加重移動平均について

石　川　栄　助

0. は し が き

時系列の傾向線を求めるには，手描法によって平滑化するが，その土台としてよく移動平均を用いる。しかしこの方法は傾向線が直線的傾向をもつ時はよいが，その他の場合は，取り上げたデータの重みを同一にしているため，資料が平均化され，問題点の特性が失われる。そこで筆者は新しい平滑法として，補間公式を援用して，次の２種の加重移動平均式を工夫した。

いま数列 $\{x_r\}$ を等差数列とし，時系列 $P_r(x_r,\ y_r)$ をとり，P_i 点を中心に $(2k+1)$ 個の点 $P_{i-k},\ P_{i-k+1},\ \cdots,\ P_{i-1},\ P_i,\ P_{i+1},\ \cdots,\ P_{i+k}$ をとる。

1) P_i 点を除いた $2k$ 個の点 $P_{i-k},\ \cdots,\ P_{i-1},\ P_{i-1},\ \cdots,\ P_{i+k}$ をすぎる補間公式 $f(x)$ を求め，y_i の平滑値として

$$\hat{y}_i = \frac{1}{2}\{y_i + f(x_i)\} \qquad (0.1)$$

を定めた。これによる平滑値を第１型加重移動平均と名づける。

2) $P_{i-j},\ P_{i-j+1}$ の中点を M_{i-j}，$P_{i+j-1},\ P_{i+j}$ の中点を M_{i+j} とし，$2k$ 個の点 $M_{i-k},\ \cdots,\ M_{i-1},\ M_{i+1},\ \cdots,\ M_{i+k}$ をすぎる補間公式 $g(x)$ を求め，y_i の平滑値として

$$\hat{y}_i = g(x_i) \qquad (0.2)$$

とした。これによる平滑値を第２型加重移動平均と名づける。

ここに公式 (0.1)，(0.2) を求めたい。

1. 第１型加重移動平均

$2k$ 個の点 $P_{i-k},\ \cdots,\ P_{i-1},\ P_{i+1},\ \cdots,\ P_{i+k}$ をすぎる補間公式 $f(x)$ は 数列 $\{x_r\}$ が等差数列であるから Lagrange の一般補間公式を用いて求められ，それに x_i を代入すると

$$f(x_i) = \frac{1}{\binom{2k}{k}} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{j-1} \binom{2k}{k-j} (y_{i-j} + y_{i+j}) \cdots\cdots\cdots \qquad (1.1)$$

よって平滑値 $\hat{y}_i$ は

$$\hat{y}_i = \frac{1}{2\binom{2k}{k}} \left\{ \binom{2k}{k} y_i + \sum_{j=0}^{k} (-1)^{j-1} \binom{2k}{k-j} (y_{i-j} + y_{i+j}) \right\} \cdots \qquad (1.2)$$

簡単のために

$$w_{i\pm j}=\frac{(-1)^{j-1}\binom{2k}{k-j}}{2\binom{2k}{k}} \tag{1.3}$$

とおけば，上式は

$$\hat{y}_i = \sum_{r=-k}^{k} w_{i+r}\ y_{i+r} \tag{1.4}$$

となり

$$\sum_{r=-k}^{k} w_{i+r} = 1 \tag{1.5}$$

である。よって（1.2）式 すなわち（1.4）式は加重移動平均を示している。

系Ⅰ $$2\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\binom{2k}{k-j}=\binom{2k}{k} \tag{1.6}$$

系Ⅱ $$w_i=\frac{1}{2} \tag{1.7}$$

2. 第1型加重移動平均の公式

$2k+1$ 個の加重移動平均の公式（1.4）式で $k=1, 2, 3, 4$ について求めること次のようになった。簡単のために $2k+1=m$ とおく。

1） $k=1$ のとき $m=3$（3点移動平均）

$$\hat{y}_i=\frac{1}{4}(y_{i-1}+2y_i+y_{i+1}) \tag{2.1}$$

2） $k=2$ のとき $m=5$（5点移動平均）

$$\hat{y}_i=\frac{1}{12}(-y_{i-2}+4y_{i-1}+6y_i+4y_{i+1}-y_{i+2}) \tag{2.2}$$

3） $k=3$ のとき $m=7$（7点移動平均）

$$\hat{y}_i=\frac{1}{40}(y_{i-3}-6y_{i-2}+15y_{i-1}+20y_i+15y_{i+1}-6y_{i+2}+y_{i+3}) \tag{2.3}$$

4） $k=4$ のとき $m=9$（9点移動平均）

$$\hat{y}_i=\frac{1}{140}\{-y_{i-4}+8y_{i-3}-28y_{i-2}+56y_{i-1}+70y_i+56y_{i+1}-28y_{i+2}+8y_{i+3}-y_{i+4}\} \tag{2.4}$$

ここに y_r の係数 w_r の和，$\Sigma w_r=1$ になっている。

3. 第2型加重移動平均

P_i を中心に $2k+1$ 個の点 P_{i-k}, …, P_i, …, P_{i+k} をとり，P_{i-j}, P_{i-j+1} の中点を M_{i-j} P_{i+j-1}, P_{i+j} の中点を M_{i+j} とおき，$2k$ 個の点 M_{i-k}, …, M_i, …, M_{i+k} をすぎる補間式 $g(x)$ を求めると y_i の平滑値 $\hat{y}_i$ は $g(x_i)$ で表わされる。すなわち

$$\hat{y}_i = g(x_i) = \sum_{j-1}^{k} \{b_{i-j}(y_{i-j} + y_{i-j+1}) + b_{i+j}(y_{i+j-1} + y_{i+j})\} \tag{3.1}$$

ここに

$$b_{i-j} = b_{i+j} = \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 3\cdot 1}{4(k-1)!\,8^{k-1}}(-1)^{j-1}\binom{2k-1}{k-j}\frac{1}{2j-1} \tag{3.2}$$

簡単のため

$$\left.\begin{aligned} w_{i-j} &= b_{i-j} + b_{i-j-1} \\ w_{i+j} &= b_{i+j} + b_{i+j+1} \end{aligned}\right\} \qquad (j = 1,\ 2,\ \cdots,\ k-1)$$

$$w_i = b_i$$

$$w_{i+k} = b_{i+k}$$

とおけば (3.1) 式は

$$\hat{y}_i = \sum_{r=-k}^{k} w_{i+r}\ y_{i+r} \tag{3.3}$$

$$\sum_{r=-k}^{k} w_{i+r} = 1 \tag{3.4}$$

よって (3.1) 式は加重移動平均を示している。

(注) 項数が偶数 $2k$ の移動平均を考えるのに，$2k-1$ 個の点 P_{i-k}, …, P_{i-1}, P_i, …, P_{i+k-1} の補間公式より y_i の平滑値 y' を求め，次に P_{i-k+1}, …, P_i, …, P_{i+k} の $2k-1$ 個の点をすぎる補間式より y_i の平滑値 y'' を求め，その平均を y_i の平滑値にとれば，この値は $(2k+1)$ 個の移動平均 (3.1) 式となる。よって $2k$ 個の移動平均を考えるときは，むしろ $(2k+1)$ 個の移動平均にとればくわしい。

4. 第2型加重移動平均の公式

$2k+1$ 個の第2型加重移動平均の公式は (3.1) 式で $k = 1,\ 2,\ 3,\ 4\cdots$ とおいて求めてみる。簡単のために $2k+1 = m$ とおく。

1) $k = 1$ のとき $m = 3$（3点移動平均）

$$\hat{y}_i = \frac{1}{4}(y_{i-1} + 2y_i + y_{i+1}) \tag{4.1}$$

2) $k = 2$ のとき $m = 5$（5点移動平均）

$$\hat{y}_i = \frac{1}{32}(-y_{i-2} + 8y_{i-1} + 18y_i + 8y_{i+1} - y_{i+2}) \tag{4.2}$$

3) $k = 3$ のとき $m = 7$（7点移動平均）

$$\hat{y}_i = \frac{1}{512}(3y_{i-3} - 22y_{i-2} + 125y_{i-1} + 300y_i + 125y_{i+1} - 22y_{i+2} + 3y_{i+3}) \tag{4.3}$$

4) $k=4$ のとき $m=9$（9点移動平均）

$$\hat{y}_i=\frac{1}{12288}\{-15(y_{i-4}+y_{i+4})+132(y_{i-3}+y_{i+3})-588(y_{i-2}+y_{i+2})$$
$$+2940(y_{i-1}+y_{i+1})+7350y_i\} \quad (4.4)$$

ここに $\Sigma w_r=1$ が成立する。

（注１） これまでの３点移動平均は

$$\hat{y}_i=\frac{1}{3}(y_{i-1}+y_i+y_{i+1})$$

であるのに対し，３点加重移動平均は第１型（2.1）式，第２型（4.1）式ともに次の通りであることに注目したい。

$$\hat{y}_i=\frac{1}{4}(y_{i-1}+2y_i+y_{i+1})$$

（注２） この論の要旨を昭和40年７月，日本統計学会において発表した。