アルテス　リベラレス（岩手大学人文社会科学部紀要）
第81号　2007年12月　139頁～157頁

アインシュタインの時計
－サルでもわかる特殊相対性理論－

花　見　仁　史

1.はじめに

相対性理論は，物理学を学んだ経験がない人も，その建設者のアインシュタインとともに，その名を記憶しているほど，物理学のなかでも最も有名な分野である。しかしながら，その内容についてはどれほど正しい理解がなされているかは，心許ない。さらに，特殊相対性理論と一般相対性理論とからなる相対性理論をひっくるめて，どちらも非常に難解な学問であると，世間では受け止められている節がある。しかしながら，特殊相対性理論については，そのエッセンスは巷で考えられているほど，難解なものではない。また，ブラックホールやビッグバン宇宙の理解にかかせないゆえに，浮き世離れした印象を持たれがちな一般相対性理論でさえ，GPS（Grobal Positioning System[1]）の必須な技術として，最近の車には標準仕様となりつつあるカーナビにも組み込まれている。にもかかわらず，日本の大学では，理系学部においても，相対性理論がカリキュラムとして定着しているところはそれほど多くないので，ごく一部の学生が大学院まで進んではじめてまともに学ぶことになることが多い。量子力学とともに，20世紀の科学の発展の礎となった相対性理論が，理系学部ですらまともにカリキュラムとして取り上げられていないようなこの現状から，日本の高等教育の限界を感じるのは，私だけなのだろうか？

特殊相対性理論については，式を使わなくても，その理論的体系は，**すべての「慣性系」で自然法則は同様になりたつ，光速は観測者の運動によらず一定である**という２つの原則から出発すれば，ほとんど論理的に構築できるものである。したがって，ここでは図形なども使って，誰でも理解できるような解説を試みる。

2.運動の相対性

2-1　慣性の法則＝ガリレイの相対性

物体の運動を捉えるには，物体がどの「時間」に，どの「位置」にあるか？を記録したり，記述する必要がある。これができれば，「速度」＝「単位時間あたりの位置の変化」も知ることができる。当然であるが，物体が「いつ」，「どこ」にあるかを記述するためには，「時間」を計る手段と「位置」を計る手段を準備しなければいけない。ひとまず，私たちは「時間」を

1）　衛星を用いた位置を決定するシステム

計る手段＝「時計」は正確なものを用意できているとしよう。一方，ある物体の「位置」を計る手段としては，目印になる別の物体からの相対的な位置を計る他に道はない。１つの物体だけあっても，それ以外の物がまったく何もない空間のなかでは，その物体の「位置」は限定しようもないことからも，「目印になるもの」が必要であるのはあきらかだろう。つまり，物体の運動の観測には，「物体に固定された土台のような目印」＝「座標系」が必要である。私たちは，物体の運動を記述する「座標系」としては，静止しているものを想定したくなるだろう。しかし，「座標系」が静止していない場合でも，物体の相対的「位置」を計れることはできる。つまり，物体の「位置」を記述するための「座標系」は，１つとは限らない。しかし，「座標系」自身は我々が「位置」を測定するために導入せざるを得ないが，その存在自身は，物体の運動とは無関係であるはずだ。つまり，どのような「座標系」を用いて記述しても，物体の運動の本質が左右されるものではない。したがって，物体の運動を決定するはずの「運動の法則」は，我々の都合で導入した「座標系」にはよらない記述になっていることが望ましい。しかし，「座標系」の選び方によっては，簡潔に運動の記述ができるようになる。つまり，唯一とは限らないが，運動の記述に適した「座標系」がある。

物体の運動の基本法則の１つに，「慣性の法則」がある。

慣性の法則

静止している物体は，いつまでも静止している。ある速度で運動している物体は，その速度を保って運動しつづける。

この「慣性の法則」が成り立っている「座標系」を「慣性系」という。例えば，静止している「座標系」や，一定速度で運動している「座標系」は「慣性系」である。さらに，運動している速度が一定である「座標系」＝「慣性系」ならば，「慣性の法則」のみならず，以下の「ニュートンの運動法則」も成り立つ。

ニュートンの運動法則

物体の「質量」×物体の「加速度」=外からの影響である「力」. (1)

この「ニュートンの運動法則」の記述に含まれている「加速度」は，「速度」の時間変化であるから，結局，運動している速度が異なってる「慣性系」の間でも，その速度の違いの影響は運動法則には現われない。「慣性の法則」，「ニュートンの運動法則」のように，一般に，**基本的な物理法則は，どのような「慣性系」でも同じように記述される**と考えることができる。つまり，法則の記述においては，どの「慣性系」も同等であるという相対性がなりたっている。この「慣性の法則」を発見したガリレオ・ガリレイにちなんで，このガリレイ＋ニュートンの運動法則における「慣性系」の相対性を「ガリレイの相対性」という。

ガリレイの相対性

ガリレイ＋ニュートンの運動法則は，すべての「慣性系」で同様になりたつ。

2-2　アインシュタインの相対性

ガリレイ＋ニュートンの運動法則は，身の回りの世界での運動を記述する「よい」理論である。しかし，物体の速度が光速に近づく場合，その記述は破綻してしまう。身の回りの世界では，物体の速度が光速に近づくことはほとんどないので，その破綻が問題になることはなかっただけである。実際，光は電磁場の波＝電磁波であるが，その電磁波の振舞をよく再現するマ

ックスウェルの電磁場の理論では，「ガリレイの相対性」はなりたたない。しかし，「ガリレイの相対性」には，**“自然法則”はどのような「慣性系」でも同じ様に記述される**という，自然の本質は「慣性系」のような座標系などの観測者の都合によらない原理的意味があったことを思い起こそう。したがって，光速に近い運動についても，「ガリレイの相対性」そのままでなくても，ある種の「慣性系」の相対性がなりたっていることが期待される。アインシュタインは，この「ガリレイの相対性」に換わる「慣性系」の相対性の意味を問い直して，「特殊」相対性理論にたどり着いた。

アインシュタインの「特殊」相対性

“自然法則”は，すべての「慣性系」で同様になりたつ。

「特殊」相対性と言われるのは，物理現象を記述するために用意される座標系を「慣性系」に限定しているからである。

19世紀当時，光が電磁場の波＝「電磁波」であることが明らかとなり，また，その速度cは，その光源の速度に関わらず，$c \simeq 3\times 10^8$m/sと一定であることが明らかになった。アインシュタインは，この光速一定の観測事実を“自然法則”として，「光速不変の原理」としてとらえ直した。

光速不変の原理

光は，真空中では，光源の運動に関わらず，すべての方向に一定速度cで伝わる。

「慣性系」によらず運動の法則がなりたつことが，ガリレイの相対性であったが，アインシュタインは，この光速不変も“自然法則”として位置づけて，それが「慣性系」によらずになりたつとして，これを「特殊」相対性原理を打ち立てた。

運動を記述するためには，「慣性系」のような座標系で計られた「時間」「位置」を扱う。しかし，そもそも運動の記述の本質は，我々の都合で導入したような「慣性系」で計られる「時間」と「位置」の量のそれぞれにあるというより，「時間」と「位置」との関係そのものにあるはずである。

ガリレイ＋ニュートンの運動理論では，同じ運動を観測している場合，「慣性系」ごと観測される「位置」は一般に異なるが，「時間」は「絶対時間」として「慣性系」によらないものとして扱われる。このガリレイ＋ニュートンの運動理論での「絶対時間」の捉え方に従うと，異なる速度で運動している「慣性系」から観測される「速度」は必ず異なるはずだが，これは光速不変の原理と矛盾してしまう。そこで，アインシュタインは，「光は，どの「慣性系」から観測しても，すべての方向に一定速度cで伝わる」という現象が再現されるように，「時間」を「慣性系」によらない共通な「絶対時間」としてではなく，「慣性系」ごとの決まる固有な「時間」として捉え直し，運動の記述を再構成した。この「時間」と「空間」についての理論が，「特殊」相対性理論である。

3.異なる「慣性系」での時間と空間の可視化＝時空図

アインシュタインに従って光速不変の原理を認める限り，同じある「できごと」に係わる「時間」「位置」でも，異なった速度で運動している「慣性系」では，それぞれの固有の「時間」，固有の「位置」として捉えなければいけない。しかし，「慣性系」ごとの「固有時間」，「固有位置」といっても，まったく互いに無関係であることを意味するのではない。同じ「できごと」

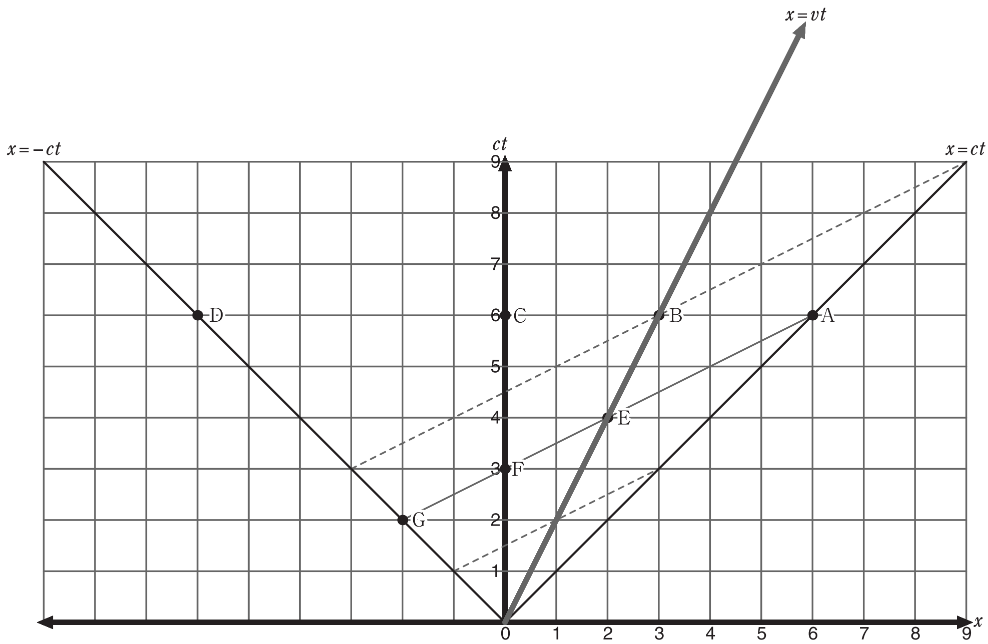

図 1

である限り，特殊相対性理論は，一方の「慣性系」での「時間」「位置」から他方の「慣性系」での「時間」「位置」を導くことができる。

以下では，異なった速度で運動している「慣性系」について，特殊相対性理論によるそれぞれの「時間」「位置」の関係を可視化することを試みる。また，それぞれの「慣性系」に対応する具体的な例として，主に，地球上にいる私たちとロケットに乗っている人を想定する。異なった速度で運動している観測者が捉えた「時間」「位置」とをみるには，時空図を導入すればわかりやすい。

3-1　地球上の私たちとロケットの例題

地球に対して，ロケットが x 方向に一定の速度 v で運動している場合を考えよう。以下では，地球＝慣性系 S，ロケット＝慣性系 S' となるが，この 2 つの慣性系から地球上の私たちとロケットに乗っている人にとって，それぞれ，「できごと」がどのように見えるかを，図 1 のように，時空図を描いて考える。

3-1-1　私たちからみた地球とロケットの世界線

図 1 では，地球上で私たちが観測している時間 t の方向を縦軸に，空間位置 x の方向を横軸にとっている。この縦軸，横軸は，それぞれ時間軸，空間軸と呼ぶことがある。**時刻 t をその時刻までに光が進む距離 ct に置き換えると，時間軸の目盛も空間軸と同じように，距離の単位で表わすことができる。**こうしておくと便利なので，今後，この単位時間で光が進む距離を時間軸の単位とする。この図 1 では，地球上の私たちから見たロケットの時間と空間の軌跡は，$x=vt$ の直線で表されている。このロケットの軌跡のような時空図上で表された物体の軌跡は**世界線**とも呼ばれる。また，私たちにとってみれば，私たち自身は静止しているから，確かに，地球の慣性系 S の時空図では，地球上の私たちの軌跡＝世界線はどんな時間でも $x=0$ という

ことになり，それは時間軸に一致している。

3-1-2　私たちからみた同じ時刻の「できごと」

図１には，私たちの時間軸に示された時刻と「同時刻での位置－９＜x＜９の点」を空間軸に平行な横線で，その時間軸に示された位置と「同位置での時刻０＜ct＜９の点」を時間軸に平行な縦線で，表した。つまり，空間軸に平行な横線は，私たちでの同時刻のいろいろな空間位置を意味している。ここで，$t=0$にロケットが，ちょうど$x=0$を通過した瞬間，$x=0$にある光源から，同時に±x方向へ光が放射されたとする。図１には，この放射された光の世界線が，斜め±45度の直線で描かれている。同時刻の点を表す横線とこの光の世界線が交わった点が，その時刻に光が到達した点ということになる。例えば，図１では，時刻$ct=6$のとき，光は時空中の点A，Dに達している。一方，この時刻での位置$x=0$は時空中の点Cであり，CD，あるいは，ACの長さは，この時刻までに光の進んだ距離に対応している。CDとACの長さは同じ，つまり，慣性系Sでは，「光速不変の原理」の通り，どちらの空間方向にも光は同じ距離だけ進んでいることがわかる。

3-1-3　ロケットの人からみた同じ時刻の「できごと」

「光速不変の原理」に従えば，図１では，$t'=0$のときに$x'=0$から光が同時に放射されたので，ロケットの人からみても，光はどちらの方向にも同じ距離だけ進んでみえるはずである。しかし，私たちの時間で$ct=6$のとき，ロケットはBにあるが，このBから光の到達点A，Dまで結んだ横線ABとBDの長さは等しくはない。これは「光速不変の原理」と矛盾するのではないか？とも思えるが，そうではない。ロケットの人からみれば，Aと反対方向での光の到達点Dだけでなく，ロケットの世界線上のBすらも，Aと同時刻での「できごと」ではない。

では，ロケットの人がみて，Aと同時刻での「できごと」は時空図の図１上のどこになるのだろうか？AEとEGの長さが等しくなるように，ロケットの世界線上に点Eを選んでみる。AEとEGの長さが同じであるから，Eにあるロケットの人からみると，GはAと同時刻での光の到達点となっている。さらに，ロケットの人にとって，光の到達点Gだけでなく，ロケットでのある「できごと」を表すEもAと同時刻である。また，ABCD線上で，私たちと光の到達点までの距離と私たちとロケットまでの距離との比は，$CB：CA=v：c$であったが，これと同じ比が，AEFG線上の$FE：FA=v：c$でも現われている。つまり，地球上の私たちにとって，Aと同時刻での「できごと」は，B，C，Dのように，x軸に平行なAを通る線上の点として並ぶが，ロケットの人にとって，Aと同時刻での「できごと」は，E，F，Gのように並ぶと考えるべきなのだ。

実際，図１の示すように，AEFGと平行な点線上では，私たちとロケットと光子のそれぞれの間の相対距離の比は，同じである。これからも，AEFGに平行な線上にならぶ点は，ロケットの観測者にとって，同時刻での「できごと」と言えるだろう。

４.時計の合わせ方＝「同時性」

図１の時空図を描くことで，私たちからみて同時刻の「できごと」であるA，B，C，Dは，ロケットの人からみると，同時刻の「できごと」ではなく，一方では，ロケットの人にとっての同時刻の「できごと」A，E，F，Gは，私たちにとってそうではなかったように，異なった「慣性系」ごとに時刻の決め方が異なる事が明らかになった。

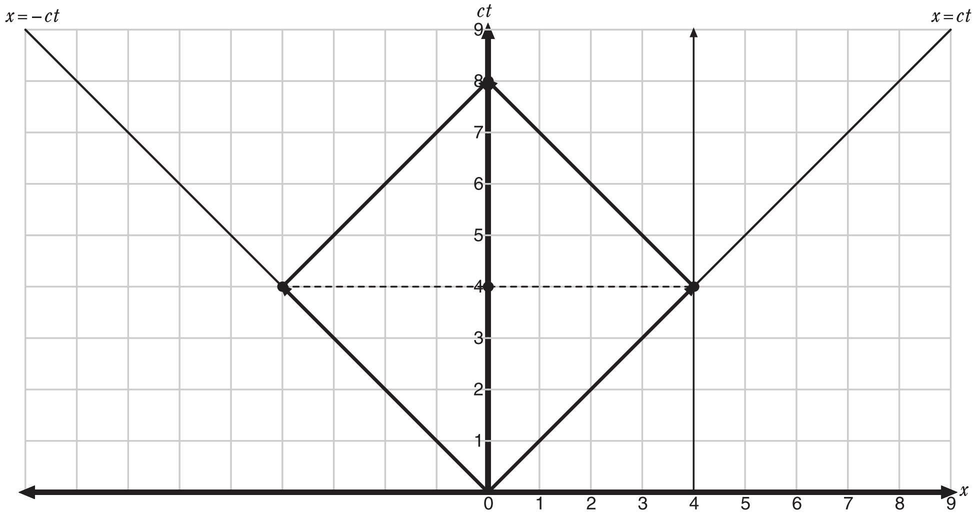

図２

一方で，空間的に“隔たった”点の連なりABCD，あるいは，AEFGが，私たち，あるいは，ロケットの人にとって，それぞれの同時刻の「できごと」であることを示すには，「光」を用いる必要があった。つまり，図１の時空図に，なにげなく描いた空間軸や水平線は，それらの上の点が同時刻であること＝「同時性」を「光」を用いて確認することで，はじめて，“私たち”にとっての同時刻の「できごと」の連なりとしての意味を持つことができたのである。さらに，ロケットの人にとっては，図１の空間軸や水平線は同時刻の「できごと」の連なりではなく，AEFGが空間的にはへだった同時刻の「できごと」の連なりであったように，時空図には，「慣性系」ごとの同時刻線が描けること，すなわち，「慣性系」ごとに，空間的に隔たった点の間での時刻合わせをすることが必要となる。この空間的にはへだった点での「同時性」を確立することが，特殊相対性理論の出発点となる。

4-1　私たちの時計合せ

アインシュタインは，空間的に隔てられた点で起きた２つの「できごと」が同時に起きたこと＝「同時性」を確立するにも，「光速不変の原理」を用いればよいことを示したのである。すでに，図１の時空図を用いた議論で，「光」を用いて，空間的に“隔たった”点の連なりABCD，あるいは，AEFGが，私たち，あるいは，ロケットの人にとって，それぞれの同時刻の「できごと」であることを示したが，基本的にこれと同じである。つまり，光が同じ距離を等速で移動するには同じ時間がかかる事実を用いる。例えば，図２のように，私たちは，$t=0$に$x=0$から光を放射させて，位置$x=4$で反射して戻って来たことを観測したとする。この場合，光は$ct=8$に$x=0$へ戻って来るが，往路，復路ともに同じ距離なので，かかる時間も同じであったはずなので，$x=4$で光がちょうど反射した時刻は，$ct=8/2=4$であったと考えることができる。$x=-4$の位置と私たちとの同時性も同じように確認できる。つまり，$x=1,2,3,4...$のように，そこまでの距離が計測されている点で光を反射させれば，私たちとは空間的に離れていても，その反射点と私たちと間での時計合わせ＝「同時性」を確立できる。

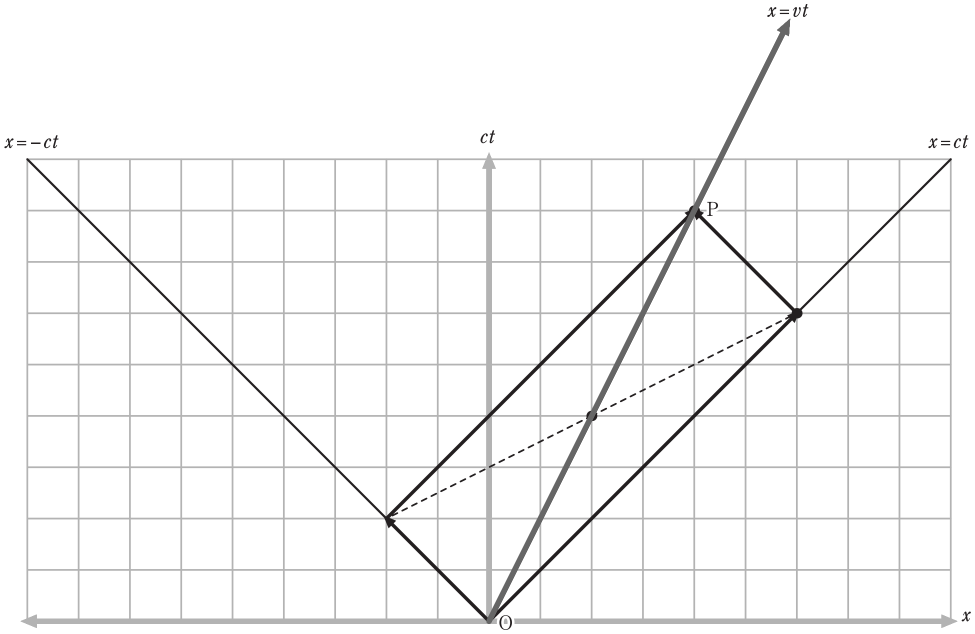

図３

4-2　ロケットの人の時計合わせ

地球上の私たちが時計を合わせる例を考えたが，ロケットの人が時計合わせをする場合はどうだろうか？やはり点O（$t=0$，$x=0$）から左右へ同時に放射された光を考えよう。ロケットの人からみて，左右に放射された光は反射されて，同じ時刻にロケットに戻って来た。この「できごと」は，図３のように，ロケットの世界線上の点Pにあたる。ロケットに光が戻って来るまでの時間は，ロケットの世界線にそった線OPの長さに対応する。したがって，光の反射点から空間的に隔たっているが，ロケットでの光が反射する時刻は，ロケットの世界線上ではOPの中点ということになる。また，同じ時刻にロケットに戻って来たので，左右のどちらの光も同じ時刻に反射したはずである。したがって，左右の反射点とOPの中点はともに，同じ時刻である。図３には，これらの同時刻の「できごと」を表す点を結ぶ破線を示しているが，これは図１のAEFGの線と一致していることがわかる。

5.慣性系の間での時刻と位置の関係＝ローレンツ変換

下のように，時刻合わせ，つまり，それぞれの「慣性系」での「同時性」の保証は，「光速不変の原理」に基づく実験的手段により実現できることを見てきた。同じ様に，それぞれの「慣性系」ごとでの位置合わせを考え直してみよう。

5-1　私たちの慣性系での時空図

当り前のことであるが，ある観測者からみて，時間が経っても同じ位置にあり続ける物体は，その観測者と同じ速度で動いていることになる。例えば，私たちから見た時空図である図１に描いてある縦線は，$t=0$ に $x=1,2,3,\ldots$にあった物体が同じ位置にあり続けたとしたそれらの世界線に対応している。また，それらは私たち自身の世界線と平行になっている。同じ様に，

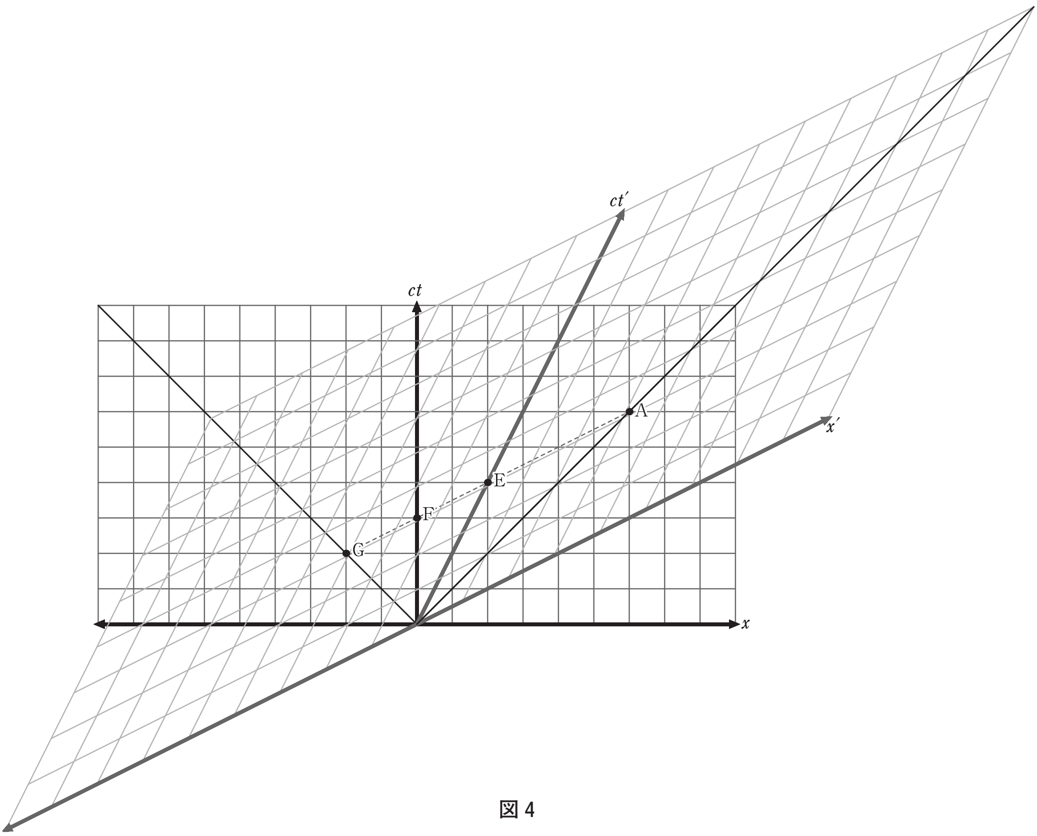

図 4

ロケットからみた位置についても考えてみよう。ロケットの人から見て，時間が経っても同じ位置にあり続ける物体は，私たちから見るとロケットと同じ速度で動いている。したがって，ロケットの人から見て，同じ位置にある物体の世界線はロケットの世界線と平行になる。図 1 では，私たちからみた「同時刻」,「同位置」を表す横線，縦線を描いてある。それらは，正方形の格子状になっている。この時空図にロケットの人からみた「同時刻」,「同位置」を表す線も描いてみると，それらは図 4 のような平行四辺形の格子となる。このように，ロケットの人からみた「同時刻」,「同位置」が平行四辺形に歪むように描かれるのは，私たち（私たちが静止した慣性系）からみたロケットの世界線に合わせて，ロケットの時間軸を描くからである。

5 - 2　ロケットの慣性系での時空図

逆に，ロケットの人が静止している慣性系からみて，私たちの世界線がどうなるかを考えてみよう。図 5 のように，ロケットの人から見た私たちの速度は $-v$ なので，私たちの世界線は $x' = -vt'$ となっている。それと私たちの時間軸を重ねてみると，図 1 と左右対称になる。結局，このようにしてみると，私たちもロケットの観測者もまったく同等であることがわかる。また，図 1 と図 4 にあるように，図 5 に，私たちにとっての「同時刻」,「同位置」の線を入れてみると図 6 のように描くことができる。図 6 のロケットの観測者からみた時間軸，空間軸は，それぞれ，ct', x' と表している。なぜ，ct， x ではなく，ct', x' と区別しておいたのは，これまでに見て来たように，私たちとロケットの観測者とでは,「同時性」が異なるように，時間や距離の計り方が異なるからである。

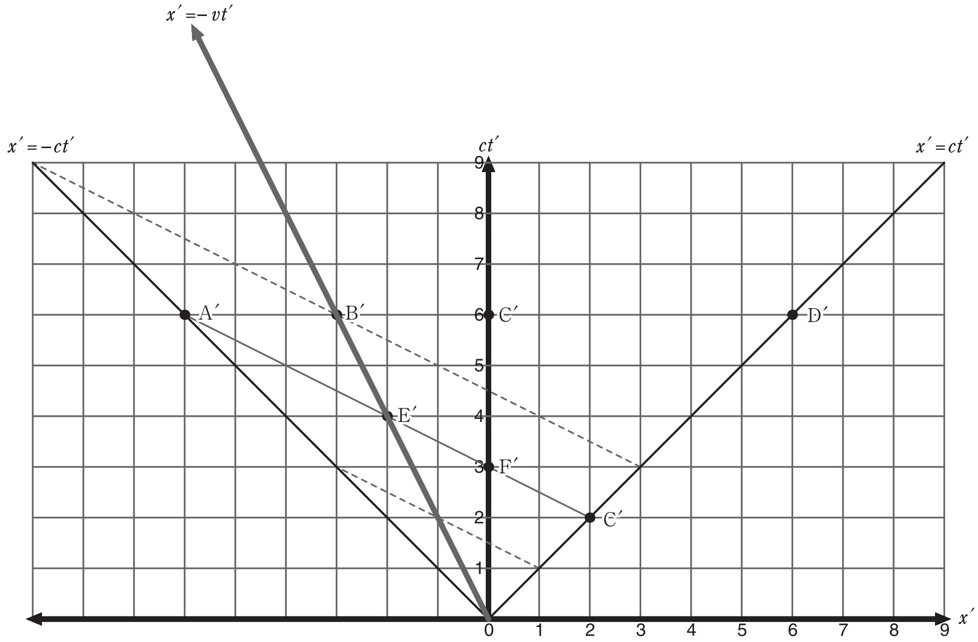

図 5

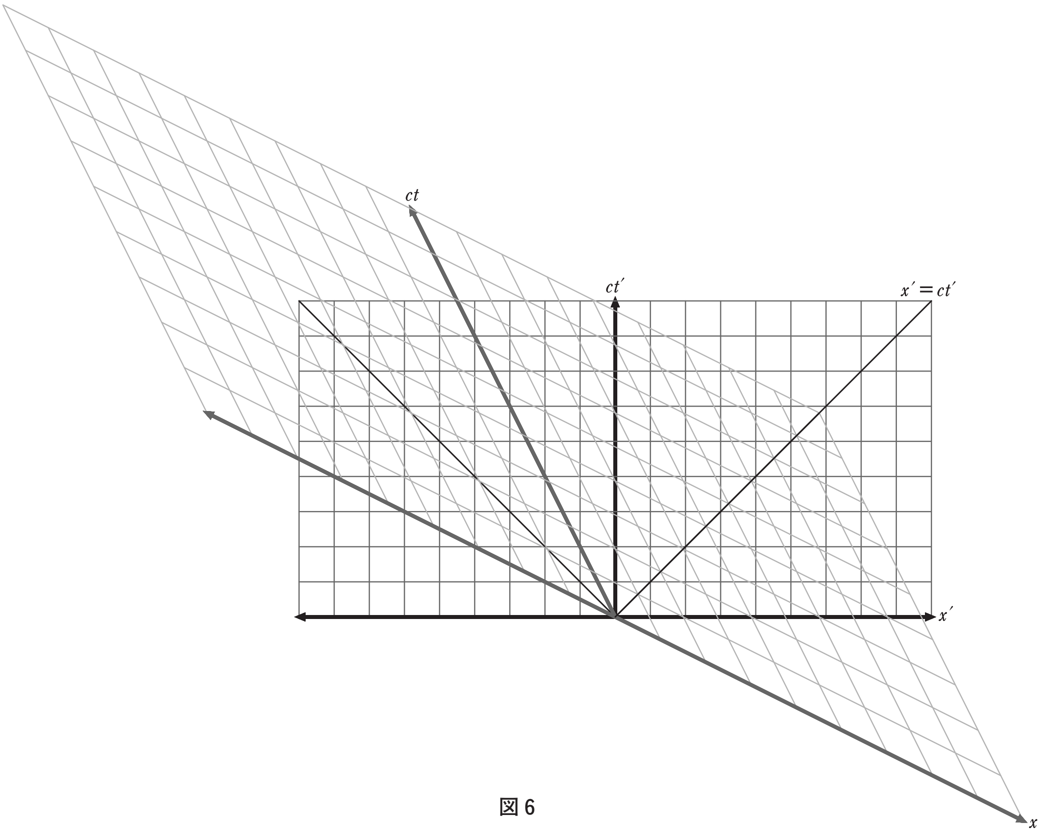

図 6

6.時空図によるローレンツ変換

以上のように，異なる速度でお互いに動いている慣性系では，観測する時間や位置は異なってくる。しかしながら，どの慣性系からみても光速不変であることから，慣性系Aからみて速度vで運動している慣性系Bにおける時空図は以下の手順で描けばよい。

1. 慣性系Aでの互いに垂直な空間軸xと時間軸ctの時空図を描く。空間軸xは「同時刻」の様々な位置の連なり，時間軸tは「同位置」の様々な時間の連なりとなっている。
2. 慣性系Aの空間軸xと時間軸ctに並行な線を単位長さの間隔で描く。
3. 慣性系Aでの時空図での光の世界線を描く。
4. 慣性系Aにおける時空図での慣性系Bの世界線を描く。
5. 慣性系Bの世界線は慣性系Bの時間軸ct'に対応する。
6. 慣性系Bでも光速不変であるから，慣性系Bの空間軸x'は光の世界線に対して，時間軸ct'と対称でなければいけない。つまり，そうなるように，慣性系Bの空間軸x'を描く。
7. 目盛の刻み幅は，$\sqrt{1+v^2/c^2}/\sqrt{1-v^2/c^2}$倍として，時間軸$ct'$，空間軸$x'$それぞれに並行線を描く。慣性系Aの格子の面積と慣性系Bの格子の面積とは等しくなっている。

7.速度の合成

ローレンツ変換によって，ある慣性系Bでの観測量を別の慣性系Aでの観測量で，また，慣性系Cでの観測量も慣性系Bでの観測量に書き直すことができる。したがって，慣性系Cでの観測量は慣性系Aでの観測量に翻訳することができる。

7-1　地球AとロケットBとロケットC

地球Aに対して$1/2c$の速度で動いているロケットBがあり，さらに，そのロケットBに対して，ロケットCが$1/2c$の速度で動いている場合を考えよう。ロケットBからみると，地球Aは$-1/2c$の速度で動いている。ロケットBの慣性系ではロケットBは静止しているので，ロケットBの慣性系の時空図では，その時間軸はロケットBの世界線と一致し，その空間軸は時間軸に垂直になる。したがって，ロケットBの慣性系の時空図は，図7のように描ける。

ある慣性系からみた物体の速度は，その慣性系からみて同時刻の空間における光の到達距離と，物体の到達距離との比から出すことができる。また，ある慣性系からみて同時刻である点は，時空図上では，その慣性系での時刻0に対応する空間軸と平行な線上にあるが，この同時刻線と光や物体の世界線との交点が，その慣性系でのある時刻での光や物体の到達点に対応する。

したがって，図7では，地球Aでのある時刻での同時刻線を薄い太線で描いているが，左に進む光，ロケットB，ロケットC，右に進む光の世界線とこの同時刻線との交点と地球 Aの世界線からの距離が，地球Aからみたそれらの速度に対応していることになる。これらの光の交点（左側），ロケットB，ロケットC，光の交点（右側）と，地球Aからの同時刻線上の距離は，10, 5 , 8 ,10となっている。したがって，ロケットCの地球Aに対する速度は，$4/5c$となることがわかる。

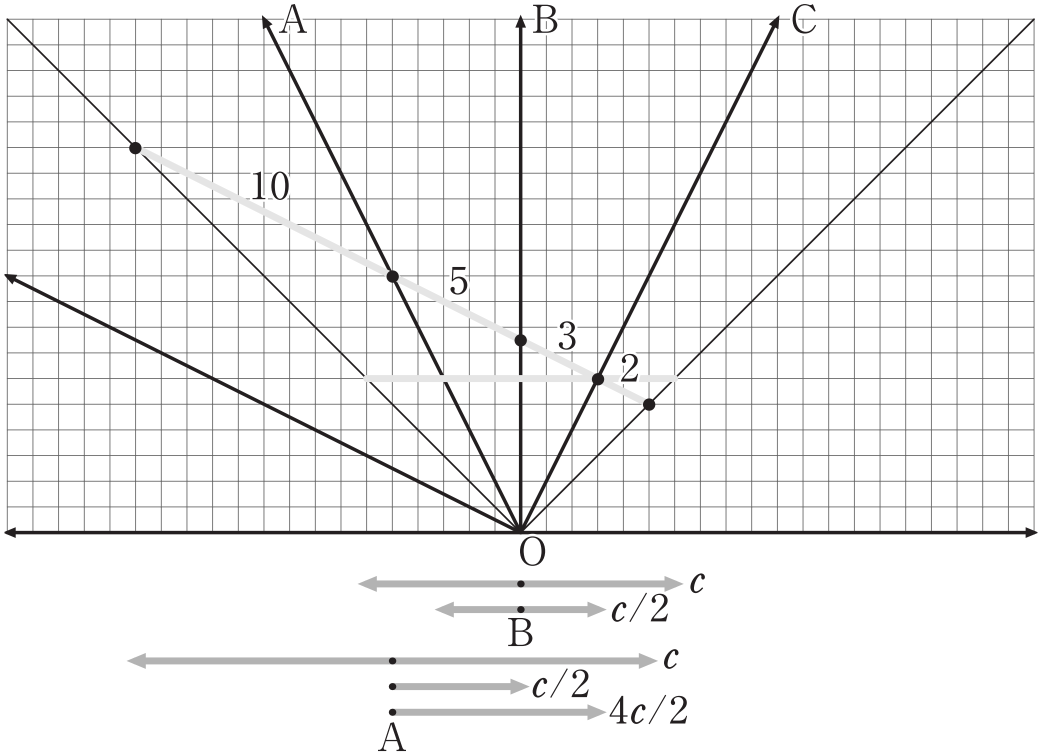

図 7

この地球Aに対して4/5cの速度で遠ざかっているロケットCに対して，さらに，1/2cの速度で遠ざかっているロケットDがあったとする。この地球Aに対するロケットDの速度も，これまでと同様に考えることができる。図８は，ロケットが静止している慣性系の時空図である。ロケットは地球Aに対して4/5cの速度で遠ざかっているので，地球Aはロケットに対して4/5cの速度で運動していることを上では導いたが，この値を用いて時空図を描いたものがこの図８である。図７での議論と同じように，地球AからみたロケットDの速度を出してみよう。図８によると，同時刻線上での地球AとロケットDとの距離は，10＋6＋9/70となり，また，地球Aと光の距離は，10＋6＋9/70＋1/14となるので，結局，時空図を用いて，地球Aに対するロケットDに対する速度が13/14cとなることがわかる。

7-1-1　光速より速く物体は運動できない

以上のように，時空図を用いることで，相対性理論に基づいた速度の合成ができる。この速度の合成によって，さらに，ロケットDより1/2cだけ速いロケットE，ロケットEより1/2cだけ速いロケットF,,,,,，というように1/2cだけ速いロケットをつぎつぎと想定しても，地球に対するそれらのロケットの速度を出す事ができる。結局，どんなに1/2cだけ速いロケットを想定しても，そのロケットの地球に対する速度は光速には近づいても，越すことはできないことがわかる。

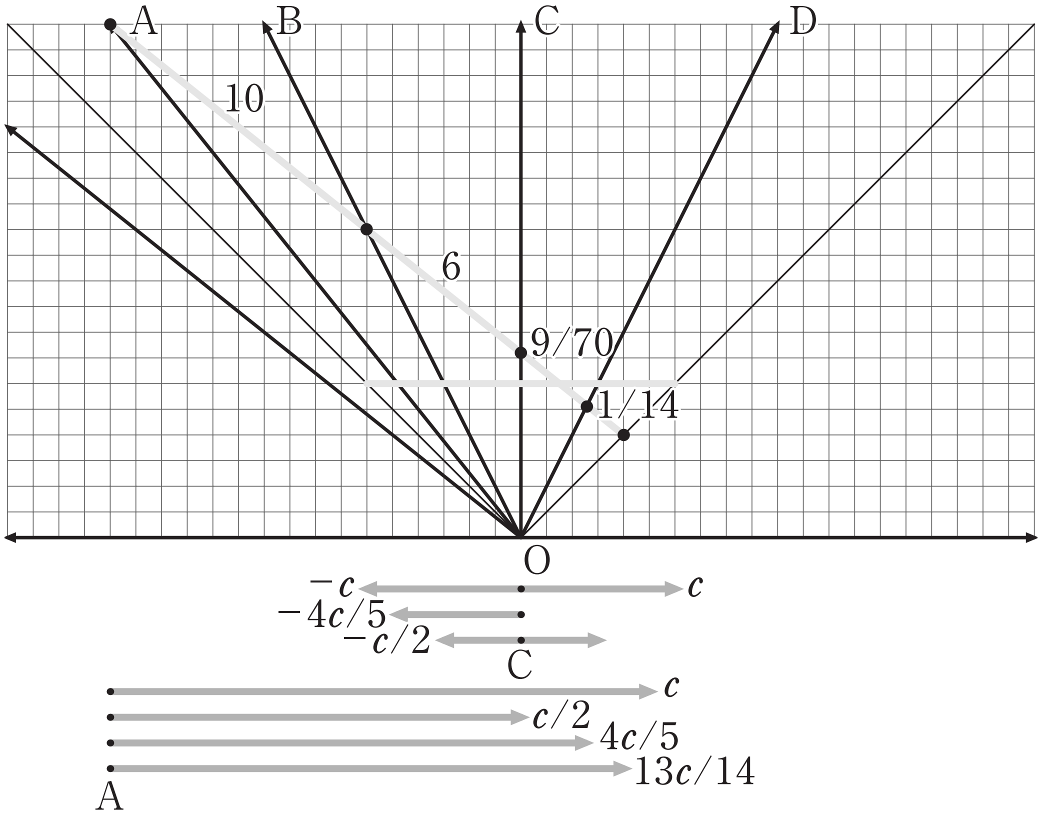

図８

８.相対性と因果律

これまで議論してきたように，ロケットの観測者からみた同時刻は，私たちからみた同時刻とは異なる。つまり，「同時性」は，観測者によらず，「相対的」に決まると言える。「光速度が観測者によらず不変であるという実験事実」＝「光速不変の原理」と「できごとは，客観的実在としてに観測者とは独立に存在する」ということを両立させるには，「同時性」が観測者によらないとする絶対時間的概念は捨てなければいけない。しかし，「同時性」の「相対性」を認めると，場合によっては，「必ず先に原因が起きて，その後に「結果」が起こるという時間順序」＝「因果律」が逆転して矛盾するようなことが起きるのではないかと心配になる。

８-１　因果律と両立する相対性

そこで，図９に示すように，「できごと」OとV,W,X,Y,Zの関係を考えよう。地球上の私たちからみると，これらの「できごと」のうち，V,W,X,YはOが起きた後に，ZはOと同時に起きた。しかし，地球に対して$c/4$の速度で運動しているロケットの観測者からみると，V,W,XはOが起きた後に起きたが，YはOと同時に，ZはOの以前に起きたことになる。OとV,W,X,Y,Zとの関係を，Oから発せられた物質が当たって，V,W,X,Y,Zが引き起こされるように，「原因」Oが起こった後に「結果」V,W,X,Y,Zが起きたと考えると，ロケットの観測者からみて，O－YとO－Zは「原因」と「結果」が同時か，あるいは，「結果」が「原因」より過去にあることにな

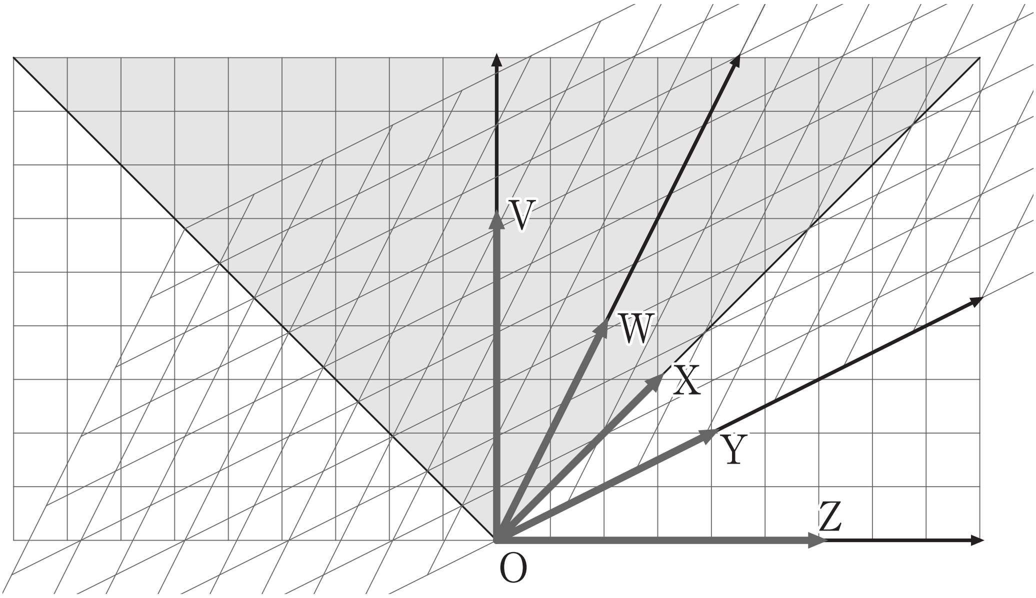

図 9

り，明らかに「因果律」を破っていることになる。このように，私たちがOからYやZに物体を飛ばすようなことができたら，ロケットからみて「因果律」を破ることになるが，OからYやZへと結ぶ世界線の傾きをみてみると，光の世界線より傾いているので，OからYやZに飛ばされた物質は光より早く進むことになる。しかし，速度の合成で議論したように，光より遅い速度の物体が，光速を越えて加速することは不可能である。したがって，O→Y，O→Zのような超光速の運動は，現実には実現することはない。一方，「原因」Oから，その影響が光速以下の運動により伝わって行き，「結果」V，W，Xに到達するO→V，O→W，O→Xのような場合は，地球上の私たちからも，ロケットの観測者からも，「原因」Oの後に「結果」V，W，Xが起きているように見える。これは，どちらの「慣性系」でも「できごと」が起きる時間順序は変わらないことを意味している。つまり，「因果律」を満たしている。このように，現実には，光速度以下の速度で「原因」からの影響が伝搬するかぎり，「因果律」が破れることはない。現実の運動による世界線はすべて，光の世界線に囲まれる時間軸を含む扇状の領域（図 9 での薄く塗りつぶされている）に収まっている。この事実は，「光速不変の原理」から，ここで取り上げた例だけではなく，どのような「慣性系」でも成り立っている。

8 - 2　光円錐

光の世界線に囲まれる時間軸を含む扇状の領域は，光円錐と呼ばれる。図 7 では空間 1 次元なので，三角にしか見えないが，空間 2 次元とすると，円錐になることがわかる。上で見て来たように，光円錐の中の「できごと」は因果律を満たし，それを「時間的」（time-like）事象と呼ばれる。光円錐の外の「できごと」は，「空間的」（space-like）事象と呼ばれる。

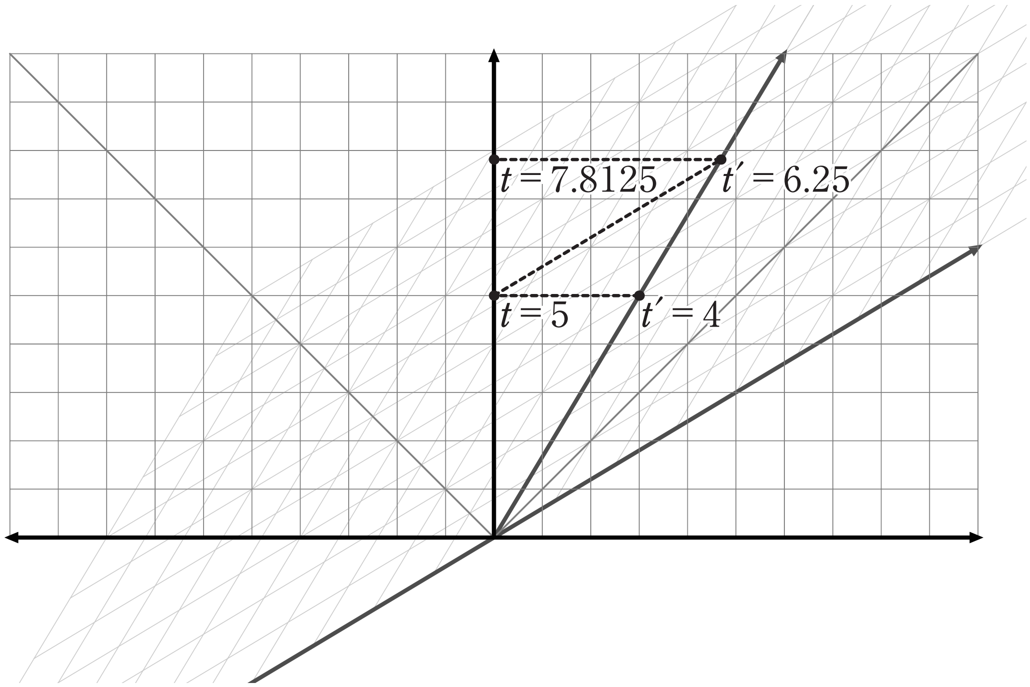

図10

9.特殊相対論的な現象

以下では，代表的な相対論的現象である，時間短縮，ローレンツ短縮，双子のパラドックス，ドップラー効果について，時空図を用いた説明を紹介したい。

9-1　時間短縮

同じ「慣性系」にあれば，光を用いることにより，離れた場所同士でも「同時性」を確立させることができた。また，まったく同じ構造である2つの時計は，まったく同じ様にその針が回りつづけるはずであるから，一度，時刻合わせすれば，同じ慣性系であるかぎり，光を用いなくても，それぞれの時計だけから時刻を確かめることができる。つまり，同じ慣性系では，「同じ」時計であれば異なった位置でもおなじ時刻を示すはずである。

しかし，2つの時計が別の慣性系にあるなら，それぞれの時計の針が「同じ時刻」を指していると合意できるのは，時計が「同位置」にきたときにしかない。つまり，異なる慣性系の時計の時刻合わせは，同じ位置でしかできない。しかし，異なる慣性系はある時刻で同じ位置にあっても，それ以後は同じ位置になることはない。異なる慣性系では，ある時刻に時計合わせをしても，それ以後の「同時性」は保証できないので，「同じ」時計であっても，それぞれの示す時刻が一致する保証はない。

地球にいる私たちと，地球に対して速度$0.6c$で動いているロケットに乗っている人とそれぞれの時計がどうなるかを考えてみよう。$t = t' = 0$のとき時刻合わせをした時計が，それ以降示す時刻を比べてみる。

図10，11，12は，地球が静止してみえる時空図を見てみると，私たちの時間で$ct = 5$である

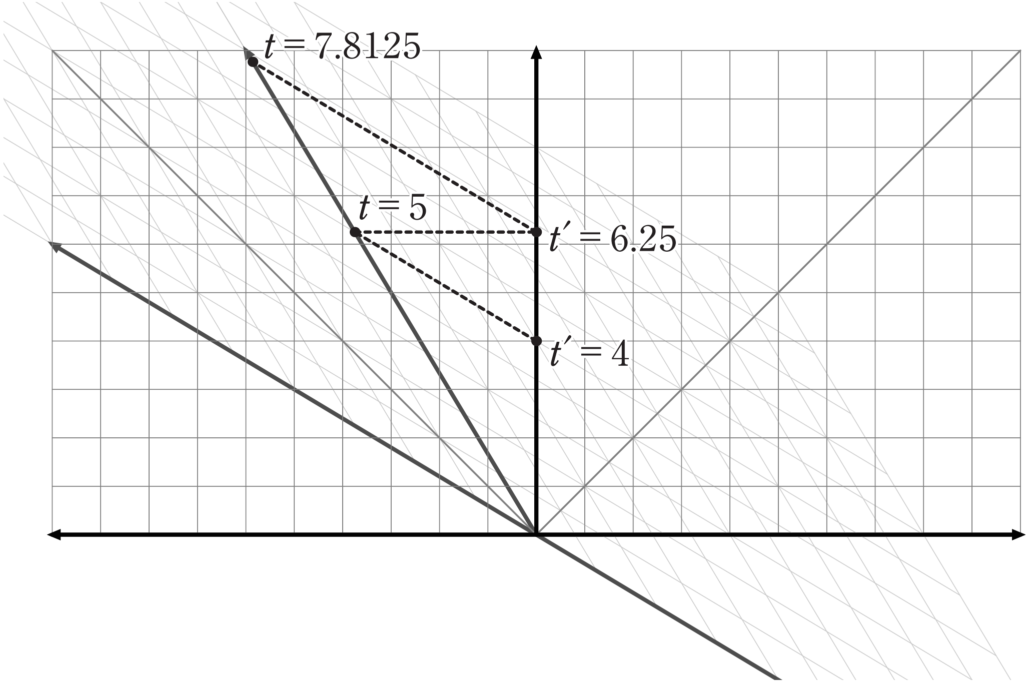

図11

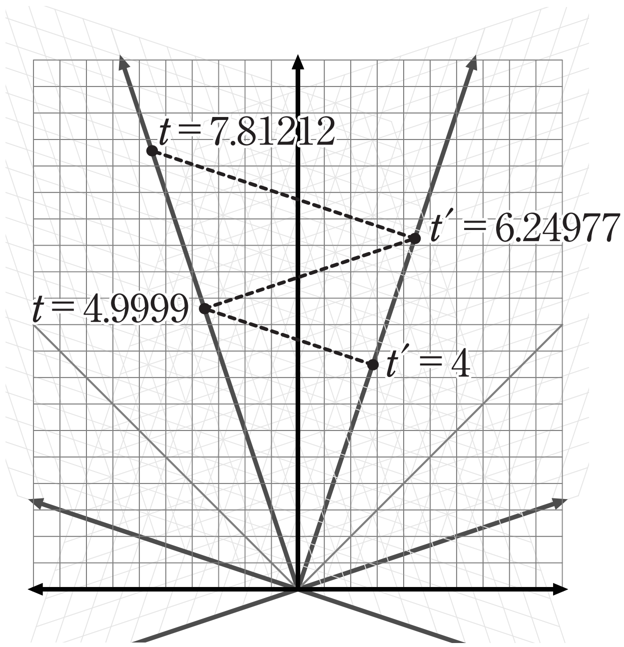

図12

が，ロケットの時間では ct'=4しか経っていない。ところが，ロケットの時間で ct'=6.25のとき，私たちの時間では ct =5しか経っていない。さらに，私たちの時間で ct =7.8125経っても，ロケットの時間では ct'=6.25しか経っていない。図をみると，私たちとロケットの立場では，みかけが異なるようだが，上でみたように，いずれの立場でみても，動いている相手の時間の進み方は遅れていることがわかる。

9-2　ローレンツ短縮

ある物体の長さとは，「同時刻における」その物体の両端の位置間の距離である。これまでにみてきたように，「同時性」は慣性系ごとに異なることになるので，慣性系が異なると，「同時刻における」物体の両端の時空位置が異なることになる。地球にいる私たちに対して，速度が0.5c で動いているロケットに乗っている人からみて，4であった物体の長さは3.464となる。図13の太線で描いているように，ロケットでみた「同時刻における」物体の両端の位置の差＝長さは4である。しかし，私たちからみた「同時刻における」物体の長さは，点線で示された部分に対応して3.464であり，確かに4よりも小さいことがわかる。したがって，動いている物体の長さは小さく思える。この効果をローレンツ短縮という。

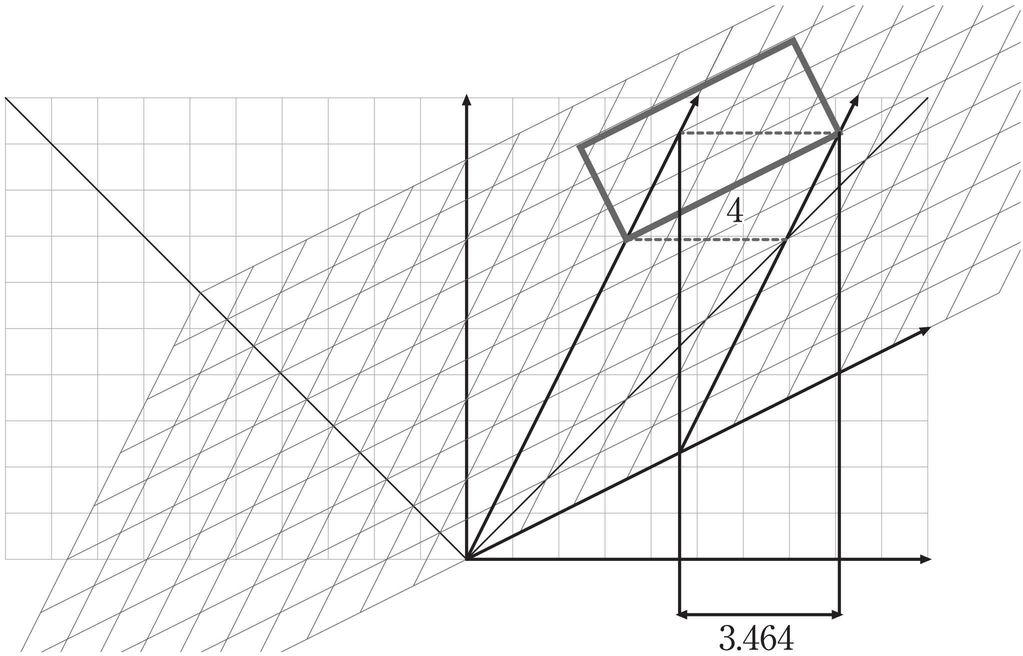

図13

9-3　双子のパラドックス

上でみたように，運動している時計は常に遅れているように観測されるという時間短縮効果がある。これと関係して，しばしば，相対性理論の矛盾として誤解されて取り扱われる「双子のパラドックス」という問題がある。これは，双子の兄弟のうち，兄が光速に近い速度のロケットに乗って地球から宇宙旅行に旅立ち，弟は地球に留まっているという設定で，それぞれの経過時間の関係を考えるという問題である。

地球上の弟からみると，ロケットは運動しているので，時間短縮効果から，ロケットのなかの時間は地球上よりゆっくり進むはずである。したがって，弟は，兄が地球にふたたびもどってきて再会すると，自分は兄より老けてしまっているだろうと考える。

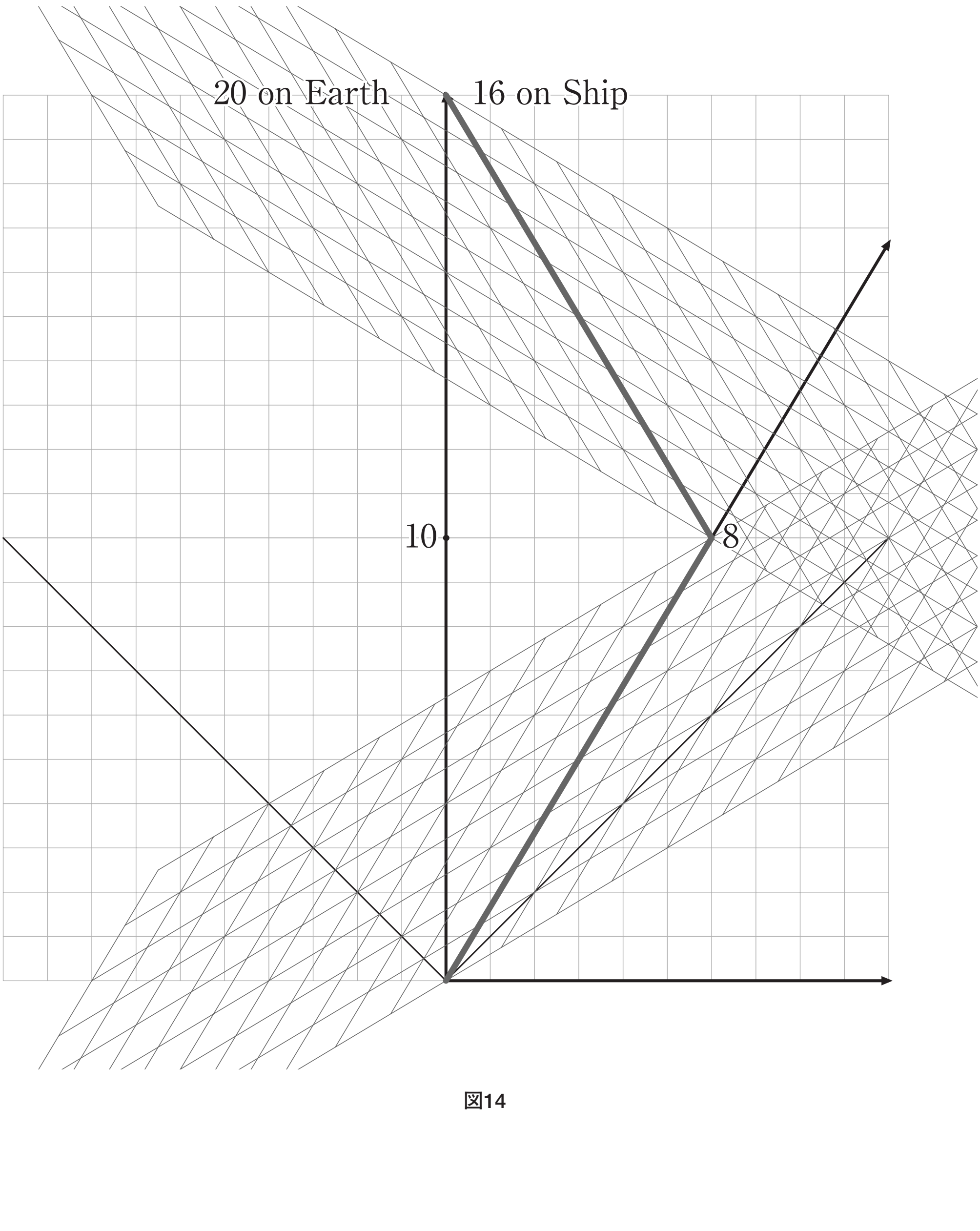

図14

一方で，ロケットに乗っている兄からみると，動いているようにみえるのは，地球のほうである。したがって，兄からみると地球上の時間のほうがロケットのなかよりゆっくり進むはずである。したがって，兄は，地球に戻って弟に再会すると，自分は弟より老けてしまっているだろうと考える。

上のように考えると，再会するまでのそれぞれの経過時間について，兄と弟が予測した結果がお互いに異なることになる。このように，論理的矛盾＝パラドックスがあらわれるようにみえるので，この問題は「双子のパラドックス」とよばれる。矛盾のようにみえるので，相対性理論には原理的な問題があると主張されることがあるが，上の兄か弟のいずれかの予測が間違っているならば，パラドックスでもなんでもなく，相対性理論にはなにも問題はない。

実際，上の議論では，兄も弟も同等な慣性系として扱われているが，これは誤りである。兄が地球に戻ってくるので，どこかでかならずロケットの速度が切り替わる折り返し点があることに注意しなければいけない。つまり，兄の運動状態はずっと同じでなく，その慣性系はこの折り返し点の前後で異なるものに切り替わっている。

図14に光速の0.6倍の速さのロケットで往復する場合の時空図を描いてある。地球上での経過時間10のとき，ロケットは折り返し点に到達する。それまでは，地球から遠ざかる方向の速度でロケットは運動していたが，それ以後は逆の速度で運動することになる。つまり，兄のほうは「慣性系」の切り替わりが起きている。ロケットのなかでの経過時間８のときに，この折り返し点に到達する。図14の場合では，速度の切り替わりが一瞬で，帰路でも往路とおなじ速さである。したがって，ロケットでの時間16で，兄は地球に戻ってくることになる。一方，この地球への帰還までの時間は，地球上での時間では20となる。

このように，兄のほうが時間経過が遅い，つまり，弟のほうが，兄より老けてしまうことになる。

9-4　ドップラー効果

光の「ドップラー効果」も，時空図で理解できるので，それを紹介したい。救急車のサイレンが近付いているときには，音の振動数は高くなり，遠ざかるときには音の振動数は低くなる現象が，「ドップラー効果」の実例として，よく紹介される。しかし，この音の「ドップラー効果」は，音源または観測者の運動により，音の伝達速度が変化することにより引き起こされる。一方，これまで見て来たように，光は光源または観測者がどのような運動をしても，その速度は変わらないので，光の「ドップラー効果」では，音の場合のように伝達速度の変化により引き起こされるのではない。

図15は，お互い遠ざかる「慣性系」を考え，左へ遠ざかる「慣性系」の時間軸がその世界線となる光源から，ある振動数の光を放射させた状況の時空図である。図では，１振動周期ごとの光の世界線を３つ分だけ，描いてある。左へ遠ざかる光源とともに運動している観測者にとって，点Aから伸びる短い破線上の点は，Aと同時刻である。つまり，この短い破線と光の振動周期ごとの世界線との交点の間隔は，光源から放射された光の波長に対応している。一方で，右へ遠ざかる「慣性系」の観測者にとって，点Bから伸びる長い破線上の点は，Bと同時刻である。したがって，右へ遠ざかる観測者が観測する光の波長は，この長い破線と光の世界線との交点の間隔に相当するが，それは光源から放射されたときの光の波長よりも，長くなっていることがわかる。

さらに，その光のパルスが左へ遠ざかる「慣性系」の時間軸がその世界線となる鏡に反射され，ふたたび，光源側に戻ってくる状況を考えても，さらに，波長が長くなることは明らかだろう。

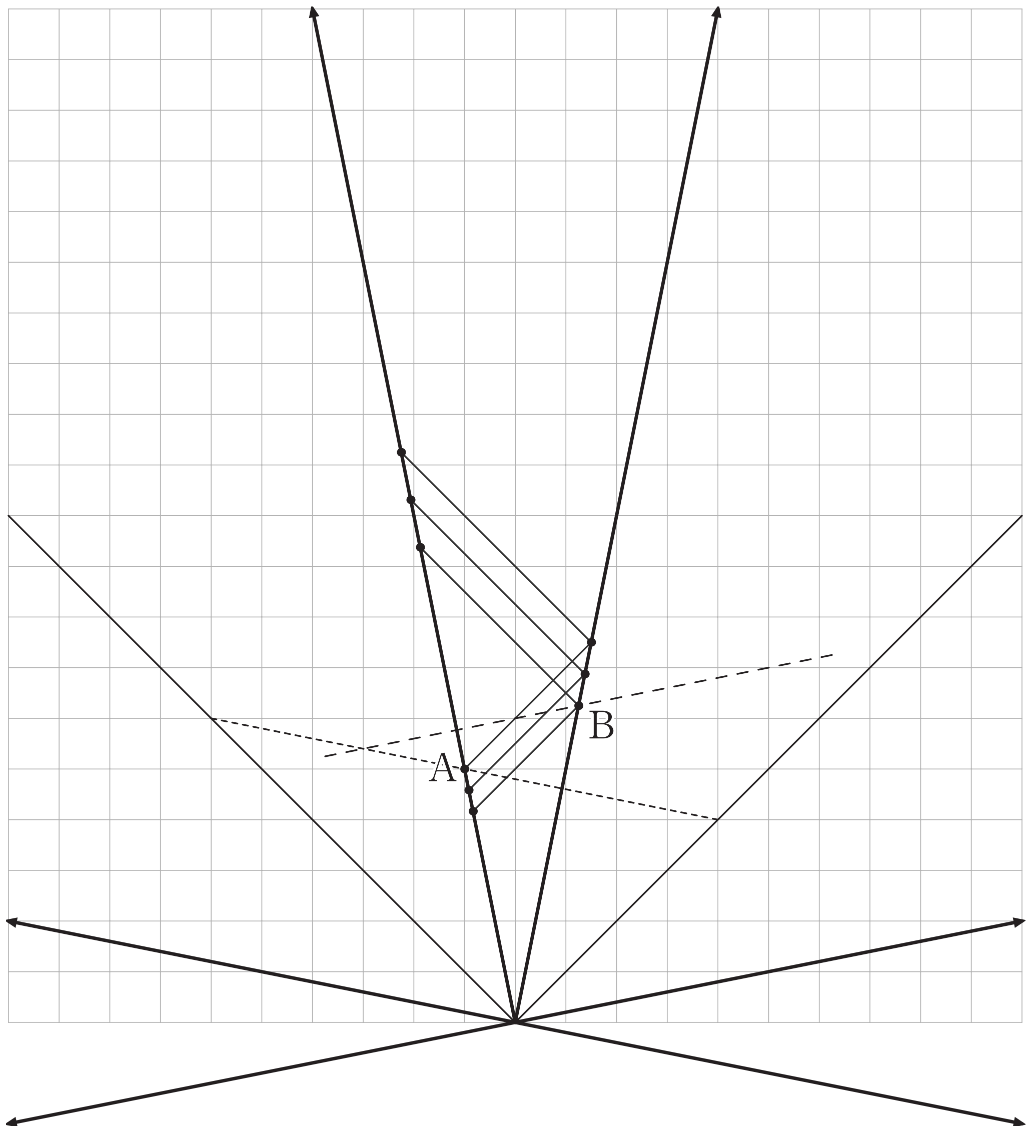

図15

　これから，遠ざかる光源からの光の波長は長くなる，あるいは，光の振動数が小さくなるという，光の「ドップラー効果」も時空図を描くことで理解できる。

参考文献

The meaning of relativity, Albert Einstein, Princeton
The principle of relativity, Albert Einstein, Dover
数式いらず！見える相対性理論，竹内　建，岩波書店
時空の力学, 細谷 暁夫, 岩波書店