点, またタイプ V は1点により特徴付けられる. このとき,  $C$  の群は  $C$  の3点の組に推移的に作用している.  $\square$

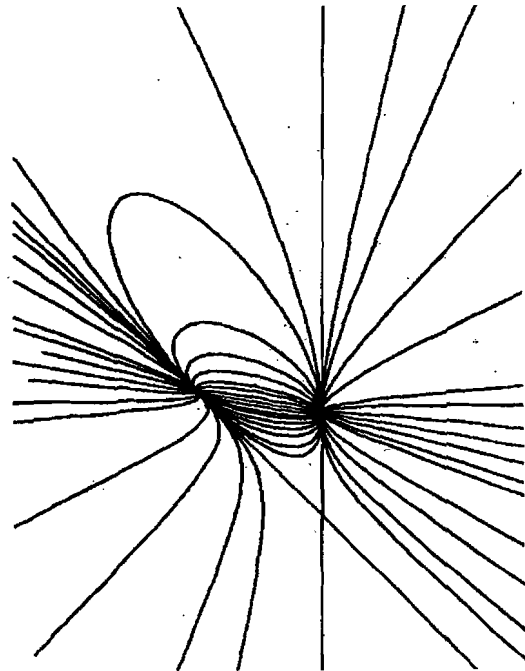


図 4.16: タイプ III



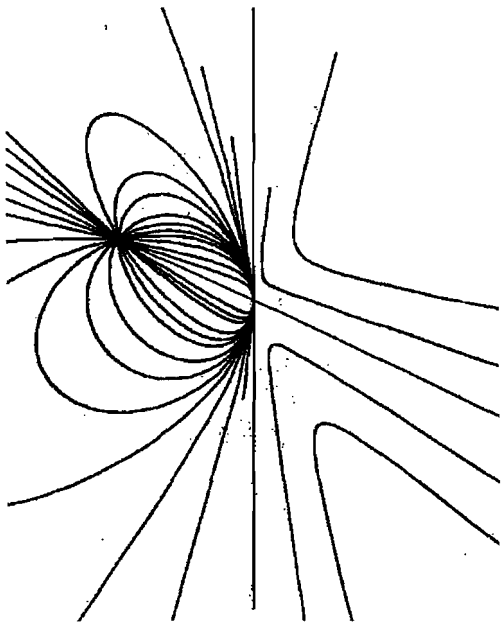


図 4.17: タイプIV

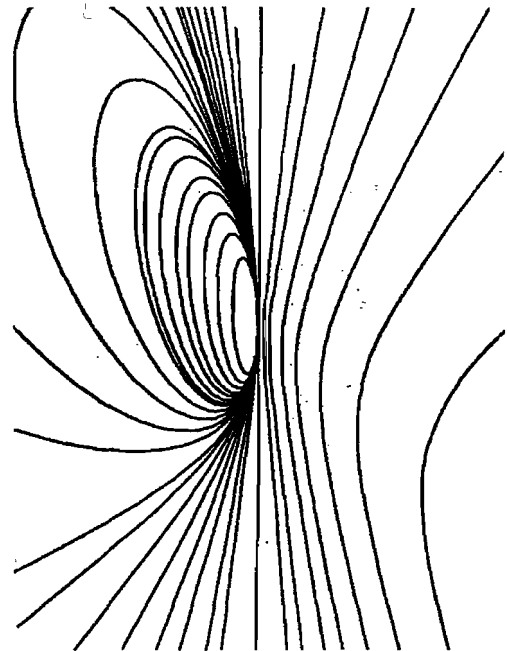


図 4.18: タイプV

### 線形性の利用

$\mathcal{F}$  を  $P_2(\mathbb{R})$  の円錐曲線束,  $\mathbf{m} \in P_2(\mathbb{R})$  を点とする.  $\mathbf{m}$  と  $\mathbf{m}'$  が  $\mathcal{F}$  の任意の円錐曲線に関して共役であるような  $\mathbf{m}' \in P_2(\mathbb{R})$  が存在する.

$\mathcal{F}$  において, 極形式  $\Pi$  ( $\Pi'$ ) をもつ2つの円錐曲線の方程式を  $q$  ( $q'$ ) とする.  $q$  ( $q'$ ) に関する  $\mathbf{m}$  の極線は,  $\mathbf{m} = p(x)$  に対して  $\Pi(x, \cdot) = 0$  ( $\Pi'(x, \cdot) = 0$ ) である.  $kq = kq'$  の極形式は  $k\Pi = k\Pi'$  なので, すべての  $\Pi(x, x') = \Pi'(x, x') = 0$  となる点  $\mathbf{m}' = p(x')$  は求める性質をもつ.

$\mathcal{F}$  がタイプ I のとき,  $\mathbf{m}$  が  $\mathcal{F}$  に共通な自極三角形の边上になければ, 点  $\mathbf{m}'$  はただ1つしかない.  $P_2(\mathbb{R})$  の部

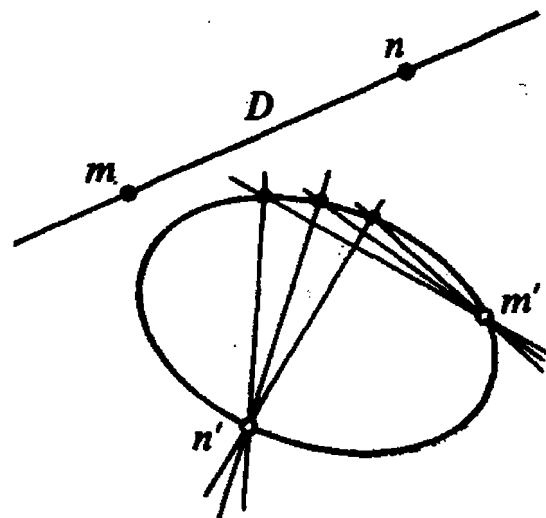


図 4.19: 2次変換

分集合から  $P_2(\mathbb{R})$  への写像  $\mathbf{m} \mapsto \mathbf{m}'$  を 2 次変換 (Cremona 変換) という。

$\mathbf{m} \in P_2(\mathbb{R})$  に対して,  $\mathcal{F}$  のどんな円錐曲線に関する  $\mathbf{m}$  の極線も常に  $\mathbf{m}'$  を通る. その極線が常に  $\mathbf{m}'$  で読み取られる直線であれば, その直線は  $\mathcal{F}$  における円錐曲線  $kq + hq'$  を定義する対  $(k, h) \in \mathbb{R}$  をもつ射影変換になる.  $\mathcal{F}$  の退化円錐曲線のどんな根も横切らない  $P_2(\mathbb{R})$  の直線  $D$  をとり, また 2 点  $\mathbf{m}, \mathbf{n} \in D$  を固定すると  $kq + hq'$  に関する  $D$  の極は  $kq + hq'$  に関する  $\mathbf{m}$  と  $\mathbf{n}$  の極線の交点である. このことは  $D$  の極の集合は  $P_2(\mathbb{R})$  での  $\mathbf{m}'$  と  $\mathbf{n}'$  を通る円錐曲線となることを示している. 実際, その円錐曲線は  $\mathcal{F}$  に付随する 2 次変換の下での  $D$  の像になる. “2 次変換” という名称は, このように直線を円錐曲線にうつすことに由来している.

応用例 : 11 点円錐曲線

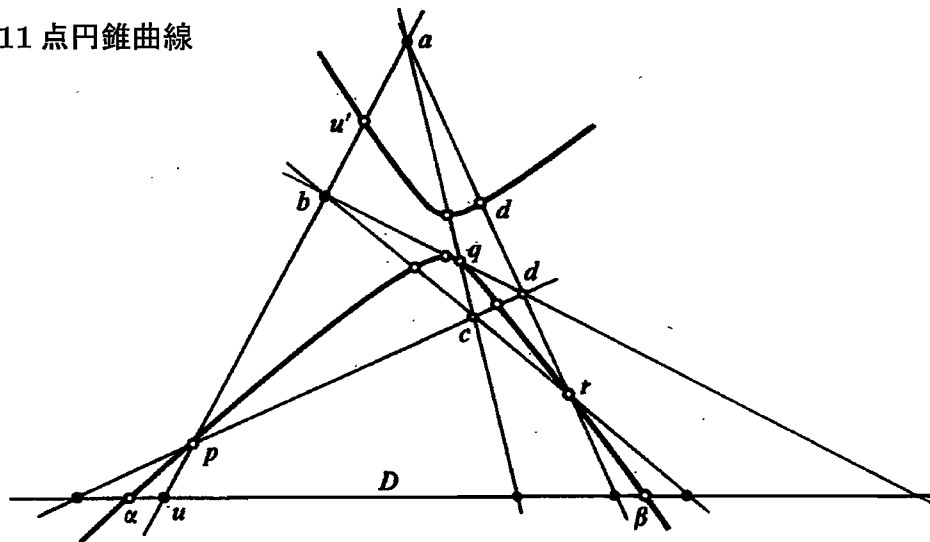


図 4.20: 11 点円錐曲線

$\{a, b, c, d\}$  を射影基とする.  $p = ab \cap cd$ ,  $q = ac \cap db$ ,  $r = ad \cap bc$  とおき, また  $D$  をこれらの 7 つの点のどれも通らない直線とする.

すると, 次の 11 点を通る円錐曲線が存在する :

- $p, q, r$  ;
- $a$  と  $b$  に関する  $u = ab \cap D$  の調和共役点  $u'$ , また  $ac, ad, bc, bd, cd$  についての 5 つの対応する点 ;

- (もしそれらが存在すれば) その対応する点が  $\{ab \cap D, cd \cap D\}$ ,  $\{ac \cap D, db \cap D\}$ ,  $\{ad \cap D, bc \cap D\}$  である,  $D$  上の 2 つのデザルグ対合の 2 重点  $\alpha$  と  $\beta$ .

これは, 4 点  $a, b, c, d$  を通る円錐曲線束を導入し, 考える 11 点がこの束に付随する 2 次変換の下で  $D$  の像上にあることに注目することで示される.

#### 応用例：9 点円錐曲線

これは 11 点円錐曲線のアフィン版である.  $a, b, c, d$  を与えると,  $ab, ac, ad, bc, bd, cd$  の中点と  $p, q, r$  を通る円錐曲線がある. 無限遠点は  $\vec{cd}$  を  $\vec{ab}$  に,  $\vec{bc}$  を  $\vec{ad}$  に,  $\vec{db}$  を  $\vec{ac}$  に対応させる  $l_\infty$  の対合の固定点である. さらに, その中心は  $(a+b+c+d)/4$  である. また, 9 点円は  $d$  が  $\{a, b, c\}$  の垂心となる特別な場合である.

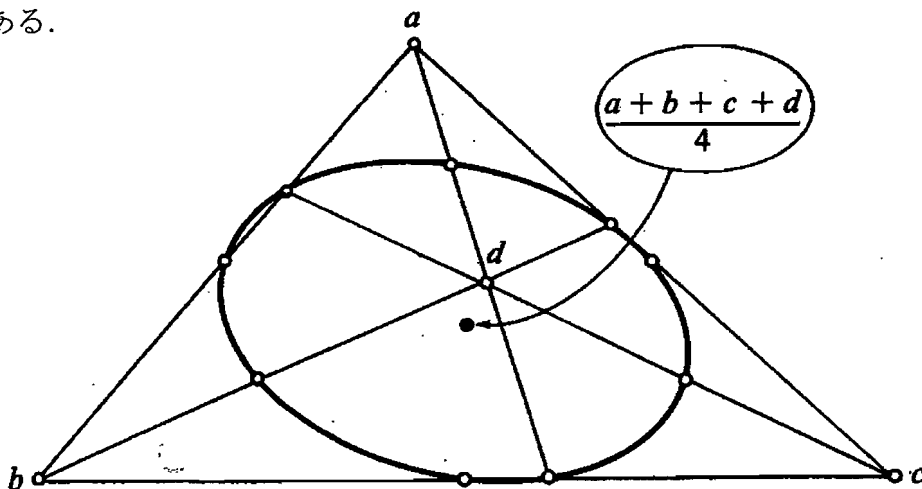


図 4.21: 9 点円錐曲線

#### 4.2.5 接円錐曲線束

ここまで考察してきた円錐曲線束の概念の双対を考える. 円錐曲線の接円錐曲線束とは  $P_2^*(\mathbb{R})$  における円錐曲線束のことである. それが  $P_2^*(\mathbb{R})$  の束として (命題 4.14 の意味で) 完全であるとき接円錐曲線束は完全であるという. 完全束には,  $I^*, II^*, III^*, IV^*, V^*$  と表された 5 つのタイプがある.

以下の5つの図は ( $P_2^*(\mathbb{R})$  でなく)  $P_2(\mathbb{R})$  での状況を示している.

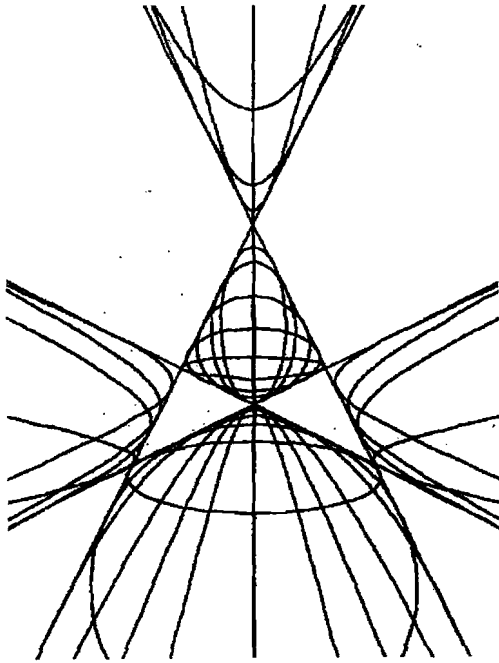


図 4.22: タイプ I\*

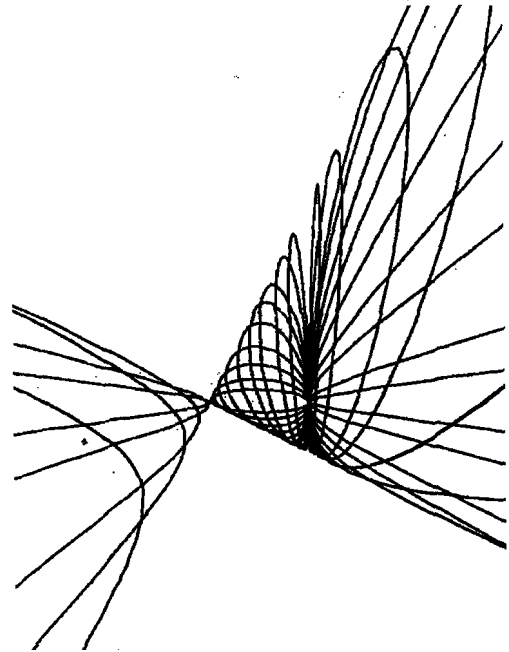


図 4.23: タイプ II\*

$P_2(\mathbb{R})$  において, タイプ I\* の束での退化円錐曲線は点の対  $\{a, a'\}$ ,  $\{b, b'\}$ ,  $\{c, c'\}$  により表される. 他の4つの場合も同様に考えられる. ここで, タイプ III\* と V\* の束の図に注目すると, それらがタイプ III と V の束と同様になる.

$P_2^*(\mathbb{R})$  においてデザルグの対合定理を言い換えると, 以下のようなになる.

**定理 4.15 (Plücker)**  $\mathcal{F}^*$  が  $P_2^*(\mathbb{R})$  の円錐曲線束で,  $m$  が  $\mathcal{F}^*$  のどんな共通接線上でもなくまた  $\mathcal{F}^*$  の退化点でない  $P_2(\mathbb{R})$  の点であるとき,  $m$  から  $\mathcal{F}^*$  の円錐曲線に引いた接線は  $m^*$  の対合を形成する.

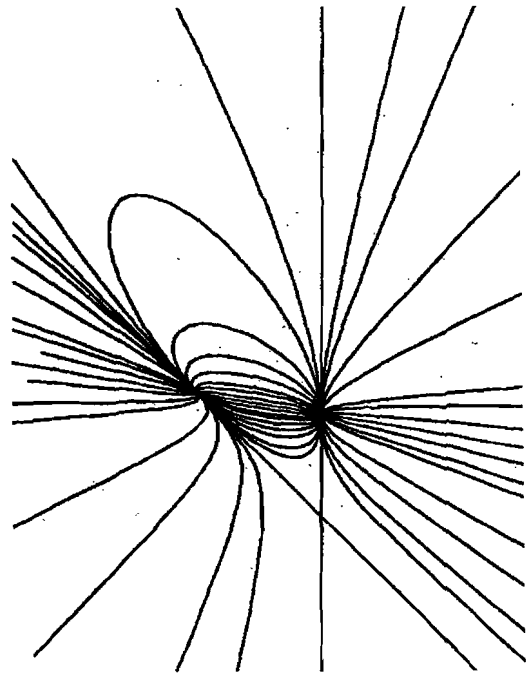


図 4.24: タイプ III\*

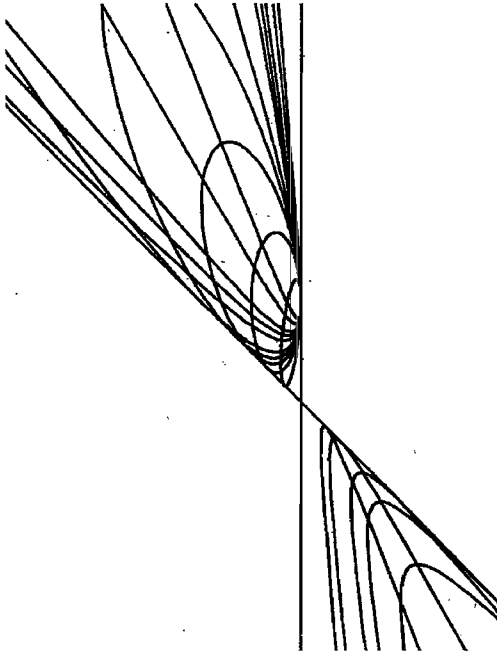


図 4.25: タイプ IV\*

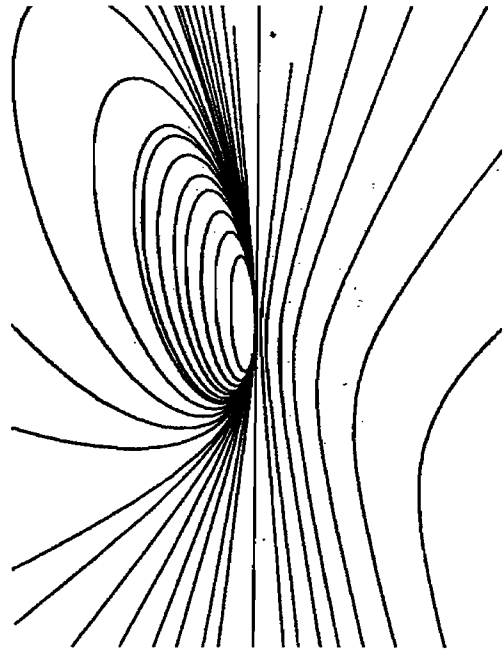


図 4.26: タイプ V\*

### 4.3 ポンスレーの大定理

ここでの目標は2つの円錐曲線  $C$  と  $\Gamma$  について、 $C$  に内接し  $\Gamma$  に外接する  $n$  角形が存在するとき、そのような  $n$  角形が他にも無数にあることを示すことである。

これを証明するためのいくつかのポイントは：与えられた束の円錐曲線に含まれる各点；その円錐曲線と再び交わる円錐曲線上の点を含む各直線；またデザルグ対合である。

証明のアイデアは多角形の辺の数  $n$  についての帰納法であるが、その辺が  $C$  と  $\Gamma$  を含む束の  $n$  個の円錐曲線  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$  に接する  $C$  に内接する多角形について、それらを用いる。もともとの定理の主張は  $\Gamma_1 = \dots = \Gamma_n$  となる場合についてであるが、一般の証明をすることで特別な場合も含めて示される。

ここから射影平面での円錐曲線束  $\mathcal{F}$  と、空でない像  $C$  をもつ固有円錐曲線  $\alpha \in \mathcal{F}$  を固定する。考えるすべての円錐曲線は非退化で空でない像をもち、またそれらの像と同一視される。考えるすべての点は  $\mathcal{F}$  の基とは異なり、またすべての直線は  $\mathcal{F}$  に関してよいものとする。

命題 4.16  $a, b, c \in C$  を異なる点とし, また  $\Gamma, \Gamma' \in \mathcal{F}$  について  $\Gamma$  が  $\alpha$  で  $ab$  に接しまた  $\Gamma'$  が  $\beta$  で  $ac$  に接するものとする.  $\Delta = \alpha\beta$  とおく.  $\Gamma$  が  $\Delta \cap cd$  で  $cd$  に接しまた  $\Gamma'$  が  $\Delta \cap bd$  で  $bd$  に接するような  $d \in C$  が存在する. さらに,  $\Delta \cap ad$  で  $ad$  に, また  $\Delta \cap bc$  で  $bc$  に接する  $\Gamma'' \in \mathcal{F}$  が存在する.

$a, b, c, d \in C$  を異なる点とし, また  $\Gamma \in \mathcal{F}$  は  $\alpha$  で  $ab$  に, かつ  $\gamma$  で  $cd$  に接するものとする.  $\alpha\gamma \cap ac$  で  $ac$  に接する (そして, 命題の初めの部分より,  $\alpha\gamma \cap ac$  で  $bd$  にも接している)  $\Gamma' \in \mathcal{F}$  が存在する.

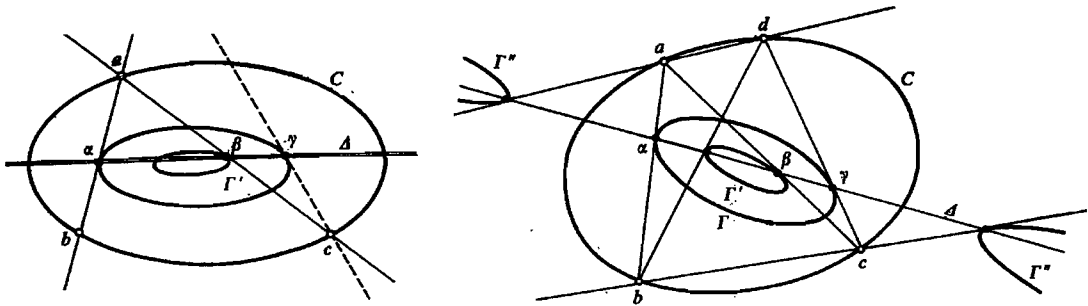


図 4.27:

証明  $\gamma$  を  $\Gamma \cap \Delta$  の  $\alpha$  以外の点,  $\mathcal{G}$  を  $\Gamma$  と像  $\{ab\} \cup \{c\gamma\}$  をもつ退化円錐曲線で定まる束とする.  $ac$  上  $\mathcal{F}$  と  $\mathcal{G}$  で定まる対合, すなわち, 像  $\{a, c\}$  をもつ円錐曲線と円錐曲線  $\Gamma \cap ac$  (集合  $\Gamma \cap ac$  は空かもしれないが, well-defined である) で定まる円錐曲線束に関連する  $ac$  での対合は同じものである.

一方,  $ac$  上の  $\mathcal{G}$  で定まる対合は  $\Gamma' \cap ac = \{\beta, \beta\}$  を固定点にもつ; こうして,  $\Sigma \cap ac = \{\beta, \beta\}$  となる  $\Sigma \in \mathcal{G}$  が存在する. しかし  $\Sigma \cap \Delta = \{\alpha, \alpha\}$  なので, 像  $\alpha\beta$  をもつ円錐曲線  $\Sigma$  は退化しているはずであり, またこのように  $\mathcal{G}$  におけるすべての円錐曲線は  $\gamma$  で  $c\gamma$  に接している. 特に,  $\gamma$  での  $\Gamma$  の接線は  $c$  を含む. 求める点  $d$  はそのとき  $d = c\gamma \cap C$  である.

実際,  $a, b, c$  の代わりに  $c, b, d$  とした, 同じ推論は  $\Gamma'$  が  $bd \cap \Gamma$  で  $bd$  に接することを示している. 点  $\delta = ad \cap \Delta$  と  $\mathcal{F}$  の  $\delta$  を通る円錐曲線  $\Gamma''$  に適用すると, それは  $\Gamma''$  が  $\delta$  で  $ad$  に接することを示している. そしてついに  $\Gamma''$  が  $\Delta \cap bc$  で  $bc$  に接するといえる. この推論は命題の2番目の部分も証明している.  $\square$

系 4.17  $a, b, c \in C$  を異なる点とし, また  $\Gamma', \Gamma'' \in \mathcal{F}$  について  $\Gamma'$  が  $\gamma$  で  $ab$  に接し,  $\Gamma''$  が  $\beta$  で  $ac$  に接するものとする.  $bc$  に接するちょうど2つの円錐曲線  $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathcal{F}$  が存在する.  $\Gamma_1$  の単接触点  $\alpha_1$  は  $\beta, \gamma$  と同一直線上にあり, また  $\Gamma_2$  の接点  $\alpha_2$  は  $a\alpha_2, b\beta, c\gamma$  が一点で交わるような点である.  $a, b, c \in C$  が異なり,  $\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \in \mathcal{F}$  が  $\alpha, \beta, \gamma$  で, それぞれ,  $bc, ca, ab$  に接するとき  $a\alpha, b\beta, c\gamma$  が1点で交われれば6要素数  $(a, b, c, \Gamma, \Gamma', \Gamma'')$  は正であるという.

証明 命題 4.16 から  $\Gamma_1$  の存在がいえる;  $\Gamma_2$  の存在は  $\Gamma_1$  の存在と定理 4.4 からいえる:  $a\alpha_2, b\beta, c\gamma$  が1点で交わることは対合の性質と複比を考えるといえる.  $\square$

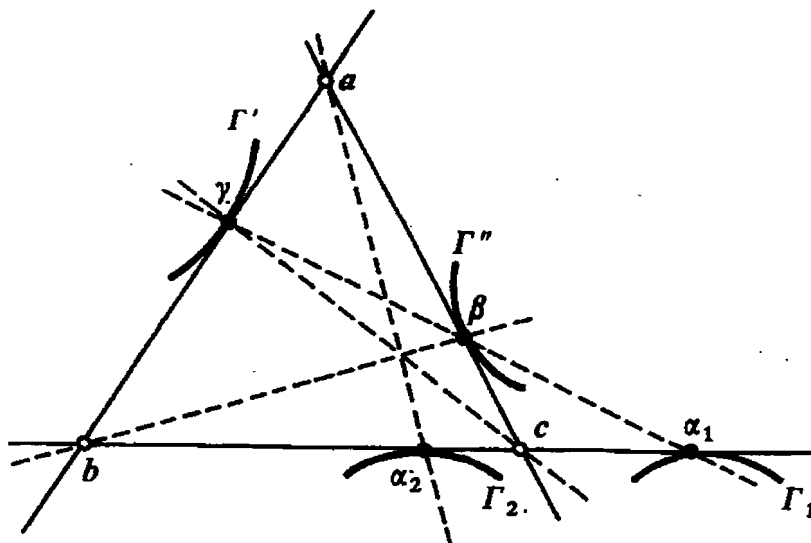


図 4.28:

点  $a_i \in C$  が異なり, 任意の  $i = 1, \dots, n$  に対して (自明なとりきめ  $a_{n+1} = a_1$  の下で)  $\Gamma_i$  が  $a_i a_{i+1}$  に接する  $2n$  要素数  $(a_1, \dots, a_n, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n)$  を考える. 系 4.17 を使って新たな円錐曲線  $\Gamma'_i \in \mathcal{F} (i = 1, \dots, n-3)$  の集合を次のように定める.

まず6要素数  $(a_1, a_2, a_3, \Gamma_2, \Gamma'_1, \Gamma_1)$  が正であるとする; すると, 帰納法より,  $i = 2, \dots, n-3$  に対して6要素数  $(a_1, a_{i+1}, a_{i+2}, \Gamma_{i+1}, \Gamma'_i, \Gamma'_{i-1})$  が正となるといえる. これを繰り返していくと最後に6要素数  $(a_1, a_{n-1}, a_n, \Gamma_{n-1}, \Gamma_n, \Gamma'_{n-3})$  についての命題が残り, この6要素数が正ならば,  $2n$  要素数  $(a_1, \dots, a_n, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n)$  が正であるといえる. (図 4.29 参照)

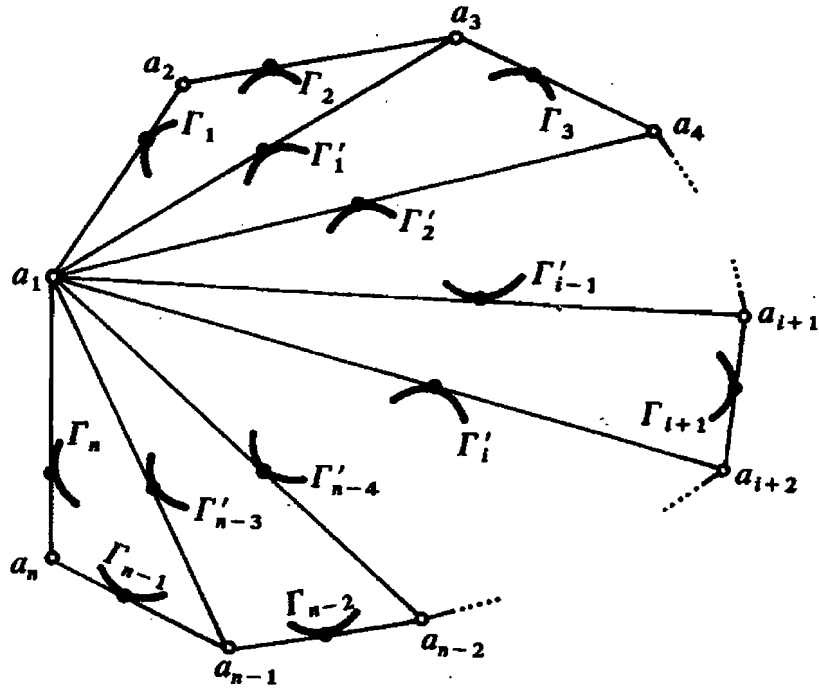


図 4.29:

これらの準備をもって、ポンスレーの大定理の主張は次の通りである：

**定理 4.18 (Poncelet)**  $(a_1, \dots, a_n, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n)$  を正値  $2n$  要素数,  $b', b'' \in C$  を直線  $b'b''$  が  $\Gamma_1$  に接するような異なる 2 点とする. すると  $b_1 = b'$  かつ  $b_2 = b''$  となる正値  $2n$  要素数  $(b_1, \dots, b_n, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n)$  が存在する.

### $n = 3$ の場合

そのアイディアは次々と性質を移す命題 4.16 の利用である.  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  を, それぞれ,  $a_1a_2, a_2a_3, a_3a_1$  と  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  の接触点とし,  $\alpha'$  を  $\Gamma_1$  と  $b'b''$  の接触点とする. 命題 4.16 の最後の部分は  $\beta' = a_1b' \cap \alpha_1\alpha'$  で  $a_1b'$  に,  $\beta'' = b''a_2 \cap \alpha_1\alpha'$  で  $b''a_2$  に接する  $\Sigma \in \mathcal{F}$  が存在することを示している. 命題 4.16 の最初の部分より,  $\Gamma_2$  も  $\alpha'' = b''b''' \cap \beta''\alpha_2$  で  $b''b'''$  に接し, また  $\Sigma$  も  $\beta''' = a_3b''' \cap \alpha_2\beta''$  で  $a_3b'''$  に接するような  $b''' \in C$  が存在する. 再び命題 4.16 の最後の部分は  $\lambda = a_3a_1 \cap \beta'''\beta'$  で  $a_3a_1$  に,  $\mu = b'''b' \cap \beta'''\beta'$  で  $b'''b'$  に接する  $\theta \in \mathcal{F}$  を生じる. そして  $\theta = \Gamma_3$  を示すことで結論出来る.



直線  $a_1b'$ ,  $a_2b''$ ,  $a_3b'''$  はすべて  $\Sigma$  に接するので, 1 点で交わらない. 三角形の対  $\{\{a_1, a_2, a_3\}, \{\beta', \beta'', \beta'''\}\}$  と  $\{\{\beta', \beta'', \beta'''\}, \{b', b'', b'''\}\}$  にパップスの定理を適用すると  $\alpha_1, \alpha_2, \lambda$  も  $\alpha', \alpha'', \mu$  のどちらも同一直線上にないことがわかる. 仮定より,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  は同一直線上にないので, 系 4.17 は  $\lambda = \alpha_3$  を示しており, 故に  $\Theta = \Gamma_3$  である; しかし  $\alpha', \alpha'', \mu$  は同一直線上にないので, 6 要素数  $(b', b'', b''', \alpha', \alpha'', \mu)$  は正となる.

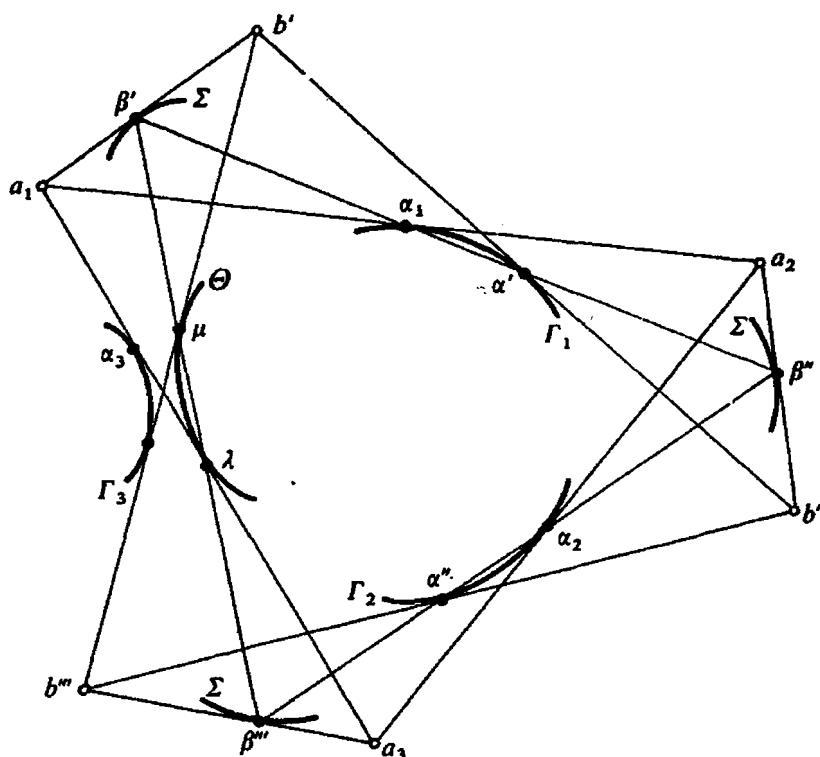


図 4.30:

### $n - 1$ への帰着

帰納法の進め方は  $n = 3$  の場合の助けと上記の作図法で明らかである. 定義より正である  $(a_1, a_2, a_3, \Gamma_2, \Gamma'_1, \Gamma_1)$  から, 正值 6 要素数  $(b_1 = b', b_2 = b'', b_3, \Gamma_2, \Gamma'_1, \Gamma_1)$  が導ける; すると  $(a_1, a_3, a_4, \Gamma_3, \Gamma'_2, \Gamma'_1)$  から, 別の正值 6 要素数  $(b_1, b_3, b_4, \Gamma_3, \Gamma'_2, \Gamma'_1)$  が得られる; 等々. 終わりの  $2n$  要素数  $(b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n)$  は定義より正である.  $\square$

**注意 4.19**  $b'$  を  $a_1$  の十分近くにとれば連続性よりその接線が存在することがわかる. この場合 2 つの正值  $2n$  要素数が存在すれば, 無数にたくさんのそれが存在することが結論できる.

ここで定理 4.3 で考えたもとの問題, すなわち,  $(a_1, \dots, a_n, \Gamma, \dots, \Gamma)$  という形の  $2n$  要素数 ( $C$  に内接し  $\Gamma$  に外接する多角形に対応する) を見つけることに戻らなければならない.  $C$  と  $\Gamma$  で定まる束に対して条件  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n \in \mathcal{F}$  は自動的に満たしていることに気をつけよ. 補題を示すことが残っている:

**補題 4.20**  $2n$  要素数  $(a_1, \dots, a_n, \Gamma, \dots, \Gamma)$  は常に正である.

**証明** 系 4.17 より, 正值  $2n$  要素数  $(a_1, \dots, a_n, \Gamma, \dots, \Gamma, \Gamma')$  が存在する;  $b' = a_2$  かつ  $b'' = a_3$  とおいて定理をこの  $2n$  要素数に適用すると, 点は円錐曲線の 2 つの接線にだけ含まれているので, 他ならぬ正值  $2n$  要素数  $(a_2, \dots, a_n, a_1, \Gamma, \dots, \Gamma, \Gamma')$  を導

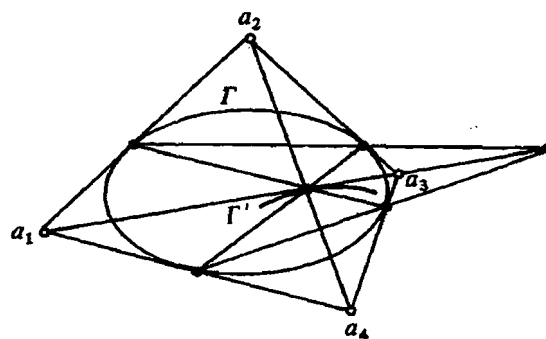


図 4.31:

ける. このように  $a_1 a_2$  も  $\Gamma'$  に接しており, また  $a_2 a_3, \dots, a_{n-2} a_{n-1}$  についてもそうである.  $\Gamma$  と  $\Gamma'$  は  $n$  個の異なる接線  $a_i a_{i+1}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) を共有しているので,  $n \geq 5$  である限りは  $\Gamma = \Gamma'$  となる. あとは  $n = 3$  と  $n = 4$  の場合が残っている.  $n = 3$  の場合はすでに解かれた.  $n = 4$  について極関係の議論は, まさに  $(a_1, a_2, a_3, \Gamma, \Gamma', \Gamma)$  と  $(a_1, a_3, a_4, \Gamma, \Gamma, \Gamma)$  が正であることを意味する, 図 4.31 のように同一直線上の点の存在を示している.  $\square$

**系 4.21**  $(a_1, \dots, a_n)$  を円錐曲線  $C$  に内接し円錐曲線  $\Gamma$  に外接する  $n$  角形とする.  $b' \neq b''$  かつ  $b' b''$  が  $\Gamma$  に接するような任意の 2 点  $b', b'' \in C$  に対し,  $C$  に内接し  $\Gamma$  に外接する多角形  $(b', b'', b_3, \dots, b_n)$  が無数に存在する.  $\square$

( $\mathbf{a}_i$ ) が  $C$  に内接し, また  $\Gamma$  に外接するとき, 定理は各直線  $\mathbf{a}_i\mathbf{a}_{i+2}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) が  $C$  と  $\Gamma$  で決まる束  $\mathcal{F}$  の同じ円錐曲線  $\Gamma_2$  に接していることを示している (補題 4.20 の証明で論じている). 同様に, 各  $\mathbf{a}_i\mathbf{a}_{i+3}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) は同じ円錐曲線  $\Gamma_3 \in \mathcal{F}$  に接している.

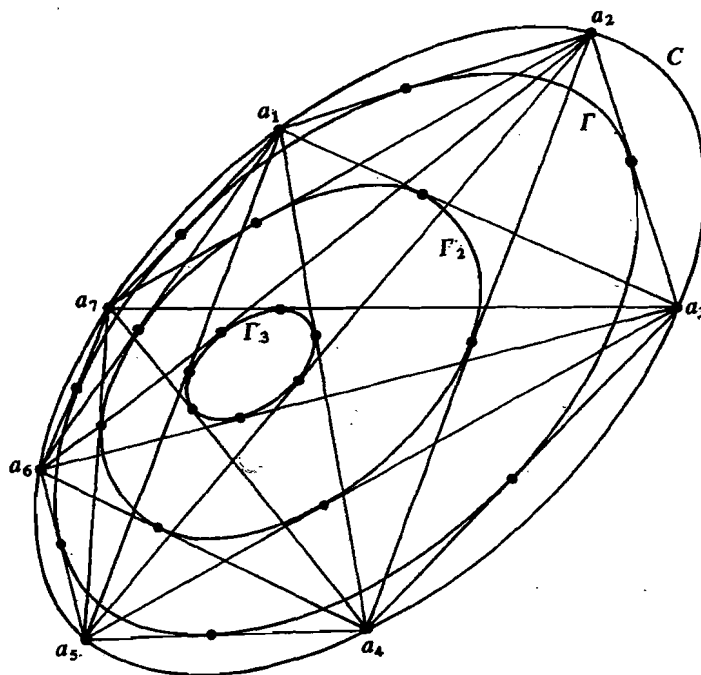


図 4.32:

## まとめ

本研究では高等学校の授業に直接使える内容には限らなかった。実際、高等学校の教材として扱われる幾何分野はアフィン幾何学までに限定されているが、見方を射影幾何学、立体幾何学、複素数上での幾何などといった平面幾何学を包括できる拡張した幾何学の立場から改めて平面幾何を考察することで、これまで気がつかなかった事実が見えてきたり、一見全く関係がないような事実に関連性があることに気がついてくる。日頃、授業のための教材研究では教員個人が持ち合わせている理論の体系の中での教材研究に制約されてしまい、なかなかこうした高い視点から教材をとらえる機会が無い。その意味において、現職教員の派遣制度を利用しての大学院での研修は非常に有効であった。日頃の教科指導と平行しての教材研究では深められない内容まで踏み込むことができたおかげで、現代の日本の数学教育の中ではなかなか触れられない幾何学についての体系的な研究ができた。

今後の学校現場での教科指導に、より効果的に還元出来るよう今後も研究を継続しつつ実践していきたい。

## 参考文献

- [1] Marcel Berger, 「Geometry I,II」, Springer(1987).
- [2] M.Berger, P.Pansu, J-P.Berry, X.Saint-Raymond [山崎直美 訳],  
「幾何問題ゼミ 2」, シュプリンガー・フェアラーク東京 (1987)
- [3] Horst Knörrer [金井省二・秋葉繁夫 訳], 「幾何学」,  
シュプリンガー・フェアラーク東京 (1999)
- [4] 弥永昌吉・平野鉄太郎, 「射影幾何学」, 朝倉書店 (1954)
- [5] 福原満洲雄, 「射影幾何」, 実教出版 (1985)
- [6] 田代嘉宏, 「古典幾何学」, 新曜社 (1979)
- [7] 郡敏昭, 「射影平面の幾何学」, 遊星社 (1988)
- [8] 岩田至康 編, 「幾何学大辞典 1」, 槇書店 (1971)
- [9] 河田敬義, 「岩波講座 基礎数学 アフィン幾何・射影幾何」, 岩波書店 (1976)
- [10] 上野健爾, 「代数幾何入門」, 岩波書店 (1995)
- [11] 瀧澤精二, 「基礎数学シリーズ 幾何学入門」, 朝倉書店 (1967)
- [12] 栗田稔, 「数学セミナー増刊 入門現代の数学 具象から幾何学へ」,  
日本評論社 (1980)

# 謝 辞

本研究を進めるにあたり、指導教官である岩手大学大学院教育学研究科 押切源一教授、はじめ、同大学数学科の先生方から親切かつ適切な助言と指導をいただきました。また、大学院の1年先輩の宮本次郎さんから貴重なアドバイスをいただきました。勤務校である岩手県立盛岡第一高等学校 三田信一前校長にはこの派遣研修を許可いただきました。週二日勤務場所を離れて研究するために岩手県立盛岡第一高等学校の田口淳一校長はじめ職場の皆様にもご迷惑をおかけいたしました。未熟な私の研究を支えてくださいました多くの皆様に心から感謝申し上げます。

平成17年3月

岩手大学大学院 教育学研究科修士課程

教科教育専攻 数学教育専修

金 濱 千 明