盛岡応用数学小研究会、平成17年10月9日、岩手大学

ランダムウオークする3競争種の空間すみ分けパターンについて ―解析への第1歩―

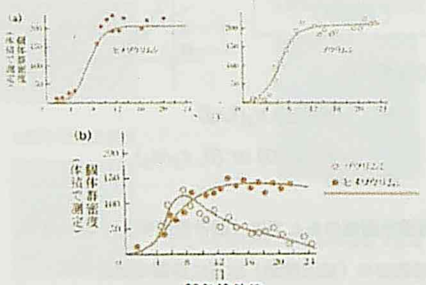
三村 昌泰

明治大学理工学部数学教室
明治大学数理科学研究所

共同研究者:
上山大信, *C.-C. Chen and L.-C.Hung (National Taiwan Univ.)*

1

Gause の培養実験*(1934,1935)*



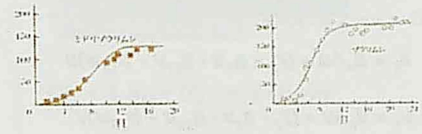
競争排除律

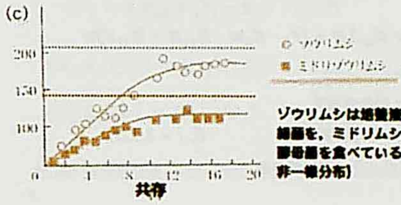
2

それにも関わらず，自然界には種間競争が強くても共存する競争種が見られる。それは何故か？

- o 環境の時間・空間非一様性から生じる棲み分け
- o 環境は一様だが，競合種から逃避（個体群圧効果）
- o 競合種の数が多くなることからくる生じる相互作用（ネットワーク）の密化

3





共存

ゾウリムシは培養液中に浮遊する細菌を，ミドリムシは底にある酵母菌を食べている（餌の空間非一様分布）

4

2種競争・拡散系

$$\begin{cases} u_{1t} = d_1 \Delta u_1 + (r_1 - a_1 u_1 - b_1 u_2) u_1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad t > 0, x \in \Omega \\ u_{2t} = d_2 \Delta u_2 + (r_2 - b_2 u_1 - a_2 u_2) u_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1(0,x) = u_{10}(x) \geq 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x \in \Omega \\ u_2(0,x) = u_{20}(x) \geq 0 \end{cases}$$

the zero-flux conditions $t > 0, x \in \partial\Omega$

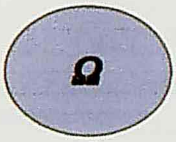
5

Result 1 *(Hirsch('83))*

The stable attractor consists of equilibrium solutions only.

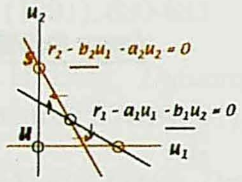
Result 2 *(Kishimoto-Weinberger('85))*

If the domain Ω *is convex, any spatially non-constant equilibrium solutions are unstable, even if they exist.*



6

$a_1/b_2 < r_1/r_2 < b_1/a_2$
（強競争）



凸領域では

$$\lim_{t \to \infty}(u_1(t,x), u_2(t,x)) \underset{\text{generically}}{=} (r_1/a_1, 0) \text{ or } (0, r_2/a_2)$$

強競争関係のもとでは「競争排他律」が成り立つ

個体群の「拡散移動」は系に影響を与えない

7

我々の関心

「自然界では競争関係は２種だけでなく、多くの種が複雑な競争（あるいは捕食ー被捕食）等によって、複雑なネットワークが生じ、それによって強競争関係が緩和され、共存が可能となるのであろう」という主張は正しいのだろうか？

ODEアプローチはかなりある。

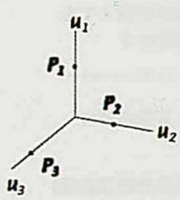
8

３種競争ー拡散系

$$\begin{cases} u_t = d_u\Delta u + (r_1 - a_1u - b_{12}v - b_{13}w)u \\ v_t = d_v\Delta v + (r_2 - a_2v - b_{21}u - b_{23}w)v \\ w_t = d_w\Delta w + (r_3 - a_3w - b_{31}u - b_{32}v)w \end{cases}$$

ここで
$r_i\ (>0)$：内的増殖率
$a_i\ (>0)$：種内競争率　　$(i, j = 1,2,3)$
$b_{ij}\ (>0)\ (i \neq j)$：種間競争率

9



定理 (Van den Driessche and Zeeman('98))

$\{b_{ij}\}\ (i \neq j)$ は r_i, a_i に比べて適当に大きいければ、

ほとんどすべての解 $(u_1, u_2, u_3)(t)$ は P_1, P_2, P_3 のいづれかの平衡点のに収束する

すべての拡散率が大きい場合には３競争種に競争排他が起こり、共存は起こらない。

10

問題提起

強競争関係にある３種の競争種が，空間上を適当にランダムウオーク（拡散移動）することが出来れば、共存が可能となるか？

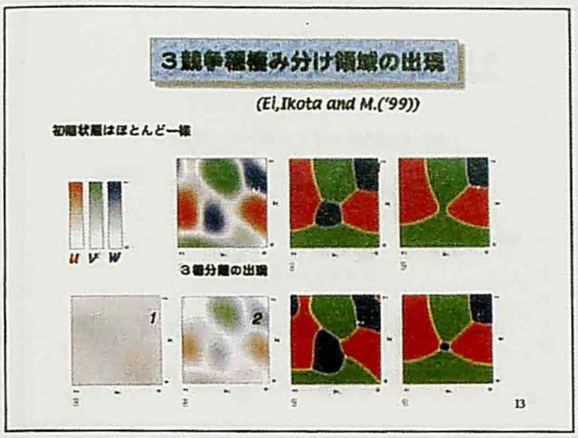
答：　Yes！

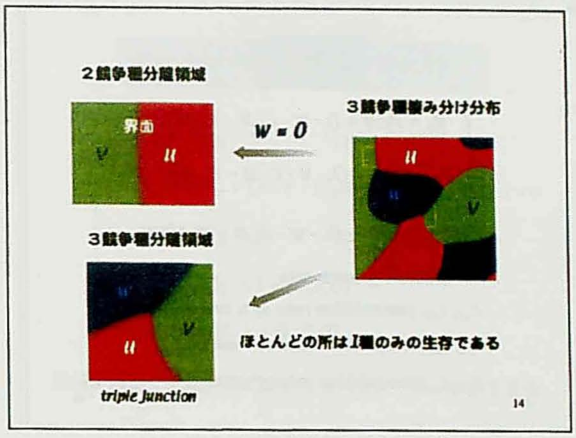
11

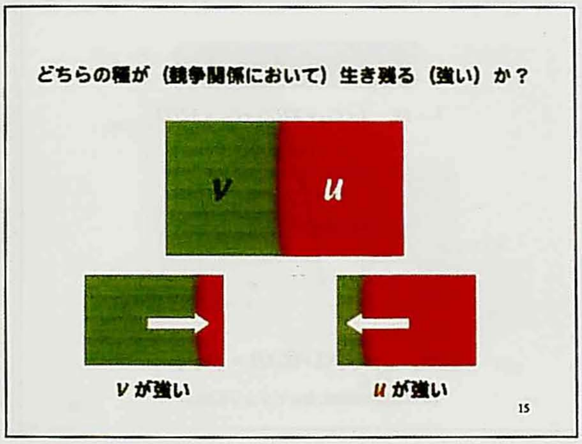
$$\begin{cases} u_t = d_u\Delta u + (r_1 - a_1u - b_{12}v - b_{13}w)u \\ v_t = d_v\Delta v + (r_2 - a_2v - b_{21}u - b_{23}w)v \\ w_t = d_w\Delta w + (r_3 - a_3w - b_{31}u - b_{32}v)w \end{cases}$$

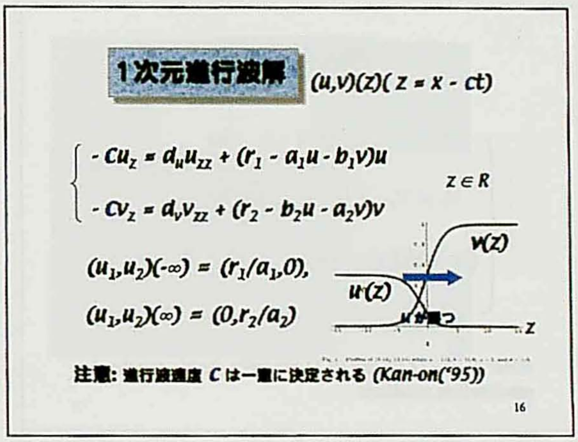
ここで
d_u, d_v, d_w：充分小
$r_i\ (>0)$：内的増殖率
$a_i\ (>0)$：種内競争率　　$(i, j = 1,2,3)$
$b_{ij}\ (>0)\ (i \neq j)$：種間競争率

12

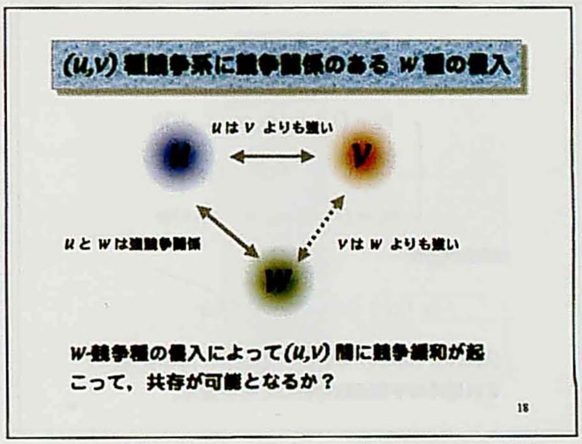

3競争種棲み分け領域の出現
(Ei,Ikota and M.('99))
初期状態はほとんど一様
u v w
3種分離の出現
1
2
13


2競争種分離領域
界面
v
u
w = 0
3競争種棲み分け分布
3競争種分離領域
ほとんどの所は1種のみの生存である
triple junction
14


どちらの種が（競争関係において）生き残る（強い）か？
v
u
v が強い
u が強い
15


1次元進行波解 $(u,v)(z)(z = x - ct)$
$$\begin{cases} -cu_z = d_u u_{zz} + (r_1 - a_1 u - b_1 v)u \\ -cv_z = d_v v_{zz} + (r_2 - b_2 u - a_2 v)v \end{cases} \quad z \in R$$
$(u_1,u_2)(-\infty) = (r_1/a_1, 0)$,
$(u_1,u_2)(\infty) = (0, r_2/a_2)$
v(z)
u(z)
z
注意: 進行波速度 c は一意に決定される (Kan-on('95))
16


u,v,w の間に cyclic order の関係があれば、
ダイナミックに動きながら共存可能
17


(u,v) 種競争系に競争関係のある w 種の侵入
u は v よりも強い
u と w は強競争関係
v は w よりも強い
w-競争種の侵入によって(u,v) 間に競争緩和が起こって，共存が可能となるか？
18

単純化

$$\begin{cases} u_t = d\Delta u + (\lambda - u - c_{12}v - c_{13}w)u \\ v_t = d\Delta v + (\lambda - v - c_{21}u - c_{23}w)v \\ w_t = d\Delta w + (\lambda - w - c_{31}u - c_{32}v)w \end{cases}$$

λ= intrinsic growth rate

c_{12}, c_{21}: competition rate of u and v

c_{23}, c_{32}: competition rate of v and w

c_{31}, c_{13}: competition rate of w and u

19

As the starting point, we consider the two competing species case where w is absent.

$$\begin{cases} u_t = d\Delta u + (\lambda - u - c_{12}v)u \\ v_t = d\Delta v + (\lambda - v - c_{21}u)v \end{cases}$$

where

$$1 < c_{12} < c_{21}$$

(i) u and v are in <u>strong</u> competition ($1 < c_{12}, c_{21}$)

(ii) u is <u>stronger</u> than v in competition ($c_{12} < c_{21}$)

20

1dim. problem

$d = 1$

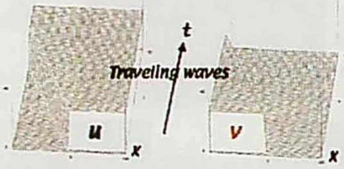
$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + (\lambda - u - c_{12}v)u & t > 0,\ 0 < x < L \\ v_t = v_{xx} + (\lambda - v - c_{21}u)v & \\ (u, v)(0,x) = (u_0, v_0)(x) \geq 0 & 0 \leq x \leq L \\ u_x = v_x = 0 & t > 0,\ x = 0, L \end{cases}$$

Note: $(u,v) = (1,0)$ and $(0,1)$ are both stable constant equilibrium solutions

21

Numerical simulation

$\lambda = 28, \quad 1 < c_{12} = 22/21 < c_{21} = 37/21$



$$\lim_{t \to \infty}(u(t,x), v(t,x)) = (\lambda, 0)$$

(u は強競争関係において v よりも強い)

22

W-種の侵入

$$\begin{cases} u_t = (\lambda - u - c_{12}v - c_{13}w)u \\ v_t = (\lambda - v - c_{21}u - c_{23}w)v \\ w_t = (\lambda - w - c_{31}u - c_{32}v)w \end{cases}$$

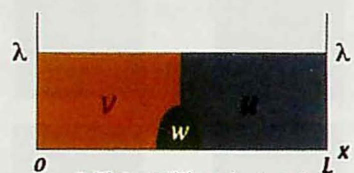
<u>Assumption</u>

$$c_{13}, c_{31} > 1, \quad c_{23} < 1 < c_{32}$$

$(\lambda,0,0)$, $(0,\lambda,0)$ は安定、 $(0,0,\lambda)$ は不安定、
それ以外の平衡点は存在しても不安定。

23

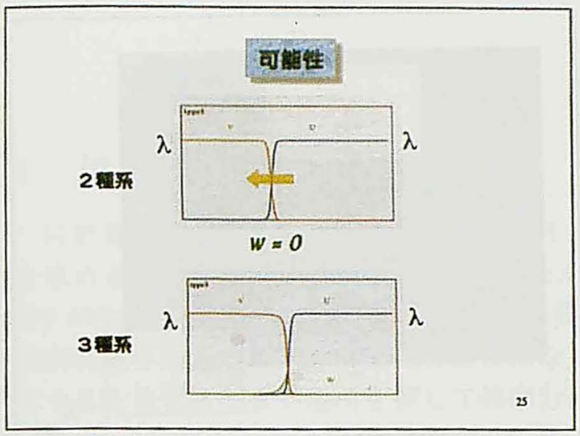
1dim. problem

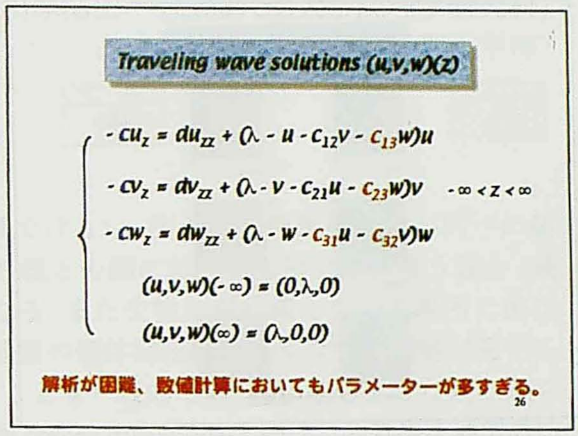


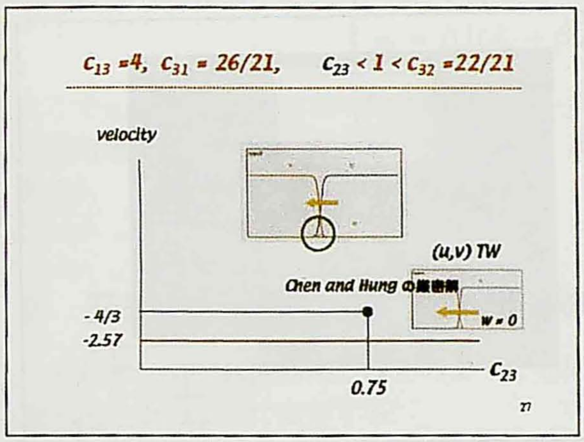
Initial conditions (u_0, v_0, w_0)

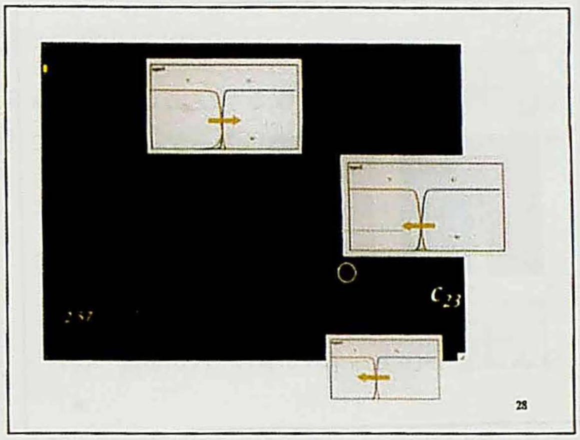
How is the dynamics of (u,v,w) ?

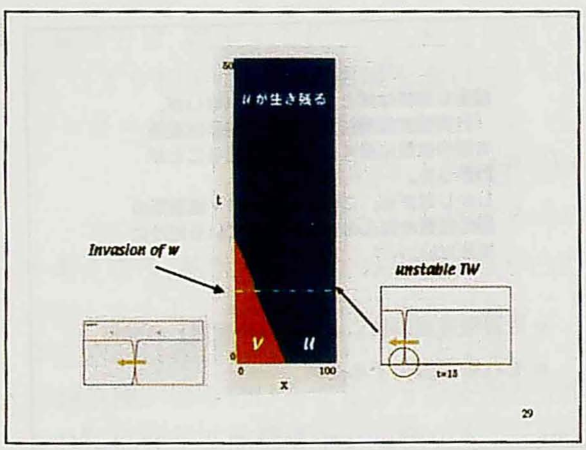
24

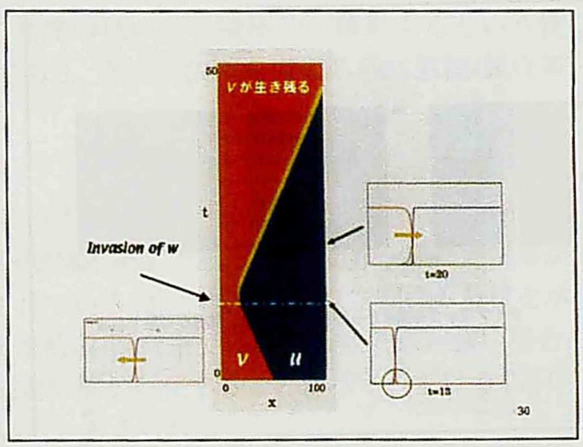

可能性
λ
λ
２種系
w = 0
λ
λ
３種系
25

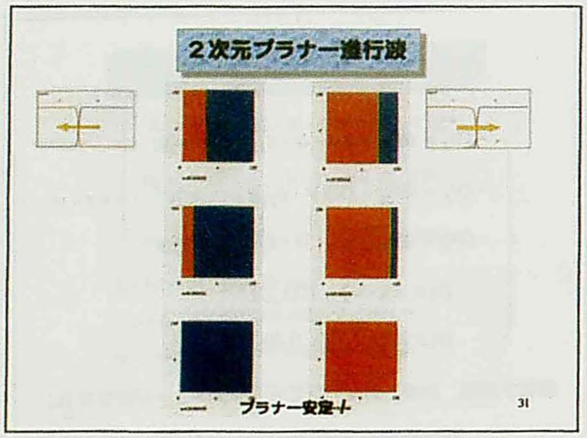

Traveling wave solutions (u,v,w)(z)
$-cu_z = du_{zz} + (\lambda - u - c_{12}v - c_{13}w)u$
$-cv_z = dv_{zz} + (\lambda - v - c_{21}u - c_{23}w)v \quad -\infty < z < \infty$
$-cw_z = dw_{zz} + (\lambda - w - c_{31}u - c_{32}v)w$
$(u,v,w)(-\infty) = (0,\lambda,0)$
$(u,v,w)(\infty) = (\lambda,0,0)$
解析が困難、数値計算においてもパラメーターが多すぎる。
26

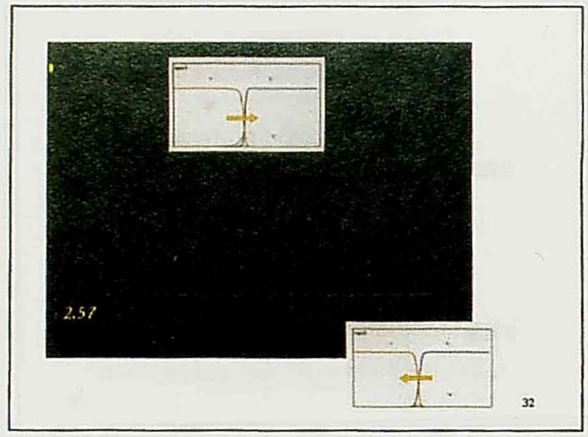

$c_{13} = 4,\ c_{31} = 26/21, \quad c_{23} < 1 < c_{32} = 22/21$
velocity
(u,v) TW
Chen and Hung の厳密解
w = 0
- 4/3
-2.57
0.75
c_{23}
27

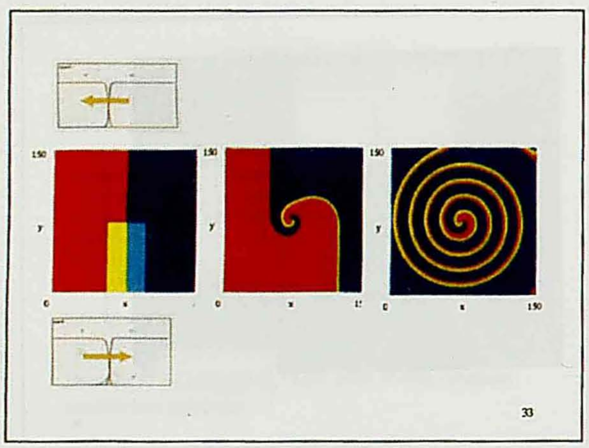

c_{23}
28

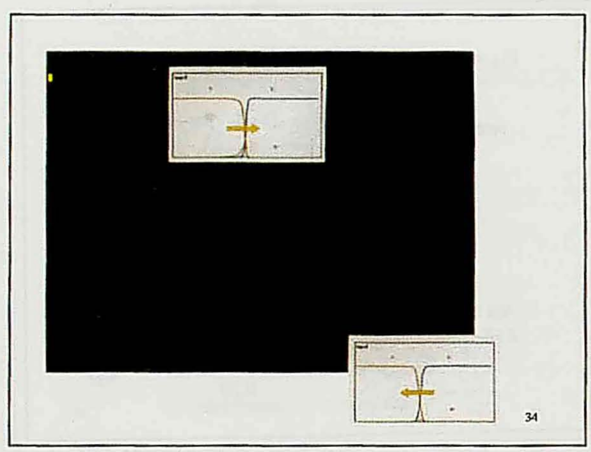

u が生き残る
50
t
0
0
x
100
v
u
Invasion of w
unstable TW
t=13
29


v が生き残る
50
t
0
0
x
100
v
u
Invasion of w
t=20
t=13
30

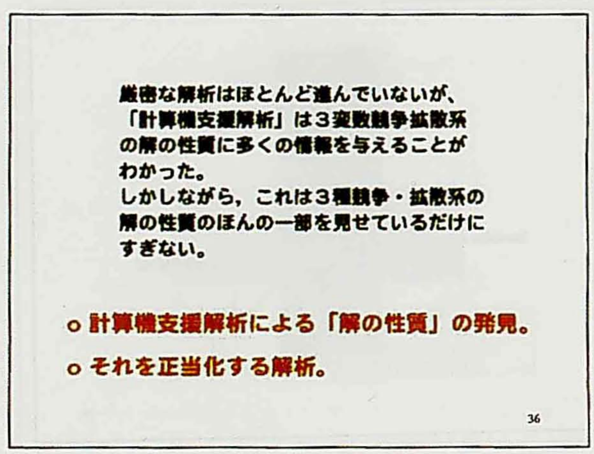

2次元プラナー進行波
プラナー安定!
31


2.57
32


33


34


ダイナミックな動きから競争が緩和され，共存が可能である
35


厳密な解析はほとんど進んでいないが、
「計算機支援解析」は３変数競争拡散系
の解の性質に多くの情報を与えることが
わかった。
しかしながら，これは３種競争・拡散系の
解の性質のほんの一部を見せているだけに
すぎない。
o 計算機支援解析による「解の性質」の発見。
o それを正当化する解析。
36