

# Dehn の補題の初等的証明

石川 洋一郎

## 1. 序文

この論文において、Dehn の補題を初等的な方法で証明する。多様体及び写像は滑らかな、即ち、 $C^\infty$  カテゴリーとし、多様体の境界は存在してもしなくてもよいものとする。 $M^3$  を 3 次元多様体として

$$f : D^2 \longrightarrow M^3$$

を滑らかな写像であり、 $D^2$  は 2 次元円板で、 $f|_{\partial D^2} : \partial D^2 \longrightarrow M^3$  を埋め込みとする。更に  $f(D^2)$  に於いて、 $f(\partial D^2)$  は特異点を持たないと仮定すれば、 $M^3$  に埋め込まれた 2 次元円板  $D_0^2$  で、 $\partial D_0^2 = f(\partial D^2)$  を満たすものが存在する。これが所謂、Dehn の補題である。この補題は、1910年に M. Dehn により発表された論文 [1] の p. 147 に証明されている。しかし、1928年、H. Kneser ([4], p. 260) によりこの M. Dehn の証明にはかなりのギャップがあることが示された。この Dehn の補題は、1957年に C. D. Papakyriakopoulos [6] により証明された。この証明の方法は 3 次元多様体に於ける古来の伝統的な M. Dehn の方法を更に推し進めて、2-Sheet Covering の理論を用いて証明された。この論文では 2-Sheet Covering の理論を用いなくて、結び目、横断定理と Surgery を駆使して証明する。

さて  $K$  を向き付け可能な 3 次元多様体  $M^3$  に於ける非自明結び目とする。このとき、滑らかな写像  $f : D^2 \longrightarrow M^3$  が次の条件を満たすとすると：

- (1)  $f|_{\partial D^2} \longrightarrow M^3$  は Embedding である、
- (2)  $f$  の特異点は高々 Double Curves だけである、
- (3)  $f(D^2)$  に於ける特異点集合の連結成分は有限個の連結弧 (Arc) から成り、それらは次の 2 種類、即ち、Clasp Arc と Ribbon Arc から成る：Clasp Arc の逆像  $f^{-1}(l)$  は 2 つの  $\text{Arcs } L_1, L_2$  から成り何れも、2 点  $\partial L_1$  の 1 つは  $\partial D^2$  上に存在し、他の点は  $\text{Int } D^2$  内に存在し、更に、 $\text{Int } L_1 \subset \text{Int } D^2$  が成り立つ。Ribbon Arc の逆像  $f^{-1}(l)$  は 2 つの  $\text{Arcs } L_1, L_2$  から成り、1 つの連結成分  $L_1$  の 2 つの境界点  $\partial L_1$  は  $\partial D^2$  上に存在して  $\text{Int } L_1 \subset \text{Int } D^2$  が成り立ち、他方の  $\text{Arc } L_2$  は  $\text{Int } D^2$  内に含まれる： $L_2 \subset \text{Int } D^2$ 。このとき、 $f(D^2)$  を  $K$  の 2 次元特異円板という。

**定理 5.**  $M^3$  を向き付け可能な 3 次元多様体でその境界は存在してもしなくてもよい。 $K$  を  $M^3$  に含まれる非自明な結び目とする。滑らかな写像  $f : D^2 \longrightarrow M^3$  が存在して、 $f|_{\partial D^2}$  は Embedding で  $f(\partial D^2) = K$  を満たすとすると。このとき、 $f(D^2)$  の任意の開近傍  $U$  に含まれる  $K$  の 2 次元特異円板が存在する。

**定理 15.**  $M^3$  を向き付け可能な 3 次元多様体でその境界は存在してもしなくてもよい。 $M^3$  に含まれる非自明な結び目  $K$  に対して、 $K$  の 2 次元特異円板の存在を仮定する。 $H^3$  は  $K$  を核としてもつ  $M^3$  に埋め込まれた Solid Torus とする。今  $K$  の任意の 2 次元特異円板を  $\Delta^2(K)$  とする。 $\partial H^3$  と  $\Delta^2(K)$  とは  $M^3$  内で横断的交差をもつようにする。このとき、 $\Delta^2(K) \cap \partial H^3$  の中に

は  $\partial H^3$  の Meridian Circle が少なくとも 1 つ存在する。

このとき定理5を用いて Dehn の補題(定理14)と定理15は同値であることを証明する。次に定理15を証明する、即ち、Dehn の補題を 2-Sheet Covering の理論を用いなくて証明する。

## 2. 準備

ここでは Dehn の補題の初等的証明のために幾つかの定理や定義等を引用する。 $M^3$  を 3次元多様体,  $f, g : S^1 \longrightarrow M^3$  を Immersion で,  $f$  と  $g$  は  $M^3$  で homotopic とする。このとき,  $f$  と  $g$  の間の Homotopy  $f_t : S^1 \longrightarrow M^3$  で, 各  $t$  に対して,

$$f_t : S^1 \longrightarrow M^3$$

が Immersion であるとき,  $f_t$  を正則ホモトピー (Regular Homotopy) という。

さて,  $M^n, W^{2n}$  をそれぞれ  $n, 2n$  次元多様体とする。

$$f : M^n \longrightarrow W^{2n}$$

を  $C^\infty$ -写像とする。このとき, 任意の点  $q \in f(M^n)$  に対してその逆像  $f^{-1}(q)$  はせいぜい 2 点から成り,  $f^{-1}(q) = \{p_1, p_2\}$  ( $p_1 \neq p_2$ ) とするとき,

$$f_* (T_{p_1} M^n \oplus f_* (T_{p_2} M^n)) = T_q W^{2n}$$

が成り立つとき,  $f$  を完全はめ込み (Complete Immersion) という。

$X, Y$  を距離空間とし,  $\delta : X \longrightarrow (0, \infty)$  を正值連続実数値関数,  $d$  を  $Y$  の距離とする。このとき, 連続関数

$$f, g : X \longrightarrow Y$$

に対して

$$d(f(x), g(x)) < \delta(x) \quad (\forall x \in X)$$

が成り立つとき,  $f$  を  $g$  の  $\delta$ -近似という。

さて, [3] から引用される完全正則 (Completely Regular) Homotopy の概念を引用する。このとき次の定理が得られる:

**定理 1 [3].**  $M^3$  を 3次元多様体,  $f, g : I \longrightarrow M^3$  を  $f(i) = g(i)$  ( $i=0,1$ ) を満たす Immersion とする。

$$H : I \times R \longrightarrow M^3 \times R$$

を  $f$  と  $g$  の Homotopy とする。このとき, 次の条件を満たす  $f$  と  $g$  の Homotopy

$$F : I \times R \longrightarrow M^3 \times R$$

が存在する:

- (1)  $F$  は  $t$  を保存する:  $F(s, t) = (f_t(s), t)$ ,
- (2)  $F$  は  $H$  の  $\delta$ -近似である,
- (3)  $f = f_t$  ( $t \leq 0$ ),  $g = f_t$  ( $t \geq 1$ ),
- (4)  $F : I \times R \longrightarrow M^3 \times R$  は Complete Immersion である。

さて、定理1に於ける Complete Immersion  $F : I \times R \longrightarrow M^3 \times R$  に於いて

$$F(s, t) = (f_t(s), t)$$

とおく。このとき、 $(q_0, t_0) \in M^3 \times R$  に対して

$$F^{-1}(q_0, t_0) = \{(s_1, t_0), (s_2, t_0)\} \quad (s_1 \neq s_2)$$

が成り立つとする。このとき点  $(q, t)$  の座標系を  $(x_1, x_2, x_3, t)$  とするとき、仮定から点  $(q_0, t_0)$  に於ける  $F$  の4個の接ベクトル

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x_1(s_1, t_0)}{\partial s} & \frac{\partial x_2(s_1, t_0)}{\partial s} & \frac{\partial x_3(s_1, t_0)}{\partial s} & \frac{\partial t_0}{\partial s} \\ \frac{\partial x_1(s_1, t_0)}{\partial t} & \frac{\partial x_2(s_1, t_0)}{\partial t} & \frac{\partial x_3(s_1, t_0)}{\partial t} & \frac{\partial t_0}{\partial t} \\ \frac{\partial x_1(s_2, t_0)}{\partial s} & \frac{\partial x_2(s_2, t_0)}{\partial s} & \frac{\partial x_3(s_2, t_0)}{\partial s} & \frac{\partial s_0}{\partial s} \\ \frac{\partial x_1(s_2, t_0)}{\partial t} & \frac{\partial x_2(s_2, t_0)}{\partial t} & \frac{\partial x_3(s_2, t_0)}{\partial t} & \frac{\partial t_0}{\partial t} \end{bmatrix}$$

は1次独立である。従って次の行列の階数は4である：

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x_1(s_1, t_0)}{\partial s} & \frac{\partial x_2(s_1, t_0)}{\partial s} & \frac{\partial x_3(s_1, t_0)}{\partial s} & 0 \\ \frac{\partial x_1(s_1, t_0)}{\partial t} & \frac{\partial x_2(s_1, t_0)}{\partial t} & \frac{\partial x_3(s_1, t_0)}{\partial t} & 1 \\ \frac{\partial x_1(s_2, t_0)}{\partial s} & \frac{\partial x_2(s_2, t_0)}{\partial s} & \frac{\partial x_3(s_2, t_0)}{\partial s} & 0 \\ \frac{\partial x_1(s_2, t_0)}{\partial t} & \frac{\partial x_2(s_2, t_0)}{\partial t} & \frac{\partial x_3(s_2, t_0)}{\partial t} & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial x_3(s_1, t_0)}{\partial s} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial x_3(s_1, t_0)}{\partial t} & 1 \\ \frac{\partial x_1(s_2, t_0)}{\partial s} & \frac{\partial x_2(s_2, t_0)}{\partial s} & \frac{\partial x_3(s_2, t_0)}{\partial s} & 0 \\ \frac{\partial x_1(s_2, t_0)}{\partial t} & \frac{\partial x_2(s_2, t_0)}{\partial t} & \frac{\partial x_3(s_2, t_0)}{\partial t} & 1 \end{bmatrix}$$

但し、 $(x_1(s_1, t_0), x_2(s_1, t_0), x_3(s_1, t_0), t_0) = (0, 0, x_3(s_1, t_0), t_0)$ ,

$$\frac{\partial x_3(s_1, t_0)}{\partial s} \neq 0$$

が満たされるので,  $(x_1, x_2, x_3)$ -空間に於いて

$$(0, 0, x_3(s, t))$$

は点  $(s_1, t_0)$  の適当な近傍で  $x_3$ -軸上を動き

$$(x_1(s, t), x_2(s_2, t), x_3(s_2, t))$$

については適当な座標変換をして,  $(s_2, t_0)$  の適当な近傍に於いて

$$x_3(s, t) \equiv 0$$

と仮定される。今後横断的交差点に於いては常に上の条件が成り立つものとする。

定理 1 に於ける Complete Immersion

$$F : I \times R \longrightarrow M^3 \times R$$

に於いて,  $F(s, t) = (f_t(s), t)$  とおけば,  $f_t(I)$  が交点 (Intersection Point) を持つ  $t$  は有限個でそれらを  $\{t_i; i = 1, \dots, m\}$  とするとき, 次の不等式が成立するものとする:

$$0 < t_1 < \dots < t_m < 1$$

このとき, 各  $t_i$  に対して  $f_t(I)$  は唯一つの Intersection Point を持つと仮定する。

**定義 2.** 上の条件を満たす写像  $f_t : I \longrightarrow M^3$  を  $f = f_t (t \leq 0)$  と  $g = f_t (t \geq 1)$  との間の Completely Regular Homotopy という (詳しくは [3] を参照)。

さて, 上の議論を纏めて次の定理が得られる:

**定理 3.**  $N^3$  を境界  $\partial N^3$  が 2 次元球面である向き付け可能な 3 次元多様体とする。このとき  $H : I \times R \longrightarrow N^3 \times R$  を次の条件を満たす  $C^\infty$  写像とする:

$$H(s, t) = (h_t(s), t)$$

$$H(i, t) = (p_i, t) \in \partial N^3 \times R (\forall t \in R, i = 0, 1, p_0 \neq p_1)$$

$$H(s, t) \subset \text{Int} N^3 \times R (\forall s \in (0, 1), \forall t \in R).$$

このとき次の条件を満たす Complete Immersion

$$F : I \times R \longrightarrow N^3 \times R$$

が存在する:

- (1)  $F$  は  $H$  の  $\delta$ -近似である, 従って,  $F$  と  $H$  は homotopic である,
- (2)  $F(s, t) = (f_t(s), t)$  とおくと,  $f_t : I \longrightarrow N^3$  は Completely Regular Homotopy である.

**定義 4.**  $K$  を向き付け可能な 3 次元多様体  $M^3$  に於ける非自明結び目とする。このとき, 滑らかな写像

$$f : D^2 \longrightarrow M^3$$

が次の条件を満たすとする:

- (1)  $f|_{\partial D^2} : \partial D^2 \longrightarrow M^3$  は Embedding である,
- (2)  $f$  の特異点は高々 Double Curves だけである,
- (3)  $f(D^2)$  に於ける特異点集合の連結成分は有限個の Arcs から成り, それらは次の 2 種類, 即ち, Clasp Arcs と Ribbon Arcs から成る: Clasp Arc  $l$  の逆像  $f^{-1}(l)$  は 2 つの Arcs  $L_1, L_2$  から成り何れも 2 点  $\partial L_i$  の 1 つは  $\partial D^2$  上に存在し, 他の点は  $\text{Int} D^2$  内に存在する, 更に

$$\text{Int} L_i \subset \text{Int} D^2$$

が成り立つ。Ribbon Arc  $l$  の逆像  $f^{-1}(l)$  は 2 つの  $\text{Arcs}L_1, L_2$  から成り、1 つの連結成分  $L_1$  の 2 つの境界点  $\partial L_1$  は  $\partial D^2$  上に存在して

$$\text{Int}L_1 \subset \text{Int}D^2$$

が成り立ち、他方の  $\text{Arc}L_2$  は  $\text{Int}D^2$  内に含まれる： $L_2 \subset \text{Int}D^2$ 。このとき

$$f(D^2) = \Delta^2(K)$$

と書き、 $K$  の 2 次元特異円板 (Singular 2-Disk) という。

**定理 5 [3].**  $M^3$  を向き付け可能な 3 次元多様体でその境界は存在してもしなくてもよい。 $K$  を  $M^3$  に含まれる非自明な結び目とする。更に滑らかな写像  $h : D^2 \longrightarrow M^3$  が存在して、 $h \mid \partial D^2 : \partial D^2 \longrightarrow M^3$  は埋め込みで  $h(\partial D^2) = K$  を満たすとする。このとき、 $h(D^2)$  の任意の開近傍  $U$  に含まれる  $K$  の 2 次元特異円板が存在する。

**証明.** 定理 3 を用いるために、 $K$  を次のように適当な 2 つの弧に分ける：

$$K = K_1 \cup K_2, \quad K_1 \cap K_2 = \{2 \text{ 点}\}.$$

ここで、 $K_2$  は十分に短い弧である。必要なら適当な Isotopy を用いることにより  $K_2$  の或る近傍  $V$  には  $h$  の特異点は存在しないようにする。更に  $K_2$  を含む 3 次元球体  $D^3 \subset V$  を次の条件を満たすように選ぶ、即ち、適当に  $D^3$  に座標系を選び  $R^3$  の単位球体と見做しておく。このとき  $K_2$  は  $D^3$  の  $z$ -軸である。このようにして

$$N^3 = M^3 - \text{Int}D^3$$

とおく。更に弧  $T_2 \subset V$  を  $N^3$  の中に次のように選ぶ、即ち、 $M^3$  に於いて、 $\partial T_2 = \partial K_2$  を満たし、 $T_2$  と  $K_2$  はその境界点を固定する Isotopy で重ね合わせられるように  $T_2$  を選ぶ、即ち、 $M^3$  内に於いて、 $T_2 \cup K_2$  が  $M^3$  に含まれる 2 次元円板の境界と成るように  $T_2$  を選び、更に  $T_2$  を  $\partial D^3$  に十分近くにとる。このとき明らかに、 $K_1$  と  $T_2$  は  $N^3$  に於いてそれらの境界点を止めてお互いに homotopic である。更に  $T_1 = K_1$ ,  $T = T_1 \cup T_2$  とおく。このとき、 $h : D^2 \longrightarrow M^3$  を用いて、 $M^3$  に於ける  $T_1$  と  $T_2$  の間の Homotopy を

$$f_t : I \longrightarrow M^3 (t \in I)$$

で次の条件を満たすものが存在する：

$$f_0(I) = T_1, \quad f_1(I) = T_2, \quad f_t(0) = f_t(1) = f_0(0) = f_0(1)$$

更に、 $f_t(I)$  と  $T_2$  は  $0 \leq \forall t < 1$  に対してそれらの境界点を除けば如何なる交点を持たないようにできる。従って十分 1 に近い値  $t_0$  を選べば

$$f_t(I) \subset [0, \tau]$$

に於いて、 $t_0 \leq \forall \tau \leq 1$  に対しては、 $f_t(I)$  自身は如何なる交点も持たないことが分かる。従って  $N^3$  に対して

$$f_t(I) \subset N^3$$

を満たす  $\tau \in (t_0, 1)$  が存在するように、 $D^3$  を選ぶことにする。ここで改めて、 $[0, \tau]$  を区間  $[0, 1] = I$  とおく。更にこのとき

$$\begin{aligned} & \{f_t(I) ; t \in I\} \subset N^3 \\ & \{f_t(I) ; t \in I \cap N^3 = f_1(I)\} \subset \partial N^3 \end{aligned}$$

と仮定される。

さて非自明な結び目  $T$  の 2 次元特異円板を求めることは、非自明な結び目  $K$  の 2 次元特異円板を求めることと同値である。即ち、 $M^3$  と  $K$  の代わりに  $N^3$  と  $T$  を用いることにする。

ここで上の議論から  $N^3 = M^3 - \text{Int}D^3$  に於ける境界を  $\partial N^3$  上にもつ結び目の定義をする：

**定義 6.**  $M^3$  を向き付け可能な 3 次元多様体,  $D^3$  を  $M^3$  に含まれる 3 次元球体とする。 $N^3 = M^3 - \text{Int}D^3$  とおく。  $K$  を  $M^3$  に於ける任意の結び目とする。  $K$  に適当な Isotopy を用いて  $N^3 \cap K = K_1$  が  $N^3$  に固有 (proper) に埋め込まれた 2 つの境界点を持つ弧で,  $D^3 \cap K = K_2$  も  $D^3$  に proper に埋め込まれた 2 つの境界点を持つ弧で  $K_2$  は  $D^3$  に於いて  $z$ -軸に平行なものとする。このとき,  $K_1$  を  $N^3$  に於ける境界を  $\partial N^3$  に持つ結び目という, 或いは単に境界を持つ結び目という。このとき,  $K$  が  $M^3$  に於いて自明なとき,  $K_1$  を  $N^3$  に於いて自明であるという, 又  $K$  が  $N^3$  に於いて非自明なとき,  $K_1$  は  $N^3$  の境界のある非自明な結び目という。

さて議論を続けて,  $T_1$  と  $T_2$  は  $N^3$  内でお互いに homotopic なので, ここで埋め込み

$$\begin{aligned} f: I &\longrightarrow N^3, \\ g: I &\longrightarrow N^3 \end{aligned}$$

を  $f(I) = T_1$ ,  $g(I) = T_2$  として

$$H: I \times R \longrightarrow N^3 \times R$$

を  $f$  と  $g$  の間の Homotopy とすれば, 定理 1, 定理 3 から,  $H$  の  $\delta$ -近似

$$F: I \times R \longrightarrow N^3 \times R$$

で次の条件を満たす写像が存在する:

- (1)  $F$  は  $t$  を保存する:  $F(s, t) = (f_t(s), t) (\forall t \in R)$ ,
- (2)  $f = f_t (\forall t \leq 0)$ ,  $g = f_t (\forall t \geq 1)$ ,
- (3)  $F: I \times R \longrightarrow N^3 \times R$  は Complete Immersion である,

このとき

$$T_1 \cup T_2 = T, \quad T_1 \cap T_2 = f(\partial I) = g(\partial I)$$

を満たす, 更に  $f$  と  $g$  の間の Homotopy を  $H(s, t) = (h_t(s), t) (\forall t \in R)$  とする。さて, この Homotopy  $h_t$  に定理 1, 定理 3 を用いて,  $f$  と  $g$  の間の Completely Regular Homotopy  $f_t (0 \leq t \leq 1)$  が得られる。このとき, 各  $f_t (0 \leq t \leq 1)$  が Embedding ならば,  $f_t (0 \leq t \leq 1)$  を包囲する  $N^3$  の Ambient Isotopy を用いて,  $T$  は自明な結び目であることが分かる。従って,  $T$  は非自明な結び目なので  $f_t (0 \leq t \leq 1)$  のすべては Embedding ではない。このとき, 次のように Completely Regular Homotopy を構成する。この場合これらに定理 3 を用いて,  $f$  と  $g$  の間の Completely Regular Homotopy を

$$f_t (0 \leq t \leq 1)$$

とする。このとき, 上の議論のように, 即ち,  $f_t(I)$  が Intersection Point を持つ  $t$  は有限個でそれらを

$$\{t_i; i = 1, \dots, n\}$$

とするとき, 次の不等式が成立するものとする:

$$0 < t_1 < \dots < t_n < 1.$$

更にここで, 各  $t_i (i = 1, \dots, n)$  に対して  $f_t(I)$  は唯一つの Intersection Point を持つと仮定される。

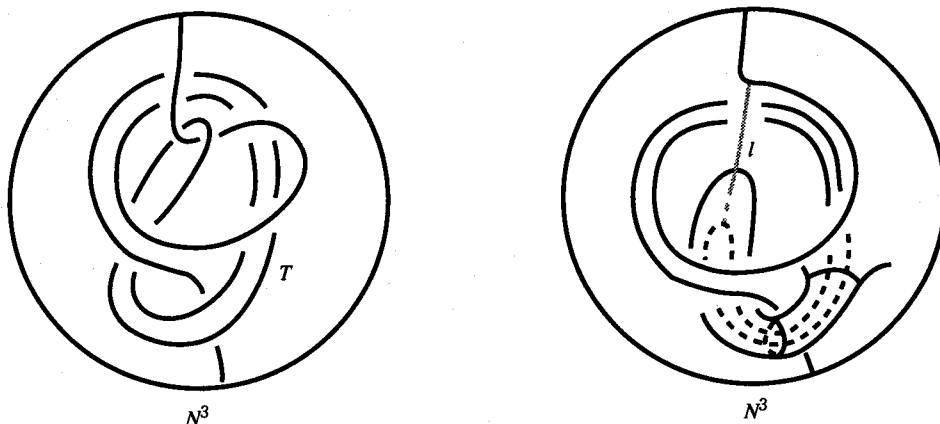


図 1

$$f_t(I) (t_n < \forall t)$$

は定義 6 により境界のある自明な結び目である。或いは

$$f_t(I) \cup g(I) = f_t(I) \cup T_2(t_n < \forall t < 1)$$

は自明な結び目である。

さて、 $T$  の 2 次元特異円板の存在を Intersection Points の個数についての帰納法で証明する。最初に

$$\{f_t(I) ; \forall t \in [0, 1]\}$$

の Intersection Point は唯一つとして、それは  $t_1$  で  $f_{t_1}(I)$  には唯一つの Intersection Point が存在するものとする。ここで

$$0 < t_1 < 1$$

に於いて必要なら適当な Ambient Isotopy を用いて、 $t_1$  は十分 1 に近いものとする。このとき定義 6 から

$$f_t(I) (0 \leq \forall t < t_1)$$

は境界を持つ非自明な結び目で、即ち

$$f_t(I) \cup g(I) (0 \leq \forall t < t_1)$$

は非自明で

$$f_t(I) \cup g(I) (t_1 < \forall t < 1)$$

は自明である。さて図 1 のような短い曲線分を  $l$  とする。 $l$  の境界点は境界のある自明な結び目

$$L = f_t(I) (t_1 < t < 1)$$

の上に存在して

$$\text{Int } l \cap L = \phi$$

が成り立つように  $l$  を選ぶ。 $L$  と  $T_2$  はそれらの境界点を止めて  $N^3$  でお互いに Isotopy なので、この Isotopy を包囲する Ambient Isotopy を  $M^3$  で構成することにより、 $L \cup T_2$  を境界とする 2 次元円板が  $N^3$  内に存在する、それを  $D^2$  とする： $\partial D^2 = L \cup T_2$ 。このとき、図 1 を参考にして  $\text{Int } D^2$  と  $\text{Int } l$  に横断定理を用いて、即ち、 $\partial l$  を固定して、 $\text{Int } l$  をほんの僅か動かして、 $\text{Int } D^2$  と  $\text{Int } l$  が横断的に交差しているようにする。次に  $l$  を内部に含む十分細長い円板を用いて  $T$  の 2 次元特異円板の存在が示された。図 1 に示された結び目  $K$  の 2 次元特異円板  $\Delta^2(K)$  の特異点集合は Clasp Arc と Ribbon Arc がそれぞれ 1 つずつから成っている。次に一般の場を考察する、

即ち,  $f_i(I)$  自身が Intersection Point を持つ  $t$  は有限個でそれらを

$$\{t_i; i=1, \dots, n\}$$

とするとき, 次の不等式が成立するものとする:

$$0 < t_1 < \dots < t_n < 1.$$

更にここで, 各  $t_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) に対して  $f_i(I)$  は唯一つの Intersection Point を持つと仮定される。この場合も図 1 の場合と同様の議論ができる, 即ち, 境界を持つ結び目

$$L = f_i(I) \quad (t_1 < t < t_2)$$

を修正 (Modification) して  $t$  を  $t_1$  に十分近く選び 1 つ固定する。このとき, 帰納法の仮定により,  $L \cup T_2$  の 2-次元特異円板  $\Delta^2(L \cup T_2)$  が存在する。再び図 1 のように修正 (Modification) して,  $l$  を作り  $\text{Int } \Delta^2(L \cup T_2)$  と  $\text{Int } l$  に上の議論のように横断定理を用いて,  $\text{Int } \Delta^2(L \cup T_2)$  と  $\text{Int } l$  とは  $N^3$  内で横断的に交差するようにして, 更にこれを修正 (Modification) して,  $T$  の 2 次元特異円板の存在が分かる。

さて, ここで定理 5 の別証を与えるために [6], [7] から幾つかの定義, 定理等を引用する:

**定義 7 [6].**  $M^3$  を向き付け可能な 3-次元多様体  $f: F \longrightarrow M^3$  を Type  $(p, r)$  の三角形分割された向き付け可能な 2 次元多様体  $F$  からの連続写像, 即ち, 2 次元多様体  $F$  は  $r$  個の境界曲線を持つ Genus  $p$  の向き付け可能な Compact Surface である。もしも  $F$  の任意の 2-Simplex  $\sigma$  に対して,  $f(\sigma)$  が  $M^3$  の 3-Simplex に含まれる Rectilinear 2-Simplex であるとき,  $f$  は *Singular Locally-Linear Map* と呼ばれ,  $f(F)$  は Type  $(p, r)$  の *Singular Orientable Surface* と呼ばれる。特に,  $F$  が type  $(9, 1)$  であれば, 即ち,  $F$  が 2-Disk なら,  $f(F)$  は *Singular 2-Disk* といわれる。  $F$  が Type  $(0, 0)$  であれば, 即ち,  $F$  が 2-Sphere なら,  $f(F)$  は *Singular 2-Sphere* といわれる。Singular Orientable Surface  $f(F)$  の特異点成分が Double Curve と Triple Point と Branch Point から成っているとき,  $f(F)$  を normal という。

**定義 8 [6].** 上の定義の条件下で, Type  $(p, r)$  の Singular Orientable Surface  $f(F)$  がその如何なる境界成分も Singularities を持たないとき, 即ち,  $C$  を  $f(F)$  の境界の 1 つの成分とするとき,  $C$  を核に持つ Tube (管)  $T$  が  $f(F) \cap T$  がアニュラス (Annulus) となるような Tube  $T$  が存在するとき,  $f(T)$  を Type  $(p, r)$  の *Dehn Surface* という。このとき, Type  $(p, 0)$  の Singular Orientable Surface  $f(F)$  は明らかに, Dehn Surface である。ここでは, Type  $(0, 1)$ ,  $(0, 0)$  の Dehn Surface, 即ち, Dehn Disks と Dehn 2-Spheres だけを考える。さて Type  $(p, r)$  の Dehn Surface  $f(F)$  が normal で更に Branch Point を持たなければ, canonical と呼ばれる。  $f(F)$  を Type  $(p, r)$  の Normal Dehn Surface とする。  $b \in f(F)$  を Branch Point か或いは Regular Point とする。一般性を失うことなく  $b$  は  $M^3$  の 3-Simplex  $\sigma$  の内点と仮定してよい。  $B^2$  を  $\sigma$  に含まれる  $b$  を中心とする十分に小さい Convex 2-Sphere とする。

$$K = f(F) \cap B^2$$

とおくとき,  $K$  は  $B^2$  に於ける Normal Closed Curve, 即ち, Curve の重複点は 2 重点だけの Curve である。この Curve の 2 重点 (Double Points) の個数を  $b$  の重複度 (Multiplicity) といって  $m(b)$  と書く。もし  $m(b) > 0$  なら  $b$  は Branch Point,  $m(b) = 0$  なら  $b$  は Regular Point である。

**補題 9 [6].**  $R \subset M^3$  を Type  $(p, r)$  の Normal Dehn Surface とする。このとき,  $R$  を Deformation することにより, Type  $(p, r)$  の Normal Dehn Surface  $R_0 \subset M^3$  で  $\partial R = \partial R_0$  を満た



し、 $R_0$ のすべての Branch Point の Multiplicity は 1 であるものが存在する。

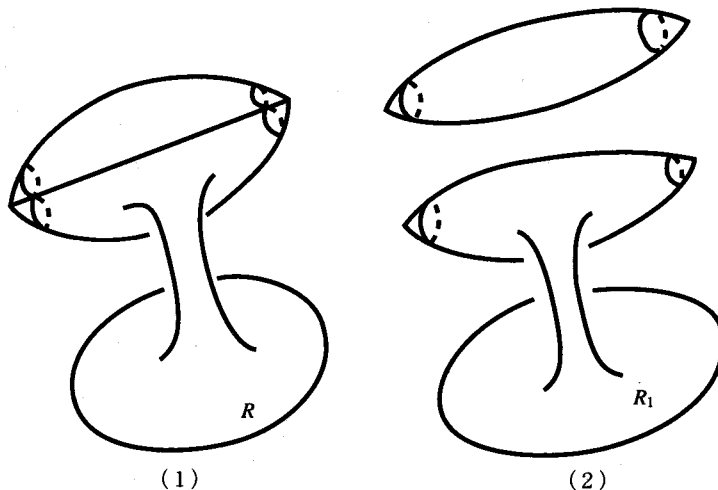


図 2

**補題 10 [6].**  $R \subset M^3$  を  $C$  を境界とする Type  $(p, 1)$  の Normal Dehn Surface とする。このとき境界  $C$  を持ち、Type  $(p, 1)$  の Canonical Dehn Surface  $R_1$  が存在する。

**証明.** 上の定義に於ける条件の下で、一般に  $R = f(F)$  の境界  $C$  には Singularities が存在しないので、 $R$  の任意の Double Curve は closed であるか、Branch Point を境界とする Arc である。その 1 つの Arc を  $l$  とする。このとき、 $\partial l$  は 2 つの Branch Points から成る。更に  $l$  の上に Triple Point が存在すれば簡単に適当な Isotopy を用いて取り除くことができる。従って  $l$  の上には Triple Point は存在しないと仮定できる。さて図 2 の (1), (2) のように Double Curve  $l$  に沿って Cutting and Pasting (Surgery) を施して、Branch Point を取り除くことができる。

**定理 5 の別証.** さて簡単を期するため初めは、 $f : D^2 \longrightarrow M^3$  に於いて、 $f(D^2)$  を Type  $(0, 1)$  の Canonical Dehn Disk とする。このとき、 $K = f(\partial D^2)$  の Singular 2-Disk  $\Delta^2(K)$  の存在を示す。即ち、 $f(D^2)$  の  $M^3$  に於ける任意の開近傍を  $U$  とするとき、

$$\Delta^2(K) \subset U$$

を満たす Singular 2-Disk の存在を示す。さて  $f(D^2)$  の Singularities は Double Curves と Triple Points のみから成るので、まず、 $f(D^2)$  に於ける任意の Double Curves  $L$  は closed であるが、 $L$  の 1 点  $p$  と  $K$  の 1 点  $q$  を適当に選び  $f(D^2)$  に含まれる曲線  $C$  で  $\partial C = \{p, q\}$  を満たし  $\text{Int} C$  は  $f(D^2)$  の Singularities と共通部分を持たない曲線  $C$  が存在する、このことは後で詳しく文献 [3] から引用することにする。この  $C$  に沿って曲面  $f(D^2)$  の一枚の曲面の一部分を  $p$  から  $q$  まで  $U$  の内部で押し出して動かして  $L$  を  $L_1$  に変換して、即ちその結果、 $\partial L_1$  は  $K$  の境界点になる。このようにして、 $f(D^2)$  の Singularities の成分の境界点はすべて  $K$  上に存在すると仮定される。さて次に同様の方法で Triple Points も取り去ることができる、即ち、 $f(D^2)$  の Singularities の成分の 1 つを  $L$  とする。このとき  $L$  の内部に Triple Points が存在すると仮定する。その点を  $p$  とする。このとき上の議論と同様に曲線  $C$  で、

$$\partial C = \{p, q\}$$

とすると、 $\text{Int}C$  は  $f(D^2)$  の Singularities と共通部分を持たなく  $q \in K$  となる  $f(D^2)$  に含まれ曲線が存在する ([7])。これを用いて  $C$  に沿って一枚の曲面を  $U$  の内部で押し出して Triple Point を無くすことができる。このようにして  $f(D^2)$  から得られた Singular 2-Disk を  $\Delta^2(K)$  と書けば、 $\Delta^2(K)$  の Singularities の成分はすべて Ribbon Arcs になる。更にこれらの Ribbon Arcs は 2 つの Clasp Arcs に容易に変換される (図 7 を参照)。

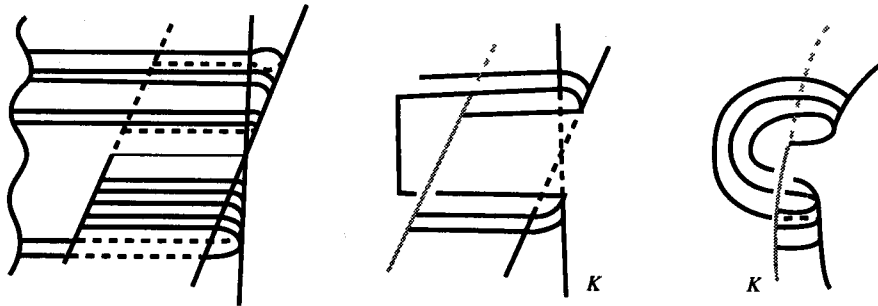


図 3

さて一般の場合は  $f: D^2 \longrightarrow M^3$  に於いて、 $f(D^2)$  は Type (0, 1) の Normal Singular Orientable Surface なので  $f(D^2)$  の Singularities 成分の種類が問題となるが、ここで [7] から引用するが詳しくは [7] を参照にされたい。さて  $K$  を  $M^3$  の内部に含まれる結び目 ([7] に於いて  $K$  は Compact 1-Complex である)、更に、

$$f: D^2 \longrightarrow \text{Int}M^3$$

を  $f|_{\partial D^2}$  が位相的埋め込みであるような連続写像とする。このとき  $f(D^2)$  の正則近傍内で適当に修正 (Modification) することにより、 $f$  の Singularities は次の有限個のものから成ることが分かる：

- (1) Double Curves, 即ち、 $D^2$  に於ける 2 つのお互いに素な曲線で  $f$  で写したとき重なり 1 つの曲線になるような曲線を Double Curves という。
- (2) Triple Points, 即ち、3 つの Double Curves が 1 点で交差する点。
- (3) Branch Points, 即ち、1 つ若しくは 2 つ以上の Double Curves の共通の終点 (Common Endpoints)。

更に  $M^3$  の Ambient Isotopy を用いて少し動かして、 $f$  の Singularities は次の条件をも満たすようにできる：

- (4) 如何なる Triple Point も Branch Point も  $\partial D^2$  上には存在しない。
- (5) Double Points の有限個だけが  $\partial D^2$  上に存在する。

さて  $f: D^2 \longrightarrow \text{Int}M^3$  に対して、 $f|_{\partial D^2}$  が位相的埋め込みであるような連続写像とするとき、 $f$  の Singularities は上の (1) から (5) までの条件が満たされる。従って  $f$  の Singularities は Duple Curve (Clasp Arc, Ribbon Arc, Closed Double Curve), Branch Point, Triple Point から成っているものに限られる。更に [7] の引用を続ければ次のようになる： $C$  を  $D^2$  に含まれる Arc で、 $C$  は  $D^2$  の境界点  $P$  と或る Double Curve の点  $Q$  を結ぶもので更に次の条件を満たすものである；

- (a) は1つの終点  $P$  (Endpoint) を除いて  $D^2$  の内部に存在する。
- (b)  $C$  に於いて点  $Q$  だけが  $f$  の特異点である。
- (c) 点  $Q$  に対して,  $f(Q) = f(Q)$  を満たすような点  $Q \in D^2$  に対して,  $Q, Q$  のいずれも Triple Point でもなく, Branch Point でもない, 即ち, Double Point である。

さて上の Arc  $C$  を用いて, 即ち Surface  $f(D^2)$  に於いて1枚の曲面を  $Arc f(C)$  に沿って点  $f(Q)$  から点  $f(P)$  まで押し出してその結果, すべての Double Curves の境界点は  $\partial D^2$  に存在することになる。更にこれらの操作を適当に施して, 各 Double Curve はせいぜい1つの Triple Point か若しくは1つの Branch Point しかないようにできる。ここで Branch Point の Multiplicity は [6] により1としてよい。このとき更に Branch Point も Triple Point も取り除くことができる。即ち上の  $f(C)$  を Double Curve に含まれる Arc に選び点  $Q$  を Triple Point に成るように選び  $f(D^2)$  の1枚の曲面を  $f(C)$  に沿って押し出す。Branch Point の場合も図3から分かるように同様にして押し出せることが分かる。このようにして,  $f(D^2)$  の任意の近傍  $U$  内に Singularities として, 少なくとも Ribbon Arcs だけを持つ Singular 2-Disk  $B^2$  が存在する。更に  $B^2$  の Ribbon Arcs  $r_i$  を Clasp Arcs に変換する: 後に出て来る図7を参考にするため Ribbon Arc  $r_i$  を内部に含む曲面上で  $r_i$  の内点と  $\partial B^2$  の1点を  $B^2$  内の曲線  $C_1$  で結ぶ, このとき  $C_1$  と  $r_i$  ( $i \neq 1$ ) が交差するとき横断的交差にしてこれらに  $r_i$  を  $\partial B^2 \cap C_1$  に近い順に押し出して図7のように Clasp Arcs に変換できる。従って図7のような操作を施すことにより Singular 2-Disk  $B^2$  の Ribbon Arcs はすべて Clasp Arcs に変換できる。

**定義11.**  $M^3$  を向き付け可能な3次元多様体とする。このとき,  $M^3$  に含まれる結び目  $K$  の2次元特異円板の存在を仮定する。このとき, その特異円板の特異弧 (Singular Arc) がすべて Clasp Arc から成っているとき, その2次元特異円板を2次元 Clasp 円板といって,  $\Delta_c^2(K)$  で表す。更に特異円板  $\Delta^2(K)$  が図4のように表せるとき, その2次元特異円板を  $\Delta_N^2(K)$  と書き, 標準的特異円板 (Normal Singular 2-Disk) という。これは次のように構成される:  $E^2$  を図5の(1)に示されている2次元円板とする。  $B_i^2$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) を図5の(2)に示されているような半円板とする。これらの半円板  $B_i^2$  の底辺を  $E^2$  の底辺に1つずつ番号順に左から滑らかに張り合わせ,  $B_i^2$  の半円板部分を図5, 図4のように Clasp Arc  $l_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) が現れるようにして構成される。この場合  $B_i^2$  は  $E^2$  に Ribbon Arc を持つかも知れない。このとき,  $B_i^2$  を2次元特異円板  $\Delta^2(K)$  の Clasp Band という。

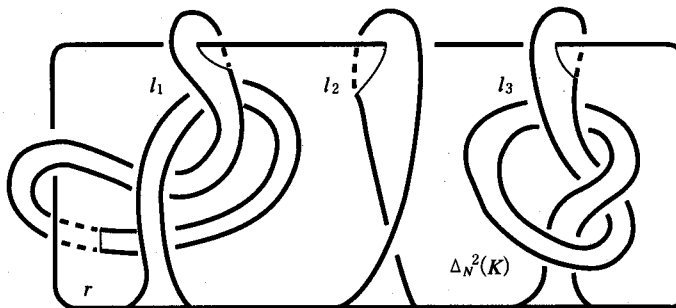


図4

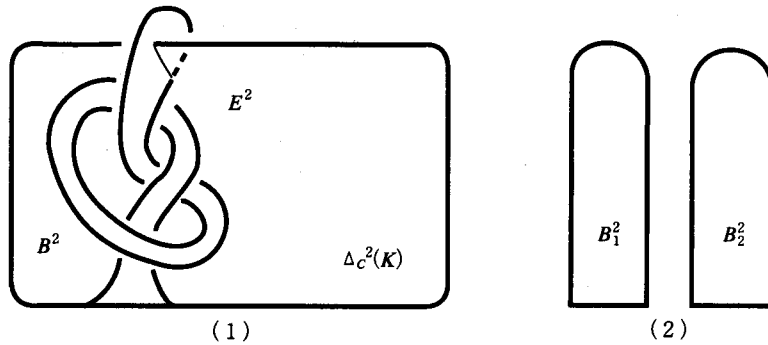


図 5

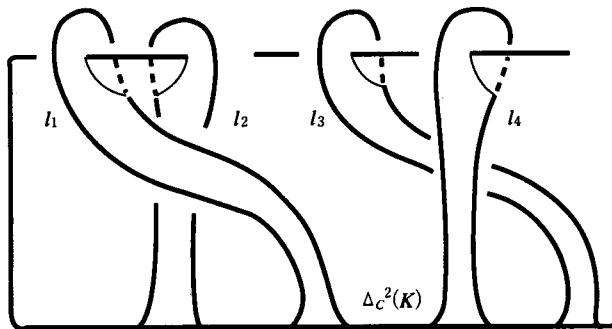


図 6

**補題12.**  $M^3$ を単連結な3次元多様体とする。このとき、 $M^3$ に含まれる結び目  $K$  が非自明である必要十分条件は、すべての2次元 Clasp 特異円板の中に Clasp Arc の存在しない特異円板は存在しないことである、即ち、結び目解消数(Unknotting Number)が0でないことである。

**定理13.**  $M^3$ を向き付け可能な3次元多様体でその境界は存在してもしなくてもよい。このとき、 $M^3$ に含まれる結び目  $K$  の2次元特異円板、或いは Clasp 2次元円板が存在するための必要十分条件は  $K$  が  $M^3$ 内で homotopic 0 となることである。

**証明.** 定理5から  $K$  の2次元特異円板  $\Delta^2(K)$  でその Singular Arc が Clasp Arc と Ribbon Arc とから成るものが存在することが分かる。この2次元特異円板  $\Delta^2(K)$  を用いて容易に、Ribbon Arc を2つの Clasp Arcs に変換できて、2次元 Clasp 円板  $\Delta_c^2(K)$  が得られる。次に2次元特異円板  $\Delta^2(K)$  から標準的特異円板  $\Delta_N^2(K)$  を構成する。これは  $\Delta^2(K)$  が2次元円板  $E^2$  上の定義7のように、Clasp Band  $B_i^2$  を順序に関係なく滑らかに接着して得られる(図6)。さて図6のように、適当な Isotopy を用いて、Clasp Band  $B_i^2$  を移動させることにより、標準的2次元特異円板(図4)が得られる。

さて、次に標準的 2 次元特異円板  $\Delta_N^2(K)$  から、2 次元 Clasp 円板  $\Delta_C^2(K)$  を得るために、Ribbon Arc  $l_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) の個数の帰納法で示す。そのために 1 つの Clasp Band  $B^2$  が 2 次元円板  $E^2$  と唯一つの Ribbon Arc  $l$  を持つ場合を考察する。図 7 の(1)を見よ。この Ribbon Arc  $l$  を変換して、図 7 の(2)が得られる。この手順を繰り返せば 2 次元 Clasp 円板  $\Delta_C^2(K)$  が得られる。

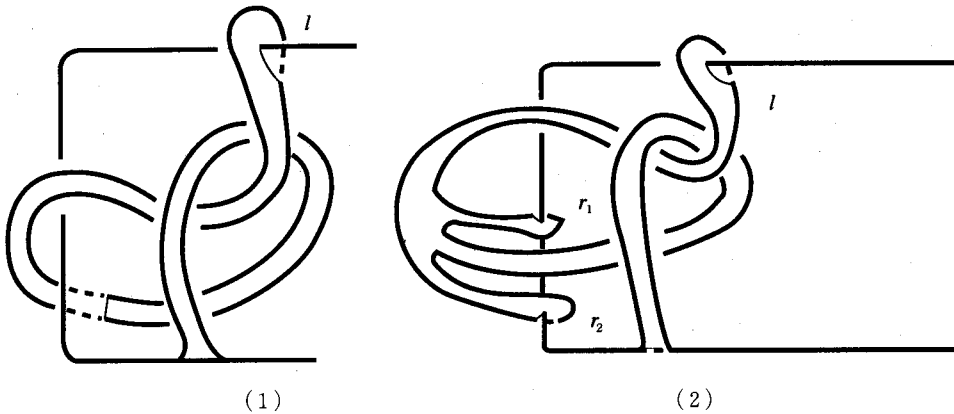


図 7

### 3. 主定理の証明

さて最初に Dehn の補題(定理14)と定理15は同値であることを示す。

**定理14**(Dehn の補題).  $M^3$  を向き付け可能な 3 次元連結多様体でその境界は存在してもしなくてもよい。

$$f : D^2 \longrightarrow M^3$$

を  $C^\infty$  級写像で

$$f | \partial D^2 : \partial D^2 \longrightarrow M^3$$

は埋め込みで、 $f^{-1}(f(\partial D^2)) = \partial D^2$  が満たされると仮定する、即ち、 $f(\partial D^2)$  には特異点が存在しないとする。このとき、Embedding

$$g : D^2 \longrightarrow M^3$$

で、 $f | \partial D^2 = g | \partial D^2$  を満たすものが存在する。

**定理15.**  $M^3$  を向き付け可能な 3 次元多様体でその境界は存在してもしなくてもよい。 $M^3$  に含まれる非自明な結び目  $K$  に対して、 $K$  の 2 次元特異円板の存在を仮定する。 $H^3$  は  $K$  を核としてもつ  $M^3$  に埋め込まれた Solid Torus とする。今  $K$  の任意の 2 次元特異円板を  $\Delta^2(K)$  とする。 $\partial H^3$  と  $\Delta^2(K)$  とは  $M^3$  内で横断的交差をもつようにする。このとき、 $\Delta^2(K) \cap \partial H^3$  の中には  $\partial H^3$  の Meridian Circle が少なくとも 1 つ存在する。

「定理14⇒定理15」の証明. 背理法を用いる: 即ち, 定理15に於いて,  $\Delta^2(K) \cap \partial H^3$ の中には  $\partial H^3$ の如何なる Meridian Circle も存在しないと仮定する。ここでは  $K$ の Normal 2次元円板  $\Delta_N^2(K)$ を用いる。 $\Delta_N^2(K)$ に於ける Clasp Arcs の個数は  $K$ の Unknotting Number に等しいものとする。このとき  $\partial H^3 \cap \Delta_N^2(K)$ に於いて  $\partial H^3$ の Meridian Circle が存在しないと仮定する。一般に  $\Delta^2(K)$ の Singular Arcs の中には Clasp Arc がなく Ribbon Arcs だけのものが存在することに注意する。

さて,  $K$ の Normal 2次元円板  $\Delta_N^2(K)$ の Clasp Arcs の個数を  $n$ ケとする。 $H^3$ を  $K$ の任意の管状閉近傍とする。このとき  $\partial H^3$ と  $\Delta_N^2(K)$ は  $M^2$ 内で横断的の交差を持つようにする。従って

$$\{ \partial H^3 \cap \Delta_N^2(K) \}$$

には図8に示されているように有限個の Circles から成っている。

さてここで, Morse 関数

$$f : H^3 \longrightarrow [0, 1]$$

を

$$f(p) = x^2 + y^2$$

で定義する, 但し  $h(p) = (x, y, t) \in D^2 \times S^1$ ,

$$h : H^3 \longrightarrow D^2 \times S^1$$

は Diffeomorphism である。

$\Delta_N^2(K)$ の Clasp Arc を  $l_i (i = 1, 2, \dots, n)$ とする。このとき

$$\{ \partial l_i; i = 1, 2, \dots, n \}$$

の点を内部に含む円板はすべて  $\partial H^3$ の Meridian Circle ではないとしておく。図8に示されているように  $H^3$ の内部において  $K$ と横断的に交差した  $\text{Int } \Delta_N^2(K)$ の曲面の内 Clasp Arc の境界点を含む曲面が本質的でそれ以外の  $H^3$ と交わる曲面, 即ち, Clasp Arc の境界点を含まない曲面は非本質的である。

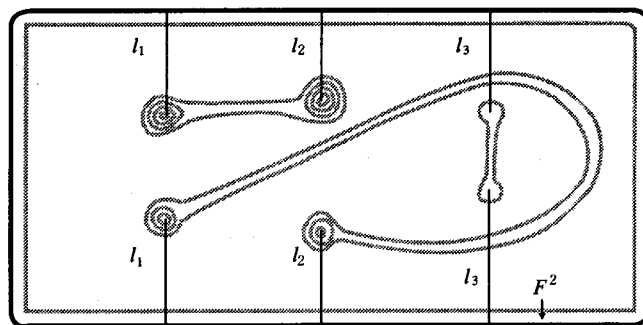


図8

定義16. 図9の(1)に示されているように2つの Circles  $\partial E_s$ と  $\partial A_s^2$ が例えば1つの Critical Point を媒介にして Guling して1つの Circle に変化すると仮定する。このとき図9の(1)に示された 2-Disk  $D^2$ を用いて, 即ち,  $\Delta_N^2(K)$ を  $\partial D^2$ に沿って切り開き更に Modification を施す, 即ち 2-Disk  $D^2$ と  $l$ の交点を  $p$ とすると, 点  $p$ を含むように  $p$ の近傍内で  $D^2$ をほんの僅か大きくする。ここで

$$\Delta_N^2(K) - D^2$$

の切り口を少し開けばその切り口は図9の(7)の(ii)に示されたように3つの Circles  $S_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) から成ることが分かるが更にここで3つの 2-Disk  $E_i^2$  ( $i = 1, 2, 3$ ) を用意してこれらの 2-Disk  $E_i^2$  ( $i = 1, 2, 3$ ) が

$$\partial E_i^2 = S_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

を満たすように  $M^2$  内で張り付ける、このとき  $l$  と交差する点、2点以外では滑らかに図9の(7)の(ii)に示されているように曲面  $\Delta_N^2(K) - D^2$  の切り口に沿って3つの 2-Disk  $E_i^2$  ( $i = 1, 2, 3$ ) を張り付ければ、張り付けた曲面の交差する2点が Branch Points になることが分かる。このように切って張り付ける操作を Surgery (Cutting and Pasting) と呼ぶことにする。即ち、このとき、曲面  $\Delta_N^2(K)$  を  $\partial D^2$  に沿って Cutting and Pasting を施すという。

さてここで更に次の Surgery を定義する：

**定義17.** 上の議論を続けて図9の(4)に示されている  $\Delta_N^2(K) \cap H^3$  の 2-Disk  $D^2$  を用いて次のように Surgery を施す。即ち、 $\partial D^2 \cap l_i = p_i$  ( $i = 1, 2$ ) の十分小さい近傍内で  $D^2$  を2点  $p_i$  ( $i = 1, 2$ ) を含むように少し大きくする。このように修正された 2-Disk を同じ記号  $D^2$  で表す。この 2-Disk  $D^2$  を含む 3-Disk, 例えば、 $D^2 \times I$  を  $M^2$  内に取り込む、但し、 $I$  は  $M^2$  の距離  $d$  で十分に短いものとする： $d(I) < \epsilon$ ,  $\epsilon$  は十分に小さい正数である。このとき、

$$\Delta_N^2(K) - \text{Int}(D^2 \times I)$$

に於ける切り口はそれぞれ Double Points を2個づつ含む4つの Circles  $S_i^1$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) からなっている。これらの切り口に存在する Double Points の内図9の(4)に示されている  $l_i$  ( $i = 1, 2$ ) の境界点  $a_i$  ( $i = 1, 2$ ) に近い Double points をそれぞれ  $p_i$  ( $i = 1, 2$ ) とし更にもう一つづつの  $l_i$  ( $i = 1, 2$ ) と切り口に存在する点をそれぞれ  $q_i$  ( $i = 1, 2$ ) とする。さてここで  $a_i$  ( $i = 1, 2$ ) と  $p_i$  ( $i = 1, 2$ ) を結ぶ  $l_i$  ( $i = 1, 2$ ) 上に曲線分を  $L_i$  ( $i = 1, 2$ ) とおく。このとき

$$\Delta_N^2(K) - \text{Int}(D^2 \times I)$$

に於いて  $L_i$  ( $i = 1, 2$ ) の境界点  $p_i$  ( $i = 1, 2$ ) を含む Circle を  $S^1$  とするとき  $S^1$  を張る 2-Disk  $E^2$  が存在する。又  $S^1$  に沿って2枚の曲面が  $p_i$  ( $i = 1, 2$ ) を含む  $L_i$  ( $i = 1, 2$ ) で交差しているが 2-Disk  $E^2$  に沿ってこの2枚の曲面を更に交差させることにより  $L_i$  ( $i = 1, 2$ ) を繋いで1つの Double Curve  $\alpha_1$  が構成される。同様にして残った  $L_i$  ( $i = 1, 2$ ) を含まない  $l_i$  ( $i = 1, 2$ ) の2つ曲線分を繋ぎ合わせてそれを  $\alpha_1$  とする。残った曲面の滑らかに繋ぎ合わせて  $K$  の Singular 2-Disk が得られる。このようにして得られる操作も簡単に言えば Cutting and Pasting なのでこの場合も  $\partial D^2$  に沿っての Surgery と呼ぶことにする。

さて、制限関数

$$\rho = f | H^3 \cap \Delta_N^2(K) : H^3 \cap \Delta_N^2(K) \longrightarrow [0, 1]$$

は Surface  $\text{Int } \Delta_N^2(K)$  を局所的にほんの僅かずつ isotopic に動かすことにより、即ち、曲面  $H^3 \cap \Delta_N^2(K)$  を覆う十分に細かい有限個からなる開被覆を選び帰納的に Morse 関数を構成することにより  $f | H^3 \cap \Delta_N^2(K)$  は局所的には Morse 関数に出来ることが分かっている [5]。一般には  $\rho$  の定義域は多様体であるがこの場合は  $\Delta_N^2(K)$  は 2-次元円板を  $\text{Int } M^3$  に Immersion されたものであるが局所的に  $M^2$  の 2-次元部分多様体の構造が入られる。更に関数  $\rho$  に Critical Point は有限個であり、 $\Delta_N^2(K)$  の Singular Arcs の境界点すべては  $\rho$  の Critical Points になっている。又  $s \in [0, 1]$  が十分に小さい場合には  $\rho^{-1}(s)$  は Solid Torus  $f^{-1}([0, s]) = H_s^3$  の境

界である Torus  $\partial H_s^3$  の Meridian Circles になっている。更にパラメーター  $s$  を増加させればこれらの Meridian Circles が  $\rho$  の Critical Points を媒介にして融合 (Gluing), 或いは分裂 (Splittings) を繰り返すことが分かる。 $\rho^{-1}(0)$  は有限個の Critical Points と  $\Delta_N^2(K)$  の境界  $\partial\Delta_N^2(K)$  から成っているので  $\partial\Delta_N^2(K)$  を  $H^3$  の中心部から少しずつらしておけばよい。以上の議論からも分かるようにこの関数  $\rho$  も Morse 関数と呼ぶことにする。さてこの Morse 関数  $\rho$  とその Gradient Vector Field  $\text{Grad } \rho$  を用いて、その関数の Level Lines を描けば図 8 のようになる。さてこの Morse 関数とその Level Lines を用いることにより図 9 の(1)の場合を考察する。即ち、 $s$  が十分に小さい場合は上に述べたように  $\rho^{-1}(s)$  は  $H_s^3$  の境界である Torus  $\partial H_s^3$  の Meridian Circles になっているがこの場合は図 9 の(1)を参考にして  $H_s^3$  に於ける曲面  $\rho^{-1}([0, s])$  の中には Clasp Arc  $l$  の境界点  $\partial l$  の 1 つを中心に含む  $H_s^3$  の Meridional 2-Disk  $E_s^2$  と、更に  $\partial\Delta_N^2(K) = K$  を含み  $H_s^3$  に含まれる Annulus  $F_s^2$  で  $\partial F_s^2 \subset \partial H_s^3$ ,  $\text{Int} F_s^2 \subset \text{Int} H_s^3$  を満たすものも存在する。所がこのとき  $s$  を次第に増加させれば  $H_s^3$  に於いて  $E_s^2$  と  $F_s^2$  が例えば 1 つの Critical Point を媒介にして Gluing してその結果図 9 の(1)に示された場合が起こる。即ち、 $\partial H_s^3$  に於ける 2 つの Circles  $\partial E_s^2$  と  $\partial F_s^2$  が例えば 1 つの Critical Point を媒介にして Gluing して 1 つの Circle に変化する。

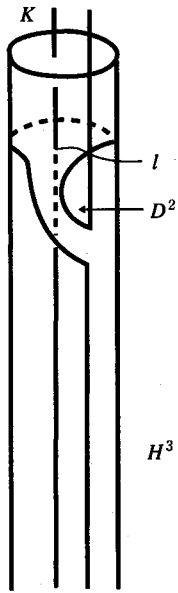
さて、 $\Delta_N^2(K)$  の Clasp Arc を  $l_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) とする。このとき  $s$  が十分に小さいときの  $\rho$  の Critical Points

$$\{\partial l_i ; i = 1, 2, \dots, n\}$$

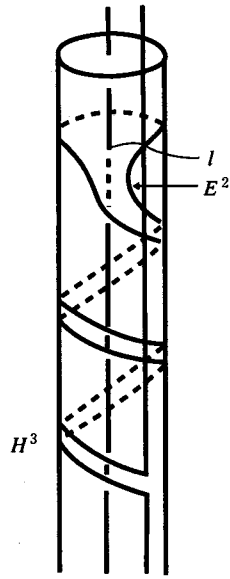
の点を内部に含む  $H_s^3$  の Meridional 2-Disks は  $s$  が増加するに伴い Gluing, Splittings を繰り返してすべて  $\partial H^3$  の Meridian Circles ではないように変化するものとする。図 8 に示されているように  $H^3 = H_1^3$  の内部において  $K$  と横断的に交差した  $\text{Int } \Delta_N^2(K)$  の曲面の内 Clasp Arc の境界点を含む曲面が本質的でそれ以外の  $H^3$  と交わる曲面、即ち、Clasp Arc の境界点を含まない曲面は非本質的で  $H^3$  から取り除けば証明が簡明になる。

一般に、Clasp Arcs が  $n$  個存在する場合を考える。これは図 9 の(3)のように向きをいれて Solid Torus  $H^3$  を図示して  $2n$  個の Clasp Arcs の境界点に番号を打ち  $K$  の向きに合わせて番号を 1 から  $2n$  まで付ける。このようにして図 9 の(1)に示されているような本質的曲面は図 9 の(1)に示された 2-Disk  $D^2$  を用いて図 9 の(7)に示されているように曲面  $\text{Int } \Delta_N^2(K)$  を  $\partial D^2$  に沿って定義 16 の意味で Surgery を施して 2 個の Branch Points が生成されるが更に図 3 のように更にこの 2 つの Branch Points を各 Double Curve に沿って押し出して取り去ることにより Clasp Arc  $l$  が除去される。図 9 の(2)の場合はそこに図示されている  $l$  が Clasp Arc か Ribbon Arc の場合に分けられるが何れも 2-Disk  $E^2$  を用いて定義 17 の意味で Surgery を施すことにより起こらないと仮定される。図 9 の(3)に示されている場合は適当な Isotopy を用いて 2 つの Meridian 2-Disks を下方に移動させることにより図 9 の(1)に帰着される。以上の議論から図 9 の(1), (2)の場合は今後起こらない、即ち、今後は曲面  $F^2$  は  $\Delta_N^2(K)$  に於ける  $K$  の Collar 閉近傍、即ち、 $H^3$  に含まれる Annulus として議論を進める。さて次に図 9 の(4)の場合、即ち、(5)の場合を考察する。図 9 の(5)の場合は  $\partial H^3$  に於ける 2 次元円板  $D^2$  を用いて定義 17 の意味で Surgery を施すことにより図 9 の(5)の場合には 2 つの Clasp Arc  $l_i$  ( $i = 1, 2$ ) が除去される。更に図 9 の(6)に示されている場合は図 9 の(7)から 2-Disk  $D^2$  が存在するので前の議論からこの  $D^2$  を用いて定義 16 の意味で Surgery を施してその結果 1 つの Clasp Arc 若しくは Ribbon Arc が除去される。以上の議論から今後は図 9 の(6)の場合は起こらないものとする。

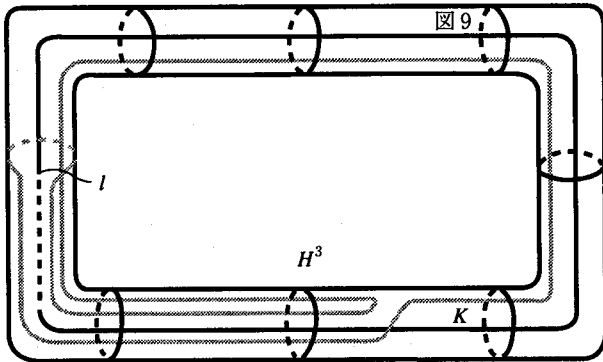




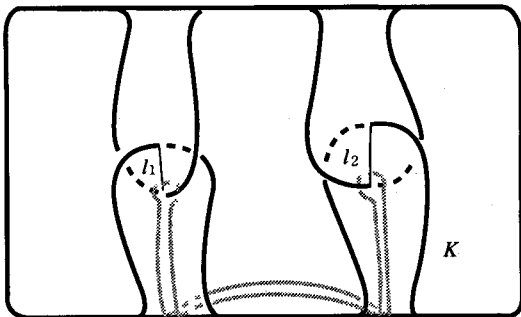
(1)



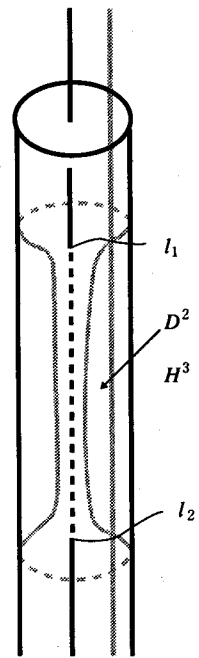
(2)



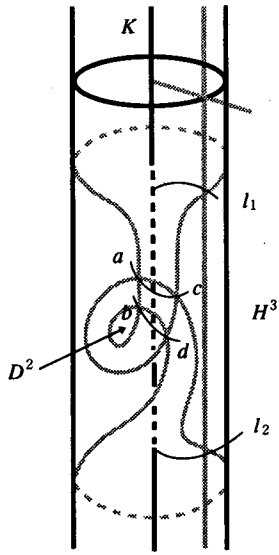
(3)



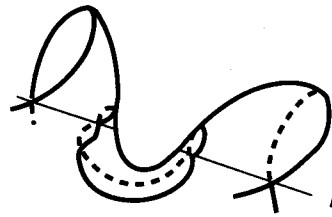
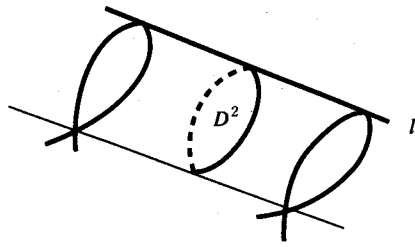
(5)



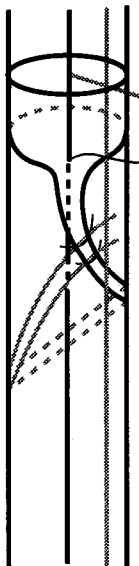
(4)



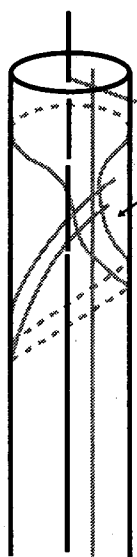
(6)



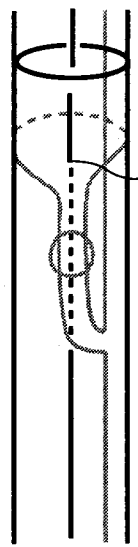
(7)



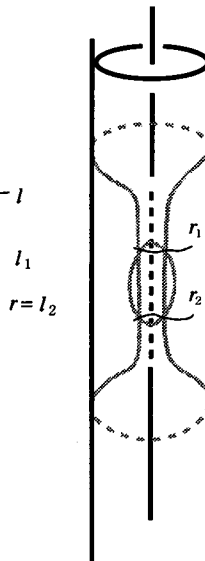
(8)



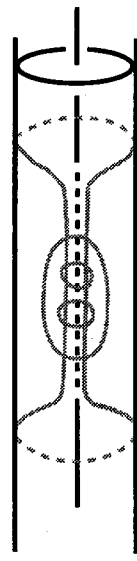
(9)



(10)

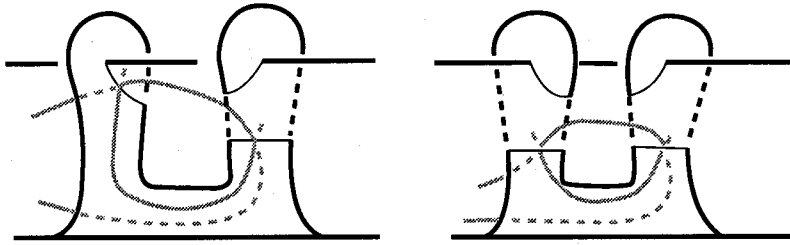


(11)

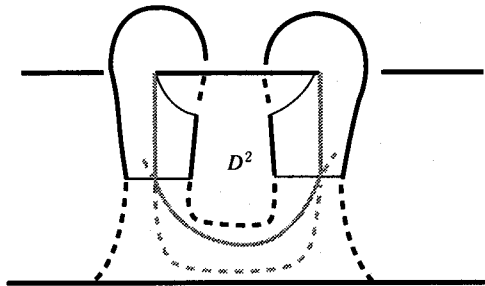


(12)

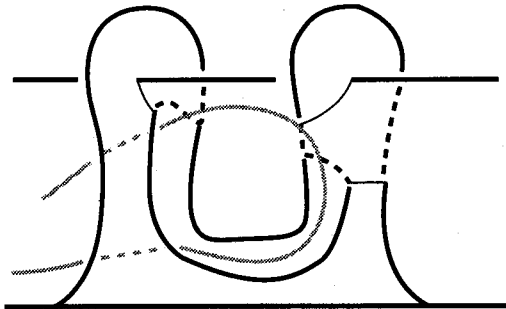
$l_1$   
 $r = l_2$



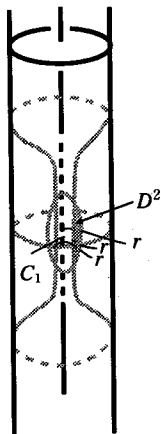
(13)



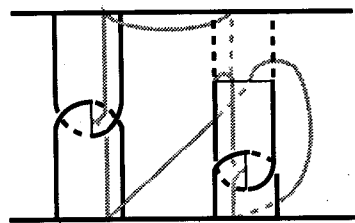
(14)



(15)



(16)



(17)



(18)

図9

さて又図9の(8)に示された場合は定義17の意味に於いて Surgery を施して図9の(9)に示されたようになるがこのとき 2-Disk  $D^2$  を用いて図9の(6)と同様に Surgery を施して Singular Arc が除去されるので図9の(8)に示された場合も起こらない。

さて更に例えば図9の(10), (11), (12)に示された場合は具体的には図9の(13), (14)に示されたようになる。特に図9の(11)の典型的な例は図9の(14)に示された場合でこれは後にも出て来る。図9の(13), (14)の場合は図9の(15)に示してあるような適当な Surgery を施すか或いは今の場合は定義17の意味で Surgery を施すことにより解消できる、従って図9の(10), (11), (12)に示された場合は図9の(1), (4)の場合に帰着されることが分かる。図9の(13)に於いて示された2つの Clasp Arcs の間に幾つかの Clasp Arcs が存在する場合も考えられる、このときこれらに存在する Clasp Arcs には Ribbon Arcs も存在するかも知れないが  $\Delta_N^2(K)$  から適当に取り除くことにより図9の(13), (14)に帰着される。図9の(13)に示された場合とは Clasp Arc  $l_1$  と Ribbon Arc  $r$  はお互いに別々の Clasp Bands に存在する、又 Ribbon Arcs  $r_1, r_2$  はお互いに別々の Clasp Bands に存在することである。一般に同一の Clasp Bands に存在するような Ribbon Arcs も許せば図9の(10), (11), (12)以外のものも存在するが図9の(15)等の方法を用いて適当な Ribbon Arcs は除去されて図9の(10), (11), (12)に示されたものに帰着されることが容易に分かる。図9の(10), (11), (12), (13), (14), (15)を参考にするか若しくは定義17の意味で Surgery を施すことにより図9の(1)及び(4)の場合に帰着される。更に図9の(16)に示された場合はこの図から分かるように Ribbon Arc  $r$  の場合 2-disk  $D^2$  の存在のために一番外側の 2-Disk  $C_1$  と  $\partial r$  の1つを中心とする  $\partial H^3$  に於ける Meridian 2-Disk を  $\alpha$  とするとき、(17)を参考にすれば Circle  $\alpha$  は  $r$  を横切るので(16)を見れば(18)のようになり図9の(2)の場合に帰着されるか或いは今の場合は定義17の意味で Surgery を施す。又図9の(16)と(17)に於いて  $r$  が Clasp Arc の場合も考えられる。従って以上の議論から図9の(16)に示された場合は決して起こらない。

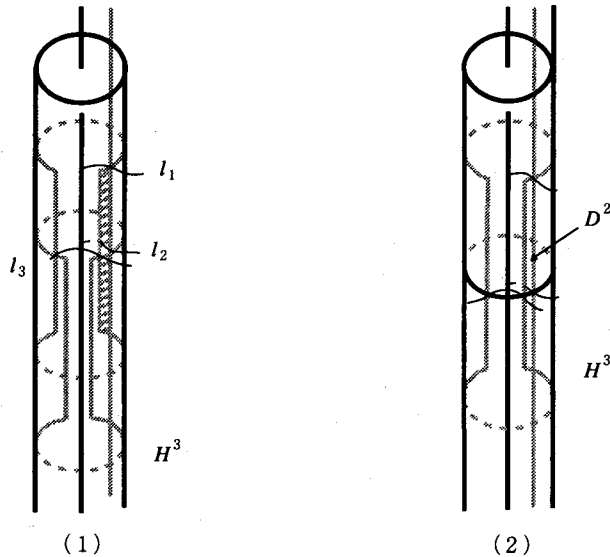


図10

さて今までの議論から

$$\text{Int } \Delta_N^2(K) \cap \partial H^3$$

に含まれる  $K$  の  $\Delta_N^2(K)$  に於ける Collar 閉近傍を  $F^2$  とすれば,  $F^2$  は Annulus で  $\partial F^2$  の 1 つの成分が  $\partial H^3$  に含まれる, 従ってその他の  $\partial H^3$  に含まれるものは Complete Immersion となっている有限個の Circles だけである, 即ち,  $\partial H^3$  に埋め込まれた Circles 及び Complete Immersion された Circles からなり更にそれらの Circles は  $\partial H^3$  上で横断的交差を持つ, 即ちこれらの Circles は上に構成された Morse 関数の Level Lines により生成される Circles から成っている. 次に非自明な結び目  $K$  とその 2 次元特異円板  $\Delta_N^2(K)$  について考察する.  $\Delta_N^2(K)$  の Clasp Arc を  $l_i (i = 1, 2, \dots, n)$  とする. このとき, Solid Torus  $H^3$  上に  $2n$  個の Circles が存在するが, 今までの議論と同様に  $K$  に向きを付けそれに従って  $H^3$  に含まれる  $\partial l_i (i = 1, 2, \dots, n)$  に順次番号を付ける.

さて, Morse 関数  $\rho : H^3 \cap \Delta_N^2(K) \longrightarrow [0, 1]$  を用いて,  $\rho$  の Level Lines を変えるために  $H^3 \cap \Delta_N^2(K)$  の曲面の一部を Isotopy を用いて動かして, 図10の(1)を(2)のように変換する. 更にここでは N. Smythe の論文[7]で使用されている方法を用いる, 即ち, 図10の(1)を(2)のように変換された  $\Delta_N^2(K) \cap H^3$  の 2-Disk である曲面を  $H^3$  の外部に移動させる, このとき, この 2 次元特異円板  $\Delta_N^2(K)$  は  $H^3$  の内部に於いて 1 つの Triple Point が生ずるがこの Triple Point を 1 つの Double Curve に沿って押し出してこの Triple Point を取り除くのが N. Smythe の方法[7]であるが, この場合は逆方法となる. さて定義17に述べたような Surgery をこのようなすべての Circles に対して施せば Triple Points が現れるが結び目  $K$  上の特異点が除去される. さて以上のような操作を有限回施すことにより  $\Delta_N^2(K)$  に於ける  $K$  上の特異点のすべてが除去される, 即ち内部へと押しやられる, 従って, Dehn の補題から結び目  $K$  は自明になる. これで証明が終わる.

「定理15⇒定理14」の証明：この証明に於ける結び目  $K$  の 2-次元特異円板は一般の特異円板  $\Delta^2(K)$  を用いて証明できるが, 定義11の意味での Normal 2-次元特異円板  $\Delta_N^2(K)$  を用いる場合は  $\Delta_N^2(K)$  の Clasp Arcs の個数は必ずしも  $K$  の Unknotting Number とは等しくはならないことに注意する. さて仮定により

$$f^{-1}(f(\partial D^2)) = \partial D^2$$

が満たされる, 即ち,  $f : D^2 \longrightarrow M^3$  は  $f(\partial D^2) = K$  に於いて特異点を持たないので,  $K$  を内部の中心に含む Solid Torus, 即ち, 円板

$$B^2 = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

に対して, Embedding

$$k : B^2 \times S^1 \longrightarrow M^3$$

を

$$k(B^2 \times S^1) = T^3 \subset M^3$$

とするとき, 次式が成り立ち:

$$K = k(\{0\} \times S^1).$$

更に

$$f^{-1}(k(B^2 \times S^1))$$

は  $D^2$  に於ける  $D^2$  の Collar 閉近傍, 即ち, Annulus  $F^2$  からなるような Embedding が存在する.

このとき

$$f^{-1}(f(F^2)) = F^2$$

で

$$f \mid F^2 : F^2 \longrightarrow M^3$$

が Embedding となる  $F^2$  が存在する。

このとき

$$k(B^2 \times S^1) \cap f(D^2) = \{A^2\}$$

とおけば,  $A^2$  は又 Annulus である。又ここで

$$k^{-1}(A^2) = \{(x, 0) \in R^2 \mid 0 \leq x \leq 1\} \times S^1 \subset B^2 \times S^1$$

が成り立つと仮定する。更に

$$f^{-1}(A^2) = F^2$$

が成り立つ。

もしも,  $K$  が  $M^3$  内で非自明ならば, 定理 5 (或いは定理 5 の別証明) から, Clasp Arc をもつ 2 次元特異円板  $\Delta_N^2(K)$  が  $M^3$  内に存在することは周知である。所で 2 次元円板  $B^2$  の内部に含まれる 2 次元円板を

$$E^2 = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1/4\} \subset \text{Int}B^2$$

とするとき

$$W^3 = M^3 - k(E^2 \times S^1)$$

とおく又,  $f^{-1}(k((2/3, 0) \times S^1)) \subset D^2$  を境界に持ち  $D^2$  に含まれる円板を  $D_0^2$  とする。このとき

$$f|_{D_0^2}: D_0^2 \longrightarrow W^3$$

は  $f(\partial D_0^2)$  に於いて特異点を持たない  $C^\infty$ -写像である。

さて 3 次元多様体  $W^3$  と結び目  $T = f(\partial D_0^2)$  について議論する。このとき定理 5 或いは定理 5 の別証明から上に得られた制限写像  $f|_{D_0^2}: D_0^2 \longrightarrow W^3$  を用いて  $W^3$  に於いて, 結び目  $T = f(\partial D_0^2)$  の特異 2 次元円板  $\Delta_N^2(T)$  が存在する:  $\Delta_N^2(T) \subset W^3$ .

このとき  $T$  が非自明なら明らかに  $T$  の特異円板が存在する:

$$\Delta_N^2(T) \subset W^3 = M^3 - k(E^2 \times S^1) \subset M^3.$$

さて次に 3-多様体  $M^3$  内に於いて  $T$  を内部の中心に含み  $K$  を含み, 更に  $f(\text{Int}D^2 - \text{Int}F^2)$  の或る近傍との交わりが空となるような Solid Torus を 1 つ選び  $H^3$  とする。

このとき

$$g: B^2 \times S^1 \longrightarrow M^3$$

を Embedding で,  $g(B^2 \times S^1) = H^3$  が満たされるものが存在する, 又

$$B^2 = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

とするとき

$$g(\{(x, y); 0 \leq x \leq -1, y = 0\} \times S^1) \subset A^2$$

$$g(\{0\} \times S^1) = T, \quad g(\{-1\} \times S^1) = K$$

が満たされるようにする。このとき定理 15 から 2-次元特異円板  $\Delta_N^2(T)$  と  $H^3$  の共通部分

$$\Delta_N^2(T) \cap \partial H^3$$

の中には少なくとも 1 つの  $\partial H^3$  の Meridian Circle が存在することになる, これは

$$\Delta_N^2(T) \cap K \neq \emptyset$$

を意味する。一方上の議論から

$$\Delta_N^2(T) \cap K \subset (M^3 - W^3) \cap K = \emptyset$$

が成立して矛盾となる。従って結び目  $T$ , 従って  $K$  は自明でなければならない。

さて次に定理 15 を証明する。

**定理 15 の証明.** この証明でも  $K$  の Normal 2 次元特異円板  $\Delta_N^2(K)$  を用いる。更に  $\Delta_N^2(K)$  に

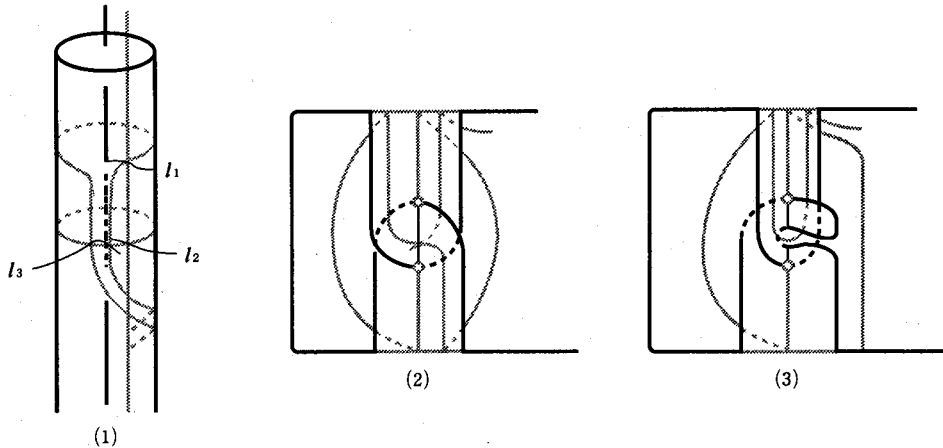
於ける Clasp Arcs の個数についての帰納法で証明する。ここで  $\Delta_N^2(K)$  の Clasp Arc の個数は  $K$  の Unknotting Number に等しいものとする。今までの議論から  $\Delta_N^2(K) \cap \partial H^3$  の中には図9の(1), (10), (11)のような Circles は存在しないものとして議論をする。

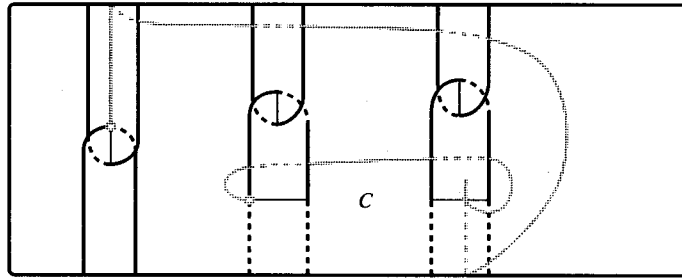
さて最初  $\Delta_N^2(K)$  には唯一つの Clasp Arc が存在する場合を考察する。そのために Immersion

$$g : D^2 \longrightarrow \text{Int}M^3$$

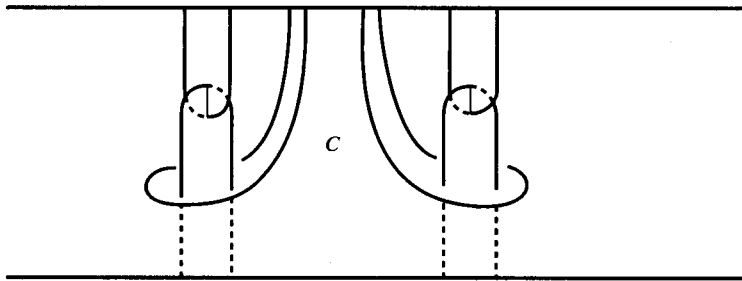
を  $g(D^2) = \Delta_N^2(K)$ , 即ち,  $g$  は  $\Delta_N^2(K)$  の表現とする。さて図9の(4)の場合は図10の(3)から分かるように Clasp Arc  $l$  は1つの閉じた Double Curve  $S^1$  に変換されるので  $g^{-1}(S^1)$  は  $D^2$  に於いて, 1つの Circle か若しくは2つの Circles からなる。1つの Circle からなる場合は,  $\text{Circle} S^1$  は  $M^3$  の向きを逆向きにするが, 即ち,  $M^3$  には Solid Klein Bottle が埋め込まれていて  $S^1$  はその Klein Bottle の核になっている。所が  $M^3$  は向き付け可能なのでこの場合は起こらない([2])。  $g^{-1}(S^1)$  が2つの Circles からなる場合は明らかに  $l$  は Ribbon Arc でなければならない。従って Clasp Arc を唯一つだけ持つ Singular 2-Disk の場合は  $\Delta_N^2(K) \cap \partial H^3$  には2つの Meridian Circles が存在する。

次に図11の(1)に示されているように  $\Delta_N^2(K) \cap \partial H^3$  に含まれる1つの Circle が  $H^3$  に巻き付いている場合を考察する：最初に  $\Delta_N^2(K)$  の特異点集合は Clasp Arcs だけから成る場合を考察する。図11の(1)に於ける  $l_i (i=1, 2)$  は  $l_1 = l_2$ ,  $l_1 \neq l_2$  の場合に分ける。  $l_1 = l_2 = l$  のときは図11の(2)から横断定理から  $l$  が除去されるか或いは図11の(3)から分かるように  $l$  が Clasp Arc と Circle ②を含む自明な Ribbon Arc に変換され除去されて図9の(2)に帰着される。図11の(2)に示された場合は  $l = l^3$  のときであるが  $l \neq l_3$  の場合も同様である。次に  $l_1 \neq l_2$  の場合は  $l_3$  が  $l_i (i=1, 2)$  に等しいかどうかによらず横断定理か或いは後に出て来る図14の(5), (6)のように  $\Delta_N^2(K)$  から或る Clasp Arc が除去され図9の(2)の場合に帰着される。次に  $\Delta_N^2(K)$  に Ribbon Arcs も存在する場合を考察する：最初に  $l_1$  が Clasp Arc で  $l_2$  が Ribbon Arc の場合は  $l_3$  が Clasp Arc か Ribbon Arc かに分けられるが  $l_3$  が Clasp Arc の場合は図14の(5), (6)のように  $l_2$  が  $\Delta_N^2(K)$  から取り去れる, 又  $l_3$  が Ribbon Arc であつ  $l_i (i=2, 3)$  が異なれば図11の(4), (5)から分かるように曲線分  $C$  に適当な Isotopy を用いて  $l_i (i=2, 3)$  が同時に取り除けるか或いは  $l_2$  だけが取り除けて図9の(2)に帰着される。  $l_1 = l_3$  の場合は  $l_i (i=1, 2)$  の何れかが取り除ける。この論文では使用しないが  $l_1$  に Ribbon Arc の場合も同様である。以上の議論から図11の(1)に示されているような場合は起こり得ない。



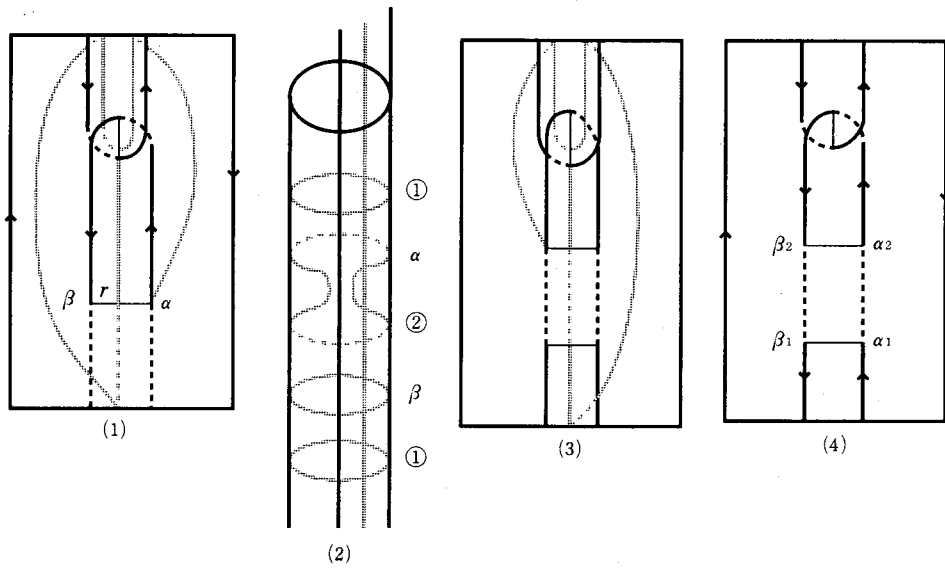


(4)



(5)

图11



(1)

(2)

(3)

(4)



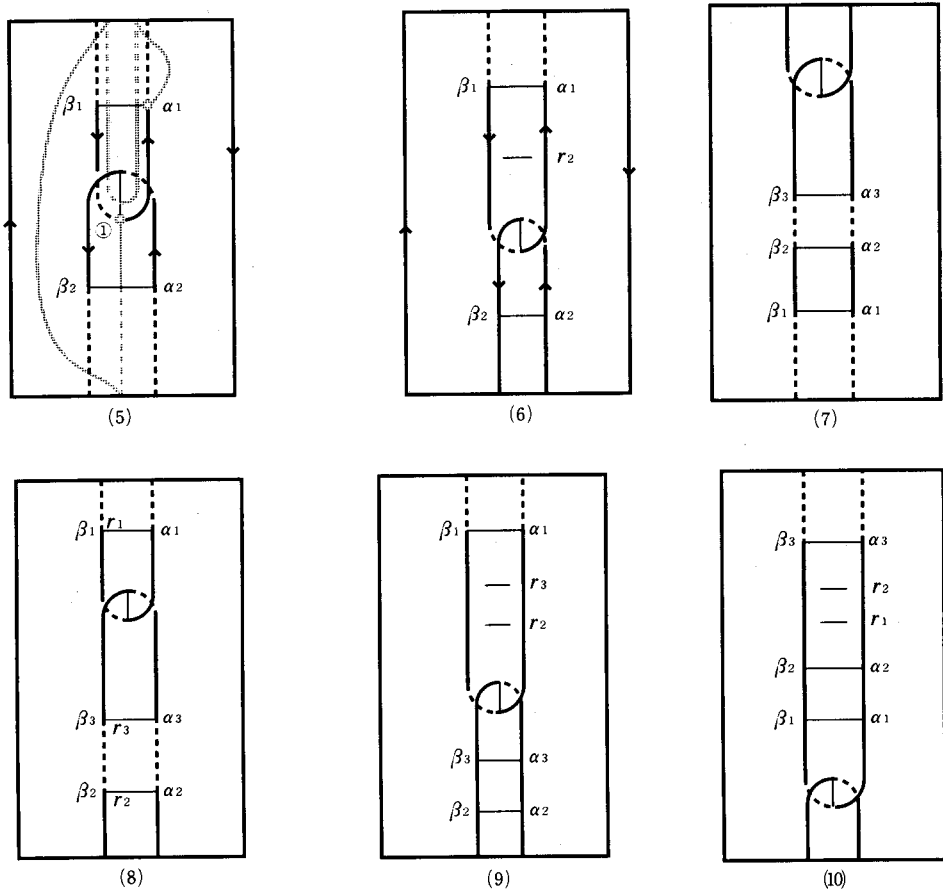


図12

次に  $\Delta_N^2(K)$  の Singular Arcs は唯一つの Clasp Arc と幾つかの Ribbon Arcs から成っている場合を考察する。まず図12の(1)に示されているように Ribbon Arcs が唯一つの場合は図12の(2)に示されている  $\Delta_N^2(K) \cap H^3$  を参考にして、 $\Delta_N^2(K) \cap \partial H^3$  に於いて、Morse 関数  $\rho$  の Level Lines の高度が低い場合は、即ち、 $\{\rho^{-1}[0, \varepsilon]\}$ ;  $\varepsilon$  は十分に小さい正数 には4つの Meridian Circles 或いは4つの Meridional 2-Disks が存在するが、これらを結び目  $K$  の向きに合わせて順次番号を Clasp Arcs には①, ②, Ribbon Arcs には  $\alpha, \beta$  を付ける。このとき Circles ①, ②は  $\alpha$  が存在するので融合しないが、もし融合すれば後に出てくる図14の(5), (6)の方法を用いて  $\Delta_N^2(K)$  から  $r$  を取り去り Ribbon Arc の存在しない  $\Delta_N^2(K)$  に帰着されるか、或いは図9の(1)が起こるが起るるのでこのとき又図14の(5), (6)を参考にして  $r$  を  $\Delta_N^2(K)$  から取り去ることにより  $l$  が除去される。又 Ribbon Arcs の存在の為に①と  $\alpha$  は融合しない、何故ならばこの場合図9の(11), (12)が起こる可能性があるが、このときは Circle ①が  $B_2$  を  $r$  を横切つて下りその後更に  $r$  を横切つて或いは  $B_1$  を上り  $l$  を一度横切つて下り Circle  $\alpha$  と融合することになるがこれらの場合明らかに図9の(11)に於ける  $r_i$  ( $i = 1, 2$ )に対応するものがないので不可能である。同様に①と  $\beta$  も融合しない。更にもし②と  $\alpha$  が融合すれば  $r$  が除去される。図12の(1)から分かるように  $\alpha, \beta$  が Ribbon Arcs を一度横切つて融合はできない。又  $\alpha$  が  $B_1$  を上り  $l$  を横切り

$B_1$ を下り  $\beta$ と融合すれば横断定理により  $r$ が除去される。以上の議論から  $\Delta_N^2(K) \cap \partial H^3$ には4つの Meridian Circles が存在する。

さて  $\Delta_N^2(K)$ に於いて Clasp Arc が1つと Ribbon arcs が2個の場合を考察する：これは図12の(3), (6)から分かるように  $\partial H^3$ 上に  $K$ の向きに合わせて Meridian Circles を6つ書き込み一番上から Clasp Arcs に番号①, ②, Ribbon Arcs に  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ と付ける。さて図12の(3)の場合を考察する。まず Circles  $\alpha_1$ と  $\alpha_2, \beta_1$ と  $\beta_2$ はそれぞれ融合できない。又  $\alpha_2$ と②, 或いは  $\beta_2$ と②はそれぞれ融合すれば  $r_2$ が除去されるので融合できない。次に Circle  $\alpha_i$ は  $\beta_i$  ( $i=1, 2$ )と融合できないことを示す：まず  $\alpha_2$ と  $\beta_2$ は融合できない, 何故ならもし融合すれば  $\alpha_2$ は  $l$ か若しくは  $r_2$ を一度横切り  $\beta_2$ と融合すれば横断定理から何れも  $r_2$ が除去される, 若しくは②を考慮すれば図9の(16)が起り不可能。又  $r_1$ を横切ることもできない。 $\alpha_1$ と  $\beta_2$ が融合すれば  $\alpha_1$ は  $B_1$ を上り  $l$ を一度横切れば  $\alpha_2$ の存在のため不可能, 即ち,  $l$ を横切れば図9の(16)の場合が起り  $l$ を横切れない。更に  $\alpha_1$ が  $r_1$ を横切れるか或いは  $\alpha_1$ が  $r_1$ を  $B_2$ を上り横切ると  $\alpha_2$ を考慮して横断定理から  $r_i$  ( $i=1, 2$ )が除去される, 又  $\alpha_1$ が  $r_2$ を横切れば  $\alpha_2$ を考慮して図9の(16)が起るので不可能である。同様に  $\alpha_2$ と  $\beta_1$ は融合できない, 更に同様の理由により  $\alpha_1$ と  $\beta_1$ も融合できない(図12の(3)を参照)。Circle ①, Circle ②は融合しないがもし融合して1つの Circle となれば  $\alpha_1$ と  $\alpha_2$ は融合しないので横断定理により  $l$ と2つの Ribbon Arcs  $r_i$  ( $i=1, 2$ )が取り除かれるか或いは  $\Delta_N^2(K)$ から  $r_i$  ( $i=1, 2$ )を取り去ることにより不可能。次に Circle ①が Clasp Band  $B_2$ を下り次に  $B_1$ を上り Clasp Arc  $l$ を一度横切って  $B_1$ を下り Circle  $\beta_2$ と融合する場合を考察する：この場合も  $\alpha_1$ と  $\alpha_2, \alpha_2$ と②は融合しないので横断定理を用いて Circle  $\beta_1$ から出発して  $B_2$ を上り  $l$ と交差した点で  $l$ に沿って進み Circle ②と交差した点で  $K$ の向きに沿って進み Circle  $\beta_2$ に戻る閉曲線を境界とする  $2$ -Disk  $D_2$ の存在がするので Ribbon Arc  $r_1$ が除去される(図12の(3)), 或いは Circle ②の所で図9の(16)の場合が起り不可能である。次に図12の(4)に示されているように  $B_2$ を下った Circle ①は Ribbon Arc  $r_i$  ( $i=1, 2$ )の何れか1つを一度横切って Circle  $\beta_2$ と融合する場合を考察する：この場合も横断定理を使用して Ribbon Arcs  $r_i$  ( $i=1, 2$ )が除去される。更に Circle ②は Circles  $\alpha_2, \beta_2$ の何れとも融合しない。以上の議論から Ribbon Arcs の数の帰納法から Circles ①と②はいずれとも融合せずに  $\Delta_N^2(K) \cap \partial H^3$ に於いて  $\partial H^3$ の Meridian Circles として残る。さて  $\Delta_N^2(K) \cap \partial H^3$ に於いて Ribbon Arc  $r_2$ を isotopic に動かして, 即ち,  $\Delta_N^2(K)$ の一部分  $r_2$ の近傍を動かして  $B_1$ の Ribbon Arc  $r_2$ にする。さてここで図12の(5)に示されているように改めて Ribbon Arcs  $r_i$ が Clasp Bands  $B_i$  ( $i=1, 2$ )に1つずつ存在する場合は上の議論と同様にしてこの場合は  $\alpha_1$ と  $\alpha_2$ (同様に  $\beta_1$ と  $\beta_2$ )は融合するかも知れないが Circles ①と②はそれぞれ他の如何なる Circle とも融合せずに  $\Delta_N^2(K) \cap \partial H^3$ に於いて  $\partial H^3$ の Meridian Circles として残る。何故なら Circle ①が  $\alpha_1$ と融合すれば図9の(11), (12)が起り図12の(5)に示されたように Circle ①は  $r_2$ を横切って  $B_2$ を下り更に  $B_1$ を  $r_1$ を横切って上り  $l$ と  $r_1$ を横切り  $B_1$ を下って  $\alpha_1$ と融合するがこれは横断定理から  $r_1$ が除去されるか, 若しくは図9の(11)に図示されている  $r_i$  ( $i=$ )がこの場合  $r_1, r_2, l$ に相当するので不可能である。又図9の(11), (12)が起るので Circle ①は  $r_2$ を横切って  $B_2$ を下り更に  $r_2$ は横切れないので(もし  $r_1$ を横切って  $\alpha_1$ と融合すれば横断定理から  $r_2$ が除去される)  $r_2$ を一度横切って  $\alpha_1$ と融合するがこれは不可能である。従って Circle ①が  $\alpha_1$ と融合しない。Circle ①と  $\alpha_2$ が融合すれば  $\alpha_1$ を考慮して横断定理を用いて  $r_i$  ( $i=1, 2$ )が除去される。同様に Circles ①と  $\beta_i$  ( $i=1, 2$ )も融合しない。Circle ②も同様に  $\alpha_i, \beta_i$  ( $i=1, 2$ )の何れとも融合しない。以上の議論から, 即ち, ①と②は例えば  $\alpha_1, \beta_1$ の何れとも融合しないので  $r_1$ を  $\Delta_N^2(K)$ から取り去ることができて Ribbon Arcs の数についての帰納法が成り立ち Circles ①と②はそれぞれ

他の何れとも融合せずに  $\Delta_N^2(K) \cap \partial H^3$  に於いて  $\partial H^3$  の Meridian Circles として残る。次に図 12 の(6)の場合を考察する：この場合は  $\alpha_1$  の所で図 9 の(16)が起こるので Circles ①, ②が融合しない。まず Circle ①が  $\alpha_1$  と融合しないことを示す：この場合は図 9 の(11), (12)が起こる。Circle ①が  $r_2$  を横切つて  $B_2$  を下り  $r_1$  を横切つて直ぐ  $\alpha_1$  と融合する場合は横断定理を用いて  $r_2$  が除去されるか、或いは  $\Delta_N^2(K)$  から  $r_2$  を取り除き  $r_1$  との交点は容易に取り外せるので図 9 の(4)の場合に帰着される。次に Circle ①が  $r_2$  を横切つて  $B_2$  を下り  $B_1$  を  $r_1$  を横切つて上り  $l$  を一度横切り更に  $r_1$  を横切り  $\alpha_1$  と融合する場合は横断定理から  $r_2$  が除去されるか、若しくは図 9 の(11)に図示されている  $r_1, r_2$  が  $l_1$  と  $r_1$  或いは  $r_2$  と  $r_1$  に相当するがこの場合は 2-Disk が張れないので不可能である。次に Circle ①が  $\alpha_2$  と融合しないことを示す：この場合は Circle ①が  $r_2$  を横切つて  $A_2$  を下るので  $\alpha_1$  を考慮すれば図 9 の(16)が起こり不可能である。以下同様の理由により Circle ①は②,  $\beta_i (i=1, 2)$  とは融合できない。次に Circle ②が  $\alpha_2$  が融合すれば  $r_2$  が除去される。同様に②は  $\beta_2$  と融合しない。次に②と  $\alpha_1$  との融合を考察する：もし Circle ②が  $r_1$  を横切れば  $\alpha_2$  を考慮すれば横断定理により  $r_2$  が除去される。もしも Circle ②が  $r_1$  を横切らなければ  $r_2$  を横切るので  $\alpha_2$  を考慮すれば図 9 の(14)が起こるので不可能である。同様に Circle ②は  $\beta_1 (i=1, 2)$  とは融合できない。以上の議論から Ribbon Arcs の数の帰納法が成り立ち Circles ①と②は融合せずに  $\Delta_N^2(K) \cap \partial H^3$  に於いて  $\partial H^3$  の Meridian Circles として残る。

次に Clasp Arcs が 1 つで Ribbon Arcs  $r_i (i=1, 2, 3)$  が 3 つの場合を考察する。この場合も上の議論と同様に Ribbon Arcs の数による帰納法で証明される。図 12 の(7)に示された場合を考察する：最初  $\alpha_i, \alpha_j (i, j=1, 2, 3, i \neq j)$  は何れも融合しないことを注意する。Circle ①と②が融合すれば  $r_i (i=1, 2)$  か若しくは  $r_i (i=2, 3)$  が除去されるので融合できないか、或いは  $\Delta_N^2(K)$  から  $r_i (i=1, 2)$  を取り除くことにより不可能である、又 Circle ②と  $\alpha_3, \beta_3$  は明らかに融合しない。次に Circle ②と  $\alpha_2$  との融合を考察する：このとき Circle ②は  $B_1$  を下り  $r_i (i=1, 3)$  の何れかを横切り  $\alpha_2$  と融合するが横断定理を用いて  $r_i (i=1, 2, 3)$  か  $r_i (i=2, 3)$  の何れかが除去されるか若しくは  $\alpha_3$  を考慮すれば図 9 の(16)が起こり不可能である、若しくは Ribbon Arc を 1 つ  $\Delta_N^2(K)$  から取り去り Ribbon Arcs 2 つの場合に帰着される。次に Circle ②と  $\alpha_1$  の融合を考察する：②が  $B_1$  を下り  $r_i (i=2, 3)$  を順次横切り  $\alpha_1$  と融合すれば横断定理から  $r_i (i=1, 2, 3)$  が除去されるか、或いは  $\alpha_i (i=1, 2)$  を考慮すれば図 9 の(16)が起こるので不可能である。次に②が  $B_1$  を下り  $r_i (i=1, 2, 3)$  の 1 つを横切り  $B_1$  を上り  $l$  を横切り  $B_1$  を下り  $\alpha_1$  と融合すれば  $r_3$  か  $r_i (i=2, 3)$  が除去される、若しくは  $\alpha_i (i=2, 3)$  の何れかを考慮すれば図 9 の(16)が起こる。次に Circle ①と  $\alpha_1$  との融合を考察する：このとき図 9 の(12)の場合が起こり、この場合は①が  $r_i (i=3, 2, 1)$  を順次横切つて  $B_2$  を下り、このとき  $B_1$  を上り  $l$  を横切ることには出来ないので、 $r_i (i=1, 2, 3)$  の何れか 1 つを横切つて  $\alpha_1$  と融合する。このとき  $r_i (i=2, 3)$  か若しくは  $r_i (i=1, 2)$  が除去される。次に①と  $\alpha_2$  との融合を考察する：この場合も図 9 の(12)が起こり  $\alpha_1$  を考慮すれば  $r_i (i=2, 3)$  か或いは  $r_i (i=1, 2)$  が除去される。次に①と  $\alpha_3$  との融合を考察する：この場合図 9 の(9)が起こる。まず①は  $r_i (i=3, 2, 1)$  を順次横切り  $B_2$  を下り  $r_i (i=1, 2, 3)$  の何れか 1 つ、若しくは  $B_1$  を上り  $l$  を横切り  $\alpha_3$  と融合する。例えば  $r_i (i=1, 2, 3)$  の 1 つを横切つて  $\alpha_3$  と融合すれば横断定理により  $r_i (i=1, 2)$  か  $r_i (i=2, 3)$  が除去される。従つて Circle ①は他の何れの Circle とも融合しない。上の議論から Circle ②は  $\alpha_3, \beta_3$  の何れとも融合しないので上の議論のように Ribbon Arc  $r_3$  を isotopic に動かして図 12 の(8)に示されているように  $B_1$  の Ribbon Arc  $r_1$  にする、この場合も Circle ①, ②が  $\Delta_N^2(K) \cap \partial H^3$  の 2 つの Meridian Circles として残る。更に例えば図 12 の(9)に示された場合は簡単のため図 12 の(10)の場合に変形して考察すればよい。この場合も Rib-

bon Arcs の個数についての帰納法で Circle ①, ②が  $\Delta_N^2(K) \cap \partial H^3$  の 2つの Meridian Circles として残る。何故なら  $B_1$  に存在する Ribbon Arcs の内番号の若い  $r_1$  の境界点  $\alpha_1, \beta_1$  と ①との融合を考察する：例えば図12の(10)に示されている場合①と  $\alpha_1$  とが融合すれば図9の(11), (12)のことが起こる。この場合は横断定理から  $r_i$  ( $i = 2, 3$ ) が除去されるか、或いは図9の(11)に図示されている  $r_1, r_2$  がこの場合の  $r_2, r_3$  に相当するのでこれは不可能である。更に②と  $\alpha_1$  との融合は  $\alpha_3$  を考慮すれば図9の(16)が起こり不可能である。同様の理由により②と  $\beta_1$  も融合しない。以上の議論から①, ②は  $\alpha_1, \beta_1$  と融合しないので、 $\Delta_N^2(K)$  から Ribbon Arc  $r_1$  を取り去ったとき、帰納法の仮定から、①, ②はそれぞれ他の如何なるものとも融合しない。一般に Clasp Arc が1つと Ribbon Arcs が  $n$  個存在する場合も上の議論と同様に  $\Delta_N^2(K) \cap \partial H^3$  には少なくとも2つの Meridian Circle が存在することが Ribbon Arcs の数についての帰納法で証明される。

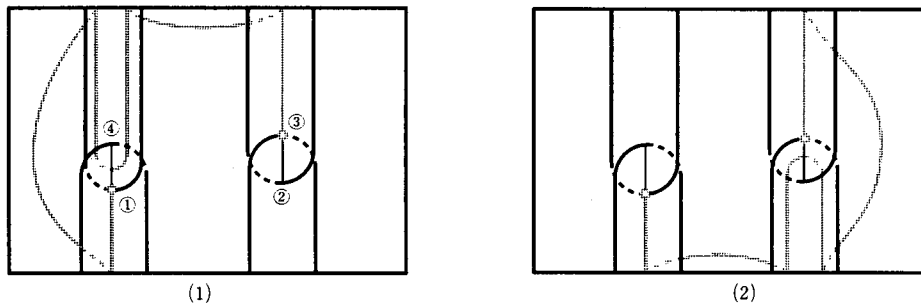


図13

さて次に  $\Delta_N^2(K)$  の Clasp Arcs  $l_i$  ( $i = 1, 2$ ) の Clasp Bands  $B_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) の何れにも Ribbon Arc が存在しない場合を考察する。さて Circle ④から Level Lines が流れ出て Circle ①と融合する場合は横断定理により 2-Disk  $D^2$  が存在するために Clasp Arc  $l_1$  が除去されるので Circle ①と④は融合できない(図13の(1))。或いは注意深く、即ち、Circle ④と Circle ①が融合した場合の Circle をそのままにして  $l_2$  を取り去ることにより Clasp Arc が唯一つの Singular 2-Disk の場合に帰着される。同様の理由により Circles ②, ③は融合できない。又明らかに Circles ①, ②と Circles ③, ④もそれぞれ融合できない。次に Circle ①が Circle ④を横切って Circle ③と融合する場合は図13の(1)により Circle ①から出発し  $B_{21}$  を下り  $B_{11}$  を上り Clasp Arc  $l_1$  を横切って下り  $B_{12}$  を上り Circle ③と融合する場合は再び横断定理により 2-Disk  $D^2$  が存在して  $l_i$  ( $i = 1, 2$ ) が除去される。次に図13の(2)により Circle ①から出発し  $B_{21}$  を下り  $B_{22}$  を上り  $l_2$  を横切り  $B_{22}$  を下り  $B_{12}$  を上り Circle ③と融合する場合も横断定理により 2-Disk  $E^2$  が存在するので  $\Delta_N^2(K)$  から  $l_i$  ( $i = 1, 2$ ) が除去される。更に Circle ①が遠回りして Circles ④, ③を順次横切り Circle ②と融合できない、この場合は  $l_i$  ( $i = 1, 2$ ) のすべてが除去される。次に Circle ④との融合についても Circle ①の場合と全く同様の理由により他の何れとも融合できない。以上の議論から  $\Delta_N^2(K) \cap \partial H^3$  の中には4つの  $\partial H^3$  の Meridian Circles ①, ②, ③, ④が存在する。

さて次に  $\Delta_N^2(K)$  の Clasp Arcs  $l_i$  ( $i = 1, 2$ ) が2つで Clasp Bands  $B_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) の何れかの1つに Ribbon Arc が存在する場合を考察する。このとき図14に示されているように Clasp Band  $B_{ij}$  ( $i = 1, 2$ ) の何れかに1つの Ribbon Arc  $r$  が存在する場合を考える。このとき Clasp

Arcs と Ribbon Arc の各境界点に若しくはこれらの点を囲む Circles を図14のように  $K$  の向きに合わせて Ribbon Arc の境界点には  $\alpha, \beta$ , Clasp Arcs の境界点にはそれぞれ番号①, ②, ③, ④を付ける。さて Solid Torus  $H^3$  を参考にして Circle ①から Level Lines が流れ出て Circle  $\alpha$  と融合する場合は Ribbon Arc が取り去られる。同様の理由により Circle ①は Circle  $\beta$  と融合できない。さて次に Circle ①から Level Lines が流れ出て Circle  $\alpha$  を横切って Circle ②と融合する場合は考察する：この場合の Level Lines の図式の1つは図14の(1)に示されている。この場合  $\alpha$  は  $r$  を横切るのので図14の(1)の場合が起これば  $\alpha$  の所で図9の(1)か①を考慮すれば Surgrey をして何れの場合も  $l_1$  が除去されるので起こらない、従って Circle ①は  $B_{21}$  を下り  $B_{11}$  を上り  $r$  を横切るが、このとき  $\alpha$  は  $r$  を横切るのので図9の(1)に帰着され 2-Disk  $D^2$  で Surgery して  $l_1$  が除去される。もしも図14の(2)のように Circle ①が  $B_{21}$  を下り  $r$  を横切らなければ  $\alpha$  に注意して  $B_{11}$  の Ribbon Arc を取り去れば図14の(5), (6)から分かるように  $K$  の Singular 2-Disk  $\Delta_N^2(K)$  で Ribbon Arc の無いものに帰着される、この場合の  $\Delta_N^2(K)$  は Clasp Arcs が2つ Ribbon Arc が無いので図13の場合に帰着される。従って  $\partial H^3$  上で Circle ①は  $\alpha$  を横切って Circle ②とは融合できない。

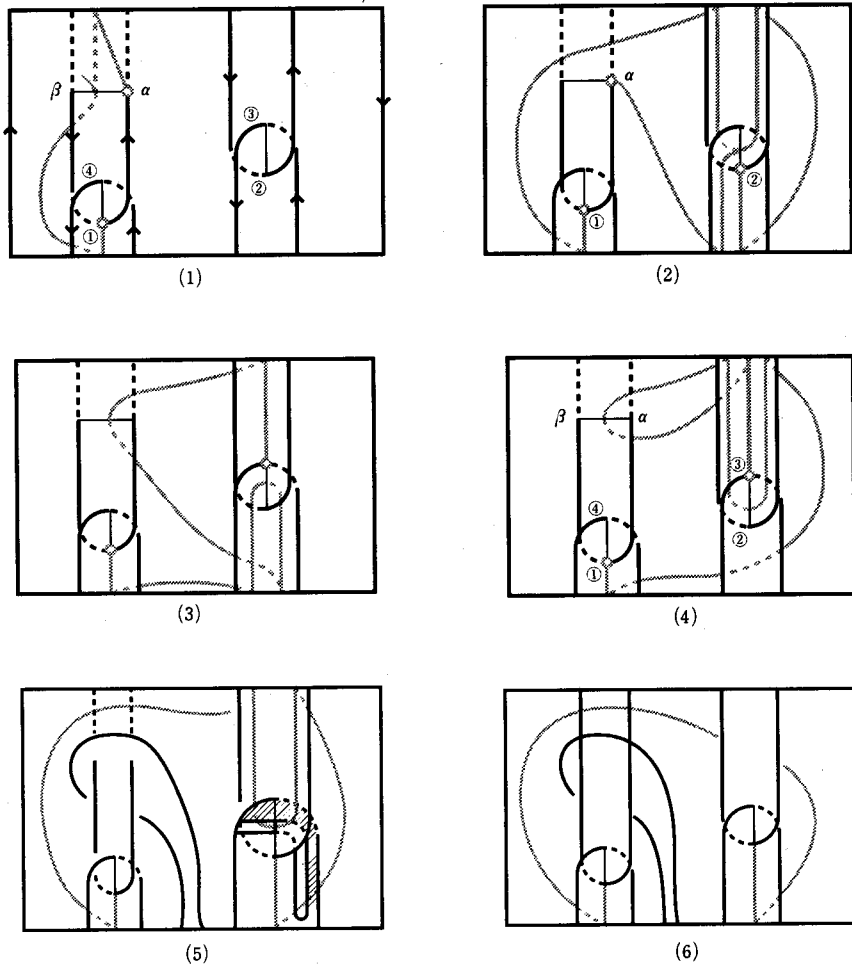


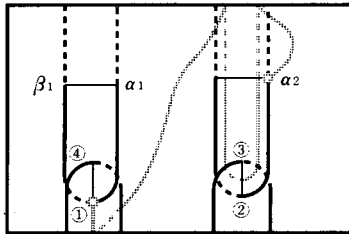
図14

次に  $\partial H^3$  上で Circle ①から Level Lines が流れ出て Circle  $\alpha$  と②を横切って Circle ③と融合する場合を考察する：この場合は1つの図式は図14の(3)に示されている場合は Circle ①から Level Lines が流れ出て  $B_{22}$  を上り  $l_2$  を横切り下り  $r$  を横切り  $B_{12}$  を上り③と融合する場合は  $\alpha$  と②が融合するかどうかにかかわらず横断定理により  $l_i$  ( $i = 1, 2$ ),  $r$  が除去されるか、或いは  $\alpha$  と②が融合しない場合は横断定理を用いて②の所で  $l_2$  とその近傍の2枚の曲面を考慮すれば  $l_2$  か或いは  $r$  が除去されるので不可能である。次に図14の(4)に示されているように①が  $B_{12}$  を上り  $l_2$  を横切って下り更に  $r$  を横切って③と融合すれば②を考慮して図9の(16)が起り不可能である。次に  $\partial H^3$  上 Circle ①から Level Lines が流れ出て Circle  $\alpha$ , ②, ③を順次横切って Circle ④と融合する場合は横断定理から  $l_i$  ( $i = 1, 2$ ),  $r$  のすべてが除去される。次に Circle ④との融合を考察する。最初 Circle ④と Circle  $\beta$  との融合を考察する：この場合は図9の(11)に示された場合が起こる、従って Circle ④は  $r$  を一度横切り  $B_{11}$  を下った後  $l_i$  ( $i = 1, 2$ ),  $r$  の何れか1つと横切り  $\beta$  と融合することになる。まず Circle ④が  $r$  を一度横切り  $B_{11}$  を下った後  $B_{21}$  を上り  $l_1$  横切り  $B_{21}$  を下り  $\beta$  と融合すれば  $\Delta_N^2(K)$  から  $l_2$  を取り去ることにより Clasp Arc 1つと Ribbon Arc 1つの Singular Disk  $\Delta_N^2(K)$  に帰着されて不可能である。又 Circle ④が  $r$  を一度横切り  $B_{11}$  を下った後  $B_{12}$  ( $i = 1, 2$ ) の何れかを上り  $l_2$  を横切って下り  $\beta$  と融合する場合も不可能、例えば横断定理により  $r_2$  が除去される。最後に Circle ④が  $r$  を一度横切り  $B_{11}$  を下った後又  $r$  を横切って  $\beta$  と融合する場合は図9の(11)に図示されている  $r_i$  ( $i = 1, 2$ ) が何れも  $r$  に相当するので明らかに不可能。以上の議論から Circle ④は  $\beta$  と融合はできない。次に Circle ④と Circle  $\alpha$  との融合を考察する：この場合  $\partial H^3$  上 Circle ④が Circle  $\beta$ , ①を横切って  $\alpha$  と融合すれば横断定理により  $l_1$  と  $r$  が除去されるか若しくは  $\beta$  を考慮すれば  $l_1$  が除去される。同様の理由により  $\partial H^3$  上④が  $\beta$  を横切って①と融合できない。次に  $\partial H^3$  上 Circle ④の上方の Circles ③, ②を順次横切って Circle  $\alpha$  と融合すれば横断定理により  $l_2$  が除去される。従って Circles ①と④の2つの Meridian Circles が存在する。

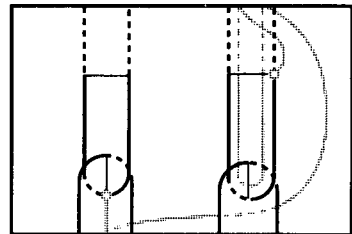
さて次に  $\Delta_N^2(K)$  の Clasp Arcs  $l_i$  ( $i = 1, 2$ ) の場合で、更に Clasp Bands  $B_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) の内  $B_{1j}$  ( $j = 1, 2$ ) に1つの Ribbon Arc が存在する場合を考察する。このとき図15の(1)に示されているように Clasp Bands  $B_{11}, B_{12}$  に Ribbon Arc  $r_i$  ( $i = 1, 2$ ) が存在する場合を考える。このとき場合によっては適当な Isotopy を用いて  $B_{12}$  の Ribbon Arc  $r_2$  を  $B_{22}$  の Ribbon Arc に移動させても或いは取り去ってもよい。さて Clasp Arc と Ribbon Arc の各境界点に若しくはこれらの点を囲む Circles を図15のように  $K$  の向きに合わせて番号①, ②, ③, ④を付け、Ribbon Arcs  $r_i$  ( $i = 1, 2$ ) の境界点をそれぞれ  $\alpha_i, \beta_i$  ( $i = 1, 2$ ) とする。さて Circle ①は Ribbon Arc  $r_1$  の境界点  $\alpha_1, \beta_1$  の何れとも融合しない。次に Circles ①, ④は Ribbon Arc  $r_2$  の境界点  $\alpha_2, \beta_2$  の何れとも融合しないことを示す：Circle ①が  $\partial H^3$  上を  $\alpha_1$  を横ぎって  $\beta_2$  と融合する場合は Circle ①は  $B_{21}$  を下り  $r_i$  ( $i = 1, 2$ ) を横切れないので  $B_{22}$  を上り Clasp Arc  $l_2$  を一度横切って  $B_{22}$  を下り Circle  $\beta_2$  と融合する。この場合は  $\alpha_1$  を考慮すれば図9の(16)に帰着され起らない。もしも①が  $B_{21}$  を下り  $r_2$  を横切れば横断定理から  $r_1$  が除去される。次に①と②の融合を考察する： $\alpha_1$  と  $\beta_2$  が融合する場合は  $\Delta_N^2(K)$  から Ribbon Arcs  $r_i$  ( $i = 1, 2$ ) を取り去ることにより起らない。次に  $\alpha_1$  と  $\beta_2$  が融合しない場合はまず①が  $B_{21}$  を下り  $r_1$  を横切れないので  $r_2$  を横切った後  $r_1$  が若しくは  $B_{21}$  を上り  $l_1$  を横切って下り②と融合するとき  $\alpha_1$  か  $\beta_2$  を考慮すれば図9の(16)が起り不可能。次に①が  $B_{21}$  を下り  $B_{22}$  を上り  $l_2$  を横切って下る場合は  $\alpha_1$  を考慮して図9の(16)が起り不可能。更に①が  $B_{21}$  を下り  $r_1$  を横切って  $B_{11}$  を上る場合は  $\alpha_1$  を考慮すれば図9の(1)が起り不可能。以上の議論から①と②は融合できない。次に Circle ①が  $\partial H^3$  上を  $\alpha_1, \beta_2$ , ②を順次横切って  $\alpha_2$  と融合する場合を考察する：このときも上と同様に Circle ①

は  $B_{21}$  を下り  $B_{12}$  を上り Clasp  $Arc l_2$  を一度横切って  $B_{12}$  を下り Circle  $\alpha_2$  と融合する。この場合も図15の(1)から  $\alpha_1$  と図9の(16)を考慮すれば不可能。更に図15の(2)に示された場合は Circle ②と図9の(16)を考慮すれば不可能。なお、Circle ①が  $r_1$  を横切って行く場合は  $\alpha_1$  を考慮に入れて  $r_1$  が除去されるので  $r_1$  を横ぎれない。更に①が  $r_2$  を横切る場合横断定理から  $r_1$  が除去される。図15の(3)の場合は Circle  $\alpha_1, \beta_2$  及び②と図9の(16)を考慮すれば不可能。なお①が  $\partial H^3$  上を  $\beta_1$  を横切って④と融合はしない、更に④をも横切る場合は横断定理から  $l_1, r_1$  が除去される。従って以上の議論から Circle ①は Circles  $\alpha_2, \beta_2$  の何れとも融合できない。次に①と③の融合は③が  $B_{12}$  を  $r_2$  を横切って下るので  $\alpha_2$  を考慮すれば図9の(1)が起これり  $l_2$  が除去される。又  $\partial H^3$  上②が④,  $\beta_1$  を順次横切り①と融合すれば④を考慮して図9の(16)が起これり不可能である。次に Circle ④と Circle  $\beta_1$  との融合は図9の(11)を参考にすれば Circle ④が  $r_1$  を横切って  $B_{11}$  を下り  $B_{21}$  を上り  $l_1$  を横切り  $B_{21}$  を下り  $\beta_1$  と融合する場合は横断定理により  $r_1$  と  $l_1$  が除去される。Circle ④が  $r_1$  を横切って  $B_{11}$  を下り  $B_{22}$  を上り  $l_2$  を一度横切り  $B_{22}$  を下り  $\beta_1$  と融合する場合は不可能。同様に Circle ④が  $r_1$  を横切って  $B_{11}$  を下り  $B_{12}$  を上り  $l_2$  を一度横切り  $B_{12}$  を下り  $\beta_1$  と融合する場合も不可能。図9の(11)の場合が起これらなければ Circle ④と Circle  $\beta_1$  と融合はない。次に Circle ④と③との融合は図9の(11)が起これるが図9の(14)に帰着されるので  $l_i, r_i$  ( $i = 1, 2$ ) のすべてが除去される。次に Circle ④と Circle  $\alpha_2$  との融合を考察する：さて  $\partial H^3$  上で Circle ④は  $K$  の向きに沿って  $\beta_1$  を横切れば図9の(1)の場合に帰着されて  $l_1$  が除去されるので  $\beta_1$  を横切ることはできない。従って Circle ④は  $K$  の向きに逆らって Circle ③を横切って Circle  $\alpha_2$  と融合することになる。この場合は図15の(4)に示されている場合は横断定理を用いれば Ribbon  $Arc r_i$  ( $i = 1, 2$ ) が除去される、或いは③を考慮すれば図9の(16)が起これり不可能。Circle ④と②の融合は③を考慮すれば図9の(16)が起これり不可能。更に Circle ④は  $K$  の向きに逆らって Circle ③,  $\alpha_2, \beta_2$  を横切って Circle  $\beta_2$  と融合する場合は考察する：この場合は横断定理を用いて  $r_2$  と  $l_2$  が同時に除去されるか、③を考慮すれば起これらない。以上の議論から Circles ①, ④は Circles  $\alpha_2, \beta_2$  と融合しない。Int  $\Delta_N^2(K)$  の一部分の曲面を動かして、即ち、 $r_2$  を動かしてこれが  $B_{22}$  の Ribbon  $Arc r_2$  になるようにする(図15の(5))。さて改めて図15の(5)のように Ribbon  $Arcs r_i$  ( $i = 1, 2$ ) が  $B_{11}$  と  $B_{22}$  にそれぞれ存在する場合は考察する。さて Circle ①は  $\alpha_1, \beta_1$  の何れとも融合しない。 $\partial H^3$  上 Circle ①は  $\beta_1$  を横切って Circle ④との融合は  $\beta_1$  を考慮すれば図9の(1)が起これり  $l_1$  が除去される。 $\partial H^3$  上 Circle ①が  $\beta_1, \alpha_1$  を横切って  $\alpha_2, \beta_2, \beta_2, \alpha_1$  との融合は横断定理を用いれば  $r_1, l_1$  が除去される。次に Circle ①が  $K$  の向きに沿って下り Circle  $\alpha_1$  を横ぎって Circle ②と融合する場合は  $r_2$  を  $B_{12}$  の Ribbon  $Arc$  に移した後横断定理を用いて  $l_i, r_i$  ( $i = 1, 2$ ) がすべて除去される。Circle ①が  $K$  の向きに沿って下り Circle  $\alpha_1, \beta_1$  を横ぎって Circle  $\beta_2$  と融合する場合は考察する：①が  $B_{21}$  を下り  $r_1$  を横切れば  $\alpha_1$  を考慮して図9の(1)が起これり  $l_1$  が除去される、又①が  $B_{21}$  を下り  $B_{12}$  を上り  $l_2$  を横切れば  $\alpha_1$  を考慮すれば図9の(16)が起これり不可能。更に①が  $B_{21}$  を下り  $r_2$  を横切れば次には  $l_i$  ( $i = 1, 2$ ),  $r_1$  の何れかを横切るので②を考慮すれば図9の(16)が起これり不可能(図15の(6))。次に Circle ①が  $K$  の向きに沿って下り Circle  $\alpha_1, \beta_1, \beta_2$  を横ぎって Circle ③と融合する場合は上と同様の理由か若しくは横断定理を用いれば  $r_2, l_2$  が同時に除去される。次に Circle ①が  $K$  の向きに沿って下り Circle  $\alpha_1, \beta_1, \beta_2, \beta_2$  を順次横ぎって Circle  $\alpha_2$  と融合する場合も同様に横断定理により  $r_2, l_2$  が同時に除去される。これ以降について Circle ①が Circles ④,  $\beta_1$  と融合する場合は同様の理由により不可能。従って Circle ①, ②は Int  $\Delta_N^2(K) \cap \partial H^3$  に於いて Meridian Circles として残る。さて次に Circle ④が Circles  $\alpha_2, \beta_2, \beta_2, \alpha_1$  と融合する場合は考察する。Circle ④は  $\alpha_2$  と融合すれば  $r_1$  の存在のため図9の(11)が起これる：④が  $r_1$  を横切り  $B_{11}$  を下り  $B_{12}$  を上り  $l_2$  を

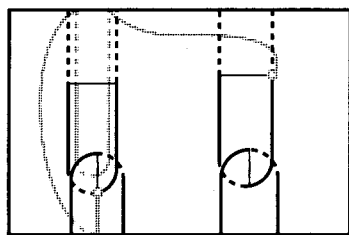
横切り  $B_{12}$ を下り  $a_2$ との融合は図9の(11)に図示された  $r_i (i = 1, 2)$ がこの場合は  $r_1, l_2$ に対応するので  $r_2$ を考慮すれば不可能。又④が  $r_1$ を横切り  $B_{11}$ を下り  $B_{21}$ を上り  $l_1$ を横切り  $B_{21}$ を下り  $a_2$ と融合は横断定理により  $l_1$ と  $r_1$ が除去される, 或いは図9の(11)に図示された  $r_i (i = 1, 2)$ に相当する  $r_1$ と  $l_1$ を考慮すれば不可能。更に④が  $r_1$ を横切り  $B_{11}$ を下り  $r_2$ を横切って  $B_{22}$ を上り  $l_2, r_2$ を横切り  $B_{23}$ を下り  $a_2$ と融合も横断定理により  $l_1$ と  $r_1$ が除去される。以上の議論から Circle ④は Circle  $a_2$ と融合できない。さて  $\partial H^3$ 上で Circle ④が Circle  $a_2$ を横切って Circle ③と融合する場合は  $r_2$ を  $B_{12}$ の Ribbon Arc に移動した後横断定理を用いて  $l_i, r_i (i = 1, 2)$ がすべて除去される。次に Circle ④が  $\partial H^3$ 上 Circle  $a_2, ③$ を順次横切って Circle  $\beta_2$ との融合を考察する: Circle ④が  $r_1$ を横切り  $B_{11}$ を下り  $B_{21}$ か  $B_{12}$ を上り  $\{l_i; i = 1, 2\}$ のいずれか1つを横切って下り Circle  $\beta_2$ と融合する場合は Circle ③か  $a_2$ と図9の(16)を考慮すれば不可能(図15の(7))。④が  $r_1$ を横切り  $B_{11}$ を下り  $r_2$ を横切って Circle  $\beta_2$ と融合する場合は③を考慮して横断定理から  $r_2$ と  $l_2$ が除去される。或いは④が  $r_1$ を横切り  $r_1$ を再び横切り  $\beta_2$ と融合すれば横断定理を用いて  $2\text{-Disk}D^2$ が存在するので  $r_1$ が除去される。次に Circle ④が Circle  $a_2, ③, \beta_2$ を順次横切って Circle ②との融合を考察する: この場合は図15の(8)から分かるように Circle  $\beta_2$ が Ribbon Arc  $r_2$ で交差するので図9の(1)に帰着されて  $l_2$ が除去される。更に  $\partial H^3$ 上で Circle ④が Circle  $a_2, ③, \beta_2, ②$ を順次横切って Circle  $a_1$ と融合する場合は横断定理により  $l_2, r_2$ が除去される。次に  $\partial H^3$ 上で Circle ④が  $\beta_1$ を横切って下る場合は  $\beta_1$ の存在のため不可能。従って少なくとも Circles ①, ②, ③, ④が  $\Delta_N^2(K) \cap \partial H^3$ に Meridian Circles として残る。



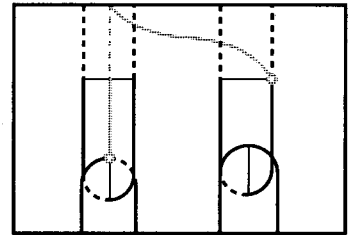
(1)



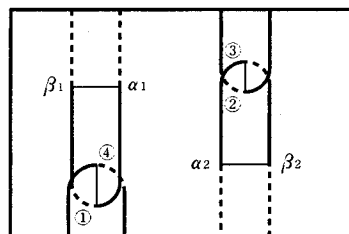
(2)



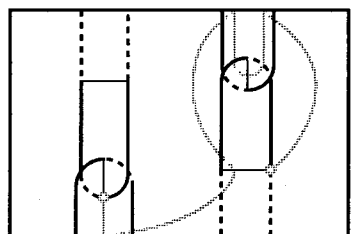
(3)



(4)



(5)



(6)



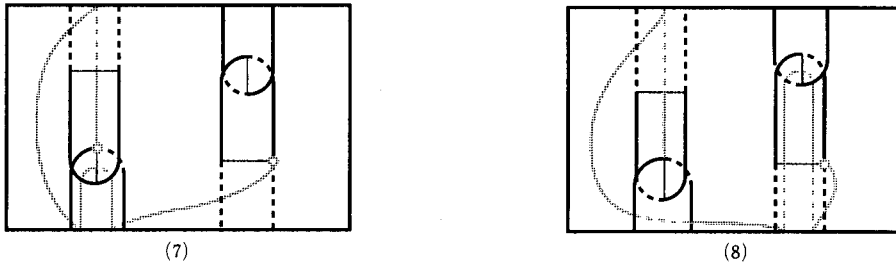


図15

さて一般に Clasp  $Arcs l_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n + m$ ), Ribbon  $Arcs r_i$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ) が存在する Singular 2-Disk  $\Delta_N^2(K)$  と Solid Torus  $H^3$  について考察する。特に  $\Delta_N^2(K)$  の Clasp Bands  $B_{ij}$  ( $i = 1, 2, j = -m, -m + 1, \dots, -1, 1, 2, \dots, n$ ) の内 1 つの組  $B_{ij}$  ( $i = 1, 2$ ) がそれぞれ少なくとも 1 つ以上の Ribbon Arcs をもてば今までの議論から Clasp  $Arc l_j$  の 2 つの境界点を含む Circles 例えば ①と  $\textcircled{2n}$  が  $\Delta_N^2(K) \cap \partial H^3$  に於いて Meridian Circles として残る。

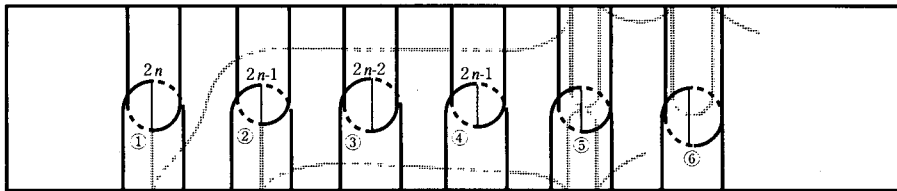


図16

さて最初に Clasp Bands  $B_{ij}$  ( $i = 1, 2, j = -m, -m + 1, \dots, -1, 1, 2, \dots, n$ ) に於いて  $m = 0$  として,  $B_{1i}, B_{2i}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) の何れにも Ribbon Arc が存在しない場合を考察する。この場合図16のように  $K$  の向きに合わせて左側上から順次番号 ①, ②,  $\dots$ ,  $\textcircled{2n}$  を付ける。今までの議論により Circle ①と Circle  $\textcircled{2n}$  は融合しないし, 又隣り合う 2 つの Circles は何れも融合しない。さて Circle ①が  $H^3$  の下方に向かって Circle ②,  $\dots$ ,  $\textcircled{2n}$  の何れの Circles とも融合しないこと帰納法で示す。さて Circle ①と②,  $\textcircled{2n}$  はそれぞれ融合しない, 又  $\textcircled{2n}$  は  $\textcircled{2n-1}$  と融合しない。従って帰納法の仮定により Circle ①は Circles ②,  $\dots$ ,  $\textcircled{k}$  ( $2 \leq k \leq n-1$ ) の何れの Circle とも融合しないと仮定する。このとき Circle ①と Circle  $\textcircled{k+1}$  とも融合しないことを示す。このとき図16から分かるように Circle ①が Clasp Band  $B_{21}$  を下った後  $B_{15}$  を上り  $l_5$  を一度横切って  $B_{15}$  を下るとする。このとき Circle ②は  $B_{22}$  を下った後  $B_{25}$  を上り  $l_5$  を一度横切って  $B_{25}$  を下ることになる。このとき  $B_{15}$  を下った Circle ①が例えば  $B_{16}$  を上り  $l_6$  を一度横切るとするとき, Circle ③の所で図9の(16)が起り不可能である, 或いは図14の(5), (6)のように  $B_{22}$  を動かして  $l_2$  を取り去り次に Isotopy を用いて②から出て  $l_5$  と交差する曲面を取り去り更にそれらの間に存在する Clasp  $Arcs l_i$  ( $i = 3, 4$ ) をも取り去ることにより不可能である。同様に Circle ①が  $B_{21}$  を下った後に  $B_{25}$  を上り  $l_5$  を一度横切って  $B_{25}$  を下るとする。このとき Circle ②は  $B_{22}$  を下った後  $B_{15}$  を上り  $l_5$  を横切ぎれない, 即ち, 図9の(16)が起り不

可能である。同様の理由から Circle ①が  $B_{21}$ を下った後  $B_{13}$ を上り  $l_3$ を一度横切って  $B_{13}$ を下るとき Circle ②は  $B_{23}$ を下り直ちに  $B_{22}$ を上り  $l_3$ を横切るので  $l_i$  ( $i = 2, 3$ )が除去される。又同様の理由から Circle ①が  $B_{21}$ を下った後  $B_{23}$ を上り Clasp  $\text{Arc}l_3$ を一度横切って  $B_{23}$ を下ることもできない。以上の議論から Circle ①は  $B_{21}$ を下った後直ちに  $B_{i2}$  ( $i = 1, 2$ )の何れかを上り  $l_2$ を一度横切ぎることになる。従ってこの場合は同時に  $l_i$  ( $i = 1, 2$ )が除去されるか若しくは  $l_2$ のみが除去される。従って Circle ①は Circles ②,  $\dots$ ,  $(k+1)$ の何れとも融合しないこととなり帰納法が成立する。Circle ①が下方の Circles  $(2n)$ ,  $(2n-1)$ ,  $\dots$ ,  $(n+1)$ と融合しないことは明らかである。同様の理由で Circle  $2n$ が下方の Circle ①, ②,  $\dots$ ,  $(2n-1)$ の何れとも融合しない。上の議論と同様の理由で Circle  $2n$ は上方の Circle  $(2n-1)$ ,  $(2n-2)$ ,  $\dots$ , ②, ①の何れとも融合できない。以上の議論から  $\Delta_N^2(K) \cap \partial H^3$ には Circles ①,  $(n)$ ,  $(n+1)$ ,  $(2n)$ の4つが Meridian Circlesとして残る。さてここで例えば Clasp  $\text{Arc}l_n$ を  $\Delta_N^2(K)$ から取り去り上の議論を続けることにより  $\Delta_N^2(K) \cap \partial H^3$ には  $2n$ 個の Meridian Circlesが存在することが分かる。

さて次に Clasp Bands  $B_{ij}$  ( $i = 1, 2, j = -m, -m+1, \dots, -1, 1, 2, \dots, n$ )に於いて  $m = 2, n \geq 3$ で, Clasp Bands  $B_{i1}$  ( $i = 1, 2$ )の何れか一方に1つの Ribbon  $\text{Arc}r_1$ が存在する場合を考察する。Clasp  $\text{Arc}sl_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), Ribbon  $\text{Arc}sr_i$  ( $i = 1, 2, \dots, p, p \geq 1$ )が存在する Singular 2-Disk  $\Delta_N^2(K)$ と Solid Torus  $H^3$ の場合を考察する。今までの議論から各  $j$ に対して  $B_{ij}$  ( $i = 1, 2$ )の少なくとも一方の, 即ち,  $B_{1j}$ か又は  $B_{2j}$ の一方に唯一つの Ribbon Arcしか存在しないものとする。このとき Clasp  $\text{Arc}sl_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )に於いて  $2 \leq k \leq n$ の帰納法で証明する。図17を参考にして Circle ①は  $\alpha_1$ と融合しない。次に  $B_{i2}$  ( $i = 1, 2$ )に Ribbon Arcが存在するときも同様に証明されるので  $B_{i2}$  ( $i = 1, 2$ )に Ribbon Arcが存在しないとき①と②の融合を考察する: このとき①が  $B_{21}$ を下って例えば Ribbon Arcの存在しない  $B_{24}$ を上り  $l_4$ を横切り下り  $B_{22}$ を上り②と融合すれば  $\alpha_1$ が  $B_{14}$ を上り  $l_4$ を横切ぎる。このとき図14の(5), (6)と同様の方法で  $r_1$ を取り去り次に Isotopy を用いて  $\alpha_1$ から出て  $B_{14}$ を上り  $l_4$ を横切ぎる曲面を取り除けば Ribbon Arcsの存在しない場合に帰着されて不可能である。更にもし①が  $B_{25}$ を上り  $l_5$ を横切る場合は  $\alpha_1$ を考慮すれば同様に Ribbon  $\text{Arc}r_i$  ( $i = 1, 3, 5$ )を取り去れば不可能であることが分かる。次に①が  $B_{23}$ を上り  $l_3$ を横切り下り②と融合すれば  $\alpha_1$ を考慮すれば図9の(16)が起り不可能である。①と  $\beta_1$ は融合しない, 又①と  $(2n)$ の融合は  $\alpha_1$ を考慮すれば図9の(1)が起り不可能。更に①と  $(2n-1)$ との融合は①と②の融合の場合と同様の理由により不可能である。 $(2n)$ と  $\beta_1$ との融合は図9の(11), (12)の場合が起るがこの場合も前の図14, 図15の場合の方法を用いて融合しないことが分かる。次に  $(2n)$ と  $\alpha_1$ との融合は横断定理により  $r_1$ が除去される, 以下同様に横断定理から  $(2n)$ と②とは融合できない。次に  $(2n)$ と  $(2n-1)$ との融合は図9の(11), (12)の場合が起るがこの場合も又前の図14, 15の場合に論じられた方法で不可能であることが分かる。さて Circle ①は帰納法の仮定によりすべての Circle  $(j)$  ( $2 \leq j \leq k \leq n-1$ )と Clasp Bands  $B_{ij}$  ( $i = 1, 2, 2 \leq j \leq k \leq n-1$ )のすべての Ribbon Arcsの境界点を含む Circlesとは融合しないと仮定する。さて  $B_{ik+1}$  ( $i = 1, 2$ )には Ribbon Arcが存在しない場合は Circle ①は Circle  $(k+1)$ と  $B_{ik+1}$  ( $i = 1, 2$ )に Ribbon  $\text{Arc}r_{k+1}$ が存在する場合は  $B_{1k+1}$ に  $r_{k+1}$ が存在するとしてよいこのとき Circle ①は Circle  $(k+1)$ 及び  $\beta_{k+1}, \alpha_{k+1}$ と融合しないことを示す。例えば  $B_{11}$ に1つの Ribbon  $\text{Arc}r_1$ が存在するとして図17に示してあるように  $\partial r$ を  $\alpha_1, \beta_1$ とする。最初  $B_{i2}$  ( $i = 1, 2$ )に Ribbon Arcが存在しない場合か或いは  $B_{i2}$ に Ribbon  $\text{Arc}r_2$ が存在してもその境界点  $\beta_2$ と  $\alpha_1$ が融合しない場合を考察する。このとき上の議論と同様に Circle ①は  $B_{21}$ を下った後に Ribbon Arcのない  $B_{24}$ を上り  $l_4$ を横切

ぎれば Circle  $\alpha_1$  は  $B_{11}$  を下り  $B_{14}$  を上り  $l_4$  を横切り下るがこのとき②を考慮すれば図9の(16)の場合が起こり不可能である。次に Circle ①は  $B_{21}$  を下った後に  $B_{23}$  を上り  $l_3$  を横切る場合を考察する。この場合 Circle  $\alpha_1$  が Ribbon Arc の存在する  $B_{13}$  を上り  $l_3$  を横切れば図9の(16)の場合が起こり不可能である。更に  $B_{13}$  に存在する Ribbon Arc  $r_3$  が例えば  $B_{11}$  の Ribbon Arc  $r_1$  の上、即ち、 $l_1$  の存在する側を通ればこのとき  $\alpha_1$  を考慮すれば明らかに図9の(16)が起こり不可能である。次に Circle ①は  $B_{21}$  を下った後に  $B_{25}$  を上り Ribbon Arc  $r_5$  を横切って更に  $l_5$  を横切る場合②の所で図9の(14)の場合が起こり不可能である。従って以上の議論から Circle ①は  $B_{21}$  を下った後直ちに  $B_{2i}$  ( $i = 1, 2$ ) の何れかを上り  $l_2$  を一度横切ぎることになる。従って  $B_{2i}$  ( $i = 1, 2$ ) に Ribbon Arc が存在しない場合は①は  $B_{12}$  を上り  $l_2$  を横切るがこの場合横断定理により  $r_1$  が除去されるか或いは  $\alpha_1$  を考慮すれば図9の(16)が起こり不可能である。次に  $B_{2i}$  ( $i = 1, 2$ ) に Ribbon Arc が存在する場合を考察する。まず  $B_{22}$  に Ribbon Arc  $r_2$  が存在する場合上の議論が成り立ち、即ち、①が  $B_{21}$  を下り直ちに  $B_{22}$  か  $B_{12}$  を上り  $l_2$  を横切る。 $B_{22}$  を上れば②を考慮すれば図9の(16)が起こり不可能である。もしも  $B_{12}$  を上れば横断定理により  $r_1$  が除去される。次に  $B_{12}$  に Ribbon Arc  $r_2$  が存在して  $\alpha_1$  と  $\beta_2$  が融合する場合を考察する：この場合も  $\alpha_1$  の代わりに②を考慮すれば上の議論が成り立ち、即ち、①は  $B_{21}$  を下った後  $B_{2i}$  ( $i = 1, 2$ ) の何れかを上り  $l_2$  を横切るがこの場合は  $B_{12}$  を上り  $l_2$  を横切ることになり、②を考慮すれば不可能である。従って Circle ①は Circles ②, ...,  $(k+1)$  の何れとも融合しないこととなり帰納法が成立する。Circle ①が下方の Circles  $(2n), (2n-1), \dots, (n+1)$  と融合しないことは明らかである。同様の理由で Circle  $(2n)$  が下方の Circle ①, ②, ...,  $(2n-1)$  の何れとも融合しない。上の議論と同様の理由で Circle  $(2n)$  は上方の Circle  $(2n-1), (2n-2), \dots, ②, ①$  の何れとも融合できない。以上の議論から  $\Delta_N^2(K) \cap \partial H^3$  には Circles ①,  $(n)$  の2つが Meridian Circles として残る。

さて最後に  $m \geq 1, n \geq 1$  と仮定する。このとき  $B_{2i}$  ( $i = 1, 2$ ) の何れかに1つの Ribbon Arc  $r_1$  が存在すると仮定する。図18に示されている図式を参考にして Circles ①と  $(2n)$  が  $\partial H^3$  の Meridian Circles として残ることを帰納法を用いて示す：まず Circle ①は Circle ②と融合できない。又 Circle ①は今までの議論から分かるように Circle ③とも融合できない、以下同様にして④, ⑤, ...,  $(2n)$  とも融合できない。次に Circle ①が Circles  $(-1), (-2), \dots, (-2m)$  とも融合できないことも同様である。更に  $\Delta_N^2(L)$  に於いて Circle ①は Ribbon Arcs の境界を囲む如何なる Circles とも融合できない。同様に Circle  $(2n)$  も他の如何なる Circle とも融合できない。従って  $\Delta_N^2(K) \cap \partial H^3$  には  $\partial H^3$  の Meridian Circles が少なくとも2個存在する。

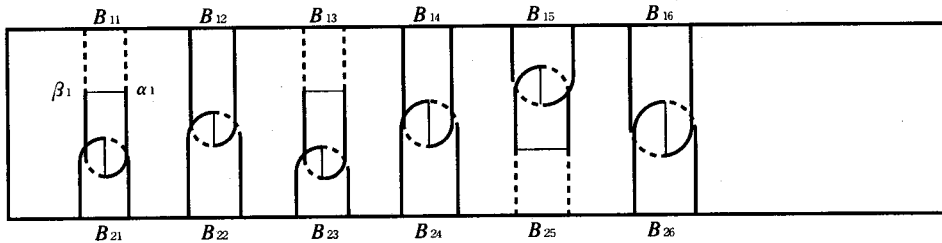


図17

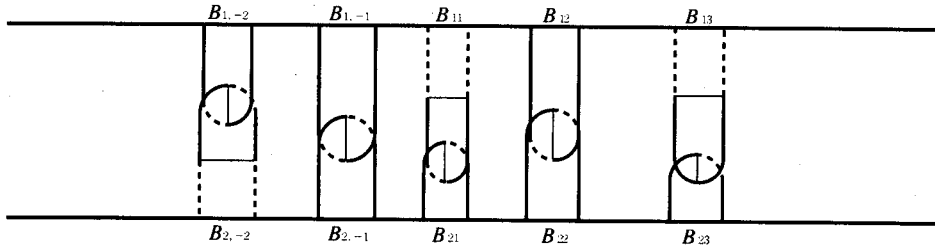


图18

## 文 献

- [1] M. Dehn, Über die topologie des dreidimensionalen Raumes, Math. Ann., 69(1910).
- [2] J. Hempel, 3-manifolds, Ann. of Math. Studies No. 86, Princeton University Press (1976).
- [3] Y. Ishikawa, Transversality Theorems and Knots in Three-Manifolds, Artes Liberales, No. 58 (1996), p139-p159.
- [4] H. Kneser, Geschlossene Flächen in dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten, Jber. Deutschen Math. Verein., 38(1929), p248-p260.
- [5] J. Milnor, Lectures on the h-cobordism theorem, Princeton Mathematical Notes, New Jersey Princeton University Press (1965).
- [6] C. D. Papakyriakopoulos, On Dehn's Lemma and the asphericity of knots, Ann. of Math. 66(1957), p1-p26.
- [7] N. Smythe, Handlebodies in 3-manifolds, Proc. Amer. Math. Soc. 26(1970), p534-p538.