

Hexagonal Pattern Formation in a Chemotaxis-Diffusion-Growth Model

久藤 衡介 福岡工業大学工学部
大崎 浩一 宇部工業高等専門学校
櫻井 建成 千葉大学理学部
辻川 亨 宮崎大学工学部

1 三村-辻川モデル

1990年代中盤に、三村-辻川 [7] によって、走化性大腸菌がなす個体群密度の時空的ダイナミクスをモデル化した次の反応拡散方程式系が提唱されている：

$$(P) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = d\Delta u - \alpha \nabla(u \nabla \rho) + au(1-u) & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} = \Delta \rho - b\rho + cu & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial \rho}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u(\cdot, 0) = u_0 \geq 0, \rho(\cdot, 0) = \rho_0 \geq 0 & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

ここで、 Ω は \mathbf{R}^2 における有界領域であり、係数 a, b, c, d は正定数、 α は非負定数である。

(P) は、領域 Ω 内に棲息する大腸菌の個体群密度と大腸菌が分泌する化学物質の濃度の時空的变化を記述する数理モデルであり、未知関数 $u = u(x, t)$ と $\rho = \rho(x, t)$ はそれぞれ場所 x , 時刻 t における大腸菌の個体群密度および化学物質の濃度を表す。(P) において $\Delta u, \Delta \rho$ は、大腸菌および化学物質の Fick の法則に従う空間的拡散を記述している。なお、ここで扱う大腸菌 u は、化学物質の勾配 $\nabla \rho$ に感応して、 ρ が大きい方向に引き寄せられる走化性 (chemotaxis) と呼ばれる性質をもつ。この走化性の効果を表す項が $-\alpha \nabla(u \nabla \rho)$ である。さらに $au(1-u)$ は、ロジスティック型の増殖項である。第 2 式の $-b\rho$ は化学物質の分解を表し、 cu は大腸菌による化学物質の供給を表す。

数学的には第 1 式がとかく重要で「拡散 d , 走化性 α , 増殖項 a のバランス」と「 u の時空的な挙動」の関係を数理的に抽出することが包括的な目標となる。第 1 式は、 $a = 0$ のケースでは Keller-Segel 方程式であり、 $\alpha = 0$ のケースでは Fisher 方程式である。その意味で、(P) に対する解析は、Keller-Segel 方程式と Fisher 方程式のせめぎ合いを観察する状況にもあたる。

(P) の提唱者たちの研究 [7], [6] では既に、解が時間発展の過程で複雑なネットワークパターンを生み出すことが数値シミュレーションで確認されている。最近では、相田-辻川-Efendiev-八木

[3] によって, (P) の解が織り成す「ストライプパターン (stripe pattern)」や「六角形パターン (hexagonal pattern)」等の定常的なパターンが, やはり数値解析的に得られている. 一方で, (P) の解の時間的な挙動に対する発展方程式論からの研究として, 大崎-辻川-八木-三村 [9] ならびに [1]-[3], [10] が挙げられる. [9] では, (P) の解の時間大域的な存在性に加えて, 指数アトラクタが得られている. ここで, $a = 0$ の Keller-Segel 系では, 爆発解の存在が知られているが, $a > 0$ を仮定する (P) では, 抑制項 $-au^2$ の効果によって解の爆発が阻止されることに注意する. [3] では, アトラクタ次元の下方評価も得られている.

本研究の主眼は, (P) の解が形成する「ストライプパターン (stripe pattern)」や「六角形パターン (hexagonal pattern)」等の時空的パターンの出現を, 数値シミュレーションで観測するだけでなく, 理論的に証明することにある. 本稿では, 定常的なパターンを得る理論的側面に焦点を当て, (P) に対応する定常問題である次の非線型楕円型方程式系

$$(SP) \begin{cases} d\Delta u - \alpha \nabla(u \nabla \rho) + au(1-u) = 0 & \text{in } \Omega, \\ \Delta \rho - b\rho + cu = 0 & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial \rho}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

を考える. 以下では, 六角形パターンに対応する (SP) の解を得るための技術的な要請から, Ω を \mathbf{R}^2 における長方形領域

$$\Omega = \left(0, \frac{\pi}{l}\right) \times \left(0, \frac{\pi}{\sqrt{3}l}\right)$$

とする. (SP) の正値定数解は

$$(u, \rho) = \left(1, \frac{l}{b}\right)$$

である. 定常的なパターンに対応する (SP) の非定数解を見つけることが重要であるが, 走化性の効果 $\alpha > 0$ が小さいケースでは, (SP) の正値解は上記定数解に限られることが証明できる ([5]). そこで, α を分岐パラメーターとして扱い, Crandall-Rabinowitz [4] の局所分岐理論を用いて非定数解を探す. 具体的には, 正値定数解 $(u, \rho) = (1, c/b)$ の不安定化により, 非定数解が分岐する α の値を求めることが最初の目標となる.

2 定数解集合上の退化点

分岐理論を適用するための枠組みとして, Hilbert 空間 X および Y を

$$X = H^2_\nu(\Omega) \times H^2_\nu(\Omega), \quad Y = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

と定義する. ただし, $H^2_\nu(\Omega) = \{u \in H^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ on } \partial\Omega\}$ である. 走化性の強さを表す α を分岐パラメーターに採用して, 定数解集合

$$\{(1, c/b, \alpha) : \alpha \geq 0\}$$

の上に、非定数解の枝が分岐する点を見つける。局所分岐理論 ([4]) を適用するために、(SP) に関連する作用素 $F : X \times \mathbf{R} \rightarrow Y$ を

$$F(u, \rho, \alpha) = \begin{pmatrix} d\Delta u - \alpha \nabla(u \nabla \rho) + au(1-u) \\ \Delta \rho - b\rho + cu \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

と定義する。陰関数定理を考慮すると、分岐点においては、定数解 $(u, \rho) = (1, c/b)$ の周りの線形化作用素 $F_{(u, \rho)}(\alpha)$ は必ず退化していなければならない。したがって、線形化作用素 $F_{(u, \rho)}(\alpha)$ が 0 固有値をもつような α の値を求める。直接計算により、

$$F_{(u, \rho)}(\alpha) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d\Delta h - \alpha \Delta k - ah \\ \Delta k + ch - bk \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

と求まる。そこで、 $\text{Ker } F_{(u, \rho)}(\alpha)$ を解析するために、線形の楕円型境界値問題

$$(L) \begin{cases} d\Delta h - \alpha \Delta k - ah = 0 & \text{in } \Omega, \\ \Delta k + ch - bk = 0 & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial h}{\partial \nu} = \frac{\partial k}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \partial \Omega \end{cases}$$

を考える。(L) の解を、次のように Fourier 展開された形で探す。

$$h(x, y) = \sum_{m, n=0}^{\infty} h_{mn} \phi_m(x) \psi_n(y), \quad k(x, y) = \sum_{m, n=0}^{\infty} k_{mn} \phi_m(x) \psi_n(y). \quad (2.3)$$

ただし、

$$\phi_m(x) := \cos(lmx), \quad \psi_n(y) := \cos(\sqrt{3}lny) \quad (2.4)$$

と置いた。ここで、

$$\phi_m''(x) = -(lm)^2 \phi_m(x), \quad \psi_n''(y) = -(\sqrt{3}ln)^2 \psi_n(y)$$

ゆえ

$$\begin{aligned} \Delta h(x, y) &= -l^2 \sum_{m, n=0}^{\infty} (m^2 + 3n^2) h_{mn} \phi_m(x) \psi_n(y), \\ \Delta k(x, y) &= -l^2 \sum_{m, n=0}^{\infty} (m^2 + 3n^2) k_{mn} \phi_m(x) \psi_n(y) \end{aligned} \quad (2.5)$$

となるので、(2.3) と (2.5) を (L) に代入して

$$\begin{cases} \sum_{m, n=0}^{\infty} [\{dl^2(m^2 + 3n^2) + a\} h_{mn} - \alpha l^2(m^2 + 3n^2) k_{mn}] \phi_m(x) \psi_n(y) = 0, \\ \sum_{m, n=0}^{\infty} [ch_{mn} - \{l^2(m^2 + 3n^2) + b\} k_{mn}] \phi_m(x) \psi_n(y) = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

を得る. ここで, $\{\phi_m(x)\psi_n(y)\}_{m,n=0}^{\infty}$ が X の完全直交系を成すから, (2.6) すなわち (L) は, 各 $m, n \in N \cup \{0\}$ につき, 未知数が (h_{mn}, k_{mn}) の代数方程式

$$\begin{pmatrix} dl^2(m^2 + 3n^2) + a & -\alpha l^2(m^2 + 3n^2) \\ c & -\{l^2(m^2 + 3n^2) + b\} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{mn} \\ k_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

に帰着される. したがって, (L) が非自明な解をもつことと, ある (m, n) に対して (2.7) が非自明な解をもつこと, すなわち,

$$\begin{vmatrix} dl^2(m^2 + 3n^2) + a & -\alpha l^2(m^2 + 3n^2) \\ c & -\{l^2(m^2 + 3n^2) + b\} \end{vmatrix} \\ = -\{dl^2(m^2 + 3n^2) + a\}\{l^2(m^2 + 3n^2) + b\} + \alpha cl^2(m^2 + 3n^2) = 0$$

が成り立つことは同値である. 結局, $\text{Ker } F_{(u,\rho)}(\alpha)$ は α が,

$$\alpha = \frac{\{dl^2(m^2 + 3n^2) + a\}\{l^2(m^2 + 3n^2) + b\}}{cl^2(m^2 + 3n^2)} \quad (=:\alpha(m, n)) \quad (2.8)$$

を満たすときに限り非自明となる. ここで得られた離散的な退化点 $\alpha(m, n)$ は全て正值であることから, 走化性の効果がない $\alpha = 0$ のケースでは, 定数解は非退化であることが確認できる.

ここで, 退化点 $\alpha(m, n)$ における退化次元に目を向ける. 例えば,

$$\alpha(1, 0) = \frac{(dl^2 + a)(l^2 + b)}{cl^2}$$

のケースでは $\dim \text{Ker } F_{(u,\rho)}(\alpha(1, 0)) = 1$ であることが容易に確認できる. しかしながら, $(m, n) \mapsto \alpha(m, n)$ は単射でないことにも注意する. 例えば,

$$\alpha(2, 0) = \alpha(1, 1) = \frac{(4dl^2 + a)(4l^2 + b)}{4cl^2} \quad (2.9)$$

あるいは

$$\alpha(3, 1) = \alpha(0, 2) = \frac{(12dl^2 + a)(12l^2 + b)}{12cl^2}$$

であることから, $(m, n) = (2, 0), (1, 1)$ あるいは $(m, n) = (3, 1), (0, 2)$ に対しては,

$$\dim \text{Ker } F_{(u,\rho)}(\alpha(m, n)) = 2$$

となる. さらに,

$$\alpha(1, 3) = \alpha(5, 1) = \alpha(4, 2) = \frac{(28dl^2 + a)(28l^2 + b)}{28cl^2}$$

ゆえ, $(m, n) = (1, 3), (5, 1), (4, 2)$ のとき, $\dim \text{Ker } F_{(u,\rho)}(\alpha(m, n)) = 3$ である.

次節では, 退化次元が 1 である $\dim \text{Ker } F_{(u,\rho)}(\alpha(m, n)) = 1$ のケースを扱う. 次々節では, 退化次元が 2 である $\dim \text{Ker } F_{(u,\rho)}(\alpha(m, n)) = 2$ の典型として (2.9) のケースを扱う.

3 ストライプあるいは長方形パターンのピッチフォーク分岐

退化点 $\alpha(m, n)$ が $\dim \text{Ker } F_{(u, \rho)}(\alpha(m, n)) = 1$ を満たすケースでは, 局所分岐定理 [4] が直ちに適用できて, 定数解 $(u, \rho) = (1, c/b)$ から分岐する非定数解の局所分岐枝を構成できる. さらに, この場合, ピッチフォーク分岐であることが証明される:

定理 3.1. 退化点 $\alpha(m, n)$ が, $\dim \text{Ker } F_{(u, \rho)}(\alpha(m, n)) = 1$ を満たすとする. このとき, $\alpha = \alpha(m, n)$ において, (SP) の非定数解が定数解 $(u, \rho) = (1, c/b)$ から垂直に分岐する. より詳しく, ある正数 δ が存在して, $(u, \rho, \alpha) = (1, c/b, \alpha(m, n)) \in X \times \mathbf{R}$ の近傍内の (SP) の全ての非定数解は, パラメーター $s \in [-\delta, \delta]$ を用いて,

$$\begin{pmatrix} u(s) \\ \rho(s) \\ \alpha(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ c/b \\ \alpha(m, n) \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \phi_m(x)\psi_n(y) \\ k_{mn}\phi_m(x)\psi_n(y) \\ 0 \end{pmatrix} + s^2 \begin{pmatrix} \tilde{u}(s) \\ \tilde{\rho}(s) \\ \tilde{\alpha}(s) \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

と表される. ここで, $\phi_m(x)$ および $\psi_n(y)$ は (2.4) で定義された余弦関数であり, $(\tilde{u}(s), \tilde{\rho}(s), \tilde{\alpha}(s)) \in X \times \mathbf{R}$ は s に関するある滑らかな関数である. さらに,

$$k_{mn} = \frac{l}{l^2(m^2 + 3n^2) + b} \quad (3.2)$$

である.

Proof. (2.3) と (2.7) を参照すると,

$$\text{Ker } F_{(u, \rho)}(\alpha(m, n)) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} \phi_m(x)\psi_n(y) \\ k_{mn}\phi_m(x)\psi_n(y) \end{pmatrix} \right\} \quad (3.3)$$

がわかる. ただし, k_{mn} は (3.2) で定義した正定数である. 退化点 $(u, \rho, \alpha) = (1, c/b, \alpha(m, n))$ で, 局所分岐定理 ([4]) を適用するためには,

$$F_{(u, \rho), \alpha}(\alpha(m, n)) \begin{pmatrix} \phi_m(x)\psi_n(y) \\ k_{mn}\phi_m(x)\psi_n(y) \end{pmatrix} \notin \text{Range } F_{(u, \rho)}(\alpha(m, n)), \quad (3.4)$$

を確かめなければならない. ここで, $F_{(u, \rho), \alpha}$ とは $F_{(u, \rho)}$ の α に関する微分, すなわち,

$$F_{(u, \rho), \alpha}(\alpha) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Delta k \\ 0 \end{pmatrix}$$

である. したがって,

$$F_{(u, \rho), \alpha}(\alpha(m, n)) \begin{pmatrix} \phi_m(x)\psi_n(y) \\ k_{mn}\phi_m(x)\psi_n(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{mn}(m^2 + 3n^2)\phi_m(x)\psi_n(y) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

を得る. ここで, $F_{(u, \rho)}(\alpha(m, n))$ の共役作用素を L_{mn}^* と表すことにすると,

$$L_{mn}^* \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d\Delta h - ah + ck \\ -\alpha(m, n)\Delta h + \Delta k - bk \end{pmatrix}$$

である。前節の議論を L_{mn}^* に適用すると、

$$\text{Ker } L_{mn}^* = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} \phi_m(x)\psi_n(y) \\ k_{mn}^* \phi_m(x)\psi_n(y) \end{pmatrix} \right\} \quad (3.6)$$

が得られる。ただし、

$$k_{mn}^* = \frac{dl^2(m^2 + 3n^2) + a}{l}$$

である。ここで、Fredholm 交代定理により、

$$\text{Range } F_{(u,\rho)}(\alpha(m,n)) = (\text{Ker } L_{mn}^*)^\perp \quad (3.7)$$

であることに注意する。(3.5) の右辺と $\text{Ker } L_{mn}^*$ の基底の間で L^2 内積を取ると、

$$\iint_{\Omega} k_{mn} \phi_m^2(x) \psi_n^2(y) dx dy > 0 \quad (3.8)$$

が得られるが、(3.8) の正値性は、

$$F_{(u,\rho),\alpha}(\alpha(m,n)) \begin{pmatrix} \phi_m(x)\psi_n(y) \\ k_{mn} \phi_m(x)\psi_n(y) \end{pmatrix} \notin (\text{Ker } L_{mn}^*)^\perp$$

を導く。(3.7) より、上式は (3.4) を意味することが分かる。結局、 $(u, \rho, \alpha) = (1, c/b, \alpha(m, n))$ において局所分岐定理が適用できて、ある正数 δ に対して、 $(u, \rho, \alpha) = (1, c/b, \alpha(m, n)) \in X \times \mathbf{R}$ の近傍内の (SP) の全ての正値解は、パラメーター $s \in [-\delta, \delta]$ を用いて、

$$\begin{pmatrix} u(s) \\ \rho(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ c/b \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \phi_m(x)\psi_n(y) \\ k_{mn} \phi_m(x)\psi_n(y) \end{pmatrix} + s^2 \begin{pmatrix} \tilde{u}(s) \\ \tilde{\rho}(s) \end{pmatrix}$$

および

$$\alpha(s) = \alpha(m, n) + s\beta(s)$$

と表される。

ここで得られた局所分岐が「ピッチフォーク型」であることを示すには、 $\alpha(s)$ の Maclaurin 展開を考慮し

$$\beta(0) = 0$$

を示せば十分である。以下の証明では、

$$\Phi(x, y) = \phi_m(x)\psi_n(y) \quad (3.9)$$

と置く。ここで、

$$\begin{aligned} \langle \Phi, \tilde{u}(s) \rangle &:= \iint_{\Omega} \Phi(x, y) \tilde{u}(x, y, s) dx dy = 0, \\ \langle \Phi, \tilde{\rho}(s) \rangle &:= \iint_{\Omega} \Phi(x, y) \tilde{\rho}(x, y, s) dx dy = 0 \end{aligned}$$

が, 全ての $s \in [-\delta, \delta]$ に対して成り立つことに注意する. なお, λ を

$$-\Delta\Phi = \lambda\Phi \text{ in } \Omega \quad (3.10)$$

を満たす固有値として定義する. (SP) の第 1 式を s で 2 階微分すると,

$$\begin{aligned} & d\Delta u''(s) - \alpha''(s)\nabla\{u(s)\nabla\rho(s)\} - 2\alpha'(s)\nabla\{u'(s)\nabla\rho(s) + u(s)\nabla\rho'(s)\} \\ & - \alpha(s)\nabla\{u''(s)\nabla\rho(s) + 2u'(s)\nabla\rho'(s) + u(s)\nabla\rho''(s)\} \\ & + au''(s)\{1 - 2u(s)\} - 2au'(s)^2 = 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

となる. そこで, (3.11) に $s = 0$ を代入すると,

$$\begin{aligned} & d\Delta\tilde{u}(0) + k_{mn}\lambda\beta(0)\Phi - \alpha(m, n)\Delta\tilde{\rho}(0) \\ & = a(\tilde{u}(0) + \Phi^2) + \alpha(m, n)k_{mn}(|\nabla\Phi|^2 - \lambda\Phi^2) \end{aligned} \quad (3.12)$$

を得る. 部分積分からの

$$\langle \Delta\tilde{u}(0), \Phi \rangle = \langle \tilde{u}(0), \Delta\Phi \rangle = -\lambda\langle \tilde{u}(0), \Phi \rangle = 0 \quad \text{および} \quad \langle \Delta\tilde{\rho}(0), \Phi \rangle = 0$$

に注意すると, (3.12) の両辺と Φ の内積を取ることより,

$$k_{mn}\lambda\|\Phi\|_2^2\beta(0) = (a - \lambda\alpha(m, n)k_{mn})\langle \Phi, \Phi^2 \rangle + \alpha(m, n)k_{mn}\langle \Phi, |\nabla\Phi|^2 \rangle \quad (3.13)$$

を得る. (3.9) より,

$$\langle \Phi, \Phi^2 \rangle = \int_0^{\pi/l} \phi_m^3(x) dx \int_0^{\pi/\sqrt{3}l} \psi_n^3(y) dy = 0 \quad (3.14)$$

および

$$\begin{aligned} & \langle \Phi, |\nabla\Phi|^2 \rangle \\ & = \iint_{\Omega} \phi_m(x)\psi_n(y)l^2\{m^2\sin^2(lmx)\psi_n^2(y) + 3n^2\phi_m^2(x)\sin^2(\sqrt{3}lny)\} dx dy \\ & = l^2m^2 \int_0^{\pi/l} \phi_m(x)\sin^2(lmx) dx \int_0^{\pi/\sqrt{3}l} \psi_n^3(y) dy \\ & \quad + 3l^2n^2 \int_0^{\pi/l} \phi_m^3(x) dx \int_0^{\pi/\sqrt{3}l} \psi_n(y)\sin^2(\sqrt{3}lny) dy = 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

となることに注意する. したがって, (3.14) および (3.15) を (3.13) に代入することにより $\beta(0) = 0$ が得られ, 表示式 (3.1) が証明された. \square

表示式 (3.1) において, ϕ_0 や ψ_0 は定数に対応することに注意する. すなわち, $mn = 0$ のケースでは, 一方向のみに振動する「ストライプ模様」の定常パターンの局所枝が, $\alpha = \alpha(m, n)$ において定数解 $(1, c/b)$ から分岐する. 一方で $mn \neq 0$ ならば, 「長方形模様」の定常パターンの局所枝が, $\alpha = \alpha(m, n)$ において定数解 $(1, c/b)$ から分岐する. (3.1) より,

$$\rho(s) - \frac{l}{b} = k_{mn}(u(s) - 1) + O(s^2) \quad (3.16)$$

が, 全ての $s \in [-\delta, \delta]$ に対して成り立つ. (3.2) を参照すると $k_{mn} > 0$ だから, (3.16) より, 大腸菌 u と化学物質 ρ の空間分布は, 局所分岐枝上では同じ傾向にあることがわかる.

4 六角形パターンのトランスクリティカル分岐

本節では, $\dim \text{Ker } F_{(u,\rho)}(\alpha(m,n)) = 2$ の典型例として (2.9) のケースを扱う. とりわけ「六角形模様 (hexagonal pattern)」の定常パターンのなす局所枝が $\alpha = \alpha(2,0) = \alpha(1,1)$ において定数解から分岐することを示す. (2.9) のとき,

$$\text{Ker } F_{(u,\rho)}(\alpha(2,0)) = \text{Ker } F_{(u,\rho)}(\alpha(1,1)) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} \phi_2(x) \\ k_{20} \phi_2(x) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \phi_1(x) \psi_1(y) \\ k_{11} \phi_1(x) \psi_1(y) \end{pmatrix} \right\}$$

が, (3.2) で定義された正数 k_{20} および k_{11} に対して成り立つ. この場合は, 前節のように X で直接的に局所分岐理論を適用することはできない. そこで, 流体の方程式系の分岐問題における西田ら [8] のアイデアに倣って, $H^2_\nu(\Omega)$ 内に, $2\pi/3$ -回転不変性を保つような閉部分空間 H^2_{hexa} を導入する. H^2_{hexa} は具体的には, 次のように表される:

$$H^2_{\text{hexa}} = \left\{ v(x,y) = \sum_{m+n=\text{even}}^{\infty} \beta_{mn} \left(\phi_m(x) \psi_n(y) + \cos \frac{l(m-3n)x}{2} \cos \frac{\sqrt{3}l(m+n)y}{2} + \cos \frac{l(m+3n)x}{2} \cos \frac{\sqrt{3}l(m-n)y}{2} \right) : \sum_{m+n=\text{even}}^{\infty} l^4(m^2+3n^2)^2 \beta_{mn}^2 < \infty \right\}. \quad (4.1)$$

(4.1) を参照して,

$$\phi_m(x) \psi_n(y) + \cos \frac{l(m-3n)x}{2} \cos \frac{\sqrt{3}l(m+n)y}{2} + \cos \frac{l(m+3n)x}{2} \cos \frac{\sqrt{3}l(m-n)y}{2}$$

に $(m,n) = (2,0)$ を代入すると,

$$\phi_2(x) \psi_0(y) + \cos(lx) \cos(\sqrt{3}ly) + \cos(lx) \cos(\sqrt{3}ly) = \phi_2(x) \psi_0(y) + 2\phi_1(x) \psi_1(y)$$

となる. 結局, (4.1) において,

$$\beta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{if } (m,n) = (2,0), \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

と置くことによって, $\phi_2(x) \psi_0(y) + 2\phi_1(x) \psi_1(y) \in H^2_{\text{hexa}}$ が得られる.

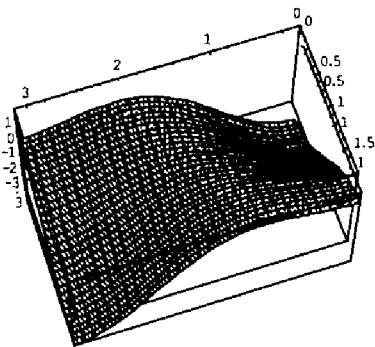


図 1

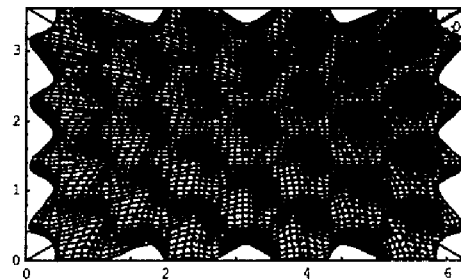


図 2

この関数 $\phi_2(x)\psi_0(y) + 2\phi_1(x)\psi_1(y)$ は六角形パターンの「最小単位」を与える。実際、図 1 は、変換した関数 $-\phi_2(x)\psi_0(y) - 2\phi_1(x)\psi_1(y)$ を Ω ($l = 1$) 内に表示したものである。モード数を増加させると、図 1 の形をした関数が張り合わさり、図 2 のような六角形パターンができる。(4.1) にあるように、 $\alpha(2,0)(= \alpha(1,1))$ は、 X の位相では

$$\dim \text{Ker } F_{(u,\rho)}(\alpha(1,1)) = \dim \text{Ker } F_{(u,\rho)}(\alpha(2,0)) = 2$$

なる 2 重固有値であって、局所分岐定理が使える条件を満足しない。そこで、(2.1) で定義した作用素 \tilde{F} の定義域を $H_{\text{hexa}}^2 \times H_{\text{hexa}}^2 \times \mathbf{R}$ に制限した作用素 $\tilde{F} : H_{\text{hexa}}^2 \times H_{\text{hexa}}^2 \times \mathbf{R} \rightarrow Y$ を導入する。すると、

$$\begin{aligned} \text{Ker } \tilde{F}_{(u,\rho)}(\alpha(1,1)) &= \text{Ker } \tilde{F}_{(u,\rho)}(\alpha(2,0)) \\ &= \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} \phi_2(x) + 2\phi_1(x)\psi_1(y) \\ k_{20}(\phi_2(x) + 2\phi_1(x)\psi_1(y)) \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

ならびに

$$\dim \text{Ker } \tilde{F}_{(u,\rho)}(\alpha(1,1)) = \dim \text{Ker } \tilde{F}_{(u,\rho)}(\alpha(2,0)) = 1$$

が満たされ、制限作用素 \tilde{F} に対して局所分岐定理が適用可能となり、六角形定常パターンの局所分岐枝が得られる：

定理 4.1. (SP) の六角形パターンに対応する解が $\alpha = \alpha(2,0)(= \alpha(1,1))$ において、定数解 $(u,\rho) = (1,c/b)$ から局所分岐する。より詳しく、ある正数 δ と $(u,\rho,\alpha) = (1,c/b,\alpha(2,0))$ の $H_{\text{hexa}}^2 \times H_{\text{hexa}}^2 \times \mathbf{R}$ における近傍 $\mathcal{O}_{\text{hexa}}$ が存在して、 $\mathcal{O}_{\text{hexa}}$ に含まれる (SP) の全ての非定数解は、パラメーター $s \in [-\delta, \delta]$ を用いて、

$$\begin{pmatrix} u(s) \\ \rho(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ c/b \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \phi_2(x) + 2\phi_1(x)\psi_1(y) \\ k_{20} \{ \phi_2(x) + 2\phi_1(x)\psi_1(y) \} \end{pmatrix} + s^2 \begin{pmatrix} \tilde{u}(s) \\ \tilde{\rho}(s) \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

ならびに

$$\alpha(s) = \alpha(2,0) + s\beta(s) \quad (4.3)$$

と表される。ここで、 $\phi_m(x)$ と $\psi_n(y)$ は、(2.4) で定義された余弦関数であり、 k_{20} は (3.2) で $(m,n) = (2,0)$ とした正数である。なお、 $(\tilde{u}(s), \tilde{\rho}(s), \beta(s)) \in H_{\text{hexa}}^2 \times H_{\text{hexa}}^2 \times \mathbf{R}$ は、 s に関する滑らかな関数である。

表示式 (4.2) と (4.3) で表される六角形パターンの局所分岐は、横断的 (transversal) であることが証明される。この横断的な分岐は、定理 3.1 で得られたストライプパターンや長方形パターンのピッチフォーク分岐とは状況が異なることに注意する。実際、分岐の向きを決める $\beta(0)$ に関して、次の表示を得る：

定理 4.2. 表示式 (4.3) の関数 $\beta(s)$ に対して、

$$\beta(0) = \frac{4l^2 + b}{2c} \left(\frac{a}{4l^2} - d \right) \quad (4.4)$$

が成り立つ。

Proof. (4.2) と (4.3) を参照して, 本証明では

$$\Phi(x, y) = \phi_2(x) + 2\phi_1(x)\psi_1(y) \quad (4.5)$$

と置く. すると, (3.11)-(3.13) と同様の議論より,

$$k_{20}\lambda\|\Phi\|_2^2\beta(0) = (a - \lambda\alpha(2, 0)k_{20})\langle\Phi, \Phi^2\rangle + \alpha(2, 0)k_{20}\langle\Phi, |\nabla\Phi|^2\rangle \quad (4.6)$$

を得る. ここで, (4.5) の六角形状の Φ では, $\langle\Phi, \Phi^2\rangle > 0$ および $\langle\Phi, |\nabla\Phi|^2\rangle > 0$ となることに注意する. これらの正值性は, ストライプや長方形の (3.14) あるいは (3.15) の状況と異なる. 実際,

$$\langle\Phi, \Phi^2\rangle = \frac{\sqrt{3}\pi^2}{2l^2}, \quad \langle\Phi, |\nabla\Phi|^2\rangle = \sqrt{3}\pi^2 \quad (4.7)$$

ならびに

$$\|\Phi\|_2^2 = \frac{\sqrt{3}\pi^2}{2l^2}, \quad \lambda = 4l^2, \quad k_{20} = \frac{l}{4l^2 + b} \quad (4.8)$$

と計算される. したがって, (4.7) と (4.8) を (4.6) に代入して, (4.4) が得られる. \square

5 ピッチフォーク分岐の向き

定理 3.1 で得た非定数解のピッチフォーク分岐に対しても, 分岐の向きを求める. 定理 3.1 の状況を議論するために, $\Phi(x, y) = \phi_m(x)\psi_n(y)$ と置き, 分岐枝の表示式 (3.1) に注目する. 右向きの分岐 ($\bar{\alpha}(0) > 0$) の場合, ピッチフォーク分岐 (3.1) は, 超臨界 (supercritical) であるという. 一方で, 左向きの分岐 ($\bar{\alpha}(0) < 0$) の場合, 亜臨界 (subcritical) であるという.

[5] では, $\bar{\alpha}(0)$ の陽的表示を得られており, 分岐点 $(1, c/b, \alpha(m, n))$ におけるストライプパターンや長方形パターンの局所枝 (3.1) の分岐方向を知ることができる. その $\bar{\alpha}(0)$ の表示は, 4つの内積

$$(A, B, C, D) := (\langle\bar{u}(0), \Phi^2\rangle, \langle\bar{u}(0), |\nabla\Phi|^2\rangle, \langle\bar{\rho}(0), \Phi^2\rangle, \langle\bar{\rho}(0), |\nabla\Phi|^2\rangle) \quad (5.1)$$

を介して得られる:

定理 5.1. (A, B, C, D) を (5.1) で定義された内積とする. このとき, (3.1) で得た関数 $\bar{\alpha}(s)$ は, 次を満たす:

$$\lambda k_{mn}\bar{\alpha}(0)\|\Phi\|_2^2 = 2aA - \alpha(m, n)(k_{mn}B + \lambda C - D).$$

ただし, λ は (3.10) を満たす固有値, k_{mn} は (3.2) の正定数であり, (A, B, C, D) については, 次の連立方程式から得られる:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} -2\lambda d - a & 2d & 2\lambda\alpha(m, n) & -2\alpha(m, n) \\ 2\lambda^2 d & -2\lambda d - a & -2\lambda^2\alpha(m, n) & 2\lambda\alpha(m, n) \\ c & 0 & -b - 2\lambda & 2 \\ 0 & c & 2\lambda^2 & -b - 2\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \langle\alpha(m, n)k_{mn}(|\nabla\Phi|^2 - \lambda\Phi^2) + a\Phi^2, \Phi^2\rangle \\ \langle\alpha(m, n)k_{mn}(|\nabla\Phi|^2 - \lambda\Phi^2) + a\Phi^2, |\nabla\Phi|^2\rangle \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

参考文献

- [1] M. Aida, M. Efendiev and A. Yagi, *Quasilinear Abstract Parabolic Evolution Equations and Exponential Attractors*, Osaka J. Math. **42** (2005), 101–132.
- [2] M. Aida, K. Osaki, T. Tsujikawa, A. Yagi and M. Mimura, *Chemotaxis and Growth System with Singular Sensitivity Function*, Nonlinear Analysis: Real World Applications **6** (2005), 323–336.
- [3] M. Aida, T. Tsujikawa, M. Efendiev and A. Yagi, *Lower Estimate of Attractor Dimension for Chemotaxis Growth System*, preprint.
- [4] M. G. Crandall and P. H. Rabinowitz, Bifurcation from simple eigenvalues, *J. Funct. Anal.* **8** (1971), 321–340.
- [5] K. Kuto, K. Osaki, T. Sakurai and T. Tsujikawa, *Pattern Formation in a Chemotaxis-Diffusion-Growth Model*, preprint.
- [6] M. Mimura, T. Tsujikawa, R. Kobayashi and D. Ueyama, *Dynamics of Aggregating Patterns in a Chemotaxis-Diffusion-Growth Model Equation*, Forma **8** (1993), 179–195.
- [7] M. Mimura and T. Tsujikawa, *Aggregating Pattern Dynamics in a Chemotaxis Model Including Growth*, Physica A **230** (1996), 499–543.
- [8] T. Nishida, T. Ikeda and H. Yoshihara, Pattern formation of heat convection problems, Mathematical modeling and numerical simulation in continuum mechanics (Yamaguchi, 2000), *Lect. Notes Comput. Sci. Eng., Springer, Berlin*, **19** (2002), 209–218.
- [9] K. Osaki, T. Tsujikawa, A. Yagi and M. Mimura, *Exponential Attractor for a Chemotaxis-Growth System of Equations*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications **51** (2002), 119–144.
- [10] K. Osaki and A. Yagi, *Global Existence for a Chemotaxis-Growth System in \mathbb{R}^2* , Adv. Math. Sci. Appl. **12** (2002), 587–606.