アーベル函数の特殊値に関する積公式の研究

平成 12 年度〜平成 14 年度 科学研究費補助金（基盤研究（C））研究成果報告書

平成 16 年 5 月

研究代表者： 大西 良博（岩手大学 人文社会科学部）

アーベル函数の特殊値に関する積公式の研究

研 究 組 織

研究代表者： 大西 良博（岩手大学 人文社会科学部）
研究分担者： 尾台 喜孝（岩手大学 人文社会科学部）

交付決定額（配分額） 基盤研究（C）

	直接経費	間接経費	合計
平成 12 年度	300	0	300
平成 13 年度	300	0	300
平成 14 年度	300	0	300
総 計	900	0	900

研 究 発 表

(1) 学会誌等

- Y. Ônishi: Determinant expressions for Abelian functions in genus two, Glasgow Math. J., 44(2002)353-364
- Y. Ônishi: Determinant expressions for hyperelliptic functions in genus three, to appear in Tokyo J. Math.
- S. Matsutani and Y. Ônishi: Wave-Particle complementarity and reciprocity of Gauss sums on Talbot effects, Foundations of Physics Letters, 16:4(2003)325-341
- S. Matsutani and Y. Ônishi: On the moduli of quantized elastica in $\mathbf{P}^1$ and KdV flows: Study of hyperelliptic curves as an extension of Euler's perspective of elastica I, Reviews in Math. Physics, 15:6(2003)559-628
- 大西良博： 円分型代数函数版 Bernoulli-Hurwitz 数と普遍 Bernoulli 数の理論, `http://jinsha2.hss.iwate-u.ac.jp/~onishi/publications.htm`
- Y. Ônishi: Theory of generalized Bernoulli-Hurwitz numbers for algebraic functions of cyclotomic type and universal Bernoulli numbers （上記の英訳）, `http://jinsha2.hss.iwate-u.ac.jp/~onishi/publications.htm`
- Y. Ônishi: Kummer's original type congruence relation for the universal Bernoulli numbers, `http://arxiv.org/abs/math.NT/0312178`
- Y. Ônishi: Theory of generalized Bernoulli-Hurwitz numbers in the algebraic functions of cyclotomic type, `http://arxiv.org/abs/math.NT/0304377`
- Y. Ônishi: Determinant expressions for hyperelliptic functions (with an Appendix by Shigeki Matsutani: Connection of The formula of Cantor and of Brioschi-Kiepert type). `http://jinsha2.hss.iwate-u.ac.jp/~onishi/publications.htm`
- 大西良博: 楕円曲線の等分多項式の超楕円曲線への一般化とその行列式表示, 中央大学における Work shop 「暗号理論とそれを支える代数曲線論 第２回」の報告集, pp.121-140
- Y. Odai and Hiroshi Suzuki: The rank of the group of relative units of a Galois extension, Tôhoku Math. J.,53(2001)37-54

- Y. Odai and F. Kawamoto: Normal integral bases of ∞-ramified abelian extensions of totally real number fields, Abh.Math.Sem.Univ.Hamburg, 72(2002)217-133
- 尾台喜孝, 河本史紀：総実代数体の不分岐アーベル拡大の normal integral basis 第 6 回 津田塾大整数論シンポジウム報告集, (2001 年 月 日) pp.69-74

(2) 口頭発表

- 大西良博：Bernoulli-Hurwitz 数の理論の円分型代数函数版, 「代数的整数論とその周辺」於：京都大学数理解析研究所 (2003 年 12 月 1 日 〜 12 月 5 日)
- 大西良博：大西良博: 楕円曲線の等分多項式の超楕円曲線への一般化とその行列式表示, 中央大学における Work shop 「暗号理論とそれを支える代数曲線論 第 2 回」(2001 年 8 月 29 日 〜 31 日) の報告集, pp.121-140
- 大西良博：あるアーベル函数の行列式表示について, 日本数学会, 2000 年秋季分科会 (京都大学), (2000 年 9 月 24 日 〜 27 日)

成果報告

(1) 楕円函数 $\wp(u)$ の n 等分公式，即ち $\wp(nu)$ を $\wp(u)$ （と $d\wp(u)/du$）で表す有理式，の分母（それは $\wp(u)$ の多項式）は，円分多項式の一般化である．

円分多項式の根が有理数体上に生成する体（円分体）の理論は数論の最も伝統的な領域であり，岩澤理論など恐るべき深さを有するが，その多くは，上記の n 等分多項式の根を $\wp(u)$ の虚数乗法の体（虚 2 次体）上に生成する体の数論へと美しく深く一般化されてゐる．

それゆゑ，より一般な体（たとへば円の 5 分体）上の類似は如何に構成されるべきか，の解答を得ることは古くからの数論学者の夢なのである．その際に，円分多項式は種数 0 の Abel 函数，つまり指数函数や三角函数の等分多項式であり，楕円函数は種数 1 の Abel 函数であるとみなすのは極く自然な見方であり，やはり次は種数 2 の Abel 函数に秘密が隠されてゐると信じたい．Hecke に始まり志村・谷山により完成した虚数乗法論もこの思想圏内にあつたはずである．

(2) しかし，我々は筆者の学位論文のやうに Grant の idea に沿つて n 等分公式を種数が $g>1$ の場合に一般化することを考へるのである．これは，志村・谷山の虚数乗法論の方向とは全く異なるものである．

ここでは，Abel 函数 $\wp(u_1,u_2,\cdots,u_g)$ を選ぶことさへも慎重になされてゐるのであるが，重要なのは，これの n 等分公式とは $\wp(nu_1,nu_2,\cdots,nu_g)$ を複数の Abel 函数の有理式で表すものとせず，$\wp(nu_1,nu_2,\cdots,nu_g)$ を元の代数曲線上に制限したものをその代数曲線上の函数（それは本質的にひとつ）の有理式として書くものとするのである．

このとき，その分子こそが円分多項式の一般化であると考へて，行つたのが筆者の学位論文であり，本計画の開始時点では，その分子を詳く調べることが最大目的であつた．

(3) 一方，楕円函数の等分公式の分母は美しい行列式表示を持つ（Kiepert の公式）が，そのやうな公式は分子については知られてゐない．

ところが筆者はあるとき突然に，種数が 2 に対し，そのやうな行列式表示が定式化できることに気付いた．それは直ちに論文に仕上がつた．実際は，Kiepert の公式をさらに膨らませた Frobenius-Stickelberger の公式といふものにまで実に自然に拡張されたのであつた．そして，直ちに結果を数学会で発表した．

その時点で，分子でなくて分母をもつと詳く研究するべきだと気付き，本研究の方向を変更した．その後，松谷茂樹氏により，Kiepert の公式についてはあらゆる種数の超楕円曲線に一般化できることが指摘されたので，筆者は Frobenius-Stickelberger の公式もそのやうな曲線にまで一般化できるはずであることを確信し，それを調べはじめた．その結果，時間はかかつたが期待通りに公式は完成した．この結果は，以下の pp.7-9 に結果のみ正確に述べたので，興味のある方には巻末の文献表の [**Ô1**], [**Ô2**], [**Ô3**] を御覧いただきたい．

(4) 研究期間の期限も押し迫つた頃，さらに重大な発見がなされた．それは，上記の行列式表示に表はれる行列成分である函数 $x(\boldsymbol{u})$ の冪級数展開の係数が Bernoulli 数や Hurwitz 数（Bernoulli 数の楕円函数版）と全く同じ性質を持つといふ発見であ

る．そのころは，すでに成果をまとめるに入るべきところであつたが，筆者はこれの正確な定式化と解明に没頭し，定式化（予想の）は年度内にほぼ完成した．それが，pp.10-12 に記したことである．それらの証明には２年近くかかつた．興味のある読者には，[**Ô5**] に全貌が書かれてゐるので，そちらを参照していただきたい．

最後に配分いただいた補助金の一部は印刷等のための消耗品にあてて，残りは，代表者と分担者による成果発表，また関係する情報や資料を得たり他の研究者との議論のための他大学への出張旅費として使用した．

本研究の成果の詳細

— Abel 函数の新理論，特に 行列式表示公式と Bernoulli-Hurwitz 数の拡張について —

大西 良博 (岩手大学)

1. 超楕円函数論における行列式表示公式

楕円函数の場合. 楕円函数論における表題の**行列式表示公式**とは，以下のやうな一連の等式のことをさす．まづ **Frobenius-Stickelberger の公式** ([**FS**]) とは，楕円函数論における通常の $\sigma(u)$ と $\wp(u)$ に対して成り立つ，次の等式である：

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{n(n-1)/2}(1!2!\cdots(n-1)!)\frac{\sigma(u^{(1)}+u^{(2)}+\cdots+u^{(n)})\prod_{i<j}\sigma(u^{(i)}-u^{(j)})}{\sigma(u^{(1)})^n\sigma(u^{(2)})^n\cdots\sigma(u^{(n)})^n} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & \wp(u^{(1)}) & \wp'(u^{(1)}) & \wp''(u^{(1)}) & \cdots & \wp^{(n-1)}(u^{(1)}) \\ 1 & \wp(u^{(2)}) & \wp'(u^{(2)}) & \wp''(u^{(2)}) & \cdots & \wp^{(n-1)}(u^{(2)}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \wp(u^{(n)}) & \wp'(u^{(n)}) & \wp''(u^{(n)}) & \cdots & \wp^{(n-1)}(u^{(n)}) \end{vmatrix}
\end{aligned} \tag{1.1}
$$

これの極限形として，つぎの **Kiepert の公式** ([**Kie**]) が得られる．

(1.2)

$$
(-1)^{n(n-1)/2}(1!2!\cdots(n-1)!)^2\frac{\sigma(nu)}{\sigma(u)^{n^2}} = \begin{vmatrix} \wp'(u) & \wp''(u) & \cdots & \wp^{(n-1)}(u) \\ \wp''(u) & \wp'''(u) & \cdots & \wp^{(n)}(u) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \wp^{(n-1)}(u) & \wp^{(n)}(u) & \cdots & \wp^{(2n-3)}(u) \end{vmatrix}
$$

簡単な行列式の変形をすれば，楕円曲線 $y^2 = x^3 + \cdots$ に対して，(1.1) 式から

$$
\begin{aligned}
&\frac{\sigma(u^{(1)}+u^{(2)}+\cdots+u^{(n)})\prod_{i<j}\sigma(u^{(i)}-u^{(j)})}{\sigma(u^{(1)})^n\sigma(u^{(2)})^n\cdots\sigma(u^{(n)})^n} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & x(u^{(1)}) & y(u^{(1)}) & x^2(u^{(1)}) & yx(u^{(1)}) & x^3(u^{(1)}) & \cdots \\ 1 & x(u^{(2)}) & y(u^{(2)}) & x^2(u^{(2)}) & yx(u^{(2)}) & x^3(u^{(2)}) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 1 & x(u^{(n)}) & y(u^{(n)}) & x^2(u^{(n)}) & yx(u^{(n)}) & x^3(u^{(n)}) & \cdots \end{vmatrix}
\end{aligned} \tag{1.1$'$}
$$

を得る．ただし $x(u) = \wp(u)$，$y(u) = \frac{1}{2}\wp'(u)$ である．これより次を得る：

$$
\frac{\sigma(nu)}{\sigma(u)^{n^2}} = \begin{vmatrix} x'(u) & y'(u) & (x^2)'(u) & (yx)'(u) & \cdots \\ x''(u) & y''(u) & (x^2)''(u) & (yx)''(u) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ x^{(n-1)}(u) & y^{(n-1)}(u) & (x^2)^{(n-1)}(u) & (yx)^{(n-1)}(u) & \cdots \end{vmatrix} \tag{1.2$'$}
$$

これは上記の楕円曲線の **n 等分多項式の行列式表示**に他ならない．

Frobenius-Stickelberger の公式の任意の Riemann 面に対する一般化としては，J. Fay ([**Fay**]) によるものが知られてゐるものの，それは非常に複雑であり，整数論的に使へさうにないし，Kiepert の公式のやうのものを導出することは不可能に思はれる．

今回紹介するのは，いまのところ超楕円曲線に限るものの，(1.1′) と (1.2′) の自然な一般化であり，整数論的な応用も期待できる．

設定と定義. まづ，種数 g の超楕円曲線 $C: y^2 = x^{2g+1} + \cdots$ に対し，C 上の第 1 種微分形式（正則形式）の“自然な”基底に関する積分

$$u_1 = \int_\infty^{(x,y)} \frac{dx}{2y}, \quad u_2 = \int_\infty^{(x,y)} \frac{xdx}{2y}, \quad \cdots, u_g = \int_\infty^{(x,y)} \frac{x^{g-1}dx}{2y} \tag{1.3}$$

を考へて，これの逆函数 $u = (u_1, u_2, \cdots, u_g) \mapsto (x, y)$ に着目し，

$$\boxed{(\ x(u) \ , \ y(u) \ )} \tag{1.4}$$

と記す．この定義を補足するために，いま C の Jacobi 多様体（$\mathbf{C}^g/\Lambda$ と書く）への標準的な埋め込み ι（$=$ (1.3) の積分値 modulo Λ）と写像 κ（$= \mathrm{mod}\ \Lambda$）および C の**普遍 Abel 被覆** $\kappa^{-1}\iota(C) \subset \mathbf{C}^g/\Lambda$ など，つまり

$$\begin{tikzcd} \boxed{\kappa^{-1}\iota(C)} \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & C \arrow[d, hook, "\iota"] \\ \mathbf{C}^g \arrow[r, two heads, "\kappa"] & \mathbf{C}^g/\Lambda = J \end{tikzcd} \tag{1.5}$$

を用意する．種数 $g = 1$ のときは，左側の埋め込みは全単射である．さすれば函数 $x(u)$ や $y(u)$ は 1 次元多様体 $\kappa^{-1}\iota(C)$ を定義域とする函数である．この $x(u)$ と $y(u)$ の有理式を **超楕円函数** と呼ぶ．

一般の超楕円函数の場合． C に付随する sigma 函数 $\sigma(u)=\sigma(u_1,u_2,\cdots,u_g)$ に対して，

$$\sigma_\sharp(u),\quad \sigma_\flat(u) \tag{1.6}$$

を下記の (1.7) に従つて定義する．

(1.7)

genus g	1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$
$\sigma_\sharp$	σ	σ_2	σ_2	σ_{24}	σ_{24}	σ_{246}	σ_{246}	σ_{2468}	$\cdots$
$\sigma_\flat$	σ	σ	σ_3	σ_3	σ_{35}	σ_{35}	σ_{357}	σ_{357}	$\cdots$

ここに $\sigma_j(u)=\frac{\partial}{\partial u_j}\sigma(u)$，$\sigma_{ij}(u)=\frac{\partial^2}{\partial u_i\partial u_j}\sigma(u)$，$\cdots$ である．このとき，以下が成り立つ．

定理 1.8. (Frobenius-Stickelberger 型の公式, ([**Ô1**], [**Ô2**], [**Ô3**]))
n は g 以上の整数とする（$n<g$ でも定式化はできてゐる）．点 $u^{(1)},\cdots,u^{(n)}$ はすべて $\kappa^{-1}\iota(C)$ に属するものとせよ．このとき

$$\pm\frac{\sigma(u^{(1)}+u^{(2)}+\cdots+u^{(n)})\prod_{i<j}\sigma_\flat(u^{(i)}-u^{(j)})}{\sigma_\sharp(u^{(1)})^n\sigma_\sharp(u^{(2)})^n\cdots\sigma_\sharp(u^{(n)})^n}
=\begin{vmatrix}
1 & x(u^{(1)}) & \cdots & x^g(u^{(1)}) & y(u^{(1)}) & x^{g+1}(u^{(1)}) & yx(u^{(1)}) & \cdots\\
1 & x(u^{(2)}) & \cdots & x^g(u^{(2)}) & y(u^{(2)}) & x^{g+1}(u^{(2)}) & yx(u^{(2)}) & \cdots\\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\\
1 & x(u^{(n)}) & \cdots & x^g(u^{(n)}) & y(u^{(n)}) & x^{g+1}(u^{(n)}) & yx(u^{(n)}) & \cdots
\end{vmatrix}$$

が成り立つ．ここで，行列の size は $n\times n$ である．

ただし，上記の符号 $\pm$ は詳しく述べると煩雑なので省略した．

Kiepert 型の行列式表示公式． 上記（1.8）の n 個の点 $u^{(j)}$ をすべて同一の点 u に近づけるときの極限として，Kiepert の公式（1.2′）の自然な拡張が得られ，それは n 等分多項式の類似を与へる．

2. Bernoulli-Hurwitz 数の理論の円分型代数函数への一般化

ここでは種数 g の超楕円曲線

$$C : y^2 = x^{2g+1} - 1 \tag{2.1}$$

だけを考へるが，ここで述べることは，“円分型”とでも呼ぶべき代数函数，すなはち

$$y^a = x^b - 1, \quad y^a = x^b - x \qquad (\gcd(a,b) = 1)$$

などで定義される代数曲線に対応する代数函数に対しても成り立つものである．詳細は [**Ô5**] にあるので，そちらを参照いただきたい．

設定と定義． まづ，C 上の第1種微分形式（正則形式）の“自然な”基底に関する積分

$$u_1 = \int_\infty^{(x,y)} \frac{dx}{2y}, \quad u_2 = \int_\infty^{(x,y)} \frac{xdx}{2y}, \quad \cdots, u_g = \int_\infty^{(x,y)} \frac{x^{g-1}dx}{2y} \tag{2.2}$$

を考へて，これの逆函数 $u = (u_1, u_2, \cdots, u_g) \mapsto (x, y)$ に着目し，$(x(u), y(u))$ と記す（前節 1 の記号と同じ）．ただし $g = 0$ のときは，(2.2) の最後式で $g = 0$ として，これらはひとつの式

$$u = \int_\infty^{(x,y)} \frac{x^{-1}dx}{2y} = \int_\infty^{(x,y)} \frac{dx}{2xy} \qquad (g = 0 \text{ のとき}) \tag{2.2$'$}$$

だと考へるものとする．この像の上の $u = (0, 0, \cdots, 0)$ の近傍では，最後の変数 u_g のみの逆函数になることを考慮すると，微分方程式

$$\frac{du_g}{dx} = \frac{x}{2y} \tag{2.3}$$

が得られる．いま $\frac{dx}{du_g} = x'(u)$ と書けば [(1)]

$$x'(u) = \frac{2y}{x^{g-1}} \tag{2.4}$$

を得，これを平方して定義式 $y(u)^2 = x(u)^{2g+1} - 1$ を代入したのち分母を払へば

$$\boxed{x(u)^{2g-2} x'(u)^2 = 4x(u)^{2g+1} - 4} \tag{2.5}$$

(1) ここでは $x'(u_g)$ と書く方が良いかもしれないが，前半の話との都合もあるのでかう記すのである．$x(u)$ や $y(u)$ を $x(u_g)$ とか $y(u_g)$ と記さないのも同様の理由による．

以後，<u>簡単のために g=2 を中心に解説する</u>.

以下の考察からわかるやうに，4 分体（または 3 分体）に対応する $\wp$ 函数についての微分方程式

$$\wp'(u)^2 = 4\wp(u)^3 - 4\wp(u) \quad (\text{または } \wp'(u)^2 = 4\wp(u)^3 - 1) \tag{2.6}$$

の 5 分体への正しい拡張は，丁度（2.5）の $g = 2$ の場合，つまり

$$x(u)^2 x'(u)^2 = 4x(u)^5 - 4 \tag{2.5$'$}$$

なのである．また，種数 $g = 0$ の場合の（2.2′）から定まる函数 $u \mapsto x$ は $1/\sin^2(u)$ に他ならない．

しかるに，**Bernoulli 数** B_{2n} が展開

$$\frac{1}{\sin^2(u)} = \frac{1}{u^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n} B_{2n}}{2n} \frac{u^{2n-2}}{(2n-2)!} \tag{2.7}$$

で与へられ，**Hurwitz 数** E_{4n} が $\wp'(u)^2 = 4\wp(u)^3 - 4\wp(u)$ で定まる $\wp(u)$ の展開

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{4n} E_{4n}}{4n} \frac{u^{4n-2}}{(4n-2)!} \tag{2.8}$$

で与へられるやうに，種数 2 の場合にも新しい数（**一般 Bernoulli-Hurwitz 数**）$C_{10n} \in \mathbf{Q}$ を

$$x(u) = \frac{1}{{u_2}^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\boxed{C_{10n}}}{10n} \frac{{u_2}^{10n-2}}{(10n-2)!} \tag{2.9}$$

で定義する．性質

$$x(-[\zeta]u) = \zeta x(u) \tag{2.10}$$

（ただし $\zeta = e^{2\pi\sqrt{-1}/5}$，$[\zeta]u = (\zeta u_1, \zeta^2 u_2)$ である）により n が 10 で割りきれなければ，$C_n = 0$ とする．C_n の漸化式も (2.5) から得られる．以上の考察が正しい筋にあることは次に示すやうに，C_n に関して，

—. **von Staudt-Clausen の定理,**
—. **von Staudt の第 2 定理,**
—. **Kummer の合同式**

の非常に良い類似が成り立つことからわかる．

主結果. 素数 $p \equiv 1 \mod 5$ に対し，

$$A_p = (-1)^{(p-1)/10}\binom{(p-1)/2}{(p-1)/10}$$

とおけば，一般 Bernoulli-Hurwitz 数 C_{10n} について，つぎが成り立つ：

定理 2.11. **(von Staudt-Clausen 型定理)** 各 C_{10n} はある整数 G_{10n} でもつて

$$C_{10n} = \sum_{\substack{p\equiv 1 \mod 5 \\ p-1|10n}} \frac{A_p{}^{10n/(p-1)}}{p} + G_{10n}$$

と書ける．

この A_p は，曲線 $C \bmod p$ の第1種微分形式の基底を (1.3) や (2.2) の

$$\left(\frac{dx}{2y}, \quad \frac{xdx}{2y}\right)$$

に取つた場合の Hasse-Witt 行列 の $(2,2)$ 成分に他ならない．

Katz ([**Ka1**]) が Hurwitz 数の場合，"分子" が Hasse invariant (つまり Hasse-Witt 行列の唯一の成分！) に他ならないことを指摘したのであるが，我々の場合，それのきはめて自然な一般化になつてゐる．

定理 2.12. **(von Staudt の第 2 定理の拡張)** 任意の素数 $p \equiv 1 \bmod 5$ と任意の自然数 n について，$p-1 \nmid 10n$ ならば

$$\frac{C_{10n}}{10n} \in \mathbf{Z}_{(p)} \ \ (= \mathbf{Z}_p \cap \mathbf{Q}) \ .$$

定理 2.11 と定理 2.12 は**普遍 Bernoulli 数**と呼ばれるものについての類似の性質 (F.Clarke の定理) と Lagrange inversion formula の変形版を駆使して証明される．

定理 2.13. **(Kummer 型の合同式)** 素数 $p \equiv 1 \mod 5$ と自然数 n，a について，$10n \geqq a+2$ かつ $n \not\equiv 0 \bmod (p-1)$ と仮定する．このとき

$$\sum_{r=0}^{a}(-1)^r\binom{a}{r}A_p{}^{a-r}\cdot\frac{C_{10n+r(p-1)}}{10n+r(p-1)} \equiv 0 \mod p^a \tag{2.10}$$

が成り立つ．

これはつい最近，安田正大氏 (数理研) によつて証明された．

数値例. C_{10n} の最初のいくつかの値：

$$
\begin{aligned}
C_{10} &= \frac{1}{11} \cdot 2^8 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7, \\
C_{20} &= \frac{-1}{11} \cdot 2^{18} \cdot 3^9 \cdot 5^4 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17, \\
C_{30} &= \frac{1}{11 \cdot 31} \cdot 2^{28} \cdot 3^{14} \cdot 5^7 \cdot 7^3 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23^2, \\
C_{40} &= \frac{-1}{11 \cdot 41} \cdot 2^{38} \cdot 3^{17} \cdot 5^9 \cdot 7^3 \cdot 13^2 \cdot 17^2 \cdot 19^2 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 37 \cdot 31991, \\
C_{50} &= \frac{1}{11} \cdot 2^{47} \cdot 3^{23} \cdot 5^{12} \cdot 7^6 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19^2 \cdot 23^2 \cdot 29 \cdot 37 \cdot 43 \cdot 47 \cdot 4999, \\
C_{60} &= \frac{-1}{11 \cdot 31 \cdot 61} \cdot 2^{59} \cdot 3^{28} \cdot 5^{15} \cdot 7^6 \cdot 13^4 \cdot 17^2 \cdot 19^3 \cdot 23^2 \cdot 29^2 \cdot 37 \cdot 43 \cdot 47 \cdot 53 \cdot 351453077, \\
C_{70} &= \frac{1}{11 \cdot 71} \cdot 2^{72} \cdot 3^{31} \cdot 5^{16} \cdot 7^9 \cdot 13^5 \cdot 17^3 \cdot 19^3 \cdot 23^2 \cdot 29^2 \cdot 37 \cdot 43 \cdot 47 \cdot 53 \cdot 59 \cdot 67 \cdot 6740734411, \\
C_{80} &= \frac{-1}{11 \cdot 41} \cdot 2^{78} \cdot 3^{34} \cdot 5^{19} \cdot 7^8 \cdot 13^6 \cdot 17^3 \cdot 19^4 \cdot 23^3 \cdot 29^2 \cdot 37^2 \cdot 43 \cdot 47 \cdot 53 \cdot 59 \cdot 67 \cdot 73 \\
&\quad \cdot 109 \cdot 460903 \cdot 121384433, \\
C_{90} &= \frac{1}{11 \cdot 31} \cdot 2^{87} \cdot 3^{42} \cdot 5^{21} \cdot 7^{10} \cdot 13^6 \cdot 17^4 \cdot 19^4 \cdot 23^3 \cdot 29^3 \cdot 37^2 \cdot 43^2 \cdot 47 \cdot 53 \cdot 59 \cdot 67^2 \cdot 73 \cdot 79 \cdot 83 \\
&\quad \cdot 131 \cdot 881 \cdot 2799606697, \\
C_{100} &= \frac{-1}{11 \cdot 101} \cdot 2^{97} \cdot 3^{47} \cdot 5^{24} \cdot 7^{11} \cdot 13^7 \cdot 17^3 \cdot 19^5 \cdot 23^4 \cdot 29^3 \cdot 37^2 \cdot 43^2 \cdot 47^2 \cdot 53 \cdot 59 \cdot 67 \cdot 73 \cdot 79 \cdot 83 \\
&\quad \cdot 89 \cdot 97 \cdot 10343 \cdot 1938718187373563, \\
C_{110} &= \frac{1}{11} \cdot 2^{107} \cdot 3^{51} \cdot 5^{27} \cdot 7^{13} \cdot 13^8 \cdot 17^4 \cdot 19^5 \cdot 23^4 \cdot 29^3 \cdot 37 \cdot 43^2 \cdot 47^2 \cdot 53^2 \cdot 59 \cdot 67 \cdot 73 \cdot 79 \cdot 83 \\
&\quad \cdot 89 \cdot 97 \cdot 103 \cdot 107 \cdot 3019729 \cdot 865724129494813, \\
C_{120} &= \frac{-1}{11 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 61} \cdot 2^{119} \cdot 3^{56} \cdot 5^{29} \cdot 7^{13} \cdot 13^9 \cdot 17^5 \cdot 19^6 \cdot 23^5 \cdot 29^4 \cdot 37^2 \cdot 43^2 \cdot 47^2 \cdot 53^2 \cdot 59^2 \cdot 67 \\
&\quad \cdot 73 \cdot 79 \cdot 83 \cdot 89 \cdot 97 \cdot 103 \cdot 107 \cdot 109 \cdot 113 \cdot 863833294249 \cdot 7389430581319, \\
C_{130} &= \frac{1}{11 \cdot 131} \cdot 2^{128} \cdot 3^{61} \cdot 5^{32} \cdot 7^{15} \cdot 13^{11} \cdot 17^5 \cdot 19^6 \cdot 23^5 \cdot 29^4 \cdot 37^2 \cdot 43^2 \cdot 47^2 \cdot 53^2 \cdot 59^2 \cdot 67 \cdot 73 \cdot 79 \cdot 83 \\
&\quad \cdot 89 \cdot 97 \cdot 103 \cdot 107 \cdot 109 \cdot 113 \cdot 127 \cdot 5303 \cdot 97785319 \cdot 175363749323953511, \\
C_{140} &= \frac{-1}{11 \cdot 71} \cdot 2^{139} \cdot 3^{65} \cdot 5^{34} \cdot 7^{15} \cdot 13^{10} \cdot 17^6 \cdot 19^7 \cdot 23^6 \cdot 29^4 \cdot 37^2 \cdot 43^3 \cdot 47 \cdot 53^2 \cdot 59^2 \cdot 67^2 \cdot 73 \cdot 79 \cdot 83 \\
&\quad \cdot 89 \cdot 97 \cdot 103 \cdot 107 \cdot 109 \cdot 113 \cdot 127 \cdot 137 \cdot 3191 \cdot 79927801 \cdot 292751932607759041533 1021, \\
C_{150} &= \frac{1}{11 \cdot 31 \cdot 151} \cdot 2^{150} \cdot 3^{70} \cdot 5^{37} \cdot 7^{17} \cdot 13^{12} \cdot 17^5 \cdot 19^7 \cdot 23^6 \cdot 29^5 \cdot 37^3 \cdot 43^3 \cdot 47^2 \cdot 53^2 \cdot 59^2 \cdot 67^2 \cdot 73^2 \cdot 79 \cdot 83 \\
&\quad \cdot 89 \cdot 97 \cdot 103 \cdot 107 \cdot 109 \cdot 113 \cdot 127 \cdot 137 \cdot 139 \cdot 50951 \cdot 450127 \cdot 1464426640811 \cdot 58871719018640089, \\
C_{160} &= \frac{-1}{11 \cdot 41} \cdot 2^{158} \cdot 3^{72} \cdot 5^{40} \cdot 7^{17} \cdot 13^{12} \cdot 17^6 \cdot 19^8 \cdot 23^6 \cdot 29^5 \cdot 37^3 \cdot 43^3 \cdot 47^2 \cdot 53^2 \cdot 59^2 \cdot 67^2 \cdot 73^2 \cdot 79^2 \cdot 83 \\
&\quad \cdot 89 \cdot 97 \cdot 103 \cdot 107 \cdot 109 \cdot 113 \cdot 127 \cdot 137 \cdot 139 \cdot 149 \cdot 157 \cdot 5473709 \\
&\quad \cdot 225435026223657309315512932015657065 11, \\
C_{170} &= \frac{1}{11} \cdot 2^{167} \cdot 3^{78} \cdot 5^{42} \cdot 7^{19} \cdot 13^{12} \cdot 17^8 \cdot 19^8 \cdot 23^7 \cdot 29^5 \cdot 37^3 \cdot 43^3 \cdot 47^2 \cdot 53^3 \cdot 59^2 \cdot 67^2 \cdot 73^2 \cdot 79^2 \cdot 83^2 \\
&\quad \cdot 89 \cdot 97 \cdot 103 \cdot 107 \cdot 109 \cdot 113 \cdot 127 \cdot 137 \cdot 139 \cdot 149 \cdot 157 \cdot 163 \cdot 167 \cdot 587 \cdot 22573 \cdot 18793 \cdot 246289 \\
&\quad \cdot 31120354537658035867493538 7, \\
C_{180} &= \frac{-1}{11 \cdot 31 \cdot 61 \cdot 181} \cdot 2^{177} \cdot 3^{87} \cdot 5^{45} \cdot 7^{19} \cdot 13^{15} \cdot 17^7 \cdot 19^9 \cdot 23^7 \cdot 29^6 \cdot 37^3 \cdot 43^4 \cdot 47^2 \cdot 53^3 \cdot 59^3 \cdot 67^2 \\
&\quad \cdot 73^2 \cdot 79^2 \cdot 83^2 \cdot 89^2 \cdot 97 \cdot 103 \cdot 107 \cdot 109 \cdot 113 \cdot 127 \cdot 137 \cdot 139 \cdot 149 \cdot 157 \cdot 163 \cdot 167 \cdot 173 \\
&\quad \cdot 239 \cdot 1471 \cdot 1579 \cdot 70309992216886670658617423230168431387 07.
\end{aligned}
$$

これら C_n は ある整数 G_n でもつて，以下のやうに書ける

$$
\begin{aligned}
C_{10} &= \frac{6}{11} + G_{10}, \\
C_{20} &= \frac{6^2}{11} + G_{20}, \\
C_{30} &= \frac{6^3}{11} + \frac{10}{31} + G_{30}, \\
C_{40} &= \frac{6^4}{11} + \frac{7}{41} + G_{40}, \\
C_{50} &= \frac{6^5}{11} + G_{50}, \\
C_{60} &= \frac{6^6}{11} + \frac{10^2}{31} + \frac{1}{61} + G_{60}, \\
C_{70} &= \frac{6^7}{11} + \frac{32}{71} + G_{70}, \\
C_{80} &= \frac{6^8}{11} + \frac{7^2}{41} + G_{80}, \\
C_{90} &= \frac{6^9}{11} + \frac{10^3}{31} + G_{90}, \\
C_{100} &= \frac{6^{10}}{11} + \frac{46}{101} + G_{100}, \\
C_{110} &= \frac{6^{11}}{11} + G_{110}, \\
C_{120} &= \frac{6^{12}}{11} + \frac{10^4}{31} + \frac{7^3}{41} + \frac{1}{61} + G_{120}, \\
C_{130} &= \frac{6^{13}}{11} + \frac{64}{131} + G_{130}, \\
C_{140} &= \frac{6^{14}}{11} + \frac{32^2}{71} + G_{140}, \\
C_{150} &= \frac{6^{15}}{11} + \frac{10^5}{31} + \frac{52}{151} + G_{150}, \\
C_{160} &= \frac{6^{16}}{11} + \frac{7^4}{41} + G_{160}, \\
C_{170} &= \frac{6^{17}}{11} + G_{170}, \\
C_{180} &= \frac{6^{18}}{11} + \frac{10^6}{31} + \frac{1}{61} + \frac{37}{181} + G_{180}.
\end{aligned}
$$

文 献 （便宜を考慮してかなり多めに記した）

[ACGH] Arbarello, E., Cornalba, M., Griffiths, P.A. and Harris, J., *Geometry of algebraic curves, Vol.1, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 267*, Springer, Berlin, 1984.

[Ad1] Adelberg, A., *Universal higher order Bernoulli numbers and Kummer and related congruences*, J. Number Theory, **84** (2000), 119-135.

[Ad2] Adelberg, A., *Universal Kummer congruences mod prime powers*, Preprint.

[AIK] 荒川恒男, 伊吹山知義, 金子昌信, "ベルヌーイ数とゼータ関数", 牧野書店, 2001.

[B1] Baker, H.F., *Abelian functions — Abel's theorem and the allied theory including the theory of the theta functions —*, Cambridge Univ. Press, 1897; reprint, 1995.

[B2] Baker, H.F., *On the hyperelliptic sigma functions*, Amer. J. of Math. **20** (1898), 301-384.

[B3] Baker, H.F., *On a system of differential equations leading to periodic functions*, Acta math. **27** (1903), 135-156.

[BEL] Buchstaber, V.M., Enolskii, V.Z. and Leykin, D.V., *Kleinian functions, hyperelliptic Jacobians and applications*, Reviews in Math. and Math. Physics **10** (1997), 1-125.

[Br] Brioschi, F., *Sur quelques formules pour la multiplication des fonctions elliptiques*, C. R. Acad. Sci. Paris **59** (1864), 769-775.

[Can] Cantor, D.G., *On the analogue of the division polynomials for hyperelliptic curves*, J. reine angew. Math. **447** (1994), 91-145.

[Car1] Carlitz, L., *The coefficients of the reciprocal of a series*, Duke Math. J., **8** (1941), 689-700.

[Car2] Carlitz, L., *Some properties of Hurwitz series*, Duke Math. J., **16** (1949), 285-295.

[Car3] Carlitz, L., *Congruences for the coefficients of the Jacobi elliptic functions*, Duke Math. J., **16** (1949), 297-302.

[Car4] Carlitz, L., *Congruences for the coefficients of hyperelliptic and related functions*, Duke Math. J., **19** (1952), 329-337.

[Cl] Clarke, F., *The universal von Staudt theorem*, Trans. Amer. Math. Soc., **315** (1989), 591-603.

[Co] Comtet, L., *Advanced Combinatorics — The art of finite and infinite expansions — (revised and enlarged edition)*, D.Reidel Pub. Company, 1974.

[EEP] Eilbeck, J.C., Enolskii, V.Z. and Previato, E.P., *On a generalized Frobenius–Stickelberger addition formula*, Preprint (2002).

[Fay] J. Fay, *Theta functions on Riemann surfaces, Lecture Notes in Math., 352*, Springer-Verlag, 1973.

[Fr] Fricke, R., *Die elliptishen Functionen und ihre Anwendungen, I, II*, Teubner, 1916, 1922.

[FS] Frobenius, F.G. and Stickelberger, L., *Zur Theorie der elliptischen Functionen*, J. reine angew. Math. **83** (1877), 175–179.

[Gr] Grant, D., *A generalization of a formula of Eisenstein*, Proc. London Math. Soc. **62** (1991), 121–132.

[Gu] Gunji, H., *The Hasse invariant and p-division points of an elliptic curve*, Arch. Math., **27** (1976), 148-157.

[He] Heffter, H., *Ludwig Stickelberger*, Deutshesche Math. Jahr. **47** (1937), 79–86.

[Ho1] Honda, T., *Formal groups and zeta-functions*, Osaka J. Math. **5** (1968), 199-213.

[Ho2] Honda, T., *On the theory of commutative formal group*, J. Math. Soc. Japan **22** (1970), 213-246.

[Ho3] Honda, T., *Formal groups obtained from generalized hypergeometric functions*, Osaka J. Math. **9** (1972), 447-462.

[Hu1] Hurwitz, A., *Über die Entwicklungskoeffizienten der lemniskatishen Funktionen*, Nachr. Acad. Wiss. Göttingen (1897), 273-276 (Werke, Bd.II, pp.338-341).

[Hu2] Hurwitz, A., *Über die Entwicklungskoeffizienten der lemniskatishen Funktionen*, Math. Ann., **51** (1899), 196-226 (Werke, Bd.II, pp.342-373).

[I] 伊吹山知義, *Memoirs on "easy" zeta functions*, 第９回 整数論サマースクール 「ゼータ関数」報告集 (2001), 235-248.

[Ka1] Katz, N.M., *The congruence of Clausen-von Staudt and Kummer for Bernoulli-Hurwitz numbers*, Math. Ann. **216** (1975), 1-4.

[Ka2] Katz, N.M., *The Eisenstein measures and p-adic interpolation*, Amer. J. Math. **99** (1977), 239-311.

[Ka3] Katz, N.M., *Formal groups and p-adic interpolation*, Astérisque **41/42** (1977), 55-65.

[Kie] Kiepert, L., *Wirkliche Ausführung der ganzzahligen Multiplikation der elliptichen Funktionen*, J. reine angew. Math. **76** (1873), 21–33.

[Ku] Kummer, E.E., *Über eine allgemeine Eigenschaft der rationalen Entwickelungscoëfficienten einer bestimmten Gattung analytischer Functionen*, J. für die reine und angew. Math. **41** (1851), 368-372.

[L] Lang, H., *Kummersche Kongruenzen fur die normierten Entwicklungskoeffizienten der Weierstrasschen $\wp$-Funktionen*, Abh. Math. Sem. Hamburg **33** (1969), 183-196.

[Mu] D. Mumford, *Abelian varieties*, Oxford Univ. Press, 1985, (p.108, $\ell. - 5$ の式).

[Ô1] Ônishi, Y., *Determinant expressions for Abelian functions in genus two*, Glasgow Math. J., **44** (2002), 353-364, (Available from `http://jinsha2.hss.iwate-u.ac.jp/~onishi/`).

[Ô2] Ônishi, Y., *Determinantal expressions for hyperelliptic functions in genus three*, to appear in Tokyo J. Math., (Available from `http://arxiv.org/abs/math.NT/0105187`).

[Ô3] Ônishi, Y., *Determinant expressions for hyperelliptic functions, with Appendix by S. Matsutani*, Preprint, `http://arxiv.org/abs/math.NT/0105189`.

[Ô4] Ônishi, Y., 普遍 Bernoulli 数に対する Kummer の原型合同式, 数論セミナー静岡 2003 (筆者の Web page から download 可) (2004), 111-126.

[Ô5] Ônishi, Y., 円分型代数函数版 Bernoulli-Hurwitz 数と普遍 Bernoulli 数の理論, preprint, (筆者の Web page から download 可) (2003), 98 pages.

[RS] Rosen, K.H. and Snyder, W.M., *A Kummer congruence for the Hurwitz-Herglotz function*, Tokyo J. Math. **6** (1983), 125–133.

[Sn1] Snyder,C., *A concept of Bernoulli numbers in algebraic function fields*, J. Reine Angew. Math. **307/308** (1978), 295–308.

[Sn2] Snyder, C., *The coefficients of the Hessian elliptic functions*, J. Reine Angew. Math. **306** (1979), 60–87.

[Sn3] Snyder,C., *A concept of Bernoulli numbers in algebraic function fields (II)*, manuscripta math. **35** (1981), 69–89.

[Sn4] Snyder, C., *Kummer congruences for the coefficients of Hurwitz series*, Acta Arith. **40** (1982), 175–191.

[Sn5] Snyder, C., *Kummer congruences in formal groups and algebraic groups of dimension one*, Rocky Mountain J. Math. **15** (1985), 1–11.

[Sn6] Snyder, C., *p-adic interpolation of the coefficients of Hurwitz series attached to height one formal groups*, Rocky Mountain J. Math. **23** (1993), 339–351.

[St] Stickelberger, L., *Uber eine Verallgemeinerung der Kreistheilung*, Math. Ann. **37** (1890), 321–367.

[V] Vandiver, H.S., *Certain congruence involving the Bernoulli numbers*, Duke Math. J. **5** (1939), 548-551.

[W] Weber, H., *Lehrbuch der Algebra III*, F. Vieweg, 1908; Chelsea, 1961.

[WW] Whittaker, E.T. and Watson, G.N., *A course of modern analysis* , Cambridge Univ. Press, 1902.

[Y] Yui, N., *On the Jacobian varieties of hyperelliptic curves over fields of characteristic $p > 2$*, Journ. of Algebra **52** (1978), 378-410.