

博士学位論文

流体-構造連成効果を考慮したロケットエンジン用
高効率高信頼性タービン開発に関する研究

2016 年 3 月

岩手大学大学院 工学研究科
機械・社会環境システム工学専攻

徳山 雄己

指導教官 船崎 健一

Abstract

ロケットは人や人工物を宇宙空間に投入する現状唯一の輸送手段である。その推進を担うロケットエンジンでは、液体の燃料と酸化剤を燃焼室に高圧で供給するためにターボポンプが用いられ、そのターボポンプの駆動はタービンが担っている。したがって、ロケットをより正確に打ち上げるにはタービンの高信頼性が重要となる。また、エンジンサイクルにもよるが、タービンの駆動にはガス化させた推進用燃料の一部を用いるため、より少量の燃料でタービンを駆動できる高効率タービンも強く要求される。このようなタービンへの要求に対し、設計時のタービン形態の選択肢としては全周挿入タービンと部分挿入タービンがある。前者は、一般的な航空エンジンや発電用ガスタービンで用いられるものと同様に、ノズル全周から駆動ガスを挿入するものである。一方、後者はノズル入口を周方向に部分的に塞ぐものである。全周挿入タービンでは、タービンに要求される出力がさほど小さくなく、その結果タービン流量も少なくなる場合、流量にノズル面積を合わせようとするタービン径や翼高さを小さくせざるを得ない場合があり、いずれもタービン効率の低下を招く。このような場合、ノズル入口を部分的に塞ぐことでタービン径や翼高さを確保し、高効率化を図るというコンセプトが部分挿入タービンである。しかし、部分挿入タービンでは、強制的なノズル閉塞に伴う付加的な損失による効率低下や動翼に対する低周波な流体力変動のような構造強度面での懸念事項も存在する。したがって、どちらのタービン形態がより高効率高信頼性に適しているかを判断するには、同じ要求仕様で設計された各タービンの比較研究が必要となるが、そのような研究報告は過去になされていない。その上、ロケット用超音速部分挿入タービンに至っては、使用用途が極めて限定的であり、新規エンジン開発の機会も乏しいなどの理由から、その流れ場に関する知見はほとんど報告されていない。そこで、本研究ではこれらタービンを対象として、CFD による流れ場の把握や空力性能の直接比較評価、FEM による遠心力荷重に対するタービン強度評価、CFD と FEM を用いた流体-構造一方向連成解析によるタービン構造強度の直接比較評価を実施する。そして、流れ場に関する知見を獲得するとともに、空力性能と構造強度の点で総合的に優れたタービン形態を判断し、新たな設計指針を獲得することを目的とする。

CFD 解析の結果、部分挿入タービンでは非定常で極めて周方向に不均一な流れ場が形成されることが確認された。特に、ノズル閉塞部へ動翼が侵入する側では、ノズルガスの加速や閉塞部背後への周方向の流れ込みが表れ、その結果動翼に対するインシデンスが増加して瞬間的に周方向負荷が大きくなることが確認された。また、閉塞部背後では流れがハブ側から大規模に剥離することや閉塞ノズルの滞留ガスと周方向ガスとのミキシングなどによる損失が確認された。さらに、全周挿入タービンと部分挿入タービン双方において、ディスクキャビティの有無が流れ場とタービン効率予測に与える影響についても調査した。その結果、双方のタービンにおいてキャビティの有無による効率値への影響が確認され、特に部分挿入タービンではディスクキャビティ内ガスの主流への吹き出しや主流のキャビティ内への吸い込みが表れた。したがって、より高い精度でタービン効率を予測することが望まれるロケット用タービンでは、ディスクキャビティまでを含めた解析が望ましいことが判明した。また、同じ要求仕様で設計された全周挿入タービンと部分挿入タービンのタービン効率比較の結果、部分挿入タービンの方が高効率となり、部分挿入損失を加味しても速度比を大きくとることの有用性が確認された。

タービンに作用する遠心力に対する強度評価の結果、全周挿入では最大 Mises 応力が材料の降伏応力以下となることが確認された。一方、部分挿入では材料として Inconel718 を用いた場合翼根本フィレットに作用する最大応力が降伏応力を超えてしまうことが確認された。しかし、64 チタン材を用いることで最大応力を降伏応力以下に低減できるという結果を得た。流体-構造一方向連成解析では、非定常 CFD 解析によって得られた変動流体力を FFT 処理することで周波数毎に分離し、変動振幅が大きい周波数成分やキャンベル線図上の設計回転数近くでタービン固有振動数と一致するような周波数成分に対する周波数応答解析を実施した。その結果、全周挿入タービンでは荷重振動数と固有振動数が一致すると極めて強く応答するモードが存在することがわかったが、その共振点と設計回転数は大きく離れて設計できていることが確認された。一方、部分挿入タービンでは 64 チタン材を用いた場合に設計点近くにおいて強く共振する荷重周波数成分と固有モードが存在したが、共振時の応力は材料の疲労限度以下であることが確認された。

以上の検討から本研究では、高効率高信頼性タービンを実現するためには“64 チタン材を用いた部分挿入タービン”が適しているという結果を得た。

主な記号

c	: 音速, 流体 - 構造データマッピングの内挿係数
c_p	: 定圧比熱
c_v	: 定積比熱
e	: 全内部エネルギー
f_j	: FEM ノード j における流体荷重
f_i	: 動翼に作用する流体荷重の i 方向成分
\dot{m}	: 質量流量
\bar{n}	: 法線ベクトル
p	: 静圧
P	: 静圧
P_0	: 全圧
R	: ガス定数
S	: エントロピー
T	: 静温
T_0	: 全温
\mathbf{u}	: 速度ベクトル
x_i	: デカルト座標系成分
Φ_i	: CFD 格子 i における流体荷重
Φ	: 散逸関数
γ	: 比熱比
η_{t-s}	: Total-to-static 効率
η_{t-t}	: Total-to-total 効率
κ	: 熱伝導率
μ	: 粘性係数
Π	: 粘性応力テンソル
ρ	: 密度
τ_{ij}	: 粘性応力テンソル成分

ξ_i : 一般曲線座標系成分

目次

Abstract	I
主な記号	III
目次	V

第1章 序論

1.1 研究背景	1
1.2 従来の研究	
1.2.1 全周挿入タービンの流れ場を対象とした研究	7
1.2.2 部分挿入タービンの流れ場を対象とした研究	9
1.2.3 ターボ機械の振動に関する研究	11
1.2.4 流体 - 構造連成解析に関する研究	12
1.3 本研究の目的	13
1.4 本論文の概要	14

第2章 数値解析手法

2.1 CFDにおける数値解析手法	
2.1.1 基礎方程式	16
2.1.2 乱流の基礎方程式	20
2.1.3 数値解法	22
2.1.3.(1) 特性の理論	22
2.1.3.(2) 空間差分	22
2.1.3.(3) 時間積分	30
2.1.3.(4) 乱流モデル	33
2.1.3.(5) 有限体積法	35
2.2 流体 - 構造一方向連成解析手法	
2.2.1 連成解析の流れ	37
2.2.2 マッピング手法	38

第3章 部分挿入タービン初段部の2次元流れ場およびノズル分割数とタービン効率

3.1 本章の目的	42
3.2 解析対象タービン	43
3.3 解析ケース	45
3.4 解析ドメイン	45
3.5 計算格子	46
3.6 境界条件	47
3.7 結果と考察	
3.7.1 部分挿入流れ場	48
3.7.2 動翼非定常流体力	50
3.7.3 部分挿入損失	52
3.8 結論	54

第4章 部分挿入タービン段の2次元流れ場

4.1 本章の目的	55
4.2 解析対象タービン	56
4.3 解析ケース	56
4.4 解析ドメイン	56
4.5 計算格子	
4.5.1 格子依存性調査	59
4.5.2 計算格子	61
4.6 境界条件	62
4.7 結果と考察	
4.7.1 超音速部分挿入段の2次元流れ場	
4.7.1.(1) 流れ場の周方向分布	63
4.7.1.(2) フローパターンと付加的なエントロピー生成	67
4.7.1.(3) 非定常流体力	72
4.7.2 ノズル閉塞方法がタービン流れ場に及ぼす影響	
4.7.2.(1) フローパターンの差	78

4.7.2.(2) 損失生成の差	80
4.7.2.(3) 非定常流体力の差	84
4.8 結論	92

第5章 部分挿入タービンの3次元流れ場

5.1 本章の目的	94
5.2 解析対象タービン	95
5.3 解析ケース	95
5.4 解析ドメイン	95
5.5 計算格子	
5.5.1 格子依存性調査	97
5.5.2 部分挿入解析用計算格子	101
5.6 境界条件	103
5.7 結果と考察	
5.7.1 流れ場の周方向分布とフローパターンの3次元性	104
5.7.2 損失生成の3次元分布とタービン効率	109
5.7.3 非定常流体力に対する3次元性の影響	113
5.8 結論	118

第6章 タービン形態による空力性能評価

6.1 本章の目的	120
6.2 解析対象タービン	121
6.3 解析ケース	123
6.4 解析ドメイン	
6.4.1 タービンディスク形状と周辺空間	123
6.4.2 スケーリングによる解析領域の低減	127
6.5 計算格子	
6.5.1 格子依存性調査	
6.5.1.(1) 概要	128

6.5.1.(2) Step1 主流の格子依存性調査	129
6.5.1.(3) Step2 キャビティ部の格子依存性調査	134
6.5.1.(4) 各ケースの計算格子	136
6.6 境界条件	140
6.7 結果と考察 2段定常解析	
6.7.1 タービン形態によるタービン効率の差	142
6.7.2 1次元設計と3次元定常CFDにおける効率差	145
6.7.3 ディスクキャビティの有無が流れ場に与える影響	
6.7.3.(1) 流れ方向の物理量変化	147
6.7.3.(2) 流れ場とタービン効率	151
6.8 結果と考察 単段非定常解析	
6.8.1 ノズル - 初段動翼間における流れの非定常性	168
6.8.2 初段動翼に作用する非定常流体力	171
6.9 結論	176

第7章 タービン形態による構造強度比較

7.1 本章の目的	178
7.2 解析対象タービン	179
7.3 解析モデルと解析内容	179
7.4 計算格子	
7.4.1 格子依存性調査	
7.4.1.(1) 翼単体モデル	180
7.4.1.(2) タービンディスクモデル	185
7.4.2 各モデルの計算格子	189
7.5 材料特性と拘束条件	
7.5.1 材料特性	190
7.5.2 拘束条件および減衰	190
7.6 線形静解析	
7.6.1 荷重条件	191

7.6.2	線形静解析の結果と考察	
7.6.2.(1)	翼単体モデル	193
7.6.2.(1)	タービンディスクモデル	196
7.7	固有値解析	
7.7.1	初期応力条件	200
7.7.2	固有値解析の結果と考察	
7.7.2.(1)	翼単体モデル	201
7.7.2.(2)	タービンディスクモデル	207
7.8	周波数応答解析	
7.8.1	荷重条件	212
7.8.2	周波数応答解析の結果と考察	
7.8.2.(1)	DDT_FullAd 翼単体モデル	214
7.8.2.(2)	DDT_ParAd 翼単体モデル	221
7.8.2.(3)	DDT_ParAd タービンディスクモデル	234
7.9	結論	239
第8章	結論	241
付録	DDT タービン設計概要	
1.	付録概要	247
2.	設計方針	247
3.	設計フロー	248
4.	全周挿入タービン設計	
4.1	パラメータ設計	249
4.2	翼形状生成と翼形状調整	251
5.	部分挿入タービン設計	
5.1	パラメータ設計	254
5.2	翼形状生成と翼形状調整	255
6.	タービンディスク設計	257

参考文献	260
謝辭	267
研究業績	269

第1章 序論

1.1 研究背景

気象予報、地上位置情報、情報通信などの面において、現代社会は様々な人工衛星に支えられている。さらに、2011年3月の東日本大震災では、被害状況の正確な情報収集に陸域観測技術衛星「だいち」(ALOS)が用いられるなど、人工衛星は我々の日常生活だけではなく災害緊急時においても無くてはならない存在となっている。また、国際宇宙ステーション (ISS) では微小重力環境という特異な環境を利用し、そこに滞在する宇宙飛行士によってワクチン開発などを目的とした様々な実験が行われている。このように、人類は宇宙空間をうまく利用してその生活を発展させてきており、このような宇宙空間利用は今後も増加すると考えられるが、これら人工衛星や人間は全てロケットによって宇宙空間に投入されており、ロケットは人類や人工物を宇宙空間へ投入する現状唯一の輸送手段である^[1]。このようなことから、ロケットにはよりいっそうの積載可能重量の増加、コストの低減、高い信頼性が求められる。

ロケットは、その燃料形態によって2つに大別される。一つは固体燃料と固体酸化剤を混練して生成される固体推進剤を燃焼させることで推進力を得る固体ロケットで、日本のM-Vやイプシロンロケットがその代表として挙げられる。もう一つは、液体燃料と液体酸化剤を燃焼室に供給して燃焼させることで推力を得る液体ロケットである。液体ロケットは、固体ロケットに比べて構造が複雑であるが、固体ロケットでは難しい出力の調節が可能なことから正確な軌道投入が可能であるという利点がある。主な液体ロケットの例としては、ロシアのプロトン、欧州のアリアン、アメリカのデルタ、アトラス、2011年に退役したスペースシャトルが挙げられるほか、日本ではH-IIA、H-IIBロケットが運用されている。このような液体ロケットでは、液体燃料と液体酸化剤を燃焼室に供給するためにターボポンプが用いられる。このターボポンプは、タービンを駆動することで同軸につながれたインデューサと遠心インペラを駆動し、燃料と酸化剤を高圧で燃焼室に供給する流体機械であり、ロケットエンジンの心臓部と称される^[2]。したがって、ターボポンプが燃料と酸化剤を十分に燃焼室に供給できなければ、ロケットは必要

な出力を得ることができない。そのため、ポンプの駆動を担うタービンはロケットエンジンシステムの中でも特に重要な構成要素の一つといえる。Fig.1.1 に H-IIA ロケットの第 1 段エンジンである LE-7A エンジンとその液水ターボポンプを示す。

ロケットターボポンプ用タービンの駆動ガスは、エンジンサイクルによって異なり、Space Shuttle Main Engine (SSME) で採用されている二段燃焼サイクルやデルタロケットで用いられているガスジェネレータサイクルでは、燃料と酸化剤の燃焼ガスによってタービンが駆動される^[3]。このようなエンジンサイクルでは、タービン駆動ガスは高温高圧状態となっており、大きな出力を得ることができる。しかし、主燃焼室とは別にガス発生器やプレバーナーが必要となるため構造が複雑になること、システム全体が高圧状態で運用されることなどから信頼性の観点でのデメリットも存在する。一方、H-IIA、H-IIB ロケットの上段エンジンである LE-5B エンジンでは、エキスパンダーブリードサイクルが採用されている。このサイクルは、推進用燃料である液体水素をノズルスカーと燃焼室周囲に巡らせることで熱交換を行い、その結果得られた水素ガスの一部を用いてタービンを駆動し、タービン駆動後の水素ガスはノズルスカート内に排出する。したがって、エンジンシステムの簡素化と低圧化が可能となるため高信頼性を実現するのに適しており、新型基幹ロケットにおいても適用が検討されている。しかし、このサイクルではタービン駆動後のガスをノズルスカートに排出するため、タービン駆動に用いた燃料の持つ科学エネルギーを推進エネルギーとして十分に活用することができない。したがって、タービン効率がエンジンシステムの成立性を大きく左右し、より少ないタービン流量で要求される出力を生みだし、比推力を増加するためにはタービンの高効率化が強く望まれる。Fig.1.2 にエキスパンダーサイクルの概要図を示す。

ロケットエンジンシステムには、大出力が求められると同時に、非常に厳しい重量制限が課される。そのような制限はターボポンプも例外ではなく、ターボポンプは可能な限り小型軽量化される。その結果、タービン径が制約を受けることで、タービン速度比はタービンが最高効率を達成できる値よりも低くなるが、このような状況下では、タービン駆動ガスが保有する流体エネルギーを効率よく回転エネルギーに変換するために、タービンは衝動タービンとして設計される^[2]。また、軽量化のためにタービン段数はせいぜい 2 段程度に設計されるが、先に述べたエキスパンダーブリードサイクルでは、タービン駆動ガスは燃焼ガスではないためその温度はさほど高くない。そのため、大きな

出力を得るにはタービン段には必然的に高膨脹比が要求され、このような低段数高膨脹比のタービンではその流れは超音速となり、本サイクルにおけるタービンは超音速衝動タービンとして設計される。

このように、ロケットターボポンプ用タービンには高い信頼性と効率が要求され、これらを同時に満たすタービンを設計することは今後の宇宙開発において極めて重要な課題である。タービン設計において、タービン形態の選択肢には主に2つの形態がある。一つはノズル全周から駆動ガスを挿入する全周挿入タービンである。このタービン形態は、航空エンジンや産業用ガスタービン、蒸気タービンなどあらゆる分野で用いられている形態である。ロケットエンジンにおいても、SSME や H-IIA ロケットの第1段エンジンである LE-7A などでも広く採用されている。これらのエンジンの特徴は、出力が大きくタービン径や翼高さをある程度大きく設計しても十分なタービン流量を確保できることである。一方、上段エンジンのように第1段エンジンに比べて要求される出力が小さいような場合はタービン流量も少なくなる。そのため、全周挿入タービンを適用しようとする“極端に翼高さが低いタービン設計”や“タービン径を犠牲にした（小さくした）設計”にせざるを得ない場合がある。その結果、前者では2次流れ損失の増加、後者では速度比の低下が生じ、いずれもタービン効率の低下を招いてしまう。すなわち、タービン流量が十分に確保できないタービンにおいては、2次流れ損失を低減しつつ速度比を大きくできるようなタービン形態が望まれる。そこで検討されるのがもう一つの選択肢である“部分挿入タービン”である。この形態は、ノズル流路を周方向に部分的に塞ぐことで、翼高さとタービン径が過度に小さくなることを避けるもので、LE-5B エンジンにおいて採用されている。部分挿入タービンでは、低翼化と小型化を回避できる一方で、閉塞部の存在によって Expansion 損失や End of sector 損失^[4]などの付加的な損失が発生してしまう。さらに、タービン動翼が閉塞部を周期的に通過することで広い周波数範囲の流体力変動が動翼に作用し、このような変動流体力に対するタービン構造強度への影響も把握すべき懸念材料となる。Fig.1.3 に全周挿入タービンと部分挿入タービンの様子を示す。

このように、ロケットの上段エンジン用タービン形態の選択肢には全周挿入タービンと部分挿入タービンがあり、それぞれには長所と短所が存在する。設計者には、2つの選択肢からより高効率高信頼性を実現するのに適した形態を選定して設計を行うこと

が要求されるが、現在の設計技術ではその選択に関する明確な指針は示されていない。これは、ロケットエンジンの新規開発機会が乏しいことに大きな要因がある。前述したように、現在運用されている LE-5B エンジンでは部分挿入タービンが採用されている。しかし、その翼形状は NASA M-1 エンジン（全周挿入タービン）用に設計されたタービン^[5]のスケールモデルであって、タービン形態も全周挿入と部分挿入双方の形態で設計を行い、性能を比較したうえで決定されたものではない。そのため、各タービン形態を直接比較した開発経験は無く、優劣の判断基準が定まっていないという現状にある。

このような背景から、本研究ではロケットターボポンプ用の全周挿入タービンと部分挿入タービンについて、流れ場や構造強度、両形態の性能比較に関する知見獲得を目的とし、数値流体力学（CFD）と有限要素法（FEM）を用いた流体 - 構造一方向連成解析を行うことをテーマとしている。本研究で得られた成果は、次世代ロケットエンジン用タービン設計において、貴重な設計指針を提供するものであると期待できる。

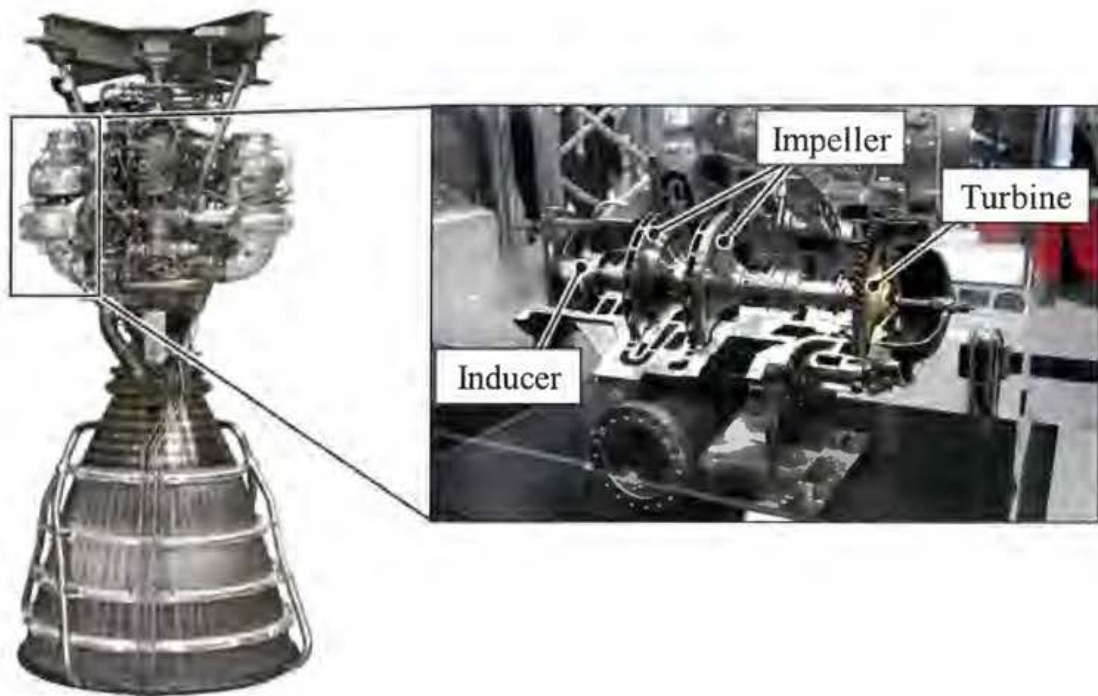


Fig.1.1 LE-7A engine and its fuel turbopump⁽⁶⁾⁽⁷⁾

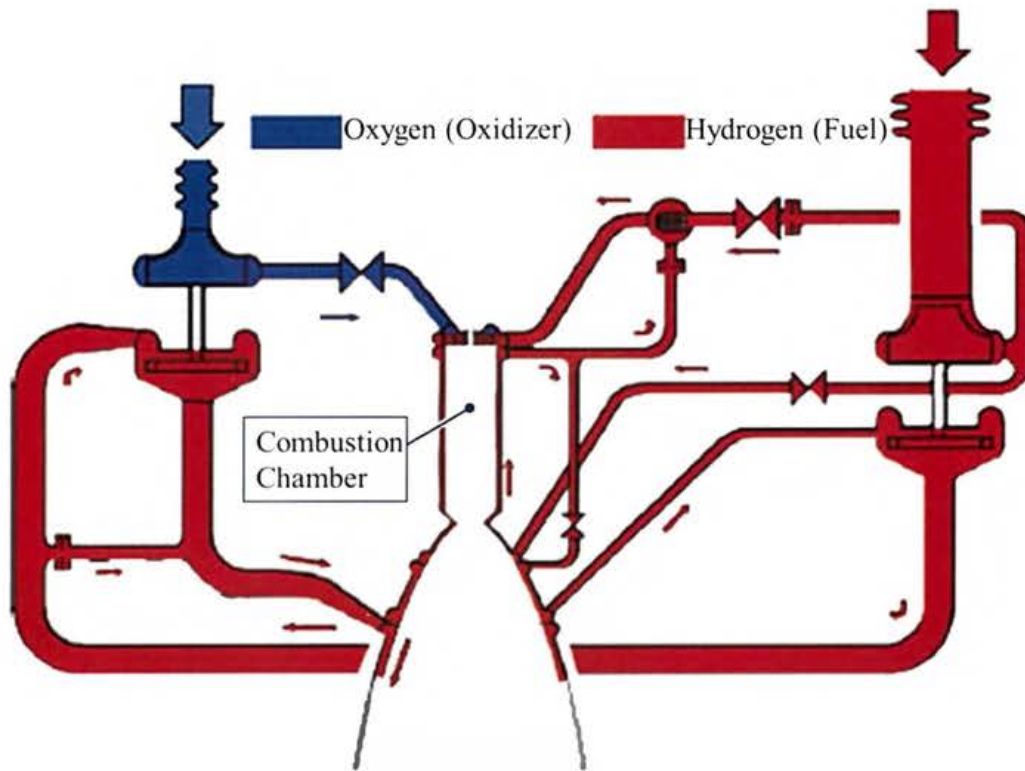


Fig.1.2 Expander bleed cycle⁽⁸⁾

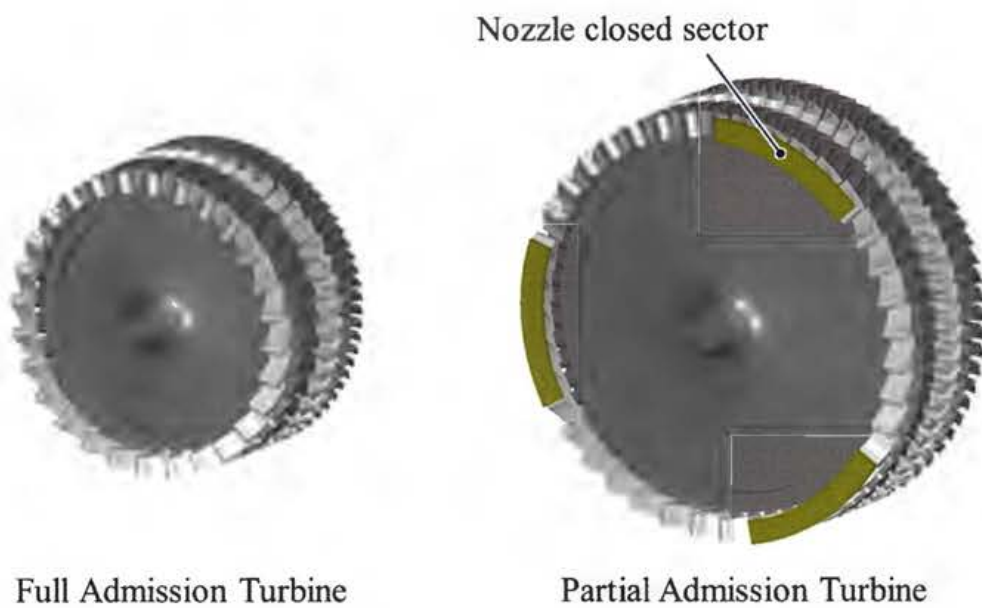


Fig.1.3 Full and partial admission turbine

1.2 従来の研究

1.2.1 全周挿入タービンの流れ場を対象とした研究

1.1 節で述べたように、全周挿入タービンは航空エンジンや産業用ガスタービン、蒸気タービン、ロケットエンジンなどあらゆる分野において広く利用されている。そのため、タービン内における渦構造や損失源とそのメカニズムの解明および低減、動静翼干渉など様々な着眼点から実験および数値的研究が行われている。ここでは、全周挿入タービンを対象としたこれら研究について整理する。

タービンでは、その主要な渦構造の一つとして流路渦とコーナー渦が挙げられる。これらの渦は、ハブやケーシング壁面での境界層が翼列に衝突することで翼前縁に発生する馬蹄形渦を起点としており、翼正圧面側で流路渦、負圧面側でコーナー渦が形成される。Takeshi^[9]らは、タービン内におけるこれらの渦構造を模式的に示している。また、タービンではもう一つ主要な渦構造として翼先端漏れ渦が挙げられる。これは、シュラウドを持たないタービン動翼の正圧面と負圧面の圧力差によって引き起こされるもので、Lampart^[10]はその様子を模式的に示している。

タービンでは、先に挙げた渦をはじめとして様々な損失源が存在する。これまで、その損失割合の分類化が行われており、Funazaki^[11]は圧力比 4.3 程度の 2 段タービンでは 2 次流れまたはそれに分類される損失が全体損失の中で支配的であると述べている。また、Denton^[12]らは CFD によって Endwall、翼面、主流および Wake それぞれで生成されるエントロピー割合を示している。さらに、Yoon^[13]らは CFD において翼端漏れ流れを考慮した場合と考慮しない場合、壁面を滑り条件とした場合と滑りなしとした場合など、様々な計算条件で衝撃波を含む単段タービン流れ場を解析し、全体の損失を静翼と動翼それぞれでのプロファイル損失や後縁損失、Endwall 損失、翼端漏れ損失や非定常損失など詳細に分類している。一方、特定の損失源に着目した研究も様々報告されている。例えばその一例として、翼端漏れ流れに着目した研究としては、4 段からなるタービンを対象とした数値解析的研究が Shirzadi^[14]らによって、ケーシング壁面の形状と損失に着目した研究が Wei^[15]らによって行われているほか、Wheeler^[16]らは遷音速タービンを、Shyam^[17]らは超音速タービンを対象とした研究を行っている。さらに、Coull^[18]らは高負

荷低圧タービンのプロファイル損失予測に関する研究、Brown^[19]らは遷音速タービンの翼形状と空力損失について実験と CFD による調査を行っている。また、タービン内での局所的な損失生成分布の可視化方法も提案されており、Zlatinov^[20]らは散逸関数を用いた可視化を行っている。

次に、タービンにおける動静翼干渉に関する研究について整理する。タービンでは、動翼と静翼の相對運動によって、ポテンシャル干渉^[21]や Wake 干渉^[22]、超音速タービンでは衝撃波干渉など、様々な極めて強い流れの非定常性が生まれる。このような動静翼干渉やそれに伴う圧力変動は、動翼に対して非定常的な負荷変動を生み出し、構造強度の観点から考えると、高サイクル疲労（High Cycle Fatigue、HCF）^[23]による翼の疲労破壊原因となることから様々な研究がなされてきた^{[24]-[36]}。Denos^[27]らは、単段の遷音速タービンを対象とした非定常 CFD 解析と実験の比較によって、ノズル後縁衝撃波の動翼への衝突と反射による伝播、それによって生じる翼面の圧力変動や流体力変動を調査している。また、Laumert^[28]らも単段遷音速タービンの非定常 CFD 解析によって翼列内における衝撃波の衝突や反射を可視化するとともに、翼面圧力変動に関する調査を行っている。他にも、Miller^{[30][31]}らは 1.5 段タービンの動翼翼面における圧力変動計測を行い、翼面静圧変動として上流および下流の静翼通過周波数成分（Vane-Rotor Interaction、Rotor-Vane Interaction）だけではなく、両静翼どうしの干渉による周波数成分（Vane-Vane Interaction）も発生することを明らかにし、Marcu^[33]らはロケットターボポンプ用タービンにおける axial gap が動翼非定常流体力に与える影響を報告している。

1. 2. 2 部分挿入タービンの流れ場を対象とした研究

前項では、全周挿入タービンを想定した研究について整理した。当然ながら、部分挿入タービンにおいても、そのノズル挿入部では全周挿入タービンと同様の流れ場構造や動静翼干渉が生じる。そのため、先に整理した数々の研究結果の多くは、部分挿入タービンの性能向上に対しても有益なものとなると考えられる。しかしながら、部分挿入タービンでは閉塞部の存在によってより複雑な流れ場が形成されるため、その様子や影響を把握するには部分挿入タービンそのものを対象とした研究が必要となる。また、1.1 節ではロケット用の部分挿入タービンについてそのコンセプトを述べたが、中・小型の蒸気タービン高圧段においても翼高さが極端に低くなることを避ける目的で、さらに蒸気タービンコントロールステージでは蒸気流量調整のために本タービン形態が用いられている。このような背景から、部分挿入タービンを対象とした研究は蒸気タービンとロケットターボポンプ用タービンにおいて行われてきており、ここではこれらの研究について整理する。

まず、ロケットターボポンプ用タービンを対象とした研究としては、NASA^[37]による研究や橋本^[38]らの研究が報告されている。文献[37]の研究では、同じノズルパーシャリティでノズル分割数を変えた場合、分割数の増加に伴ってタービン効率が低くなることが示されている。また、文献[38]では液酸・液水ポンプ用タービンの性能試験を行っており、ここでも分割数1と分割数3の試験結果では分割数3の方が低効率となる結果が報告されている。

部分挿入タービンでは、一般的なターボ機械のCFD解析で用いられるような周期境界条件による解析規模の低減が難しい。そのため、非常に大規模な解析となるため大きな計算コストを要する。しかし、近年の計算機性能の著しい向上によって、蒸気タービンの分野においてCFD解析による流れ場の理解や変動流体力に関する調査が行われている。Sakai^[39]らやSasao^{[40][41]}らは、2次元解析による流れ場の調査を行っている。Sakai^[39]らの研究では、2次元解析の妥当性を試験で検証したうえで、ノズル開口部の周方向位置がタービン効率に影響を与えることが示されている。また、Sasao^{[40][41]}らの研究では、非定常解析によって非定常流動現象や動翼の流体力変動、フランジ部の配置による性能向上について報告されている。さらに、2010年頃からは3次元解析も行われており、

Sakai^[42]らは翼先端での漏洩量を低減することによって部分流入段の性能向上の可能性があると述べている。Hushmandi^[43]らはディスクキャビティまでを含めた2段の非定常解析を行い、キャビティ部の流れの挙動や動翼に作用する非定常流体力について報告しているほか、Kalkkuhl^{[44][45]}らも3次元解析によって変動流体力や周方向の物理量分布について調査している。Yoshida^[46]らの研究では、タービン効率や動翼の流体力変動を正確に予測するためには、ディスクキャビティや翼端隙間の正確なモデル化が重要であると述べているほか、動翼ピッチとノズルピッチの比が小さい方がノズル開口部における流体力変動の振幅が大きくなること、静動翼間隔と動翼ピッチの比が小さいとノズル閉塞部に侵入する際の動翼流体力が大きく増加することを示している。また、先に述べたようにロケット用タービンでは、ノズル分割数が多くなると効率が低下することが報告されているが、Moroz^[47]らの蒸気タービンコントロールステージの研究では、分割数の増加によって初段部性能は低下するものの、後段部性能においては周方向の流れの均一性が改善することで性能が向上し、タービン全体性能が向上することが示されている。

1. 2. 3 ターボ機械の振動に関する研究

タービンの振動問題としては、先に述べたような流体力による強制振動や、たとえ流れ場が定常的であっても流体力が翼振動を増幅するように働く際に発生するフラッタ^[48]が挙げられる。ロケット用タービンは、高回転数で駆動されることに伴う応力に耐えるために動翼と動翼ディスクが一体となった Blisk として設計されることが少なくない。このようなタービンでは、ディスクと翼との間に摩擦が存在しないため、タービンの減衰は作動ガスによる空力減衰と材料が持つ内部減衰^[49]程度となり、振動問題上非常に厳しい状態となる。したがって、設計時に翼やディスクの振動モード形状、固有振動数を理解・評価することが極めて重要となる。振動問題は、タービンに限らずあらゆるターボ機械における共通課題であり、様々な研究がなされている。ここでは、これらターボ機械の振動に関連した研究について整理する。なお、近年ではこのような問題に対して CFD と FEM を用いた流体 - 構造連成解析によるアプローチが盛んに行われているが、このようなアプローチについては 1.2.4 項で整理するとし、ここでは非連成解析アプローチによる研究を記す。

Srinivasan^[50]は、タービン翼やディスクに関する振動問題について、フラッタや強制振動、HCF、様々な減衰機構など広範囲にわたって解説している。Gibert^[51]らは高圧圧縮機ディスクを対象として、コリオリ効果^[49]が振動特性に与える影響について調査し、低節直径モードではよりコリオリ効果の影響が強く表れること、固有振動数の変化によって共振周波数が変化することなどを実験と数値解析から確かめている。また、Kaneko^[53]らは静翼を不等間隔に配置することで共振による応答を低減できることを示している。他にも、ロケットポンプ用インディューサの疲労強度を評価した研究が Uchiumi^[54]らによって行われている。さらに、Groth^{[55][56]}らは Blisk として設計されたロケット用タービンの実験から、タービンディスクがフラッタに至る作動条件（フラッタ境界）を明らかにするとともに、ディスクの mistuning によってフラッタ境界をコントロールできることを示している。また、部分挿入タービンの振動に着目した研究も行われており、Fridh^[57]らは蒸気タービン用の部分挿入タービンを対象とした試験から、複数のノズル挿入部の長さを各々変えて配置することで、強制振動に対する応答が変化することを報告している。

1. 2. 4 流体-構造連成解析に関する研究

ターボ機械のような流体機械や航空機の翼では、流体力によって構造物が変形することがある。変形量が十分に小さければ、構造物の変形は流れ場に対してほとんど影響を及ぼさないが、変形が周期的に繰り返されるような場合は繰り返し応力が作用することになり、材料強度の点で注意が必要となる。一方、変形量が大きい場合、構造物の変形が流れ場に影響を与え、その結果変化した流れ場によって構造物の変形も変化する。このような問題を CFD と FEM の連成によって解くのが流体 - 構造連成解析であり、一方向連成解析と双方向連成解析がある。前者は先に述べたように“片方の変化が他方に影響を与えない”場合に、後者は“それぞれの変化が相互に影響する”場合に用いられる。

流体 - 構造の一方向連成解析では、CFD での流体力を FEM での荷重条件として用いる。さらに、双方向連成解析ではこれに加えて、FEM での変形量をもとに流体と構造物間のエネルギー授受量の計算や CFD 格子の再形成を行いながら計算を進める。つまり、連成解析では CFD と FEM 間でデータを受け渡すことが必要となるが、CFD と FEM における構造物面（CFD - FEM 境界面）の計算格子は一致しないのが一般的である。したがって、このような格子間において流体力やエネルギーなどの保存性と分布をどのように維持するかということが重要となり、その手法について様々な研究がなされている。例えば、Farhat^[58]らは両計算格子の密度が異なることで構造物面の形状にずれがある場合でも、流体力やエネルギーが保存される方法を提案している。また、Jaiman^[59]らは曲率が大きい CFD - FEM 境界面での力の保存性を保つには、構造物面を仮想的に refinement する方法が有用であることを示しているほか、Samareh^[60]は格子トポロジー（構造格子、非構造格子）に依存せず力と運動量が保存される方法を提案している。

このような研究によって連成解析は発展してきており、近年ではターボ機械に応用した研究も行われている。双方向連成解析に関する研究では、Carstens^[61]らや Kariya^[62]ら、Sun^[63]らのほかに Tan^[64]らの研究などがある。例えば Kariya^[62]らは、軸流ファン動翼の翼振動振幅や翼面非定常圧力、翼根本の繰り返し応力を実験と連成解析双方から調査し、結果を比較している。また、Lerche^[65]らは遠心圧縮機を対象とした一方向連成解析を行い、実験による翼のひずみデータとおよそ一致する結果を得ている。

1.3 本研究の目的

次世代ロケットエンジン用ターボポンプの性能向上のためには、その駆動源であるタービンの高信頼性化と高効率化は必要不可欠である。しかしながら、1.1 節で述べたように、現在のロケット用タービン設計技術においては、タービン形態の選択肢である全周挿入と部分挿入について、空力性能や構造強度の差に関する知見が十分ではない。その上、過去に行われてきた CFD による部分挿入タービンの流れ場理解への試みは、いずれも蒸気タービンの亜音速流れを対象としたものである。そのため、ロケット用タービンのように流れが超音速となるような環境での流れ場は明らかにされていない。そこで、本研究では数値解析アプローチによって、超音速部分挿入タービン段における損失源や流体力変動のメカニズム解明、全周挿入と部分挿入それぞれの空力性能と振動特性や遠心力・変動流体力に対する構造強度の定量的評価、総合的に高性能化に適した形態の判定、流れ場や構造強度評価時における留意点など、タービンの高効率高信頼性実現に有益な設計指針を示すことを目的とする。

このような目的を達成するために、本研究では CFD による流れ場解析、FEM による固有モード・固有振動数解析や遠心力に対する強度解析を行う。さらに、変動流体力に対するタービンの強制振動や励起されやすい振動モードと共振時の HCF 評価を CFD と FEM による流体 - 構造一方向連成解析によって実施する。なお、本研究におけるタービン形態の性能比較は、同じ要求仕様でそれぞれ設計された全周挿入タービンと部分挿入タービンを対象とした解析を通じて行っている。したがって、両タービン形態における性能を直接比較することができ、総合的に優れたタービン形態を判定することができる。

1.4 本論文の概要

第1章は序論で、本研究の背景、全周挿入タービンと部分挿入タービンそれぞれの空力的側面やターボ機械の振動、流体 - 構造連成解析に関する過去の研究について述べ、本研究の目的を明らかにする。

第2章は数値解析手法で、流体の基礎方程式について整理した後、流体解析の数値解法、流体 - 構造一方向連成解析手法について述べる。

第3章では、過去に実験的研究がなされたロケット用部分挿入タービン（JAXA M-1タービン）の初段部を対象に、汎用 CFD コードによる準3次元解析を行うことで、従来までに報告されていない超音速部分挿入タービンにおける基本的な流れ場に関する知見を得る。また、ノズルを閉塞しない場合、周方向1か所で閉塞する場合、周方向3か所で閉塞する場合それぞれを計算し、その効率を比較することで閉塞部数がタービン効率に与える影響についても調査する。

第4章では、第3章と同様のタービンを対象に、タービン後段部までを含めて In-house CFD コードによる時空間高解像度2次元非定常 CFD 解析を行い、複雑な2次元流動パターンや損失生成について、より詳細に調査した結果を述べる。

第5章では、JAXA M-1タービンを対象として、汎用 CFD コードによる準3次元および3次元非定常流れ場解析を行う。特に、閉塞部周囲における流れの3次元性や損失生成、動翼に作用する非定常流体力に着目した結果を述べるとともに、比較的計算負荷の軽い準3次元的アプローチの予測限界について把握する。

第6章では、同じ要求仕様で設計された全周挿入タービンと部分挿入タービンの3次元 CFD 解析を行う。タービン効率に着目した評価はタービン全段の定常解析によって実施する。全周挿入と部分挿入の結果を直接比較することにより、どちらの形態がより優れた空力性能を示すかを評価する。また、解析領域にディスクキャビティ空間までを含めたモデルと含めないモデル双方を計算し、流れ場や効率予測にキャビティ空間を含めることの必要性についても論じる。また、タービン初段部を対象とする非定常解析によって動翼に作用する非定常流体力を把握し、第7章で実施する構造解析における荷重条件として用いる。

第7章では、第6章のタービンについて構造強度や振動特性に関する評価を行う。ロケット用タービン材の候補となる Inconel718 と 64 チタンを材料とし、タービンの遠心力に対する静解析、モード解析によるキャンベル線図の作成、流体 - 構造一方向連成解析による周波数応答解析を通じて、励起される振動モード、遠心力や共振時の応力が材料強度の安全範囲内であるかなどについて調査し、全周挿入タービンと部分挿入タービンを構造強度・振動特性の観点から比較評価する。

第8章は結論であり、本論文を総括している。

第2章 数値解析手法

2.1 CFDにおける数値解析手法

2.1.1 基礎方程式

流体力学の基礎方程式を構成する、質量保存則、運動量保存則、エネルギー保存則は、それぞれ式 (2.1.1.1) ～ (2.1.1.3) で表される。

$$\rho_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (2.1.1.1)$$

$$(\rho \mathbf{u})_t + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} \mathbf{u} = -\nabla p + \nabla \Pi \quad (2.1.1.2)$$

$$e_t + \nabla \cdot (e + p) \mathbf{u} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \nabla \cdot (\Pi \cdot \mathbf{u}) \quad (2.1.1.3)$$

ここで、添え字 t は時間微分を表す。また、 ρ 、 p 、 Π 、 e 、 \mathbf{q} はそれぞれ密度、静圧、粘性応力テンソル、全内部エネルギー、熱流束である。

流体の位置エネルギーを無視すれば、全内部エネルギーは式 (2.1.1.4) で表される。

$$e = \rho \left(c_v T + \frac{1}{2} u_i u_i \right) \quad (2.1.1.4)$$

式 (2.1.1.4) における右辺第一項は内部エネルギー、右辺第二項は運動エネルギーをそれぞれ表している。一方、完全気体の状態方程式は式 (2.1.1.5) で表される。

$$p = \rho R T \quad (2.1.1.5)$$

ここで、 R はガス定数であり、式 (2.1.1.6) を満たす。

$$R = c_p - c_v \quad (2.1.1.6)$$

さらに、式 (2.1.1.7) に示す比熱比 γ と式 (2.1.1.6) からガス定数と比熱比には式 (2.1.1.8) の関係が成り立つ。

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad (2.1.1.7)$$

$$R = \frac{\gamma - 1}{c_v} \quad (2.1.1.8)$$

よって、式 (2.1.1.5) および式 (2.1.1.8) より、式 (2.1.1.4) 右辺第一項の内部エネルギーは下式で表される。

$$\rho c_v T = \frac{c_v P}{R} = \frac{P}{\gamma - 1} \quad (2.1.1.9)$$

したがって、式 (2.1.1.9) を式 (2.1.1.4) に代入し、静圧について解くと静圧と全内部エネルギーの関係式 (2.1.1.10) が得られる。

$$p = (\gamma - 1) \left(e - \frac{\rho}{2} u_i u_i \right) \quad (2.1.1.10)$$

運動量保存則およびエネルギー保存則の式に表れる粘性応力テンソル Π の成分 τ_{ij} は式 (2.1.1.11) のように表される。

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.1.1.11)$$

ここで、 μ は分子粘性係数であり、サザランド則から次のように求められる。

$$\mu = \mu_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{3/2} \frac{T_0 + C}{T + C} \quad (2.1.1.12)$$

式 (2.1.1.12) における各パラメータは流体によって異なり、水素では $\mu_0 = 8.76 \times 10^{-6}$ 、 $T_0 = 276.07$ 、 $C = 72$ であり、窒素では $\mu_0 = 17.81 \times 10^{-6}$ 、 $T_0 = 282.77$ 、 $C = 111$ である。また、 λ は第二粘性係数で、式 (2.1.1.13) に示す体積粘性係数 ζ の右辺第一項である。

$$\zeta = \lambda + \frac{2}{3} \mu \quad (2.1.1.13)$$

体積粘性係数を 0 とすると（ストークスの仮定。単原子気体では ζ は 0 であることがわかっている）、 λ は式 (2.1.1.14) のようになる。

$$\lambda = -\frac{2}{3} \mu \quad (2.1.1.14)$$

したがって、式 (2.1.1.11) は式 (2.1.1.15) のように表される。

$$\tau_{ij} = \mu \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right] \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.1.1.15)$$

エネルギー保存則の式に表れる熱流束 \mathbf{q} は、熱伝導率 κ と温度勾配から式 (2.1.1.16) のように表される。

$$q_i = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (2.1.1.16)$$

ここで、熱伝導率はプラントル数 Pr を用いて下式のように表される。

$$\kappa = \frac{c_p \mu}{Pr} \quad (2.1.1.17)$$

一方、音速 c は式 (2.1.1.18) で与えられることから、式 (2.1.1.18) と式 (2.1.1.8) より温度は式 (2.1.1.19) のように表される。

$$c = \sqrt{\gamma R T} \quad (2.1.1.18)$$

$$T = \frac{c^2}{\gamma R} = \frac{c^2}{c_p(\gamma - 1)} \quad (2.1.1.19)$$

したがって、式 (2.1.1.16) は式 (2.1.1.20) のように表される。

$$q_i = -\kappa \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{c^2}{c_p(\gamma - 1)} \right) \quad (2.1.1.20)$$

これらの基礎方程式を一般曲線座標系に変換すると、一般曲線座標系における 3 次元圧縮性ナビエ・ストークス方程式が式 (2.1.1.21) のように得られる。

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} + \hat{L}(\hat{Q}) \equiv \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{E}_i}{\partial \xi_i} + \hat{S} + \hat{H} = 0 \quad (2.1.1.21)$$

ここで、 \hat{Q} は未知変数ベクトル、 \hat{E}_i は流束ベクトル、 \hat{S} は粘性流束ベクトル、 \hat{H} は生成項であり、それぞれ式 (2.1.1.22) のようになる。

$$\hat{Q} = J \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \\ e \end{bmatrix}, \quad \hat{E}_i = J \begin{bmatrix} \rho U_i \\ \rho u_1 U_i + (\partial \xi_i / \partial x_1) p \\ \rho u_2 U_i + (\partial \xi_i / \partial x_2) p \\ \rho u_3 U_i + (\partial \xi_i / \partial x_3) p \\ (e + p) U_i \end{bmatrix}, \quad (2.1.1.22)$$

$$\hat{S} = -J \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{1i} \\ \tau_{2i} \\ \tau_{3i} \\ \tau_{ik} u_k + \kappa (\partial T / \partial x_j) \end{bmatrix}, \quad H = -J \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho (\Omega^2 x_2 + 2\Omega u_3) \\ \rho (\Omega^2 x_3 - 2\Omega u_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

($i=1,2,3$)

なお、式 (2.1.1.22) における J はデカルト座標系 (x_1, x_2, x_3) から一般曲線座標系 (ξ_1, ξ_2, ξ_3) への変換のヤコビアン、 U_i は反変速度成分であり、それぞれ下式のように定義される。

$$J = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} \quad (2.1.1.23)$$

$$U_i = (\mathbf{u} \cdot \nabla)_{\xi_i} = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} u_j \quad (i=1,2,3) \quad (2.1.1.24)$$

2. 1. 2 乱流の基礎方程式

乱流では、大小さまざまなスケールの渦が存在する。そのような全ての乱流構造を計算する方法が DNS (Direct Numerical Simulation) である。また、設定した計算格子よりも細かい変動スケールはモデル化し、計算格子よりも大きなスケールを直接計算する方法として LES (Large Eddy Simulation) がある。DNS は極めて密な計算格子を必要とし、LES では DNS に比べて格子点数を削減することができるが、境界層近傍での格子密度は依然高くする必要があり、どちらの手法も大きな計算コストを要する。これらの手法に対して、乱流の平均的な流れにのみ興味がある場合は RANS (Reynolds averaged Navier-Stokes) 解析が用いられる。この手法は、乱流の全ての変動成分をモデル化し、乱流の平均流を計算する方法であり、Favre 平均された圧縮性ナビエ・ストークス方程式を解く。RANS 解析では、先に述べた 2 つの手法に比べて計算規模を大幅に低減することができるため広く用いられている。

RANS 解析では、Favre 平均によってレイノルズ応力 $\overline{\rho u_i u_j}$ と呼ばれる新たな未知変量が生まれる。この未知量を何らかの形でモデル化し、既知量で表現することが求められるが、このモデル化を乱流運動の分子粘性に対するアナロジーに基づいて行う方法をブシネスク近似といい、式 (2.1.2.1) のように表す。

$$-\overline{\rho u_i u_j} = \mu_t \left(\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (2.1.2.1)$$

$$\mu_t = \rho \nu_t l \quad (2.1.2.2)$$

ここで、 μ_t は渦粘性係数、 \overline{U} は乱流速度の平均部分であり、 ν_t と l は乱流による変動成分の代表速度と代表長さである。また、式 (2.1.2.1) の速度勾配の項はひずみ速度テンソルであり、流体の運動における伸長やずり、せん断の効果を表すもので、変形と回転を伴う流体運動の効果を表す速度勾配テンソルにおいて、剛体的な回転運動の効果を表す成分 (渦度テンソル) を除いたものである。さらに、 μ_t 熱の拡散係数 κ' は渦粘性係数と乱流プラントル数 Pr_t を用いて式 (2.1.2.3) のように表される。

$$\kappa' = \frac{c_p \mu_t}{Pr_t} \quad (2.1.2.3)$$

RANS の方程式は、これら渦粘性係数と熱の拡散係数を用いることにより、前項で示した層流に対するナビエ・ストークス方程式と同じ形で書くことができ、粘性係数 μ と熱伝導率 κ をそれぞれ下式のように置き換える。

$$\mu = \mu_l + \mu_t \quad (2.1.2.4)$$

$$\kappa = \kappa^l + \kappa^t \quad (2.1.2.5)$$

ここで、 μ_l はサザランド則から求められる分子粘性係数、 κ^l は熱伝導率である。すなわち、RANS 解析ではレイノルズ応力を渦粘性係数の変数とし、この渦粘性係数を乱流モデルなどによって求めることで流れ場を計算する。

2. 1. 3 数値解法

本研究では、流れ場解析ソルバーとして汎用の CFD 解析ソフトと東北大学山本悟教授開発の数値タービンの 2 次元 Ver.^[41]を用いている。汎用ソフトは複雑形状を対象とした解析に向いているという特徴がある一方で、数値タービンは格子トポロジーに対して制約はあるものの、汎用ソフトよりも高い空間精度のスキームを実装しているうえ、時間解像度も極めて高くとることができる。そのため、2 次元の議論に限られてはしまうが複雑な非定常流動場を詳細に把握するために本コードによる解析を行った。本項の (1) ~ (4) では、主に数値タービンコードにおける数値解法について説明する。

数値タービンでは、空間差分を Roe の流束差分法^[66]に 4 次精度コンパクト MUSCL TVD スキーム^[67]を適用して計算する。また、時間積分には LU-SGS 法^[68]、乱流モデルには Menter の SST (Shear Stress Transport) モデル^{[73][74]}を用い、粘性項は 2 次精度中心差分によって離散化する。

2. 1. 3. (1) 特性の理論

2 次元で議論することから、式 (2.1.1.21) に示した一般曲線座標系での 3 次元圧縮性ナビエ・ストークス方程式においてコリオリ力を示す項である \hat{H} は 0 となる。したがって、式 (2.1.1.21) を 2 次元に書き変えると式 (2.1.3.1) のようになる。

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} + \hat{L}(\hat{Q}) = \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{E}_i}{\partial \xi_i} + \hat{S} = 0 \quad (2.1.3.1)$$

この式を時間ステップ n および $n+1$ の値によって時間方向に離散化すると式 (2.1.3.2) のように表すことができる。

$$\hat{Q}^{n+1} = \hat{Q}^n - \Delta t \hat{L}(\hat{Q}) \quad (2.1.3.2)$$

数値タービンでは、空間差分に Roe の流束差分法^[66]を用いる。そのため、数値流束を計算する際にヤコビ行列の固有値の絶対値が必要となる。そこで、式 (2.1.1.5) および式 (2.1.1.18) に示す状態方程式と音速の式を用い、流束ベクトル \hat{E}_i を未知変数 \hat{E}_i

クトル \hat{Q} の1次の同次式として表す。これによって、 \hat{E}_i は線形化、対角化され、特性の理論に基づく圧縮性流れのスキームが適用される。まず、保存形の基礎方程式から導かれるヤコビ行列 \hat{A}_i は式 (2.1.3.3) のように求められる。

$$\hat{A}_i = \frac{\partial \hat{E}_i}{\partial \hat{Q}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial \xi_i}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_i}{\partial x_2} & 0 \\ -u_1 U_i + \frac{\partial \xi_i}{\partial x_1} \phi^2 & U_i - (\tilde{\gamma} - 1) \frac{\partial \xi_i}{\partial x_1} u_1 & \frac{\partial \xi_i}{\partial x_2} u_1 - \tilde{\gamma} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_1} u_2 & \tilde{\gamma} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_1} \\ -u_2 U_i + \frac{\partial \xi_i}{\partial x_2} \phi^2 & \frac{\partial \xi_i}{\partial x_1} u_2 - \tilde{\gamma} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_2} u_1 & U_i - (\tilde{\gamma} - 1) \frac{\partial \xi_i}{\partial x_2} u_2 & \tilde{\gamma} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_2} \\ -U_i H + U_i \phi^2 & \frac{\partial \xi_i}{\partial x_1} H - \tilde{\gamma} u_1 U_i & \frac{\partial \xi_i}{\partial x_2} H - \tilde{\gamma} u_2 U_i & \tilde{\gamma} U_i \end{bmatrix} \quad (i=1,2) \quad (2.1.3.3)$$

ここで、 $H=(e+p)/\rho$ は全エンタルピーであり、 ϕ^2 と $\tilde{\gamma}$ はそれぞれ下式で表される。

$$\phi^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} = \tilde{\gamma} \frac{u_i u_i}{2} \quad (2.1.3.4)$$

$$\tilde{\gamma} = \gamma - 1 \quad (2.1.3.5)$$

式 (2.1.3.3) に示すヤコビ行列 \hat{A}_i を用いることで、式 (2.1.3.1) の対流項は下式のように線形化される。

$$\frac{\partial \hat{E}_i}{\partial \xi_i} = \hat{A}_i \frac{\partial \hat{Q}}{\partial \xi_i} \quad (2.1.3.6)$$

この式を対角化するには、ヤコビ行列 \hat{A}_i の固有値からなる対角行列 Λ_i が必要となる。しかし、保存形の式は特性の理論を適用すると複雑になるため、対角化の前に保存形から非保存形への変換を行う。まず、非保存形の未知変数ベクトル \hat{Q}^* は式 (2.1.3.7) のように表現できる。

$$\hat{Q}^* = [\rho \quad u_1 \quad u_2 \quad p]^T \quad (2.1.3.7)$$

また、保存形から非保存形への変換行列 N は、デカルト座標系における保存形および非保存形の未知変数ベクトル Q 、 Q^* を用いて、式 (2.1.3.8) で定義され、その成分は式 (2.1.3.9) で求められる。

$$N = \frac{\partial Q^*}{\partial Q} \quad (2.1.3.8)$$

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{u_1}{\rho} & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ -\frac{u_2}{\rho} & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ \phi^2 & -\tilde{\gamma}u_1 & -\tilde{\gamma}u_2 & \tilde{\gamma} \end{bmatrix} \quad (2.1.3.9)$$

この変換行列 N とその逆行列 N^{-1} より、保存形でのヤコビ行列 \hat{A}_i と非保存形でのヤコビ行列 \hat{A}_i^* の間には式 (2.1.3.10) が成り立つ。

$$\hat{A}_i = N^{-1} \hat{A}_i^* N \quad (2.1.3.10)$$

さらに、非保存形でのヤコビ行列 \hat{A}_i^* を対角化して表現する。まず、 \hat{A}_i^* は式 (2.1.3.11) より求められる。

$$\hat{A}_i^* = \begin{bmatrix} U_i & \frac{\partial \xi_i}{\partial x_1} \rho & \frac{\partial \xi_i}{\partial x_2} \rho & 0 \\ 0 & U_i & 0 & \frac{\partial \xi_i}{\partial x_1} \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & U_i & \frac{\partial \xi_i}{\partial x_2} \frac{1}{\rho} \\ 0 & \frac{\partial \xi_i}{\partial x_1} \rho c^2 & \frac{\partial \xi_i}{\partial x_2} \rho c^2 & U_i \end{bmatrix} \quad (2.1.3.11)$$

\hat{A}_i^* の固有値 λ_{ik} は、式 (2.1.3.12) に示す特性方程式の根となる。

$$|\hat{A}_i^* - \lambda_i I| = \begin{vmatrix} U_i - \lambda_i & \frac{\partial \xi_i}{\partial x_1} \rho & \frac{\partial \xi_i}{\partial x_2} \rho & 0 \\ 0 & U_i - \lambda_i & 0 & \frac{\partial \xi_i}{\partial x_1} \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & U_i - \lambda_i & \frac{\partial \xi_i}{\partial x_2} \frac{1}{\rho} \\ 0 & \frac{\partial \xi_i}{\partial x_1} \rho c^2 & \frac{\partial \xi_i}{\partial x_2} \rho c^2 & U_i - \lambda_i \end{vmatrix} = 0 \quad (2.1.3.12)$$

そして、この特性方程式の根は下式のようになる。

$$\begin{aligned} \lambda_{i1} &= U_i \quad (\text{重根}) \\ \lambda_{i3} &= U_i + c\sqrt{g_{ii}} \\ \lambda_{i4} &= U_i - c\sqrt{g_{ii}} \end{aligned} \quad (2.1.3.13)$$

ここで、式 (2.1.3.13) の g_{ij} は一般曲線座標系における測度であり、下式で定義される。

$$g_{ij} = \nabla \xi_i \cdot \nabla \xi_j \quad (i,j=1,2) \quad (2.1.3.14)$$

よって、ヤコビ行列 \hat{A}_i^* の固有値からなる対角行列 Λ_i は、式 (2.1.3.15) となる。

$$\Lambda_i = \begin{bmatrix} U_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & U_i + c\delta_{1i}\sqrt{g_{ii}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & U_i + c\delta_{2i}\sqrt{g_{ii}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & U_i - c\sqrt{g_{ii}} \end{bmatrix} \quad (2.1.3.15)$$

さらに、 \hat{A}_i^* の左固有ベクトル \hat{L}_{ik}^* は各固有値に対して下記のように表される式を解くことで求められる。

$$\lambda_i = U_i \text{ に対して} \quad \begin{matrix} l_i^* (\hat{A}_i^* - \lambda_i I) = \begin{pmatrix} l_{ik}^{*1} & l_{ik}^{*2} & l_{ik}^{*3} & l_{ik}^{*4} \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial \xi_i}{\partial x_1} \rho & \frac{\partial \xi_i}{\partial x_2} \rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \xi_i}{\partial x_1} \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \xi_i}{\partial x_2} \frac{1}{\rho} \\ 0 & \frac{\partial \xi_i}{\partial x_1} \rho c^2 & \frac{\partial \xi_i}{\partial x_2} \rho c^2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \end{matrix} \quad (2.1.3.16)$$

$$\lambda_i = U_i \pm c\sqrt{g_{ii}} \text{ に対して} \quad \begin{matrix} l_i^* (\hat{A}_i^* - \lambda_i I) = \begin{pmatrix} l_{ik}^{*1} & l_{ik}^{*2} & l_{ik}^{*3} & l_{ik}^{*4} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \mp c\sqrt{g_{ii}} & \frac{\partial \xi_i}{\partial x_1} \rho & \frac{\partial \xi_i}{\partial x_2} \rho & 0 \\ 0 & \mp c\sqrt{g_{ii}} & 0 & \frac{\partial \xi_i}{\partial x_1} \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & \mp c\sqrt{g_{ii}} & \frac{\partial \xi_i}{\partial x_2} \frac{1}{\rho} \\ 0 & \frac{\partial \xi_i}{\partial x_1} \rho c^2 & \frac{\partial \xi_i}{\partial x_2} \rho c^2 & \mp c\sqrt{g_{ii}} \end{vmatrix} = 0 \end{matrix} \quad (2.1.3.17)$$

そして、式 (2.1.3.16) および式 (2.17) を解くことで得られる左固有ベクトルからなる行列 \hat{L}_i^* は式 (2.1.3.18) のようになる。

$$\hat{L}_i^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{c^2} \\ 0 & \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \delta_{i1} - \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \delta_{i2} & \frac{\sqrt{g_{11}}}{\rho} \delta_{i1} \\ 0 & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \delta_{i2} - \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \delta_{i1} & \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} & \frac{\sqrt{g_{22}}}{\rho} \delta_{i2} \\ 0 & \frac{\partial \xi_i}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_i}{\partial x_2} & -\frac{\sqrt{g_{ii}}}{\rho} \end{bmatrix} \quad (2.1.3.18)$$

これらの式から、非保存形でのヤコビ行列 \hat{A}_i^* は式 (2.1.3.19) のように対角化できる。

$$\hat{A}_i^* = \hat{L}_i^{*-1} \Lambda_i \hat{L}_i^* \quad (2.1.3.19)$$

よって、式 (2.1.3.19) を式 (2.1.3.10) に代入することで下式を得る。

$$\hat{A}_i = N^{-1} \hat{L}_i^{*-1} \Lambda_i \hat{L}_i^* N = \hat{L}_i^{-1} \Lambda_i \hat{L}_i \quad (2.1.3.20)$$

ここで、 \hat{L}_i は \hat{A}_i を対角化した際の左固有ベクトルである。したがって、式 (2.1.3.1) に示す対流項は式 (2.1.3.21) のように線形化、対角化される。

$$\frac{\partial \hat{E}_i}{\partial \xi_i} = \hat{A}_i \frac{\partial \hat{Q}_i}{\partial \xi_i} = \hat{L}_i^{-1} \Lambda_i \hat{L}_i \frac{\partial \hat{Q}_i}{\partial \xi_i} \quad (2.1.3.21)$$

2. 1. 3. (2) 空間差分

式(2.1.3.1)に示す基礎方程式の対流項を格子点 I で離散化すると次式のようになる。

$$\left(\frac{\partial \hat{E}_I}{\partial \xi_I} \right)_I = \frac{(\hat{E}_I)_{I+1/2} - (\hat{E}_I)_{I-1/2}}{\Delta \xi_I} \quad (2.1.3.22)$$

ここで、Roe の流束差分法^[66]を適用すると、数値流束は式 (2.1.3.23) のように表される。

$$(\hat{E}_I)_{I+1/2} = \frac{1}{2} \left[\hat{E}_I (\hat{Q}_{I+1/2}^L) + \hat{E}_I (\hat{Q}_{I+1/2}^R) - \left(\hat{A}_I \right)_{I+1/2} \left(\hat{Q}_{I+1/2}^R - \hat{Q}_{I+1/2}^L \right) \right] \quad (2.1.3.23)$$

数値タービンでは、 $|\hat{A}_I| \hat{Q}$ の計算をサブベクトル形式で扱う。 $|\hat{A}_I| \hat{Q}$ に Roe 平均を施したサブベクトル形式は式 (2.1.3.24) のようになる。なお、オーバーラインのついている量が Roe 平均される。

$$\begin{aligned} |\hat{A}_I| \hat{Q}^M &= N^{-1} \tilde{L}_I^{-1} |\bar{\Lambda}_I| \tilde{L}_I N \hat{Q}^M \\ &= \frac{1}{J} \hat{Q}^M |\bar{\lambda}_{I1}| + \frac{1}{J \bar{c} \sqrt{g_{ii}}} \left(p^{*M} \bar{Q}_{ia} + \Delta m_i^* \bar{Q}_b \right) |\bar{\lambda}_{ia}| \\ &\quad + \frac{1}{J} \left(\frac{p^{*M}}{\bar{c}^2} \bar{Q}_b + \frac{\Delta m_i^*}{g_{ii}} \bar{Q}_{ia} \right) |\bar{\lambda}_{ib}| \end{aligned} \quad (2.1.3.24)$$

ここで、 M は L もしくは R であり、 p^* は静圧、 Δm_i^* は運動量の差を意味し、導出されたサブベクトル \hat{Q}_{ia} 、 \hat{Q}_b とともにそれぞれ下式で与えられる。

$$p^{*M} = \bar{\phi}^2 \rho^M - (\bar{\gamma} - 1) \{ \bar{u}_i (\rho u_i)^M - e^M \} \quad (2.1.3.25)$$

$$\Delta m_i^* = \partial \xi_i / \partial x_j (\rho u_j)^M - \rho^M \bar{U}_i \quad (2.1.3.26)$$

$$Q_{ia} = \begin{bmatrix} 0 & \partial \xi_i / \partial x_i & \partial \xi_i / \partial x_2 & U_i \end{bmatrix}^T \quad (2.1.3.27)$$

$$Q_b = \begin{bmatrix} 1 & u_1 & u_2 & (e + p) / \rho \end{bmatrix}^T \quad (2.1.3.28)$$

また、 $\bar{\lambda}_{ia}$ 、 $\bar{\lambda}_{ib}$ は下式で計算される

$$|\bar{\lambda}_{ia}| = \frac{(|\bar{\lambda}_{i3}| - |\bar{\lambda}_{i4}|)}{2} \quad (2.1.3.29)$$

$$|\bar{\lambda}_{ib}| = \frac{(|\bar{\lambda}_{i3}| + |\bar{\lambda}_{i4}|)}{2} - |\lambda_{i1}| \quad (2.1.3.30)$$

また、 \hat{Q}^L および \hat{Q}^R は 4 次精度 Compact MUSCL TVD スキーム^[67]によって下記のように求められる。

$$Q_{i+1/2}^L = Q_i + \frac{1}{6} \bar{\Delta} Q_i^L + \frac{1}{3} \bar{\Delta} Q_i^R \quad (2.1.3.31)$$

$$Q_{i+1/2}^R = Q_{i+1} - \frac{1}{6} \bar{\Delta} Q_{i+1}^R - \frac{1}{3} \bar{\Delta} Q_{i+1}^L \quad (2.1.3.32)$$

ここで、右辺の各量は下記式で与えられる。

$$\bar{\Delta} Q_i^L = \minmod(\bar{\Delta} Q_{i-1/2}, b_1 \bar{\Delta} Q_{i+1/2}) \quad (2.1.3.33)$$

$$\bar{\Delta} Q_i^R = \minmod(\bar{\Delta} Q_{i+1/2}, b_1 \bar{\Delta} Q_{i-1/2}) \quad (2.1.3.34)$$

$$\bar{\Delta} Q_{i+1/2} = \Delta Q_{i+1/2} - \frac{1}{6} \Delta^3 Q_{i+1/2} \quad (2.1.3.35)$$

$$\Delta Q_{i+1/2} = Q_{i+1} - Q_i \quad (2.1.3.36)$$

$$\Delta^3 Q_{i+1/2} = \Delta \tilde{Q}_L - 2\Delta \tilde{Q}_M + \Delta \tilde{Q}_R \quad (2.1.3.37)$$

$$\Delta \tilde{Q}_L = \minmod(\Delta Q_{i-1/2}, b_2 \Delta Q_{i+1/2}, b_2 \Delta Q_{i+3/2}) \quad (2.1.3.38)$$

$$\Delta \tilde{Q}_M = \minmod(\Delta Q_{i+1/2}, b_2 \Delta Q_{i+3/2}, b_2 \Delta Q_{i-1/2}) \quad (2.1.3.39)$$

$$\Delta \tilde{Q}_R = \minmod(\Delta Q_{i+3/2}, b_2 \Delta Q_{i-1/2}, b_2 \Delta Q_{i+1/2}) \quad (2.1.3.40)$$

なお、 $1 < b_1 \leq 4$ 、 $b_2 \cong 2$ である。また、minmod は制限関数であり、計算を安定に進めるために流れ場に応じて局所的に低次精度スキームに切り替わるようにするもので、式 (2.1.3.41) で定義される。

$$\min mod(a_1, \dots, a_n) = \text{sign}(a_1) \max\{0, \min(|a_1|, \text{sign}(a_1) \cdot a_2, \dots, \text{sign}(a_1) \cdot a_n)\} \quad (2.1.3.41)$$

以上より、空間格子点 l 及び $l+1$ の中間点における \hat{Q} の値を、その風上側最大 3 点の格子点における物理変数によって外挿し、高次精度で得ることができる。

2. 1. 3. (3) 時間積分

数値タービンでは、時間積分に LU-SGS 法^[68]を用いている。まず、式 (2.1.3.1) に示す基礎方程式を、陰的および陽的な離散化の重みを表すパラメータ θ を用いて離散化した式を線形補間した形で表すと式 (2.1.3.42) のようになる。

$$\frac{\hat{Q}^{n+1} - \hat{Q}^n}{\Delta t} + \theta \left(\frac{\partial \hat{E}_i^{n+1}}{\partial \xi_i} \right) = -(1 - \theta) \left(\frac{\partial \hat{E}_i^n}{\partial \xi_i} \right) - \hat{S}^n \quad (2.1.3.42)$$

なお、数値タービンでは粘性項を 2 次精度中心差分によって別途陽的に計算するため、式 (2.1.3.42) において θ は対流項のみに乗じている。ここで、 $n+1$ ステップにおける数値流束ベクトルは次式のように線形化できる。

$$\hat{E}_i^{n+1} = \hat{E}_i^n + \frac{\partial \hat{E}_i^n}{\partial \hat{Q}} \Delta \hat{Q}^n = \hat{E}_i^n + \hat{A}_i \Delta \hat{Q}^n \quad (2.1.3.43)$$

ここで、 $\Delta \hat{Q}^n$ は式 (2.1.3.44) を意味する。

$$\Delta \hat{Q}^{n+1} = \hat{Q}^{n+1} - \hat{Q}^n \quad (2.1.3.44)$$

したがって、式 (2.1.3.42) の対流項は式 (2.1.3.45) のように表すことができる。

$$\frac{\partial \hat{E}_i^{n+1}}{\partial \xi_i} = \frac{\partial \hat{E}_i^n}{\partial \xi_i} + \frac{\partial \hat{A}_i}{\partial \xi_i} \Delta \hat{Q}^n \quad (2.1.3.45)$$

式 (2.1.3.45) を式 (2.1.3.42) に代入して整理すると次式のようになる。

$$\left[I + \theta \Delta t \left(\frac{\partial \hat{A}_i}{\partial \xi_i} \right) \right] \Delta \hat{Q}^n = -\Delta t \left(\frac{\partial \hat{E}_i^n}{\partial \xi_i} + \hat{S}^n \right) \quad (2.1.3.46)$$

また、ヤコビ行列 \hat{A}_i を正および負の固有値からそれぞれ構成されたヤコビ行列 \hat{A}_i^+ 、 \hat{A}_i^- の和の形で表すと $\partial \hat{A}_i / \partial \xi_i$ は下式のように表される。

$$\frac{\partial \hat{A}_i}{\partial \xi_i} = \frac{\partial (\hat{A}_i^+ + \hat{A}_i^-)}{\partial \xi_i} = \Delta_i^- \hat{A}_i^+ + \Delta_i^+ \hat{A}_i^- \quad (2.1.3.47)$$

ここで、 \hat{A}_i^+ および \hat{A}_i^- はそれぞれ i 方向の前進および後退差分演算子である。よって、式 (2.1.3.46) 右辺を RHS'' とし、式 (2.1.3.47) を式 (2.1.3.46) に代入すると式 (2.1.3.48) のように上流化された形式となる。

$$\{I + \theta\Delta t (\hat{A}_i^- \hat{A}_i^+ + \hat{A}_i^+ \hat{A}_i^-)\} \Delta \hat{Q}'' = RHS'' \quad (2.1.3.48)$$

この式に 1 次上流差分を適用し、整理すると式 (2.1.3.49) のようになる。

$$D \Delta \hat{Q}''_{i,j} + \theta\Delta t \{(\hat{A}_1^- \Delta \hat{Q}'')_{i+1,j} - (\hat{A}_1^+ \Delta \hat{Q}'')_{i-1,j} + (\hat{A}_2^- \Delta \hat{Q}'')_{i,j+1} - (\hat{A}_2^+ \Delta \hat{Q}'')_{i,j-1}\} = RHS'' \quad (2.1.3.49)$$

$$D = I + \theta\Delta t \sum_{m=1}^2 \{(\hat{A}_m^+)_{i,j} - (\hat{A}_m^-)_{i,j}\} \quad (2.1.3.50)$$

ただし、添え字 i および j は格子点を表す。式 (2.1.3.49) の左辺第一項は対角化項であり、左辺の残りの項は非対角成分を構成する項である。この式を近似 LDU 分解すると以下ようになる。

$$(D + L)D^{-1}(D + U)\Delta \hat{Q}'' = RHS'' \quad (2.1.3.51)$$

ここで、 L と U は下三角行列と上三角行列であり、それぞれ次のように表される。

$$L = -\theta\Delta t \{(\hat{A}_1^+)_{i-1,j} + (\hat{A}_2^+)_{i,j-1}\}^n \quad (2.1.3.52)$$

$$U = \theta\Delta t \{(\hat{A}_1^-)_{i+1,j} + (\hat{A}_2^-)_{i,j+1}\}^n \quad (2.1.3.53)$$

Yoon^[68]らは \hat{A}^\pm を近似的に以下のように定義している。

$$\hat{A}_i^\pm = \frac{1}{2} [\hat{A}_i \pm \hat{r}_i I] \quad (2.1.3.54)$$

なお、 \hat{r}_i は \hat{A}_i のスペクトル半径であり、ヤコビ行列 \hat{A}_i の固有値を用いて次式のように与えられる。

$$\hat{r}_i = \sigma \max [\lambda(\hat{A}_i)] = \sigma (|U_i| + c\sqrt{g_{ii}}) \quad (2.1.3.55)$$

なお、 σ は 1 以上の定数であり本研究では 1.01 とした。よって、式 (2.1.3.50) に示す D は以下に示すようなスカラー対角行列となる。

$$D = \left\{ 1 + \theta\Delta t \sum_{m=1}^2 (\hat{r}_m)_{i,j} \right\} I \quad (2.1.3.56)$$

以上より、式 (2.1.3.51) は 2 段階の対称 Gauss-Seidel 法によって下記のように解くことができる。

$$\Delta \hat{Q}_{i,j}^{n-1/2} = D^{-1} \left\{ RHS_{i,j}^n + \theta \Delta t \left[\left(\hat{A}_1^+ \Delta \hat{Q}^{n-1/2} \right)_{i-1,j} + \left(\hat{A}_2^+ \Delta \hat{Q}^{n-1/2} \right)_{i,j-1} \right] \right\} \quad (2.1.3.57)$$

$$\Delta \hat{Q}_{i,j}^n = \Delta \hat{Q}_{i,j}^{n-1/2} - D^{-1} \theta \Delta t \left[\left(\hat{A}_1^- \Delta \hat{Q}^n \right)_{i+1,j} + \left(\hat{A}_2^- \Delta \hat{Q}^n \right)_{i,j+1} \right] \quad (2.1.3.58)$$

ここで、 $\Delta \hat{Q}^{n-1/2}$ は下式で定義される。

$$\Delta \hat{Q}^{n-1/2} = D^{-1} (D + U) \Delta \hat{Q}^n$$

また、式 (2.1.3.57) および式 (2.1.3.58) の $\hat{A}_k^* \Delta \hat{Q}$ は式 (2.1.3.27) および式 (2.1.3.28) に示すサブベクトルを用い、その和によって式 (2.1.3.59) のように定義する。

$$\hat{A}_i^* \Delta \hat{Q} = \frac{J}{2} \left\{ (U_i \pm \hat{r}_i) \Delta \hat{Q} + (\Delta p^* \hat{Q}_{ia} + \Delta m_i^* \hat{Q}_b) \right\} \quad (2.1.3.59)$$

なお、 Δp^* 、 Δm_i^* はそれぞれ次のように表される。

$$\Delta p^* = \bar{\phi}^2 \Delta \rho - (\bar{\gamma} - 1) \{ \bar{u}_i \Delta(\rho u_i) - \Delta e \} \quad (2.1.3.60)$$

$$\Delta m_i^* = \partial \xi_i / \partial x_j \Delta(\rho u_j) - \Delta \rho \bar{U}_i \quad (2.1.3.61)$$

2. 1. 3. (4) 乱流モデル

2.1.2 項で述べたとおり、RANS 解析ではレイノルズ応力項を渦粘性係数 μ_t の関数としてモデル化する。そして、 μ_t は乱流変動の代表速度 v_t と代表長さ l の関数となっている。したがって、 v_t と l を求められれば μ_t を計算することができ、その結果レイノルズ応力が求まり基礎方程式を閉じることができる。

これまで、これらの量を求める方法は様々研究されており、Prandtl の混合距離モデル^[69]や Baldwin-Lomax モデル^[70]のような 0 方程式モデルや、代表速度を求めるために輸送方程式を 1 つ導出し、代表長さは代数的に与える 1 方程式モデル、輸送方程式を 2 つ導出して代表速度と代表長さを求める 2 方程式モデルなどがある。代表的な 1 方程式モデルには、修正乱流粘性係数輸送方程式を解く Spalart-Allmaras モデル^[71]などがある。一方、2 方程式モデルでは乱流エネルギー k と乱流エネルギーの散逸率 ε の輸送方程式を解く標準 k - ε モデルや k とその比散逸率 ω を解く Wilcox の k - ω モデル^[72]、これらのハイブリッドである Menter の SST (Shear Stress Transport) モデル^{[73][74]}などがある。SST モデルは、壁面近傍を k - ω 、壁面から離れた領域を k - ε によって解くもので、乱流せん断力の輸送効果も考慮されており、 k - ε モデルや k - ω モデルよりも優れた予測精度を示す^[73]。本研究においても、乱流モデルとして SST モデルを使用した。

SST モデルにおける輸送方程式は、デカルト座標系で以下のように与えられる^[74]。なお、本研究における数値タービンを用いた解析は 2 次元であるため $i, j=1, 2$ であるが、汎用ソフトにおける 3 次元解析でも本モデルを用いていることから、ここでは $i, j=1, 2, 3$ として表現する。

$$\frac{D\rho k}{Dt} = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \beta^* \rho \omega k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (2.1.3.62)$$

$$\frac{D\rho \omega}{Dt} = \frac{\alpha}{v_t} \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \beta \rho \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma_\omega \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + 2(1 - F_1) \rho \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (2.1.3.63)$$

ここで、 k は乱流運動エネルギー、 τ_{ij} はせん断応力、 μ_t は渦粘性係数、 $\nu_t = \mu_t / \rho$ である。
また、式 (2.1.3.62) および式 (2.1.3.63) に含まれる各パラメータは以下の通りである。

$$\tau_{ij} = \mu_t \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \quad (2.1.3.64)$$

$$F_1 = \tanh(\arg_1^4) \quad (2.1.3.65)$$

$$\arg_1 = \min \left[\max \left(\frac{\sqrt{k}}{0.09 \omega y}, \frac{500 \mu}{\rho y^2 \omega} \right); \frac{4 \rho \sigma_{\omega 2} \omega}{CD_{k\omega} y^2} \right] \quad (2.1.3.66)$$

$$CD_{k\omega} = \max \left(2 \rho \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}; 10^{-20} \right) \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (2.1.3.67)$$

これらの式において、 y は壁からの距離、 $CD_{k\omega}$ は交差拡散項である。そして、最終的に式 (2.1.3.68) により ν_t を計算する。

$$\nu_t = \frac{a_1 k}{\max(a_1 \omega; \Omega F_2)} \quad (2.1.3.68)$$

$$F_2 = \tanh \left[\left[\max \left(\frac{2\sqrt{k}}{\beta^* \omega y}, \frac{500 \mu}{\rho y^2 \omega} \right) \right]^2 \right] \quad (2.1.3.69)$$

なお、これらの一連の式における各定数は式 (2.1.3.65) に示す第一混合関数 F_1 により下式で求められる。

$$\phi = F_1 \phi_1 + (1 - F_1) \phi_2 \quad (2.1.3.70)$$

ここで、添字 1 および 2 の定数は、それぞれ Wilcox の $k-\omega$ モデルと標準 $k-\varepsilon$ モデルから用いており、各値は次に示す通りである。

$$\beta^* = 0.09, \quad k = 0.41, \quad a_1 = 0.31,$$

$$\sigma_{k1} = 0.85, \quad \sigma_{\omega 1} = 0.5, \quad \beta_1 = 0.075, \quad \alpha_1 = \frac{\beta_1}{\beta^*} - \frac{\sigma_{\omega 1} k^2}{\sqrt{\beta^*}},$$

$$\sigma_{k1} = 1.0, \quad \sigma_{\omega 2} = 0.856, \quad \beta_2 = 0.0828, \quad \alpha_2 = \frac{\beta_2}{\beta^*} - \frac{\sigma_{\omega 2} k^2}{\sqrt{\beta^*}}$$

2. 1. 3. (5) 有限体積法

2.1.3.項 (4) までは、数値タービンにおける数値解法について述べてきた。数値タービンでは、偏微分方程式で表現された基礎方程式を差分近似して流れ場が解かれている。一方、流れの基礎方程式を積分形で表現し、流れ場を有限体積のセルに細分化してそのセルにおける積分形の基礎方程式を離散化することで解を得る方法が有限体積法である。

まず、偏微分方程式で表現された基礎方程式を検査体積 V において積分すると、下式のように表される。なお、ここではデカルト座標系で表示する。

$$\int_V \frac{\partial Q}{\partial t} dV + \int_V \left[\frac{\partial E_i}{\partial x_i} + S \right] dV = 0 \quad (2.1.3.71)$$

ここで、 Q は未知変量ベクトル、 E_i は流束ベクトル、 S は粘性項である。この式において、左辺第二項の体積積分を検査体積表面での面積分に変形するためにガウスの発散定理を適用すると式 (2.1.3.72) になる。

$$\int_V \frac{\partial Q}{\partial t} dV + \int_{S'} \left[\frac{\partial E_i}{\partial x_i} + S_i \right] \cdot n_i dS' = 0 \quad (2.1.3.72)$$

なお、 S' は検査体積表面を表し、 n_i は面 S' において検査体積内側から外側を向く単位法線ベクトルの i ($= x, y, z$) 方向成分である。また、 E_i および S_i はそれぞれ式 (2.1.3.73) で表される。

$$E_i = \begin{bmatrix} \rho u_i \\ \rho u_1 u_i + p \delta_{1i} \\ \rho u_2 u_i + p \delta_{2i} \\ \rho u_3 u_i + p \delta_{3i} \\ (e + p) u_i \end{bmatrix}, \quad S_i = - \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{1i} \\ \tau_{2i} \\ \tau_{3i} \\ \tau_{ij} u_j + \kappa \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{c^2}{c_p (\gamma - 1)} \right) \end{bmatrix} \quad (2.1.3.73)$$

したがって、式 (2.1.3.72) において対流項および粘性項と n_i との内積をそれぞれ F 、 G とおけば、式 (2.1.3.72) は下式のように表すことができる。

$$\int_V \frac{\partial Q}{\partial t} dV + \int_{S'} F dS' + \int_{S'} G dS' = 0 \quad (2.1.3.74)$$

この式が有限体積法における基礎方程式となる。また、離散化はこの式における検査体積を有限体積のセルに置き換えることで行う。すなわち、有限体積法では、ある有限体積のセル内における保存量の時間変化率とセル表面を通過する流束の収支を考えている。また、有限体積法ではセル形状を任意に設定することができる。したがって、4面体や5面体、6面体など様々なタイプの計算格子を扱うことができ、複雑な形状の解析対象を解く際に大きな利点がある。したがって、多くの汎用コードで用いられており、本研究で使用する ANSYS CFX でも有限体積法による取り扱いがなされている。

2.2 流体－構造一方向連成解析手法

2.2.1 連成解析の流れ

本研究における流体－構造連成解析手法は、流体力を荷重条件とする一方向連成解析である。したがって、連成解析はおおよそ Fig.2.1 に示すフローチャートによって行われる。まず、CFD 解析によって CFD 各格子点上での流体力を得る。その後、その各点における流体力を FEM 解析モデル上の節点へ受け渡す（マッピングする）。そして、受け渡された荷重条件に対して FEM 解析ソフトによる構造解析を実施する。

本研究における一方向連成解析は、CFD 解析と FEM 解析を汎用の計算ソフトによって実施している。一方、CFD と FEM のインターフェースとなるデータマッピングは独自に開発したプログラムによって実施した。本研究では、流体荷重に対する構造解析として、静解析、周波数応答解析を実施している。したがって、データマッピングではこれら解析の種類に応じて、定常流体力データと非定常流体力データそれぞれを扱う。

次項では、本研究におけるデータマッピングの手法について述べる。

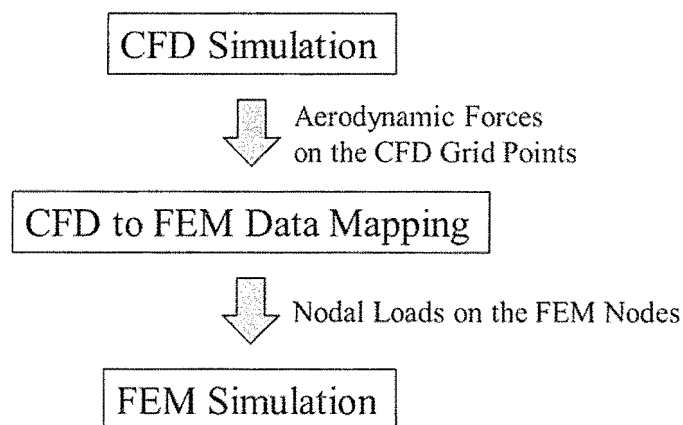


Fig.2.1 Flow chart of the One-way Fluid-Structural Interaction analysis

2. 2. 2 マッピング手法

Fig.2.2 は、本研究における荷重データの受け渡しを表した図である。なお、本研究では FEM 解析において四面体要素 (Tetrahedral element) を用いている。まず、CFD 格子 i を FEM 要素表面のセルに投影し、その投影点を Q_i とする。そして、投影先の FEM 要素表面セルの頂点 A 、 B 、 C に荷重 ϕ_i を分配することによりデータの受け渡しを行う。

本研究での荷重データマッピングは、データの受け渡し前後において CFD 側と FEM 側で荷重が保存されるように実施する。この時、式 (2.2.1.1) に従えば荷重が保存される^[58]。

$$f_j = \sum_{i=1}^{i=i_F} f_j^i = \sum_{i=1}^{i=i_F} \phi_i c_{ij} \quad (2.2.1.1)$$

ここで、 f_j は FEM ノード j に渡される流体荷重、 f_j^i は CFD 格子 i から FEM ノード j が受け取る荷重、 ϕ_i は CFD 格子 i における流体荷重、 i_F は FEM ノード j に荷重を送る CFD 格子点の数であり、 c_{ij} は内挿係数である。 c_{ij} は次の式を満足するように決定される。

$$\sum_{j=1}^{j=j_S} c_{ij} = 1 \quad (2.2.1.2)$$

なお、式 (2.2.1.2) における j_S は CFD 格子 i が荷重を渡す FEM ノードの数であり、本研究の場合 $j_S=3$ である。つまり、内挿係数 c_{ij} は CFD 格子 i における荷重を分配する際の重みを意味しており、 c_{ij} が式 (2.2.1.2) を満足することで荷重が保存される。

次に、内挿係数 c_{ij} の求め方について述べる。本研究では、内挿係数を barycentric coordinates^[75]に基づいて決定した。この方法は、3 点に分配した荷重の重心が投影点 Q_i に一致するように係数を与える方法である。まず、三角形 ABC の各頂点の質量を M_A 、 M_B 、 M_C とすると、重心は下式で与えられる。

$$\vec{G} = \frac{M_A \vec{A} + M_B \vec{B} + M_C \vec{C}}{M_A + M_B + M_C} \quad (2.2.1.3)$$

ここで、 \vec{G} は重心の位置ベクトル、 \vec{A} 、 \vec{B} 、 \vec{C} は各頂点の位置ベクトルである。そこで、式 (2.2.1.3) の重心 G を CFD 格子 i の投影点 Q に、各頂点の質量を各 FEM ノードが

CFD 格子 i から受け取る荷重 f_A^i 、 f_B^i 、 f_C^i に置き換えると式 (2.2.1.4) を得る。また、 ϕ_i と f_A^i 、 f_B^i 、 f_C^i は式 (2.2.1.5) を満たすものとする。

$$\bar{Q} = \frac{f_A^i \bar{A} + f_B^i \bar{B} + f_C^i \bar{C}}{f_A^i + f_B^i + f_C^i} \quad (2.2.1.4)$$

$$\phi_i = f_A^i + f_B^i + f_C^i \quad (2.2.1.5)$$

式 (2.2.1.5) を式 (2.2.1.4) 代入し、行列形式で整理すると次式のようなになる。

$$\begin{bmatrix} x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \\ z_A & z_B & z_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_A^i \\ f_B^i \\ f_C^i \end{bmatrix} = \phi_i \begin{bmatrix} x_Q \\ y_Q \\ z_Q \end{bmatrix} \quad (2.2.1.6)$$

ここで、 x 、 y 、 z はそれぞれ添字に示す点の座標を表す。よって、頂点 A 、 B 、 C の座標からなる行列の逆行列を式 (2.2.1.6) の両辺に左側から乗じれば次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} f_A^i \\ f_B^i \\ f_C^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \\ z_A & z_B & z_C \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_Q \\ y_Q \\ z_Q \end{bmatrix} \phi_i = c_{ij} \phi_i \quad (2.2.1.7)$$

ただし、ここでは $j=A,B,C$ である。したがって、式 (2.2.1.7) より内挿係数 c_{ij} が求められる。

本マッピング手法による荷重とトルクの保存性をタービン動翼 1 枚モデルによって確認した。Fig.2.3 は、1 枚のタービン動翼に作用する非定常流体力をマッピングし、荷重の x 方向成分を翼面にわたって積分した結果を時系列にプロットしたものである。この図から、マッピングの前後で動翼に作用する荷重が保存されていることが確認できる。さらに、ある瞬間のデータにおいて各軸周りのトルクを翼面にわたって積分し、CFD 側と FEM 側でその比を計算した結果を Table 3.1 に示す。この表から、トルクについてもマッピング前後で非常に良く維持できていることがわかる。

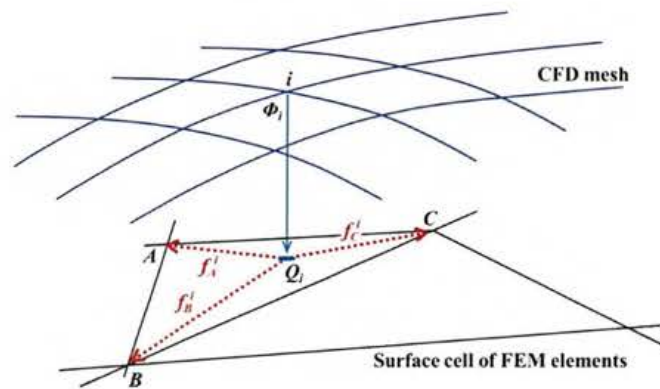


Fig.2.2 Schematic of the force transfer from a CFD grid point to structural nodes

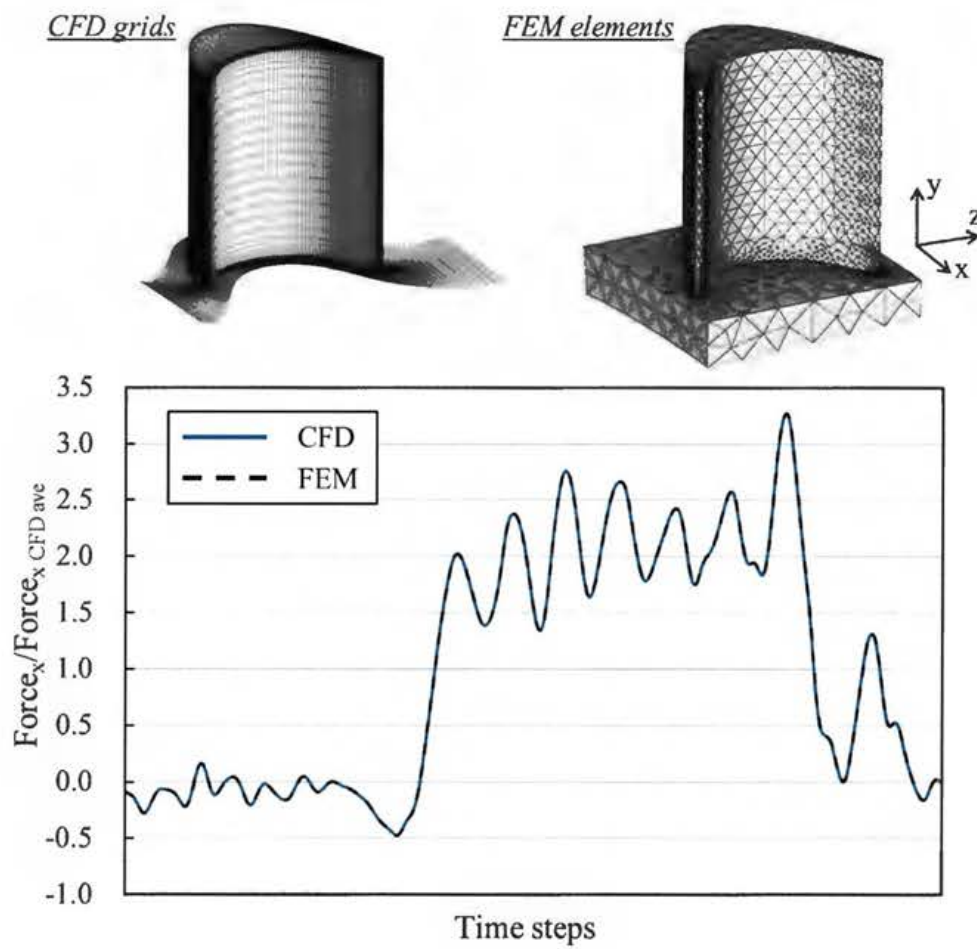


Fig.2.3 Conservation check of unsteady force before and after the mapping process

Table 2.1 Conservation check of torque components ratio (CFD/FEM) before and after the mapping process

Torque_x	Torque_y	Torque_z
1.000001	0.999999	1.000002

第 3 章 部分挿入タービン初段部の 2 次元流れ場 およびノズル分割数とタービン効率

3. 1 本章の目的

これまで、NASA や NAL (現 JAXA) によってロケット用の超音速部分挿入タービンを対象とした試験的研究^{[37][38]}が報告されている。NASA の研究では、ノズルパーシャリティを固定してノズル分割数を変化させた場合の速度比-タービン効率マップが報告されている。また、NAL の研究でも一定ノズルパーシャリティで一つ穴と三つ穴の部分挿入タービンの冷走試験を実施し、その性能比較や圧力などの流れ方向変化などを報告している。これらの研究は、ロケット用超音速部分挿入タービンを対象とした極めて貴重なものであるが、その流れ場におけるフローパターンなどの詳細については未だ明らかにされていない。

本章では、1980 年代に NAL によって研究^[38]がなされた部分挿入タービンを対象として、平均径上の準 3 次元非定常 CFD 解析^[42]を行う。その際、ノズルを閉塞しない場合、周方向 1 か所を閉塞する場合、周方向 3 か所を閉塞する場合の解析を行い、その効率を比較することによってノズル閉塞部数によるタービン効率の変化について知見を得る。さらに、動翼に作用する非定常流体力に関する考察も行い、超音速部分挿入タービンにおけるその特徴について知見を獲得する。

本章では、上記の検討からロケット用超音速部分挿入タービンにおける閉塞部数とタービン効率の関係や流れ場の基礎的な知見の獲得を目的とする。

3. 2 解析対象タービン

本章で対象とするタービンは、NASA M-1 エンジン液体水素用ターボポンプ用タービンのスケールモデル^[38]である（以下、JAXA M-1 タービン）。ノズルは 54.5%のパーシヤリティを有し、2 段から構成される超音速衝動タービンである。ただし、本章では解析規模の観点から、特に動静翼干渉の強い初段部のみを対象とする。このタービンは翼枚数が異なるのみで、現行の LE-5B エンジン用タービンの翼形状と同一である。Table 3.1 と Table 3.2 に JAXA M-1 タービンの設計諸元と形状諸元、Fig.3.1 に子午面図と翼形状およびノズル 3 か所を閉塞した場合の様子をそれぞれ示す^[38]。

Table 3.1 JAXA M-1 turbine design specifications

Rotational speed	[RPM]	50,000
Mass flow rate	[kg/s]	0.375
Inlet total pressure	[MPa]	2.35
Inlet total temperature	[K]	922
Outlet static pressure	[MPa]	0.49
Expantion ratio	-	4.8
Turbine output power	[kW]	430

Table 3.2 JAXA M-1 turbine characteristics

		JAXA M-1			
		Nozzle	1 st Rotor	2 nd Stator	2 nd Rotor
Number of turbine blades	-	24/44	94	80	92
Axial chord length	[mm]	12.0	7.50	7.53	8.4
Blade height	[mm]	7.4	8.8	10.4	12.6
Mean diameter	[mm]	152			
Tip clearance	[mm]	-	0.3	-	0.3
Solidity	-	1.66	1.496	1.291	1.645
Aspect ratio	-	0.62	1.17	1.38	1.5
Partiality	[%]	54.5	100	100	100
Number of nozzle admission sector	-	3			
Relative Mach number at TE	-	1.04	0.69	0.25	0.38
Velocity ratio (U/C0)	-	0.176			

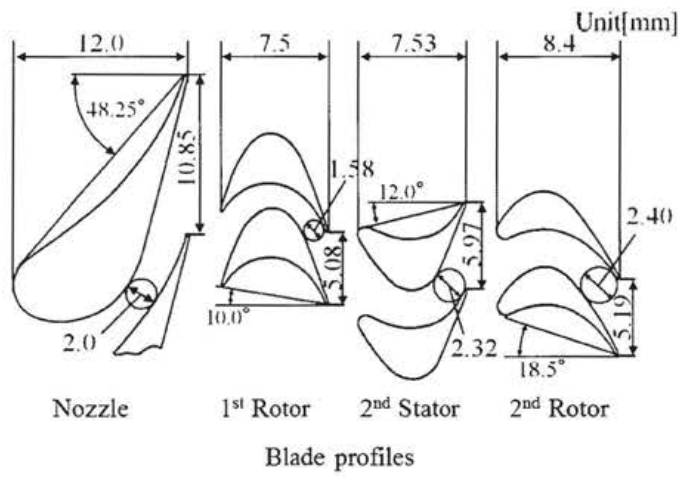
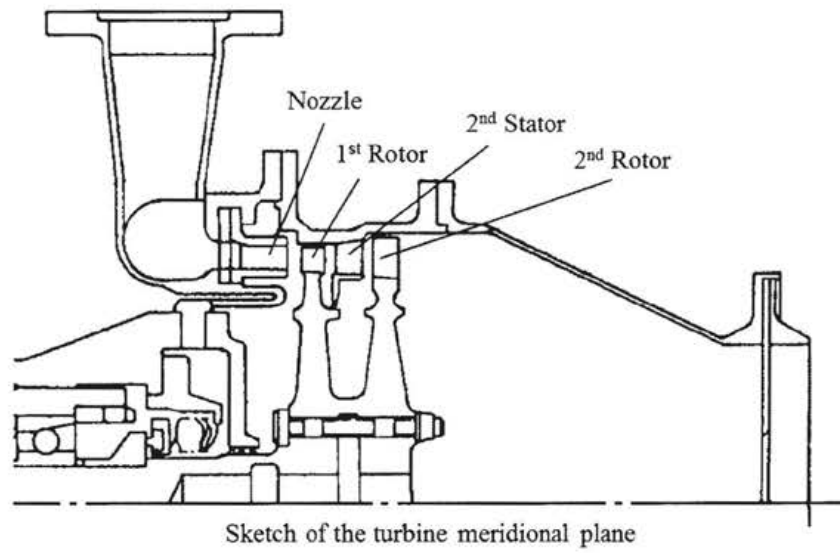


Fig.3.1 JAXA M-1 turbine

3.3 解析ケース

本章ではJAXA M-1 タービンの平均径を中心にスパン高さの 1/400 の薄肉円筒ドメインを用いた準 3 次元全段非定常解析を実施する。その際、ノズルを閉塞しない場合（全周挿入相当）、周方向 1 か所を閉塞する場合、周方向 3 か所を閉塞する場合の 3 ケースの解析を実施する。これらの結果の比較から、ノズル閉塞部の数によるタービン効率の変化、部分挿入タービンにおける流れ場や流体力変動に関する特徴について知見を得る。なお、各解析ケースのドメインは次節に示す。

M-1_FullAd	: ノズル閉塞無し
M-1_ParAd_1	: 周方向 1 か所でノズル閉塞
M-1_ParAd_3	: 周方向 3 か所でノズル閉塞

3.4 解析ドメイン

Fig.3.2 に各ケースにおける解析ドメインを示す。M-1_ParAd_1 では、次章以降で用いるような周期境界条件を適用することができないため、本章の解析はタービン全周モデルとなっている。なお、本章におけるノズル閉塞部は Fig.3.1 に示すように中実ブロックによって閉塞した。

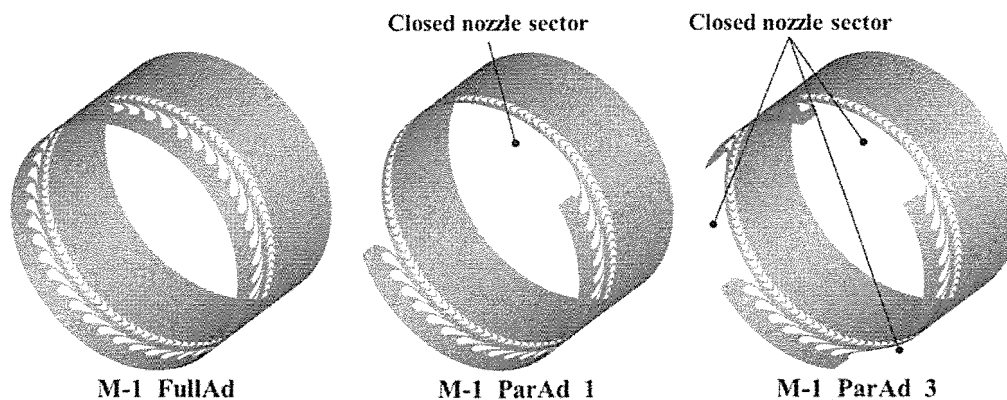


Fig.3.2 Computational domains

3.5 計算格子

本章における計算格子の様子を Fig.3.3 に示す。ノズル 1 流路当たり 8 万点、動翼 1 流路当たり 6 万 4 千点からなり、総格子点数はおよそ 900 万点となっている。本章では、次節で述べるように汎用流体解析ソフトである ANSYS CFX によって流れ場を解析する。その際、解析規模を低減するために壁面近傍では壁関数処理が適用されている。なお、壁関数処理の適用に関する妥当性の検討は第 5 章にて述べる。

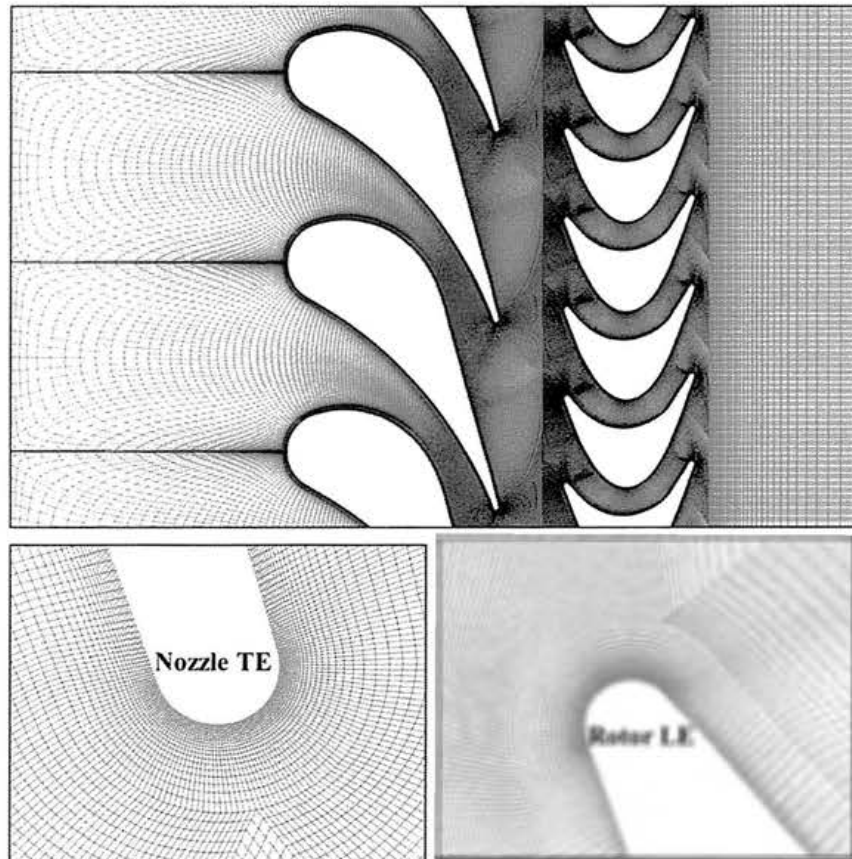


Fig.3.3 Computational grid

3. 6 境界条件

本章の計算は、汎用流体解析ソフトである ANSYS CFX によって実施した。境界条件を Table 3.3 に示す。なお、本章の解析条件は NAL によって行われた窒素ガスによる冷走試験^[38]条件に合わせている。支配方程式は非定常 RANS であり、乱流モデルには SST モデルを用いている。なお、薄肉円筒ドメインの円筒内径面および外径面は滑り境界条件として扱い、その他壁面は滑りなし断熱条件としている。また、乱流モデルには Menter の SST (Shear Stress Transport) モデル^{[73][74]}を用いている。

Table 3.3 Boundary conditions

			JAXA M-1
Working gas		-	N ₂ Ideal gas
Rotational speed		[RPM]	10,080
Inlet	Total pressure	[MPa]	2.35
	Total temperature	[K]	273
	Inflow angle	-	Normal to boundary
Outlet	Static pressure	[MPa]	0.645
Turbulence model		-	SST

3. 7 結果と考察

3. 7. 1 部分挿入流れ場

Fig.3.4 (a)、(b) は M-1_ParAd_3 における閉塞部周囲と閉塞部開始端 (a での破線領域) での絶対マッハ数を表しており、(b) のベクトルは正規化した相対速度ベクトルを示している。また、Fig.3.4 (c) は (b) と同じ領域における静圧を示している。(a)、(b) の様子から、閉塞部へ動翼が侵入する際、動翼前方において流れが強く加速するという特徴を確認できる。部分挿入タービンにおける閉塞部開始端での流れの加速は、亜音速流れ場の研究^{[42][45]}においても報告されており、その加速の原因として、閉塞部侵入直後の動翼流路内の作動蒸気が軸流速を持つ一方で、動翼上流からの蒸気の供給がなくなるために動翼流路内の圧力が低下し、動翼前方の蒸気が吸い込まれることによると説明されている。しかし、本研究の場合、動翼前方の流れは超音速状態にあるため、動翼流路の圧力低下が加速の主たる要因とは考えにくい。そこで、超音速流れの観点からこの加速について考察する。

閉塞部開始端での加速域は Fig.3.4 に示す閉塞部開始端角 (A) と閉塞部侵入後の動翼流路前方 (B) の 2 か所に大別できる。図 (b) の速度ベクトルの様子から、ノズルからの超音速流れは閉塞部開始端角を曲がり閉塞部中心側へと転向していることがわかる。一般的に、境界の鋭く尖った角を曲がる超音速流れはプラントルマイヤー流れとして知られ、角を曲がった後で流れは膨脹し加速する。本タービンのノズル閉塞部開始端角はノズル後縁半径に相当する曲率を有しており、完全なプラントルマイヤー流れの条件にあるとは言えないが、図 (c) では流れの膨脹による圧力低下も確認でき、それに類似した状態にあると考えられる。したがって、A での加速は閉塞部開始端角を曲がる超音速流れの膨脹が要因であると考えられる。一方、B での加速は、動翼前縁側負圧面と閉塞部壁面がつくる流路形状によって理解できる。図 (c) に示すように、これらが形成する流路形状は流れに対して末広流路となっている。その結果、動翼上流での超音速流れはさらに加速され、動翼前縁には強い衝撃波が形成される。この衝撃波がタービン効率に及ぼす影響は次項で述べる。また、本計算ではこの衝撃波の閉塞部壁面における反

射を捉えることはできていない。これは壁面近傍での格子解像度に原因があると考えられ、今後の研究における課題点である。

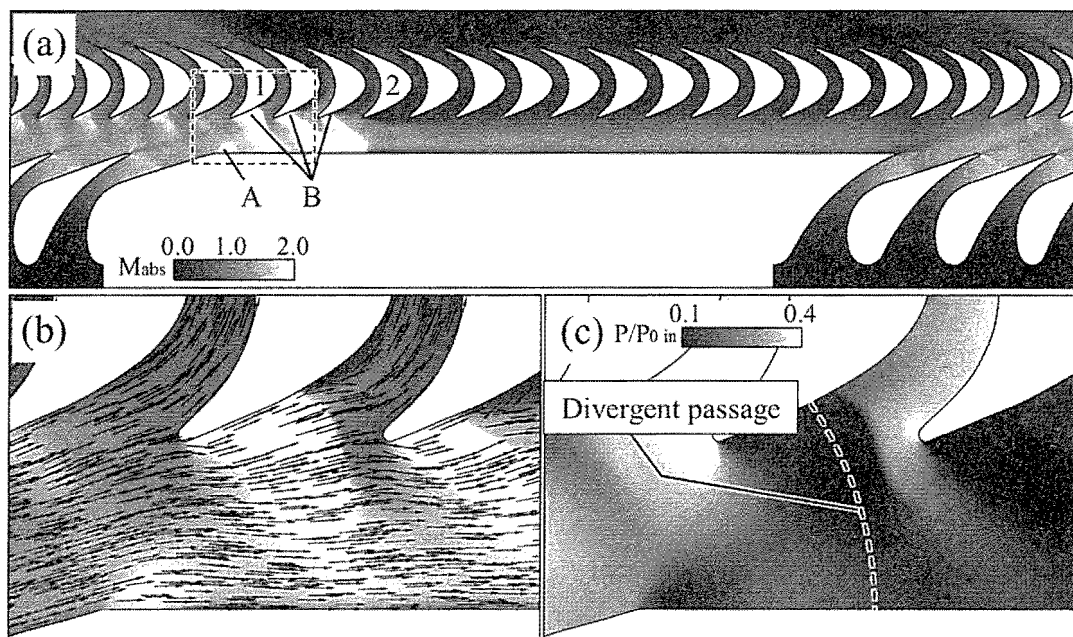


Fig.3.4 Absolute Mach number and static pressure contours around the closed nozzle sector of the M-1_ParAd_3

3. 7. 2 動翼非定常流体力

次に非定常流体力に着目する。Fig.3.5 はタービン 1 回転中に 1 枚の動翼に作用する周・軸各方向の非定常流体力を示している。ここで、流体力は流体の圧力と粘性によって作用する力からなり、周方向流体力は回転方向、軸方向流体力はタービン下流方向をそれぞれ正の値としている。また、流体力は M-1_FullAd における時間平均流体力ベクトルの絶対値で無次元化している。両方向成分とも、動翼が閉塞部に侵入する際に流体力が大きく変動し、M-1_FullAd の時間平均に対しておよそ 1.6 倍の流体力が動翼回転方向に作用している。一方で軸方向流体力はタービン上流側へ増加し、その振幅は M-1_FullAd 時間平均流体力のおよそ 70%程度に達している。このような閉塞部侵入時の動翼流体力の変動は、蒸気タービンにおいても報告されており^[43]、部分流入タービンでは超音速・亜音速問わず発生する課題といえる。このような流体力変動と流れ場の関係を調べるために、M-1_ParAd_3 における動翼の閉塞部侵入時の静圧コンター、動翼翼面静圧分布、流体力ベクトルを Fig.3.6 に示す。ここで、図中の角度は Fig.3.5 のグラフに対応している。 $\theta = 83.5^\circ$ と 89.5° は動翼が閉塞部に侵入する前後を示している。 83.5° では流体力は回転方向と下流方向に作用し、 89.5° での正圧面静圧分布は 83.5° からほとんど変化していない。一方、負圧面では静圧が低下しており、特に $0.5C_x$ より上流側での静圧低下が大きい。これは、前述の加速に起因しており、特に前縁から $0.1C_x$ では最も翼面静圧が低く、この領域は Fig.3.5 中の 1 番翼の加速域と一致している。この加速による負圧面の静圧低下によって流体力は増加し、軸方向成分は上流側に作用する。 $\theta = 91.5^\circ$ では $0.5C_x$ より下流側負圧面の静圧が上昇している。その結果、流体力の上流方向成分はさらに増加し、その大きさは $\theta = 83.5^\circ$ における周方向成分と同程度に至る。 $\theta = 99.5^\circ$ は加速域終了端を動翼が通過する瞬間で、Fig.3.5 中の 2 番翼の位置に相当する。この位置では動翼流路にほとんど作動流体が流入していないため、正圧面側の静圧値が大きく低下し、わずかに負圧面を下回るために動翼には回転方向と反対向きに流体力が作用している。

以上のように、超音速部分流入タービンでは、動翼が閉塞部に侵入する際、流体力が大きさ・向きともに大きく変動する。特に動翼前方で生じる強い流れの加速が動翼前縁側負圧面の静圧低下を引き起こすことで、大きな上流側への流体力変動を引き起こす。

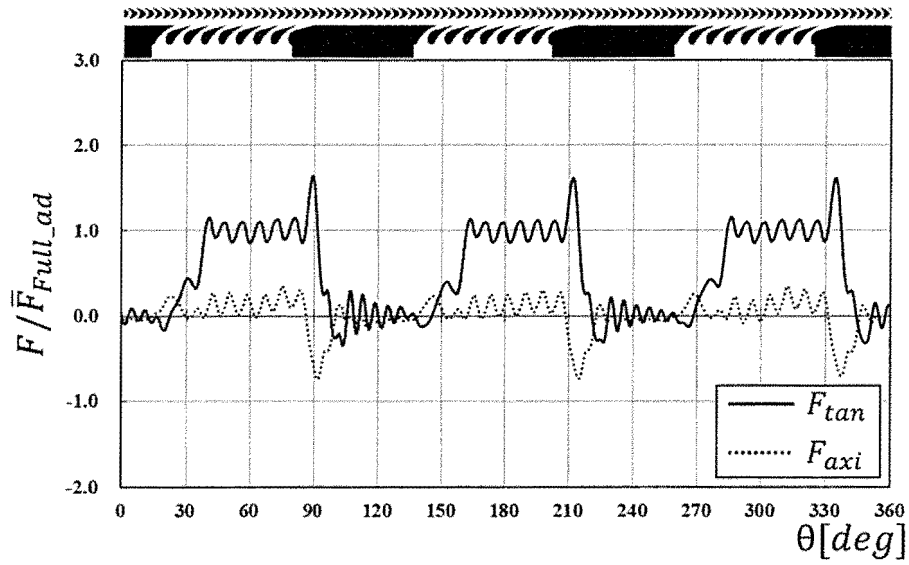


Fig.3.5 Unsteady aerodynamic force on a rotor blade of the M-1_ParAd_3

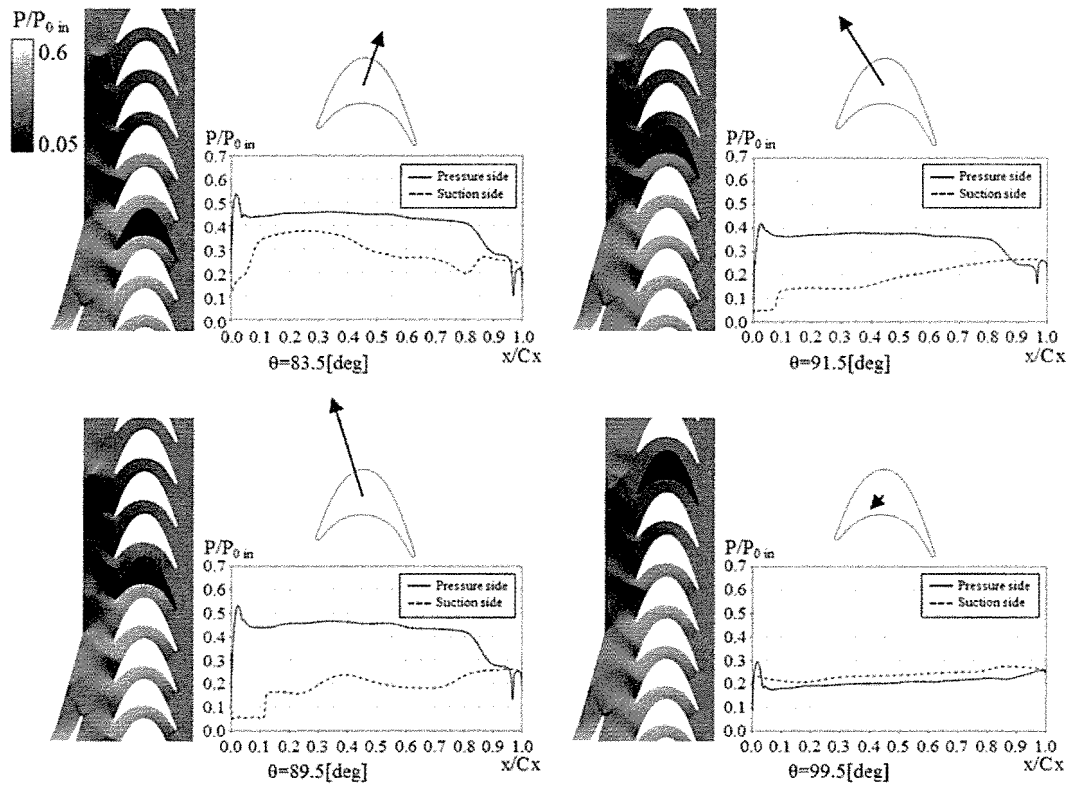


Fig.3.6 Static pressure contours, static pressure distribution on rotor blade and aerodynamic force vectors of the M-1_ParAd_3

3. 7. 3 部分挿入損失

本研究は準3次元解析であるため、2次元流れ損失を評価することはできない。そこで、ここでは動翼の閉塞部侵入時に生じる流れの強い加速と2次元損失について着目する。Fig.3.7はM-1_ParAd_3の閉塞部周囲における散逸関数コンターである。散逸関数 Φ は式(3.7.3.1)により算出した。これは粘性によるエントロピー生成を表し、粘性効果による局所的な損失生成箇所を可視化することができる。

$$\Phi = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (i,j=1,2) \quad (3.7.3.1)$$

最も顕著な散逸生成箇所として、Fig.3.7 (A) に示す領域が挙げられる。この領域は、動翼前方において流れが強く加速する領域である。Fig.3.4のマッハ数コンターに見られるように、動翼前縁での衝撃波は隣接翼負圧面に衝突し、大規模な剥離を誘発する。その結果、この領域において強い散逸が生まれている。このような衝撃波による負圧面大規模剥離によって生じる損失生成は超音速特有の損失源と考えられる。Fig.3.7 (B) は閉塞部壁面で周方向の流れが剥離するために生じるものである。(C) に示す散逸は、閉塞部と動翼との間を周方向に流れる作動ガスのそばを動翼が通過するために生じるmixingによるもので、ベンチレーション損失に相当する。

各ケースにおけるt-t (Total-to-Total) 効率の比較から、超音速部分流入タービンでの付加的な2次元損失がどの程度効率に影響を与えるか考察する。Fig.8は各ケースにおけるt-t効率を示しており、全てM-1_FullAdの効率値で正規化している。効率は式(3.7.3.2)により算出し、全圧と全温はタービン入口と動翼下流それぞれでの時間および質量流量平均値を用いている。

$$\eta_{t-t} = \frac{1 - T_{0out}/T_{0in}}{1 - (P_{0out}/P_{0in})^{(\gamma-1)/\gamma}} \quad (3.7.3.2)$$

M-1_FullAdでの効率値に対して、M-1_ParAd_1ではおよそ3%効率が低下した。M-1_ParAd_3では閉塞部の数とともに散逸生成箇所も増加するため、効率はさらに低下しており、部分流入化に伴う2次元損失による明らかな効率低下を示した。

本解析は2次元流れ損失を評価できないため、全周流入と部分流入でのトレードオフ関係を議論することはできない。しかし、超音速部分流入タービンで生じる2次元損失の可視化によって、ノズルが閉塞部へ侵入する際の加速に伴う衝撃波が大規模な剥離を引き起こし、損失源の一つとなっていることを確認した。

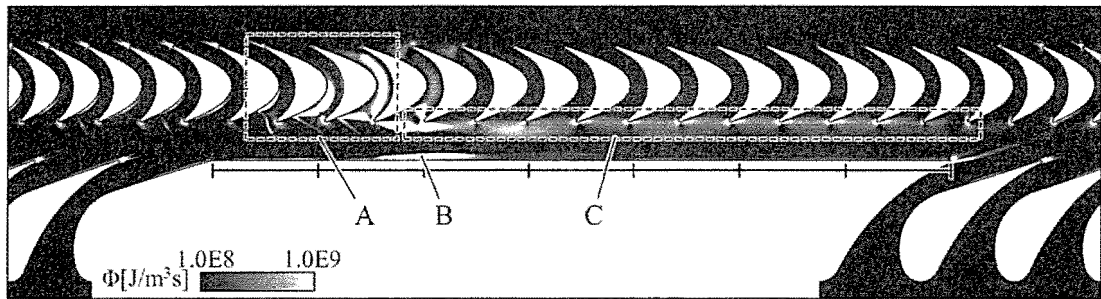


Fig.3.7 Dissipation function contours around the nozzle closed sector of the M-1_ParAd_3

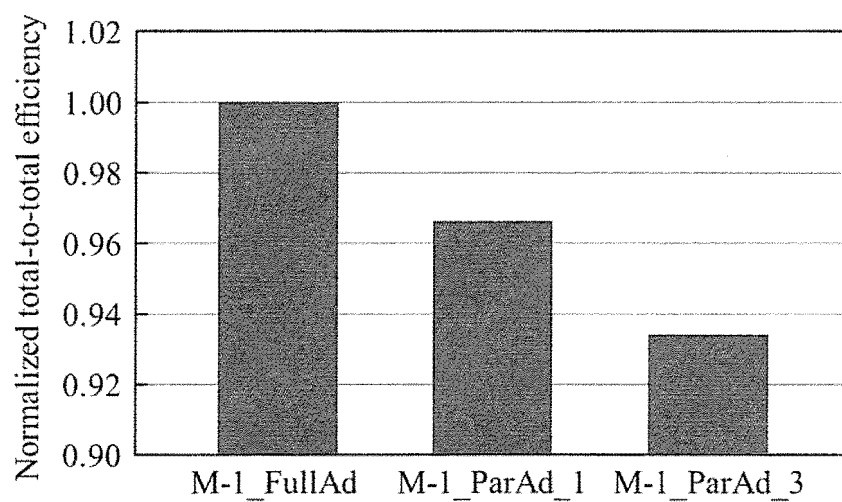


Fig.3.8 Normalized total-to-total efficiency

3. 8 結論

第3章では、1980年代にNALによって研究^[38]がなされた部分挿入タービンを対象として、汎用流体解析ソフトによる平均径上の準3次元非定常CFD解析を実施し、部分挿入タービンにおける動翼流れ場や動翼変動流体力、損失源やノズル閉塞部の数とタービン効率力について論じた。本章で得られた知見と結論は以下の通りである。

1. 過去の蒸気タービン研究と同様に、動翼がノズル閉塞部に侵入する際の流れの加速が確認された。しかし、蒸気タービンでの加速が動翼流路内の圧力低下によって生じるのに対して、本研究対象のタービンにおける加速のメカニズムは、閉塞部開始端角でのプラントルマイヤー流れに相当する流れの膨脹や動翼負圧面と閉塞部壁面がなす末広流路形状に起因した超音速流れ特有の要因であることがわかった。
2. 動翼に作用する流体力は、動翼が閉塞部に侵入する際大きさ・向きともに大きく変動する。特に動翼前方で生じる強い流れの加速が動翼前縁側負圧面の静圧低下を引き起こすことで、大きな上流側への流体力変動を引き起こす。
3. 動翼が閉塞部へ侵入する際の流れの加速によって、動翼前縁近くで強い衝撃波が発生し、大規模な剥離が誘発されることで強い散逸が生成されており、超音速部分流入タービン特有の損失源であることを確認した。また、CFDにおいても過去の試験と同様に閉塞部の増加に伴う効率低下を確認することができた。

本章の結果は準3次元流れにおいて議論したものであり、当然ながら実際の3次元流れ場との差異は発生するものと予想される。しかしながら、本章で得られた結果によって、従来まで報告されていなかった超音速部分挿入タービンにおける基礎的な流れ場と流体力変動や損失源に関する知見を得ることができたと考えられる。次章では、時空間高解像度のIn-houseソルバによるタービン全段の2次元非定常解析を行い、超音速部分挿入タービン段における流れ場をより詳細に考察する。

第4章 部分挿入タービン段の2次元流れ場

4.1 本章の目的

前章では、1980年代にNALによって研究^[38]がなされた部分挿入タービン（JAXA M-1タービン）の初段部を対象として、汎用流体解析ソフトによる平均径上の準3次元非定常CFD解析を実施した。その解析から、従来報告されていなかった超音速部分挿入タービンにおける流れ場や流体力変動、閉塞部数とタービン効率に関する基礎的な知見を得た。

本章では、JAXA M-1タービンの全段を対象として、東北大学山本悟教授開発の数値タービンの2次元 Ver.^[41]用いた2次元の時空間高解像度非定常CFD解析を実施する。本解析結果から、超音速部分挿入タービンの後段部までを含めた複雑な流動パターンをより詳細に把握し、損失要因や流体力変動について考察する。また、ノズル閉塞方法を変えた解析との比較から、閉塞方法が性能に与える影響についても考察する。本研究対象のようなロケット用超音速部分挿入タービンでは、解析規模や計測技術の困難さから試験による流れ場把握が非常に難しい。したがって、本章における解析は、その結果と第3章にて実施した汎用CFDコードによる解析結果とで同様の流れ場の特徴が表れているかを確認する位置づけとしても重要なものとなる。

本章では、上記の検討からロケット用超音速部分挿入タービン段における複雑な流動現象、損失生成や流体力変動のメカニズムについてより詳細な知見を得ることを目的とする。

4. 2 解析対象タービン

本章では第 3 章と同様に JAXA M-1 タービンを対象とする。なお、本章では周方向 3 か所に閉塞部を有する 3 つ穴部分挿入タービン (M-1_ParAd_3) を対象とする。

4. 3 解析ケース

本章では JAXA M-1 タービンの平均径面上の 2 次元全段非定常解析を実施する。その際、異なる 2 つのノズル閉塞方法で解析を実施する。一つ目の閉塞方法は、ノズル閉塞部を中実ブロックで閉塞したモデルであり、第 3 章における閉塞方法と同じである。この結果から時空間高解像度の 2 次元非定常フローパターンや損失源、流体力変動に関する知見を獲得する (Case A)。また、二つ目の閉塞方法はノズル入口側を閉塞するもので、先の方法とは異なりノズル閉塞部にも空間が存在する (Case B)。これらの結果の比較から、ノズル閉塞方法が効率や変動流体力に与える影響について知見を得る。

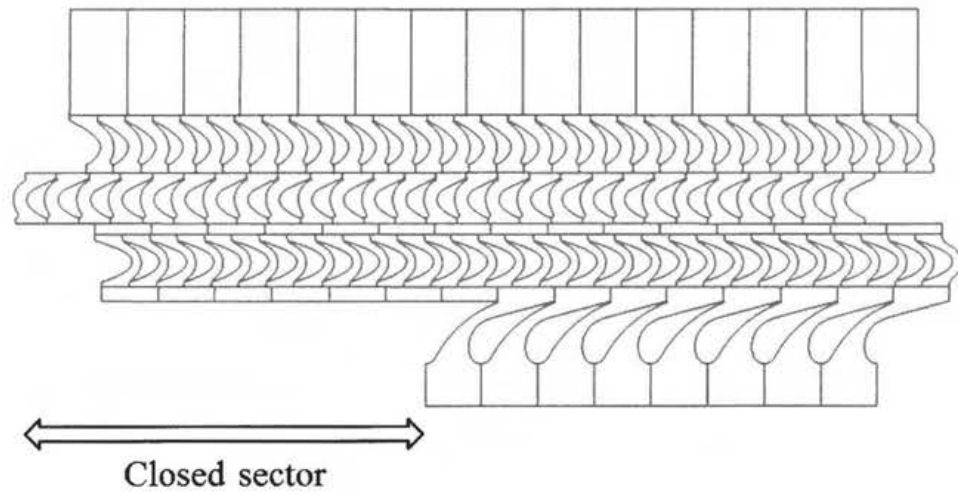
Case A : 2 段非定常解析 中実ブロックによる閉塞

Case B : 2 段非定常解析 ノズル入口を閉塞

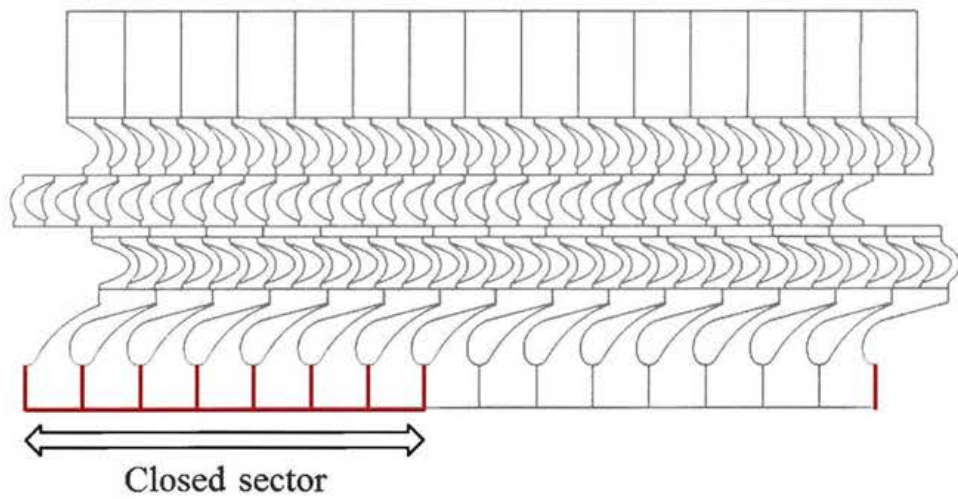
4. 4 解析ドメイン

一般的にターボ機械の CFD 解析では、解析規模を低減するためにスケーリングによって翼サイズと翼枚数を調整し、周期境界条件を用いて最も小さな整数比となる翼枚数で解析をすることが多い^[75]。本章で取り扱うような部分挿入タービンでは、このような手法を用いても解析流路数は多くなるが、JAXA M-1 タービンの場合ノズル閉塞部が周方向 3 か所であり、解析領域をタービン 1/3 周に低減することができる。そのために、本章の解析ではノズル枚数を 44 枚から 45 枚へ、初段動翼枚数を 94 枚から 93 枚へ、2

段静翼枚数を 80 枚から 81 枚へ、2 段動翼枚数を 92 枚から 93 枚へそれぞれ変更して解析した。この際、静翼のソリディティとスロート面積が変化しないように翼断面形状を相似変化している。Fig.4.1 に Case A と Case B それぞれの解析ドメインを示す。なお、Case B では計算格子の品質を維持するために、図中赤線で示す部分を固体壁として扱うことでノズル入口からの作動ガス流入を塞いでいる。



Case A



Case B

Fig.4.1 Computational domains

4. 5 計算格子

4. 5. 1 格子依存性調査

部分挿入タービン段を対象として格子依存性調査を実施することが理想であるが、部分挿入タービン段の非定常解析は極めて長い時間コストを有する。そのため、本章における格子依存性調査は特に動静翼干渉が強い初段部に限定し、ノズル1枚と動翼2枚の周期境界モデルとして実施した。数値タービンでは、翼流路の計算格子として拡張 H 型格子を用いるが、ここでは1流路当たり 70×70 点 (Coarse)、100×100 点 (Middle)、180×130 点 (Fine) の3つの格子点数パターンの結果を比較した。

格子依存性調査の結果を Fig.4.2 に示す。ここで、Total-to-total 効率 (以下、T-T 効率) は第3章と同様の式で算出している。また、流れ角、効率ともに Coarse 格子の値で正規化しており、いずれも時間平均値である。

$$\eta_{t-t} = \frac{1 - T_{0out} / T_{0in}}{1 - (P_{0out} / P_{0in})^{(r-1)/r}} \quad (4.5.1.1)$$

Fig.4.2 から、Middle 格子以上に格子点数を増加しても、効率と流れ角の変化はほとんどないことがわかる。したがって、本章で行う解析は1流路当たり 100×100 点からなる格子によって実施する。

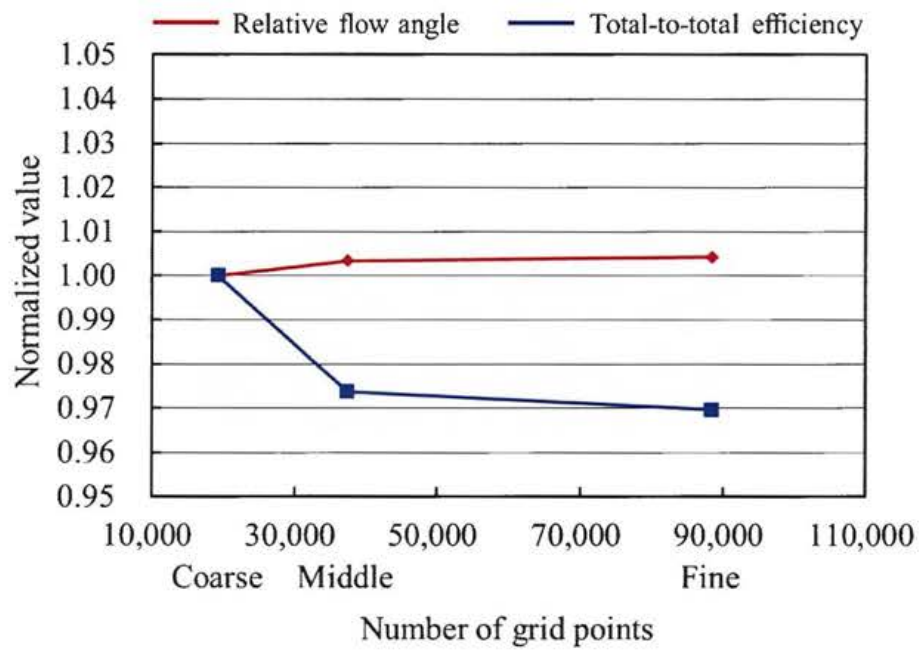


Fig.4.2 Grid dependency check in terms of the relative flow angle and total-to-total efficiency

4. 5. 2 計算格子

前項の格子依存性調査結果をもとに作成した Case A での計算格子を Fig.4.3 に示す。
なお、Fig.4.3 (a)ではI方向に1点置き、J方向に2点置きに格子を表示しており、ノズル-初段動翼間の拡大図である Fig.4.3 (b)では格子を間引かずに表示している。

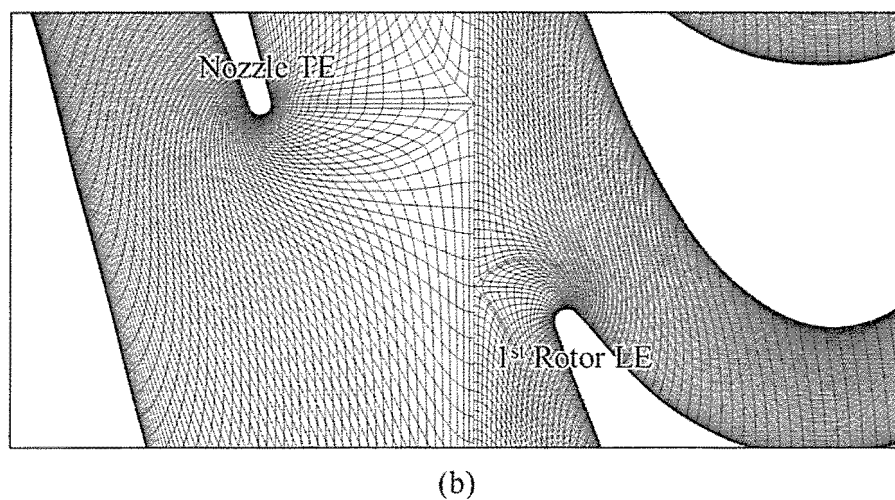
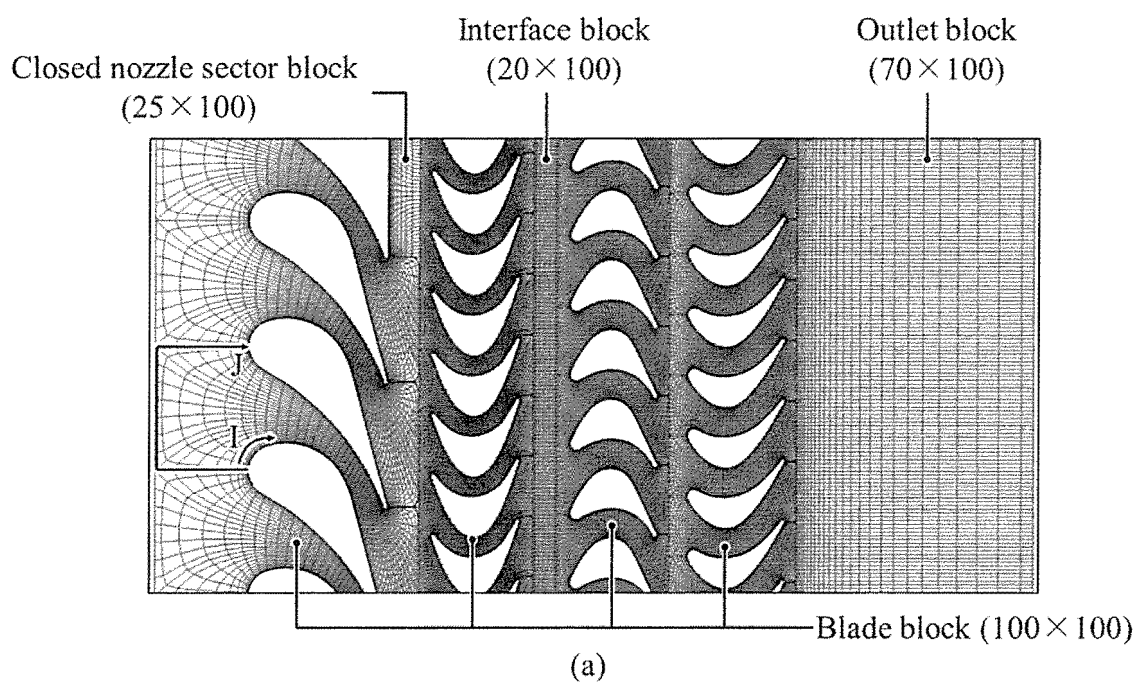


Fig.4.3 Computational grid

4. 6 境界条件

本章の計算は、東北大学山本悟教授開発の数値タービン^[41]によって実施した。境界条件を Table 4.1 に示す。なお、本章の解析条件は NAL によって行われた窒素ガスによる冷走試験^[38]条件に合わせている。また、第 2 章で述べたように乱流モデルには Menter の SST (Shear Stress Transport) モデル^{[73][74]}を用いている。

Table 4.1 Boundary conditions for the two dimensional JAXA M-1 turbine transient simulation

		JAXA M-1
Working gas	-	N ₂ Ideal gas
Rotational speed	[RPM]	10,080
Inlet	Total pressure	[MPa] 2.35
	Total temperature	[K] 273
	Inflow angle	- Normal to boundary
Outlet	Static pressure	[MPa] 0.47
Solid wall	-	No slip and adiabatic
Turbulence model	-	SST
Transient time step (Nozzle blade passing period)	-	1/2,500

4. 7 結果と考察

4. 7. 1 超音速部分挿入段の 2 次元流れ場

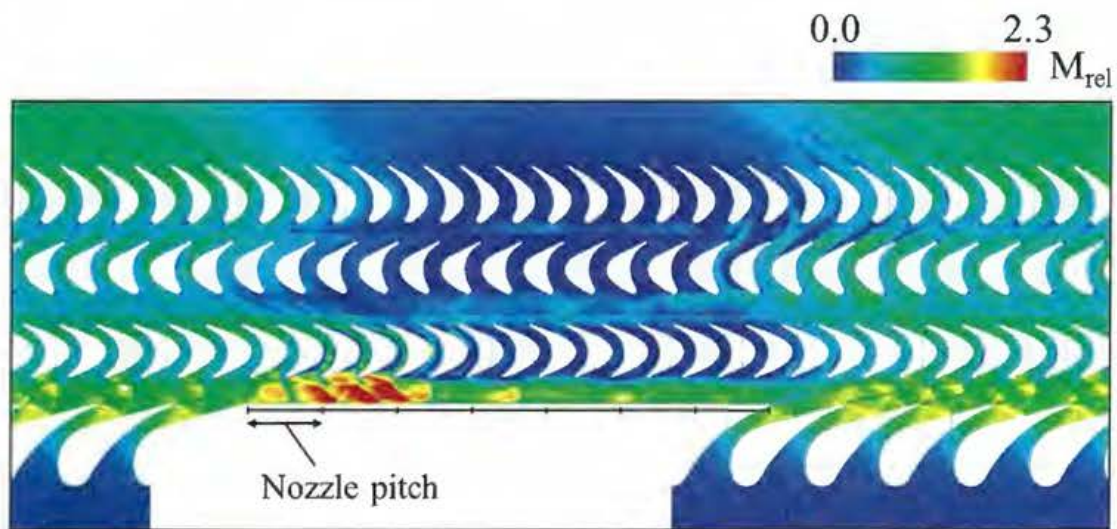
本項では、Case A の解析結果について超音速部分挿入タービン段における 2 次元流れ場のフローパターンや損失源、流体力変動に着目して考察する。

4. 7. 1. (1) 流れ場の周方向分布

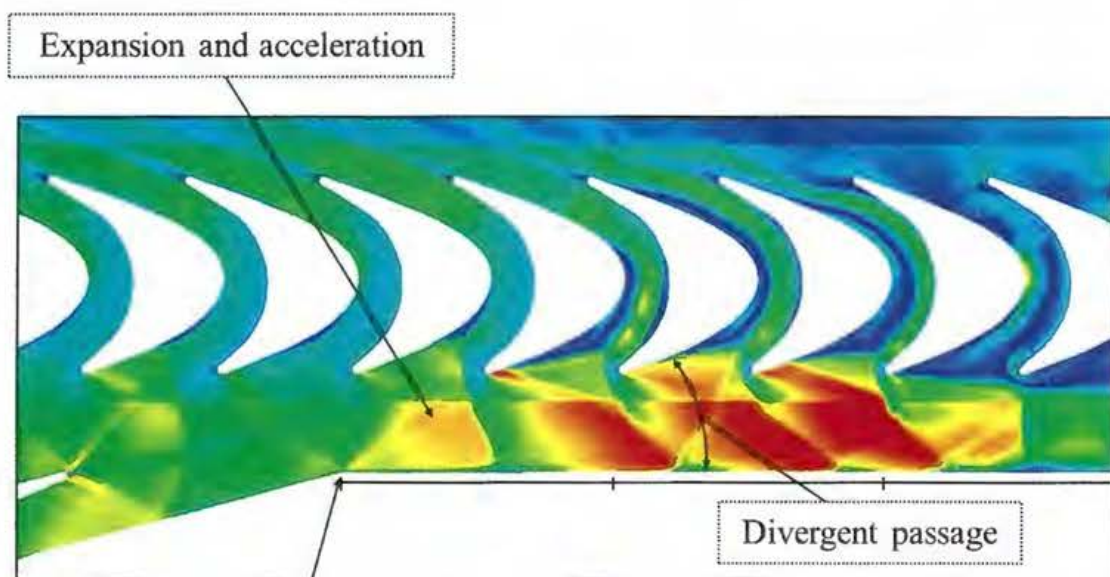
Fig.4.4 (a)および(b)は相対マッハ数コンターの瞬時値を示している。ノズル開口部では、ノズル後縁や初段動翼前縁において衝撃波が生じていることが確認できる。さらに、閉塞部の存在によって周方向に極めて不均一な流れ場が形成されていることがわかる。特に、ノズル-初段動翼間におけるノズル閉塞部背後の流れは特徴的で、動翼が閉塞部に侵入する側の閉塞部端部（閉塞部開始端）からノズル 2 ピッチほどの領域では流れが強く加速され、動翼前縁に衝撃波が生じている。さらに、ノズル 2 ピッチから閉塞部終了端ではノズルからの作動ガスの流入は無いが、周方向への転向によって動翼流路へと流入できなかった作動ガスは閉塞部と初段動翼の間を周方向に流れることでノズル開口部まで到達した後に動翼流路へと流入し、下流へと流れていく。このようなフローパターンの特徴は第 3 章の結果と同様であり、そのメカニズムは第 3 章で考察したとおりである。

次に、各翼列間でのある瞬間における静圧の周方向分布を Fig.4.5 に示す。この図から、2 段動翼下流を除き、各翼列間で極めて強い周方向の静圧分布が表れていることがわかる。ノズル-初段動翼間は最も複雑な分布を示しており、局所的な圧力のピークが数多く表れている。このピークは衝撃波によるものであり、先に述べたように閉塞部開始端側の領域でも加速した流れと動翼前縁とで生じる衝撃波によって急激な静圧変化が生じている。このようなピークが表れている一方で、この領域の静圧は他の領域に比べて低くなっているが、これは流れの加速によるものである。一方、ノズル 7~8 ピッ

チの位置である閉塞部終了端側では静圧が上昇している。この静圧上昇は、Fig.4.5 に併せて示している静圧コンターからわかるように閉塞部終了端からの衝撃波がノズル負圧面に衝突することで生じている。この領域は開口部開始端に位置しているため周方向の流れ場の周期性が特に悪く、その結果このような衝撃波とその衝突による静圧上昇が生じたと考えられる。このようにノズル - 初段動翼間では複雑な静圧分布が表れている一方で、初段動翼 - 2 段静翼や 2 段静翼 - 2 段動翼間では急激な静圧変動は表れず、およそサインカーブを描くような変動となっていることが確認できる。



(a)



(b)

Fig.4.4 Instantaneous Mach number contours, (a); overview, (b); enlarged view around the start side of the closed nozzle sector

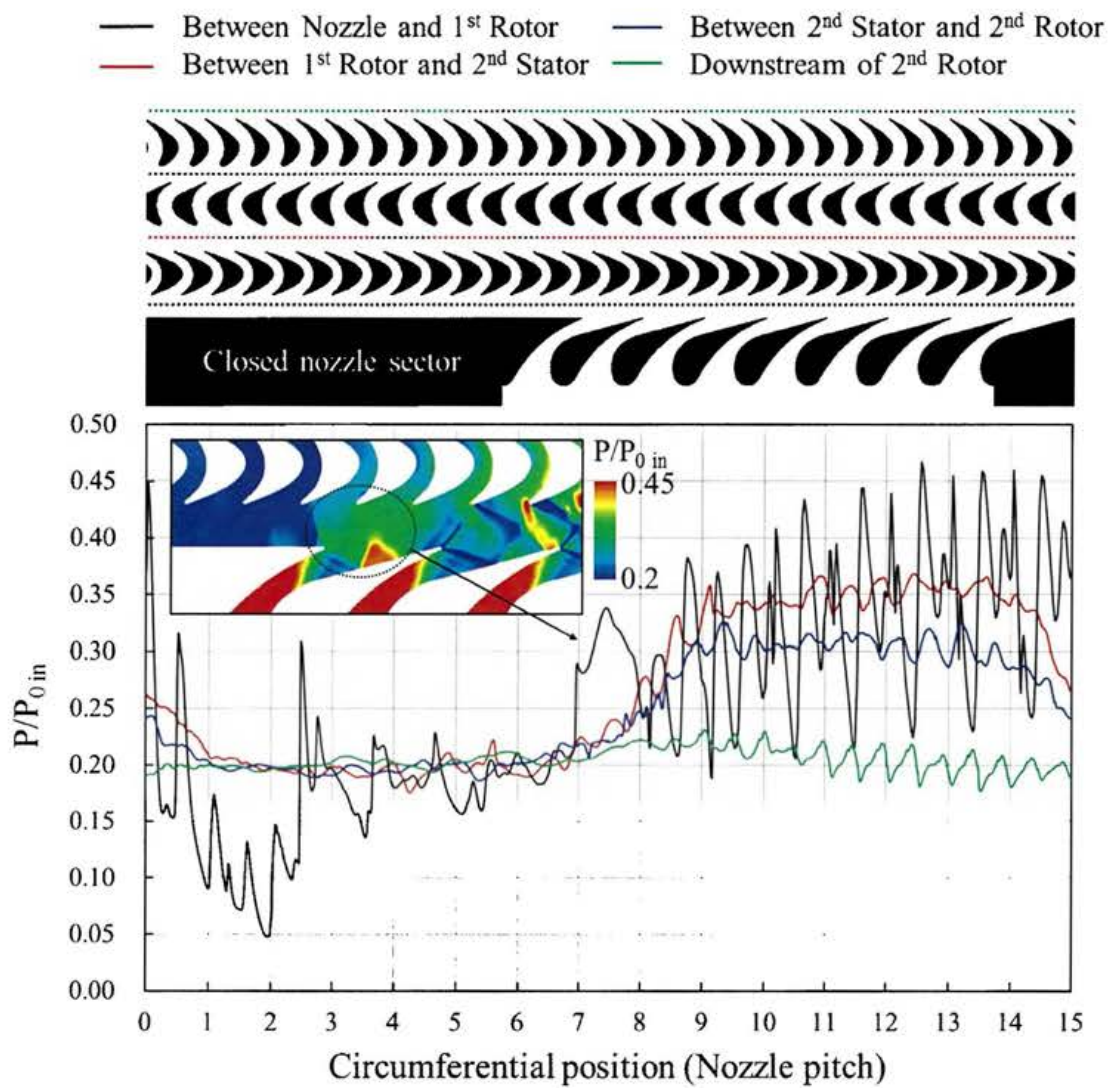


Fig.4.5 Circumferential pressure distributions at four positions between inside and exit of the stages

4. 7. 1. (2) フローパターンと付加的なエントロピー生成

Fig.4.6 はタービン段におけるエントロピーと速度ベクトルの瞬時値を示している。この図から、閉塞部周囲における複雑なフローパターンについて把握する。先に述べたように、閉塞部開始端からノズル 2~3 ピッチの位置におけるノズル - 初段動翼間では作動ガスが周方向に流動する（図中 A）。また、閉塞部を通過している初段動翼背後のガスの一部はノズル 2~3 ピッチの位置で初段動翼流路へと逆流入している（B）。この逆流によって、閉塞部を通過する初段動翼流路には高エントロピー流体が充満される。さらに、その一部は動翼入口側から閉塞部 - 初段動翼間の流路へと流出し（図中 C）、閉塞部終了端へ向けて周方向に輸送されている。そして、ノズル - 初段動翼間を周方向に流れる作動ガスは、閉塞部終了端近くに達したところで動翼流路へと流入する（D）。この領域で動翼流路に流入した作動ガスは、動翼を通過した後で図中（E）に示すように 2 段静翼へ流れるものと初段動翼背後を動翼回転方向と反対に向かう流れの 2 つに分かれている。このガスが流入する 2 段静翼では、静翼に対してインシデンスが合わないことで大きな剥離が生じており、後に示す散逸関数コンター（Fig.4.8）からわかるように損失源となっている。一方、閉塞部開始端からノズル 4~6 ピッチを通過する初段動翼では、そのすぐ背後を動翼回転方向と反対に作動ガスが流動することで流路出口に渦構造が表れており、先の剥離と同様にこの渦も損失源となっていることが散逸関数コンター（Fig.4.8）からわかる。そして、動翼回転方向と反対に流動するこの作動ガスは閉塞部開始端からノズル 1~2 ピッチのところで先に述べたように初段動翼へ逆流入するものと 2 段静翼へ流れるもの（図中 F）とに分かれ、このうち 2 段静翼へ流入した流れはその後図中（G）のように 2 段動翼へと流入する。また、閉塞部開始端からノズル 4~6 ピッチの位置を通過している 2 段動翼流路には滞留ガスが充満しているが、このガスは図中（E）で 2 段静翼へ流入した作動ガスによって閉塞部終了端側でタービン下流へと押し出されることがわかる（図中 H）。

次に、このような複雑なフローパターンにおいて、閉塞部の存在によって生じる付加的な損失をエントロピーとして評価する。Fig.4.7 は単位出力当たりの流量および時間平均エントロピーの軸方向分布と各段における増加量を表している。ここで、図中 Full

admission と示しているものは Fig.4.5 のノズルピッチ 10～13 ピッチにおける区間で算出したものである。この領域では周方向におよそ周期的な分布が得られていることから、全周挿入時の結果に相当するものと仮定し、ここでは閉塞部が存在する場合に対する比較対象としてプロットしている。なお、全ての値は全周挿入相当のタービン出口におけるエントロピーの値で正規化している。この結果から、いずれの翼列でも部分挿入化によって付加的なエントロピー増加が生じていることがわかる。閉塞部の存在によって、ノズル、2 段静翼および 2 段動翼それぞれでは、全周挿入相当のタービン出口におけるエントロピー量に対して 5～8% 程度エントロピーが増加している。一方、初段動翼でのエントロピー増加量は著しく、全周挿入のタービン出口でのエントロピー量のおよそ 30% に達する量が部分挿入の初段動翼だけで発生している。このような付加的な損失生成の結果、部分挿入のタービン出口では全周挿入相当に対し約 1.5 倍エントロピー量が多いという結果になった。

次に、このような付加的なエントロピー増加が流れ場のどこでどのような要因によって発生しているかを特定するために、散逸関数 ϕ のコンターを Fig.4.8 に示す。なお、散逸関数は第 3 章と同様の式により算出した。Fig.4.8 から、第 3 章と同様に部分挿入段では閉塞部の存在によって明らかに付加的な損失が発生していることが確認できる。最も強い散逸は、第 3 章と同様に閉塞部に侵入した直後の初段動翼流路（図中 i）で生じている。前章でも述べたように、この動翼流路では Fig.4.4 で示したようにノズルガスが周方向へ転向しインシデンスが大きくなること、隣接する動翼前縁で生じた強い衝撃波が衝突することによって前縁近くから大規模に剥離している。したがって、本章の結果からもこの剥離がこのような強い散逸生成の要因となっていると考えられる。また、Fig.4.6 (B) および (C) に示した逆流が生じている動翼流路においても強い散逸が発生しているが、この散逸は逆流した流れの強いミキシングによるものである（図中 ii）。一方、閉塞部開始端からノズル 4～7 ピッチを通過する初段動翼の流路入口と出口においても散逸の生成が確認できる（図中 iii）。これは先に述べたように動翼の前後を周方向に流れる作動ガスと動翼流路内の滞留ガスとの間で生じるミキシングによるものである。さらに、初段動翼がノズル開口部へ侵入する際（図中 iv）では、動翼流路内において散逸生成が確認できる。この領域は閉塞部とノズル開口部の境界位置にあり、上流

からのガス流量やインシデンスが不均一で剥離やミキシングを起こすために散逸が生まれる。このように、タービン初段動翼では閉塞部周囲の広い範囲において付加的な損失生成が表れており、この損失生成が先に確認した著しいエントロピー増加の要因である。一方、2 段静動翼に着目すると付加的な散逸生成は閉塞部終了端（図中 v）に限定されている。(iv) での散逸と同様、この領域は閉塞部とノズル開口部の境界位置にあるため先のフローパターンで確認したように静翼負圧面側で生じる大きな剥離や流入ガスの不均一性によるミキシングが散逸を生む。その結果、Fig.4.7 に示されるように全周挿入相当に比べてタービン後段部でもエントロピー上昇が大きくなったと考えられる。

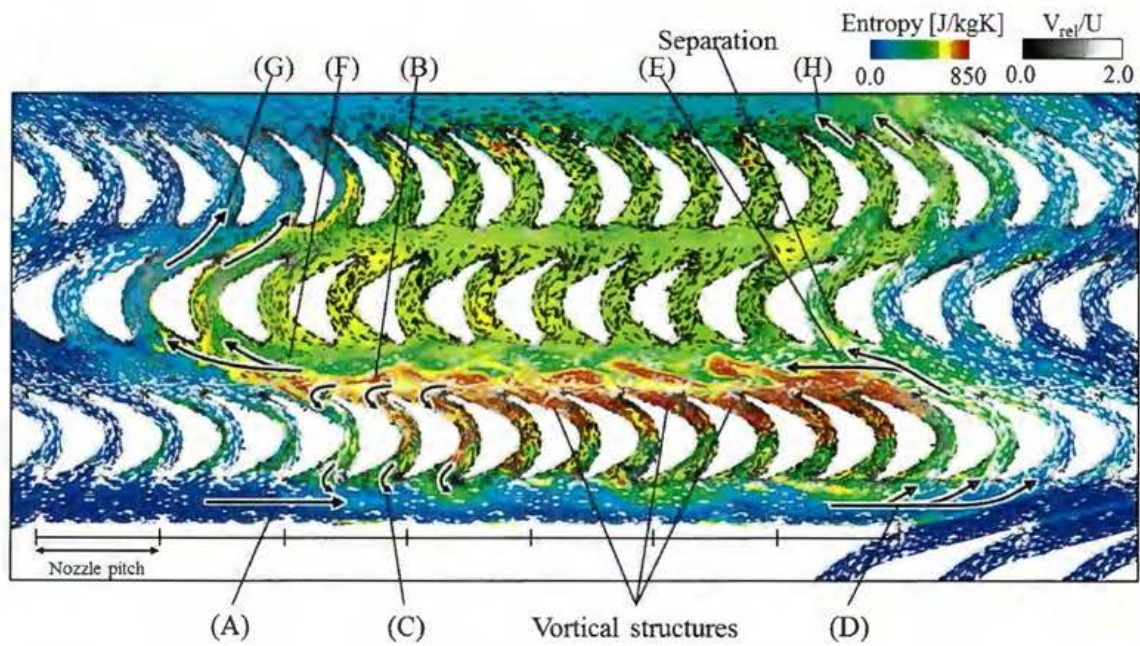


Fig.4.6 Instantaneous entropy contours and normalized velocity vectors in the relative frame

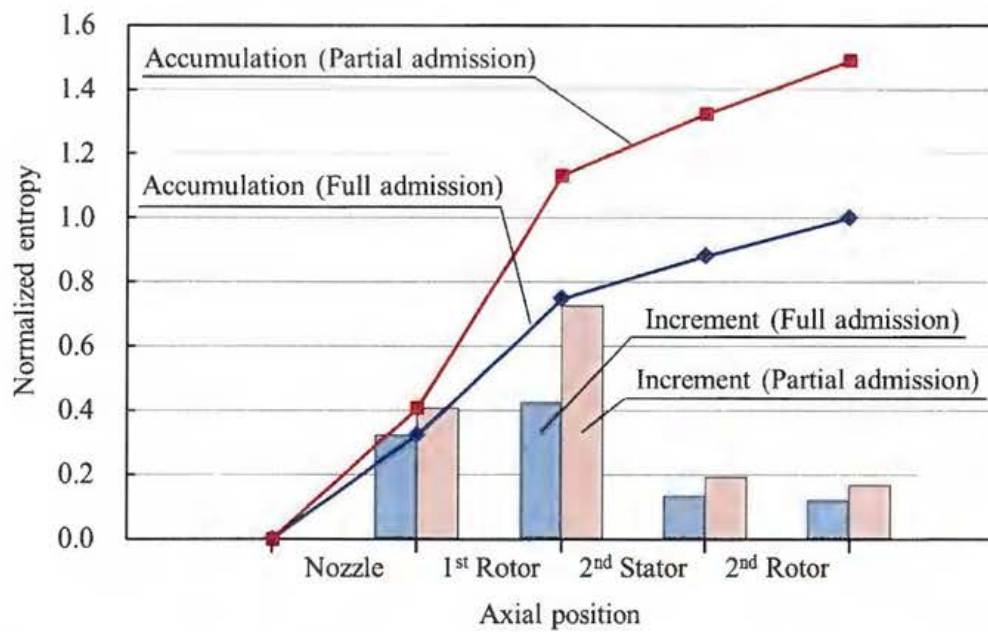


Fig.4.7 Time and mass flow averaged entropy per unit turbine output power between inside and exit of the stages

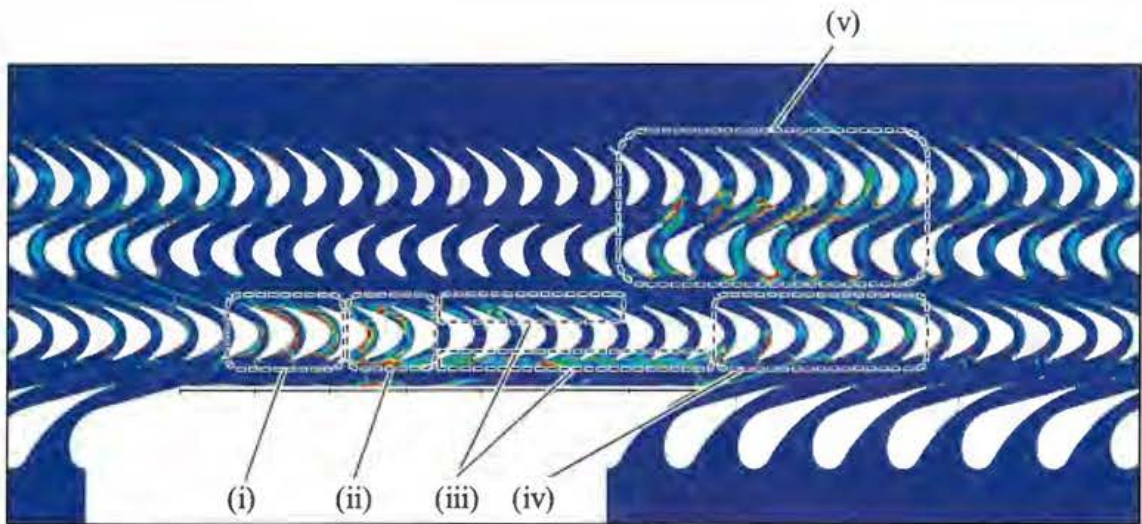


Fig.4.8 Instantaneous dissipation function contours

4. 7. 1. (3) 非定常流体力

Fig.4.9 は 1 枚の初段動翼に作用する流体力の周方向成分と軸方向成分を各時間に渡ってプロットした結果である。ここで、非定常流体力の各成分は式 (4.7.1.1) に示すように翼を囲む検査領域内の運動量収支として算出した。

$$\vec{f}_i = \oint (-P \cdot \vec{n}) dA - \oint (\rho \vec{u}_i \cdot \vec{n}) \vec{u}_i dA - \frac{d}{dt} \int_A \rho \vec{u}_i dA \quad (i=1,2) \quad (4.7.1.1)$$

さらに、Fig.4.9 ではこの式により得られた流体力を式 (4.7.1.2) により無次元化している。ここで、添え字 n は無次元化したことを、 A_b は動翼 1 枚の面積を表す。

$$\vec{f}_i^n = \frac{\vec{f}_i}{P_{0in} \times A_b} \quad (i=1,2) \quad (4.7.1.2)$$

Fig.4.9 から初段動翼には軸方向・周方向双方に対して閉塞部の存在による強い非定常性が表れていることがわかる。軸方向流体力に着目すると、閉塞部開始端からノズル 2.5 ピッチ程度までは上流側に流体力が作用しており、第 3 章と同様の特徴が表れている。これは、第 3 章でも述べたように Fig.4.4 および Fig.4.5 で確認された強い加速と静圧の低下によるもので、タービン上流側の負圧面圧力が低下することによって生じる。一方、Fig.4.5 の閉塞部終了端側（ノズル 7～8 ピッチ位置）では動翼前方で静圧が上昇するが、この位置を通過する際は流体力が下流側に作用していることがわかる。このような軸方向流体力変動に比べて、周方向流体力の変動はさらに大きい。第 3 章の結果と同様に、動翼が閉塞部に侵入した直後（ノズル 1 ピッチ位置）では動翼回転方向へ急激に流体力が増加している。閉塞部背後（ノズル 2.5～7 ピッチ位置）では、流体力はゼロを中心に回転方向とその反対方向に変動する。その後、ノズル開口部へ侵入すると流体力が回復するが、ノズル流れ角が大きいいため開口部のおよそ中央となるノズル 10 ピッチの位置で流体力が回復する。

Fig.4.10 は Fig.4.9 の結果を FFT 処理することで周波数ドメインとして整理したものである。この結果から、広い周波数範囲に変動成分のピークが存在することがわかるが、

このような特徴は蒸気タービンの研究^[43]で報告されている知見と一致する。本タービンでは、閉塞部が周方向3か所に存在するため閉塞部通過周波数は動翼回転周波数の3倍(3EO)である。周方向成分の結果を見ると、この成分が最大成分であり、その次に9EO、6EO、15EOと続き低周波側で変動が大きい成分が表れる。一方、軸方向流体力の最大成分は閉塞部通過周波数ではなく12EOに表れた。更に、周方向流体力に比べて低周波域にピークが集中するのではなく、33EOや39EO、45EOや48EOなど比較的高周波域にも目立つピークが表れた。このうち、45EOの周波数成分は全体で3番目に大きいものであるが、この周波数は閉塞部が存在しない場合のノズルBPFに相当するものである。また、2段静翼枚数は81枚であるが、2段静翼BPF成分は周方向・軸方向ともにほとんど表れなかった。

次に、2段動翼に着目する。Fig.4.11は1枚の2段動翼に作用する非定常流体力を各時間に渡ってプロットした結果である。初段動翼同様、閉塞部の存在によって極めて非定常的な流体力変動が表れているが、初段動翼で見られたような急激な周方向流体力の増加や閉塞部開始端側での上流側への流体力変動は生じていないことがわかる。しかしながら、閉塞部終了端側では上流からの作動ガスの不均一性が強いいため流体力変動も大きくなる。また、本タービンのノズルパーシャリティは54.5%であり、閉塞部長さとノズル開口部長さはほぼ等しい。その結果、2段動翼の流体力変動は軸方向・周方向ともにおよそサインカーブを描くものとなった。

Fig.4.12はFig.4.11のFFT結果である。流体力の時間変動が初段動翼に比べて複雑ではなかったことから推測できるように、2段動翼では軸方向・周方向ともに閉塞部通過周波数成分のピークが顕著に表れた。また、初段動翼同様に2段動翼BPF成分はほとんど表れない結果となった。

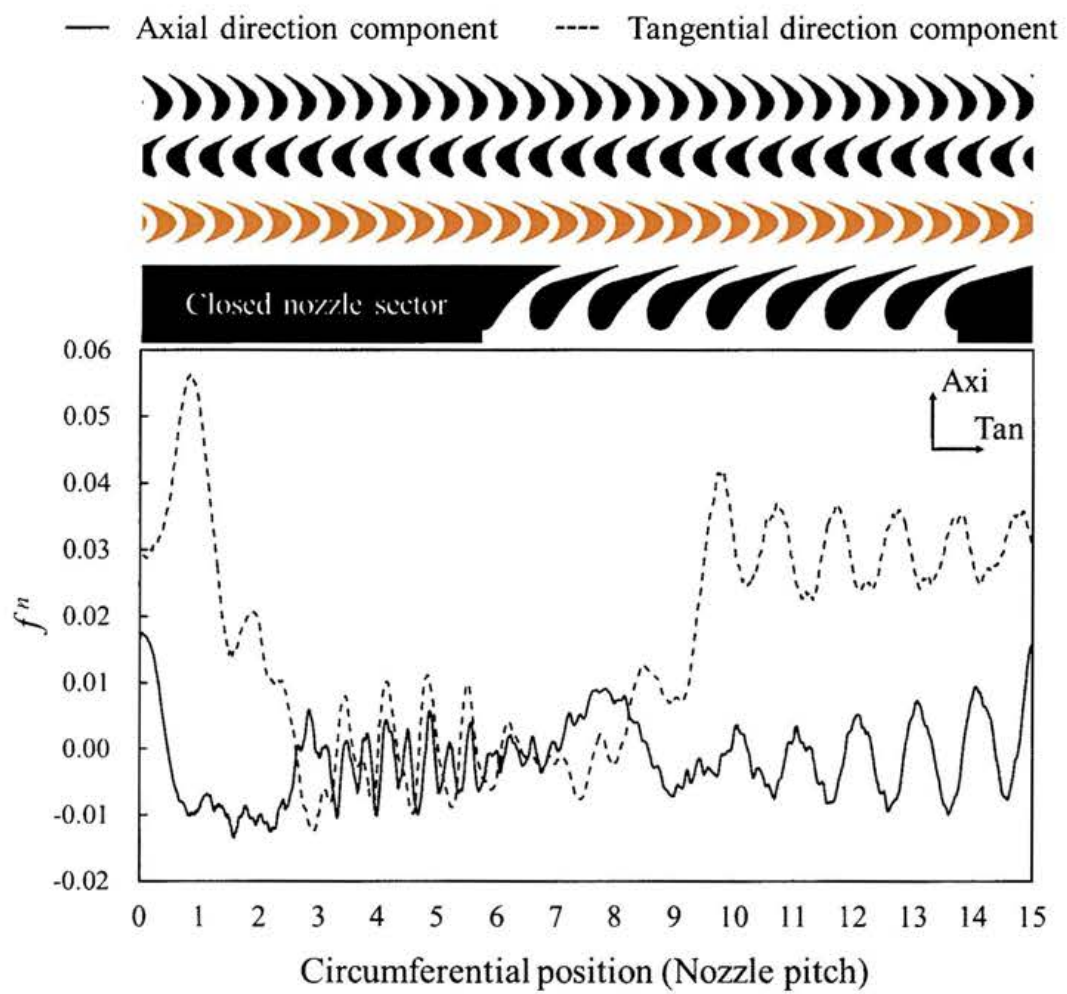


Fig.4.9 Unsteady aerodynamic force on a 1st Rotor blade in time domain

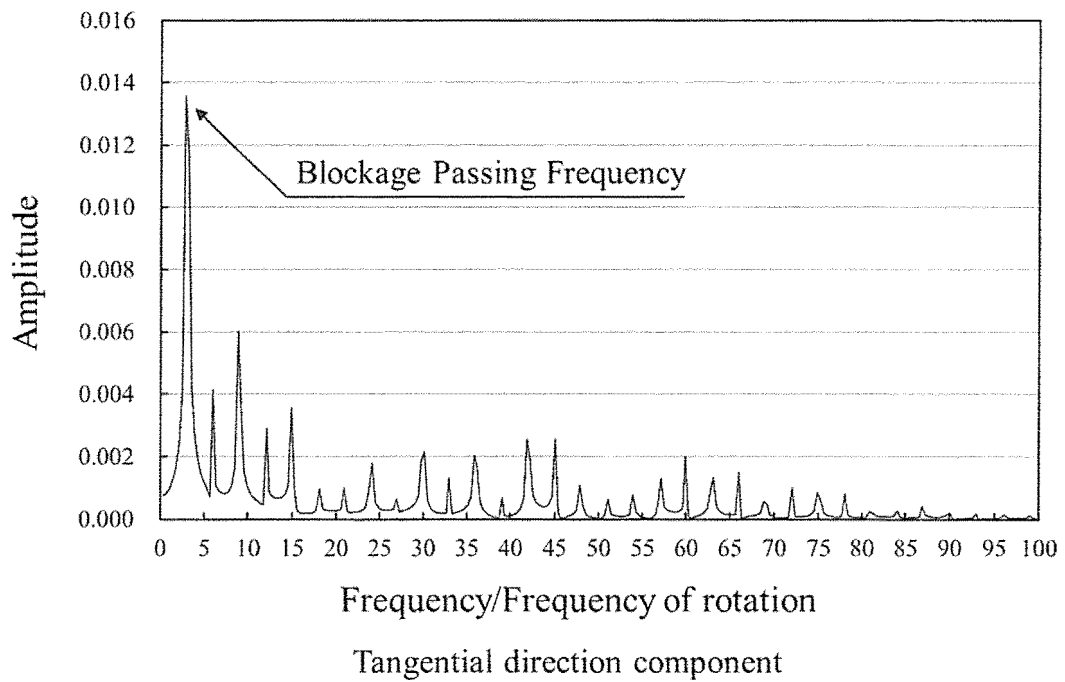
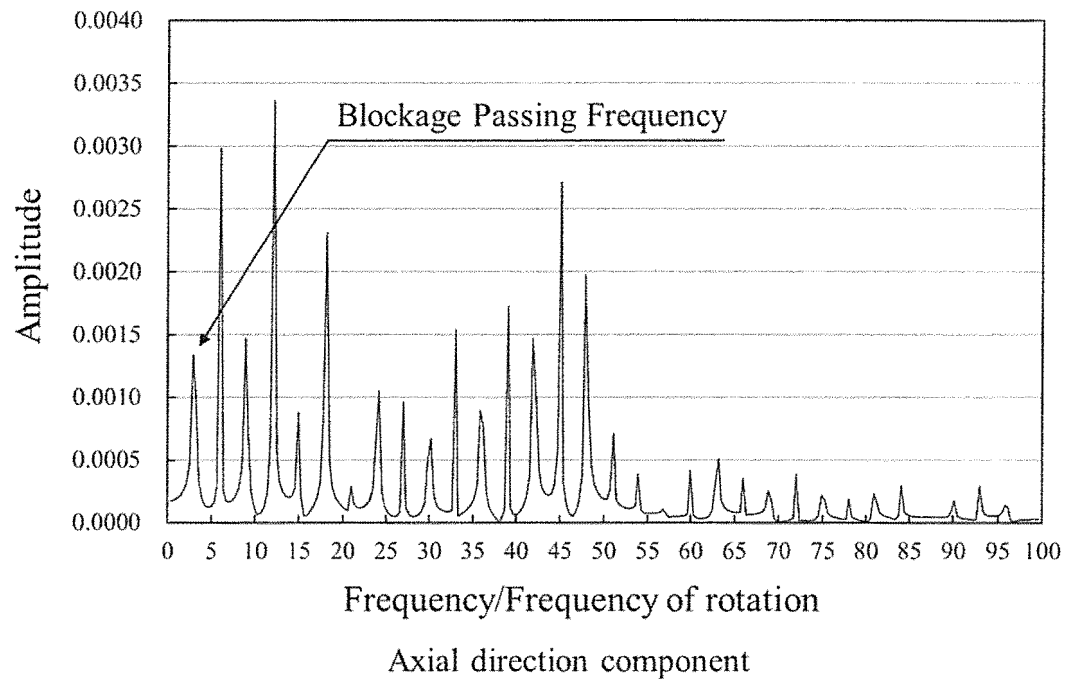


Fig.4.10 Unsteady aerodynamic force on a 1st Rotor blade in frequency domain

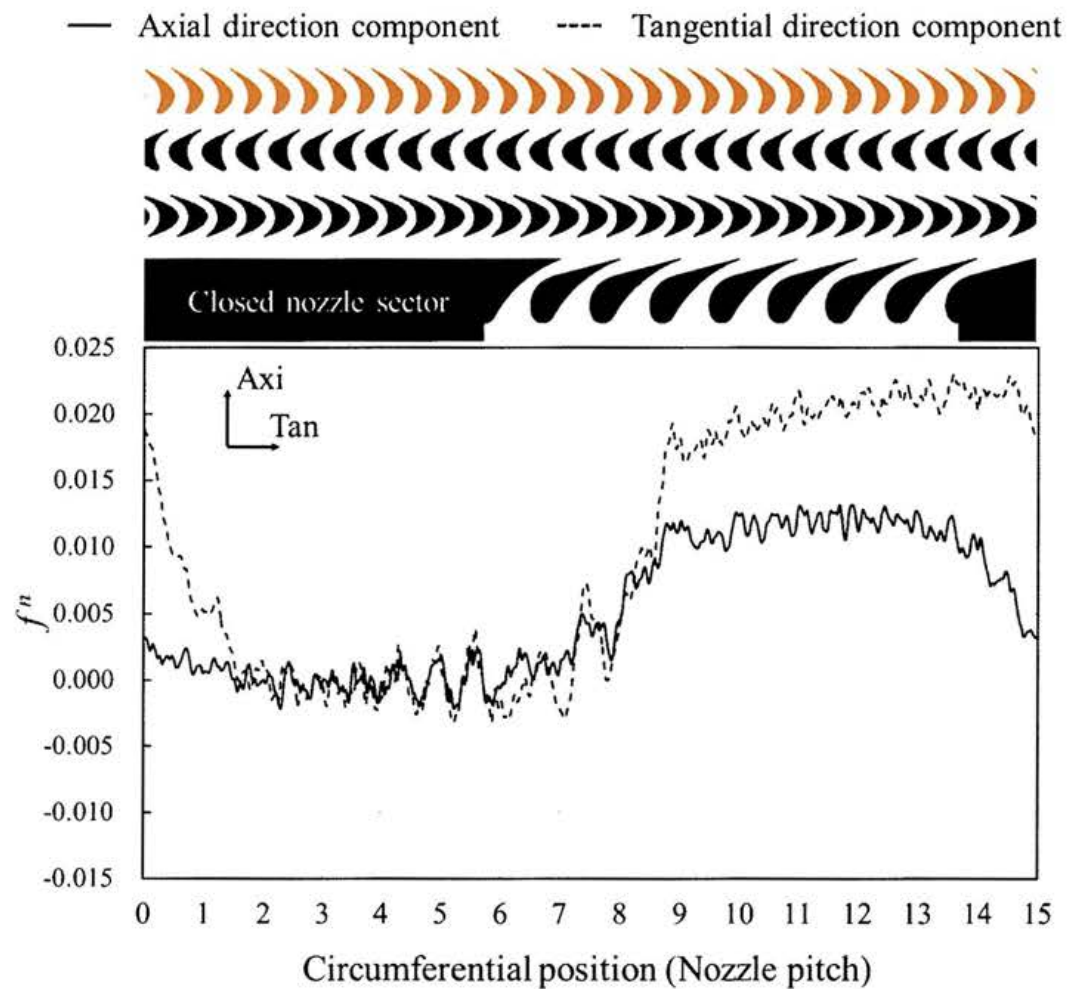


Fig.4.11 Unsteady aerodynamic force on a 2nd Rotor blade in time domain

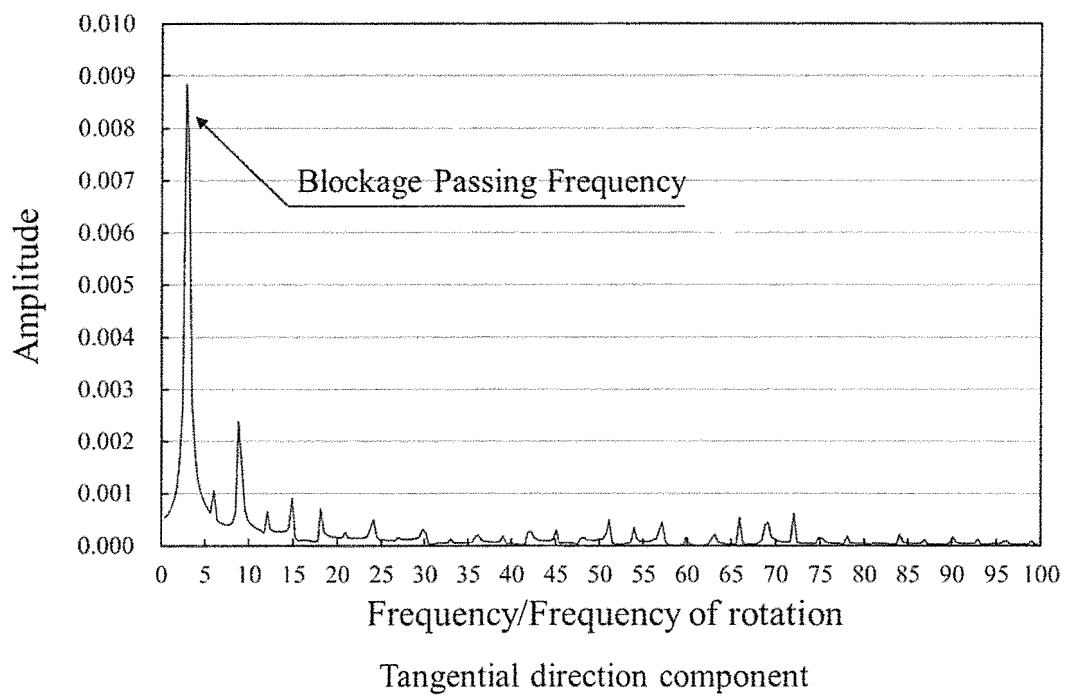
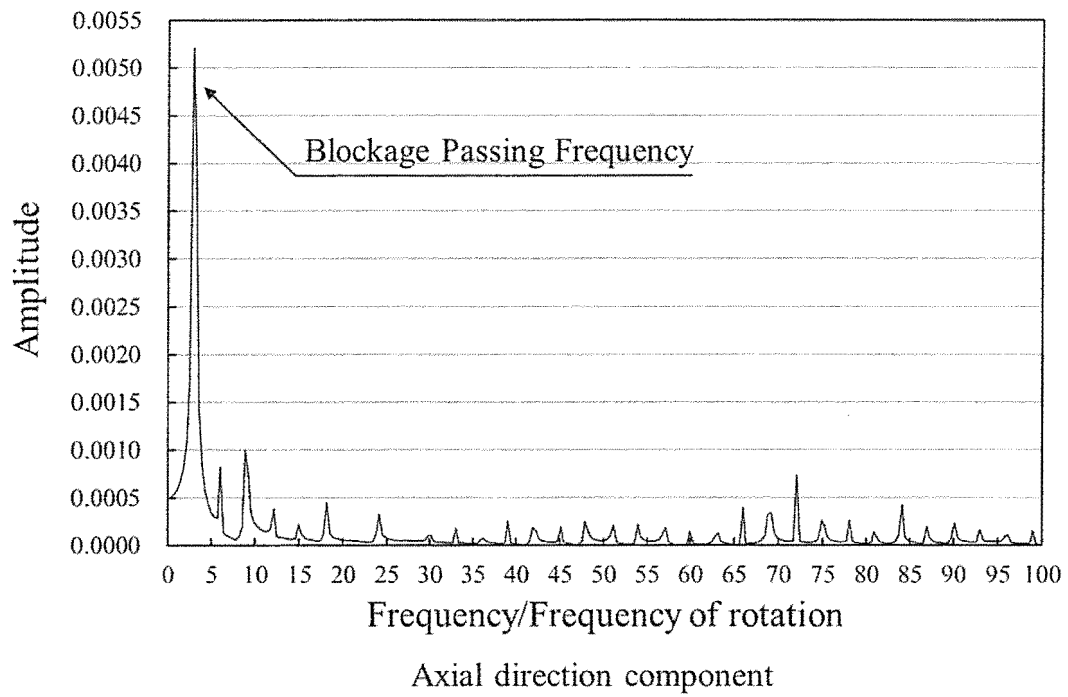


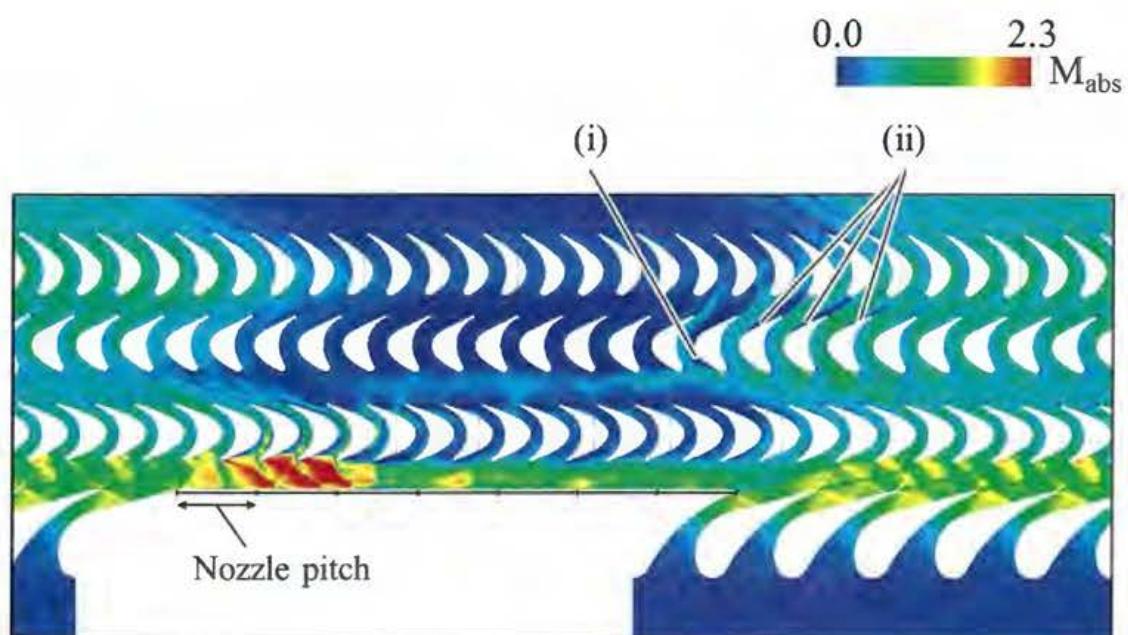
Fig.4.12 Unsteady aerodynamic force on a 2nd Rotor blade in frequency domain

4. 7. 2 ノズル閉塞方法がタービン流れ場に及ぼす影響

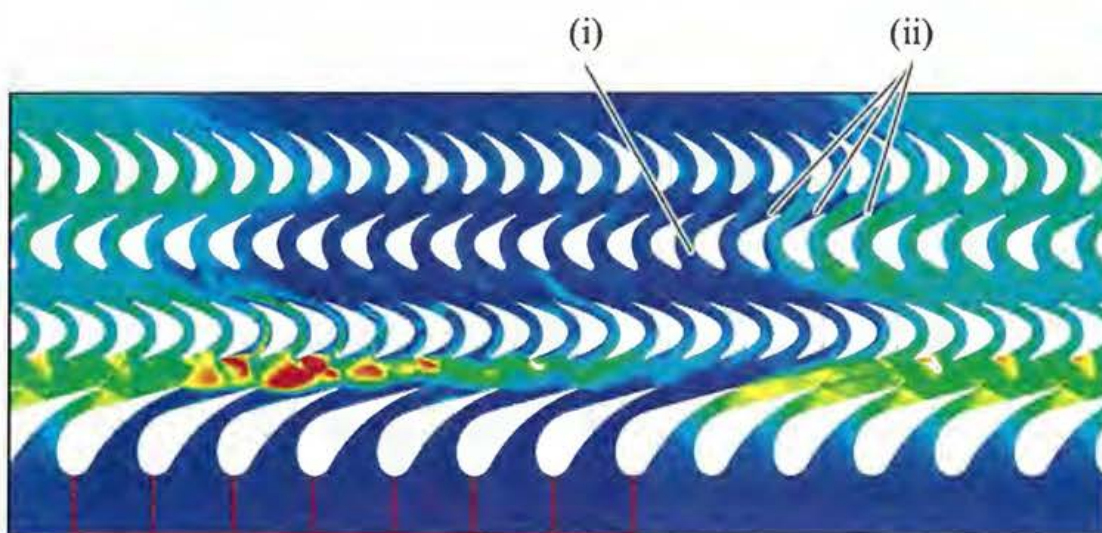
本項では、Case A と Case B の結果を比較することにより、超音速部分挿入タービン段におけるノズル閉塞方法が 2 次元流れ場のフローパターンや損失源、流体力変動に与える影響について考察し、閉塞方法による効率向上の余地について把握する。

4. 7. 2. (1) フローパターンの差

Fig.4.13 は Case A と Case B それぞれにおける絶対マッハ数コンターの瞬時値を示している。前項で述べたように、Case A のノズル - 初段動翼間では閉塞部開始端からノズル 2.5 ピッチ程度の範囲において流れの加速が生じるが、Case B においてもおよそこの領域で強い加速が生じていることがわかる。Case B では、Case A のように動翼と閉塞部壁面による拡大流路は形成されないが、閉塞ノズルに空間が存在することで流れが膨張するためにこのような加速が生じると考えられる。また、どちらの閉塞方法でもノズル - 初段動翼間の閉塞部背後では動翼回転方向に向かう高速な周方向流れが生じている。しかし、その様子には差があり、Case A の場合この周方向流れは閉塞部終了端まで続き、そこで動翼流路へと流入する。一方、Case B では閉塞部終了端まで到達せず、閉塞部開始端からノズル 5~6 ピッチの位置で動翼流路へと流入している。このような違いによって、初段動翼背後の流れにも差が生じている。前項で述べたように、Case A では閉塞部終了端で動翼に流入した流れが 2 段静翼へ向かうものと初段動翼背後を周方向に向かうものとにわかれる。しかし、Case B では閉塞部終了端に到達する前に動翼前方の作動ガスが動翼流路へ流入するため、閉塞部終了端の 2 段静翼へ作動ガスが流入しない。その結果、この位置での 2 段静翼前縁からの大規模な剥離 (Fig.4.13 の i) や動翼背後の周方向流れは表れない。一方、その隣の 2 段静翼負圧面頂点背後での剥離 (Fig.4.13 の ii) はどちらの閉塞方法でも共通して表れている。



Case A



Case B

Fig.4.13 Instantaneous absolute Mach number contours of the Case A and Case B

4. 7. 2. (2) 損失生成の差

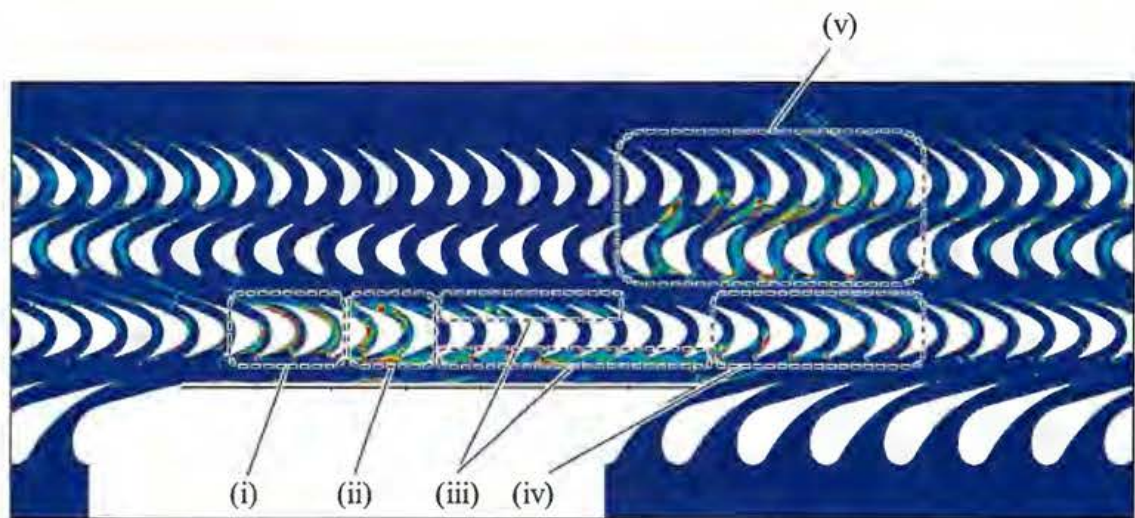
Fig.4.14 に Case A と Case B それぞれにおける散逸関数コンターの瞬時値を示す。なお、Case A のコンターは Fig.4.8 に示したものを再度示している。Fig.4.8 でも示した図中 (i)、(ii) および (iv) での散逸は、その程度・範囲において Case A と Case B でおよそ共通して現れている。また、(iii) および (v) でも共通して散逸は生成されるが、その範囲には若干の違いがある。前項で述べたとおり Case A の (iii) では、動翼入口側と出口側においてミキシングによる散逸が確認されるが、Case B では動翼入口側に限定されるうえ、閉塞部終了端ノズル背後の動翼入口では散逸が見られない。これは、Case B では前項で述べたようにノズル - 初段動翼間の閉塞部背後を通過する周方向流れが閉塞部終了端まで到達していないことや初段動翼背後を周方向に流動する作動ガスが存在しないためである。また、(v) では Fig.4.13 の (i) に位置する 2 段静翼負圧面での散逸に Case A と Case B で差が生じ、この静翼に対して動翼からの作動ガスの流入が無い Case B では散逸は生成しない。このように、Case A と Case B では一部領域に差はあるものの (i) ~ (v) の領域で共通した散逸が表れる。一方、Case B では (vi) および (vii) の領域でもさらなる散逸が発生している。(vi) で生じる散逸はノズル閉塞部背後の周方向流れと閉塞ノズル空間に滞留する作動ガスとの大きな速度差によって生じる強いミキシングによるものであり、特に閉塞部開始端側の閉塞ノズルで強いことがわかる。(vii) に示す散逸は Case A においてもわずかながら表れているが、その強さは Case B の方が明らかに強くその範囲も広い。この散逸は、ノズル開口部端からの高速な作動ガスと閉塞部終了端での作動ガスとの速度差によるものである。Case A では閉塞部背後の周方向ガスが閉塞部終了端まで到達するため、ノズル開口部端のガスとの速度差はさほど小さくなく強い散逸は表れない。その一方で、Case B では周方向ガスが閉塞部終了端に到達しないため、ノズル開口部端のガスとの速度差が強く、その結果強い散逸が生じていると考えられる。

次に、各閉塞方法における単位出力当たりのエントロピーの軸方向分布および各翼列での増加量を Fig.4.15 に示す。ここでは、Case B のタービン出口におけるエントロピーの値で正規化している。Case B の出口における値を基準として、ノズルと初段動翼での

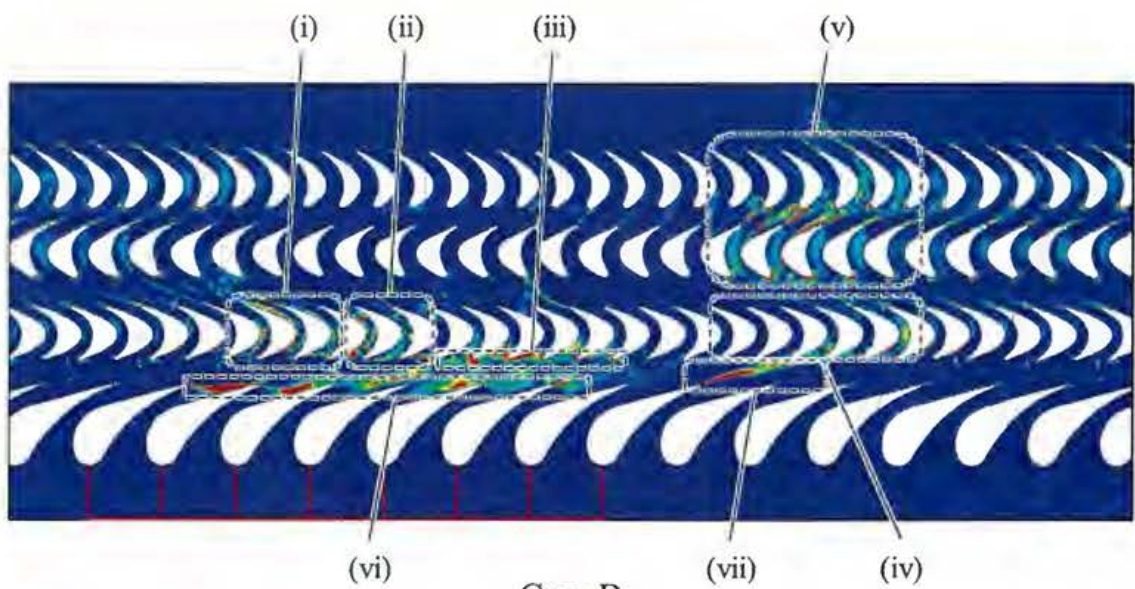
エントロピー生成は Case A の方がそれぞれ 8%、4%程度低いことがわかり、これは先の散逸関数コンターで確認された Case B における付加的な散逸領域 (vi) および (vii) の影響であると考えられる。一方、2 段静翼でのエントロピー生成量は Case A の方が 1.5%程度大きく、この差は Fig.4.13 (i) に示す静翼での剥離に伴う散逸の有無による影響である。また、散逸関数コンターでは 2 段動翼における散逸生成分布の様子に顕著な差は表れておらず、Fig.4.15 のエントロピー増加量においても差は表れていないことがわかる。このように、初段部では Case B、後段部では Case A の方がそれぞれエントロピー生成量は大きい。しかし、Case B 初段部での付加的な生成量は Case A 後段部での付加的な生成量を大きく上回っている。その結果、タービン段全体でのエントロピー生成量は Case A の方が 12%程度低減されている。このような差がタービン効率としてどの程度の差異として表れるかを Fig.4.16 に示す。Fig.4.16 はタービン Total-to-static 効率（以下、T-S 効率）を表しており、式 (4.7.2.1) により算出した。各量は流量および時間平均値を用いている。

$$\eta_{t-s} = \frac{1 - T_{0out}/T_{0in}}{1 - (P_{out}/P_{0in})^{(\gamma-1)/\gamma}} \quad (4.7.2.1)$$

この結果から、Case A と Case B では閉塞ノズル空間が存在しない Case A の方がおよそ 1.7%高効率となることがわかった。



Case A



Case B

Fig.4.14 Instantaneous dissipation function contours of the Case A and Case B

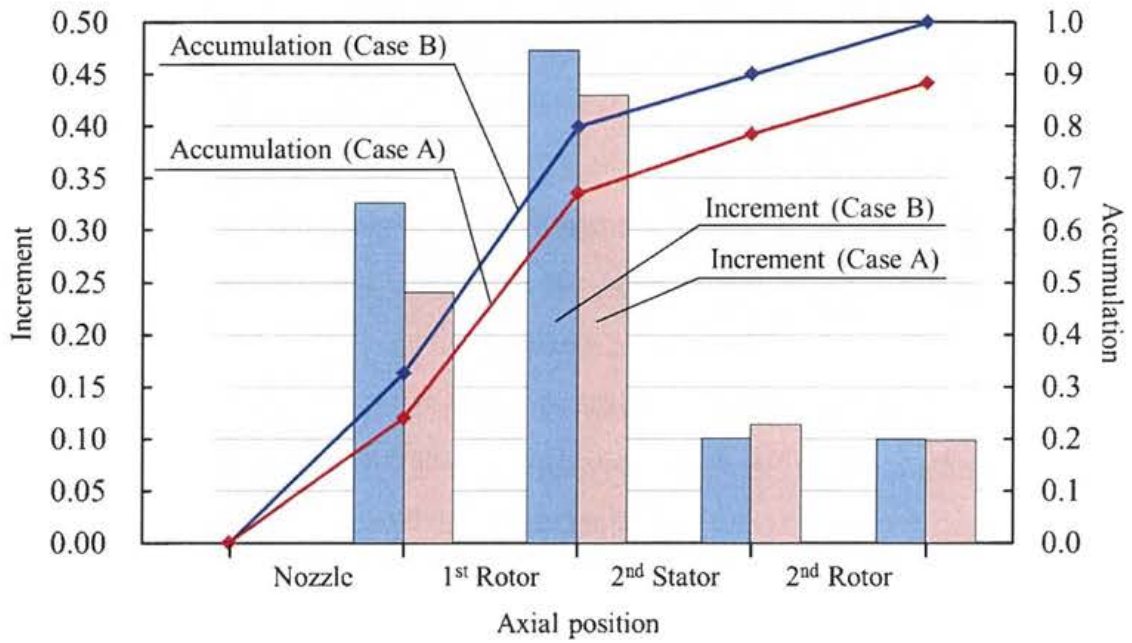


Fig.4.15 Time and mass flow averaged entropy per unit turbine output power between inside and exit of the stages of the Case A and Case B

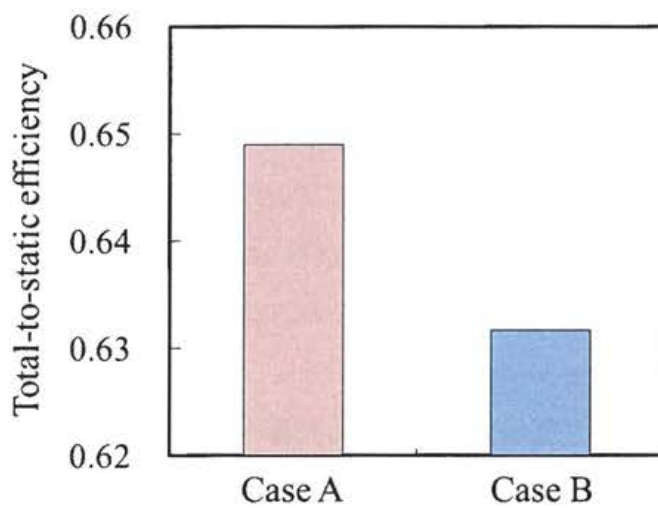


Fig.4.16 Total-to-static efficiency of the Case A and Case B

4. 7. 2. (3) 非定常流体力の差

それぞれの閉塞方法における 1 枚の初段動翼に作用する軸方向流体力と周方向流体力を時間ドメインで比較した結果を Fig.4.17 および Fig.4.18 に示す。軸方向流体力に着目すると、どちらの閉塞方法でもゼロを中心に変動するという特徴は同じである。流体力変動の差は、閉塞部侵入直後やノズル開口部侵入直後の動翼で目立つ。これらは、閉塞部壁面の有無によるノズル流れの膨張の仕方や閉塞部背後の周方向流れが閉塞部終了端まで到達するかどうかなどによって流れ場に差が表れる領域である。また、Case B ではノズルピッチ 10 程度の位置から周期的な変動が表れている一方、Case A では徐々に周期的な変動になっており、閉塞方法の差がノズル開口部での軸方向流体力変動に差を生んでいることが確認できる。周方向流体力に着目すると、顕著な差として閉塞部背後での変動振幅やノズル開口部侵入時の流体力回復が挙げられる。閉塞部背後での変動は初段動翼前方の周方向ガスが動翼流路へ流入することで生じる。Fig.4.13 から確認できるように Case A では周方向ガスは動翼前方を通過するのみでほとんど流路へ流入しない。一方、Case B では Case A よりも動翼流路への流入が顕著であり、このような差によって閉塞部背後での変動振幅に差が表れたと考えられる。また、ノズル開口部侵入時（ノズルピッチ 8~10）の流体力回復では、Case A の方が流体力の回復が早い。これは、Case A では閉塞部背後の周方向流れが閉塞部終了端において動翼流路に流入するためであり、周方向流れが閉塞部背後で動翼流路に流入し、終了端まで到達しない Case B では流体力の回復が遅れる。Fig.4.17 および Fig.4.18 を FFT 処理した結果を Fig.4.19 に示す。ここで、振幅は周方向成分の閉塞部通過周波数成分で正規化している。この結果から、多くのピークにおいて軸方向・周方向ともに Case A の方が Case B よりも振幅が減少していることがわかる。しかし、各方向の 6EO や 12EO、軸方向の 18EO では Case A の振幅の方およそ 2 倍大きく、必ずしも Case A の方が変動流体力低減の面で優位であると断言することは出来ない。

次に、閉塞方法が 2 段動翼の変動流体力に与える影響に着目する。Fig.4.20 と Fig.4.21 は 2 段動翼の変動流体力を時間ドメインで比較した結果である。顕著な差として、Case A の方が閉塞部背後（ノズル 2~7 ピッチ）での振幅がわずかに低減されていること、初段部の周方向成分同様に Case B では流体力の回復が遅れていることが確認できる。

この結果を周波数成分ごとに比較したものを Fig.4.22 に示す。ここでも、振幅は周方向成分の閉塞部通過周波数成分で正規化している。軸方向成分ではほぼ全周波数成分で Case A の場合振幅が低減しており、周方向成分でも 6EO、9EO での振幅が低減していることがわかる。したがって、2 段動翼では Case B よりも Case A による閉塞方法の方が流体力変動を低減できる可能性があると考えられる。

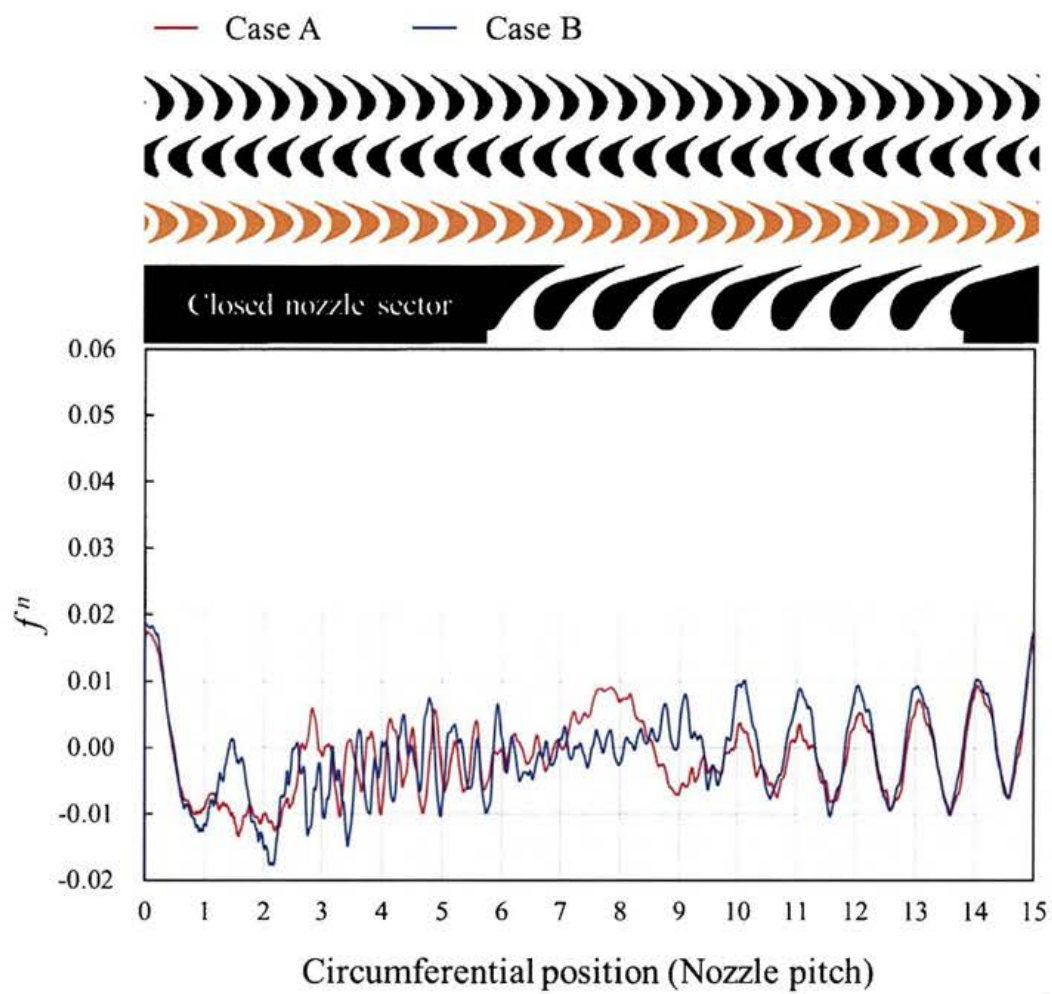


Fig.4.17 Axial directional unsteady aerodynamic force on a 1st Rotor blade of the Case A and Case B in time domain

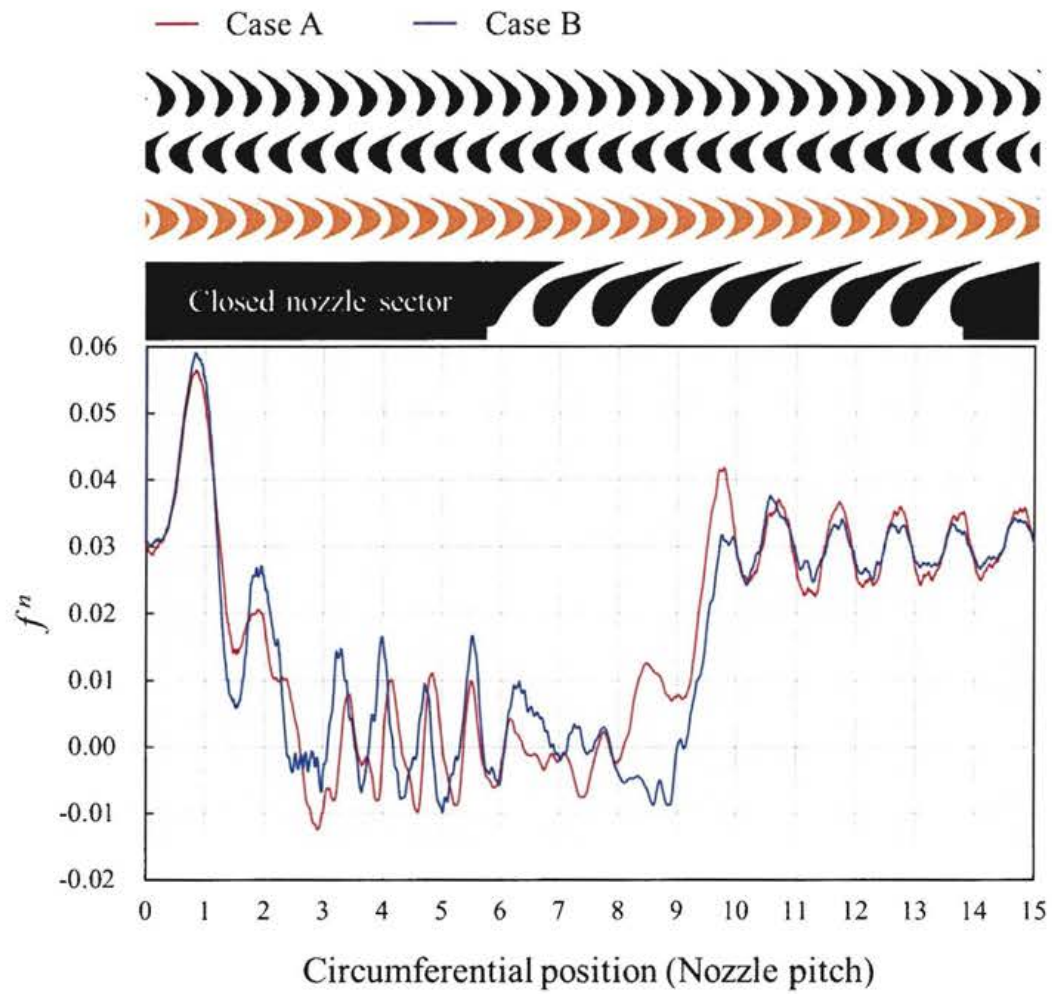


Fig.4.18 Tangential directional unsteady aerodynamic force on a 1st Rotor blade of the Case A and Case B in time domain

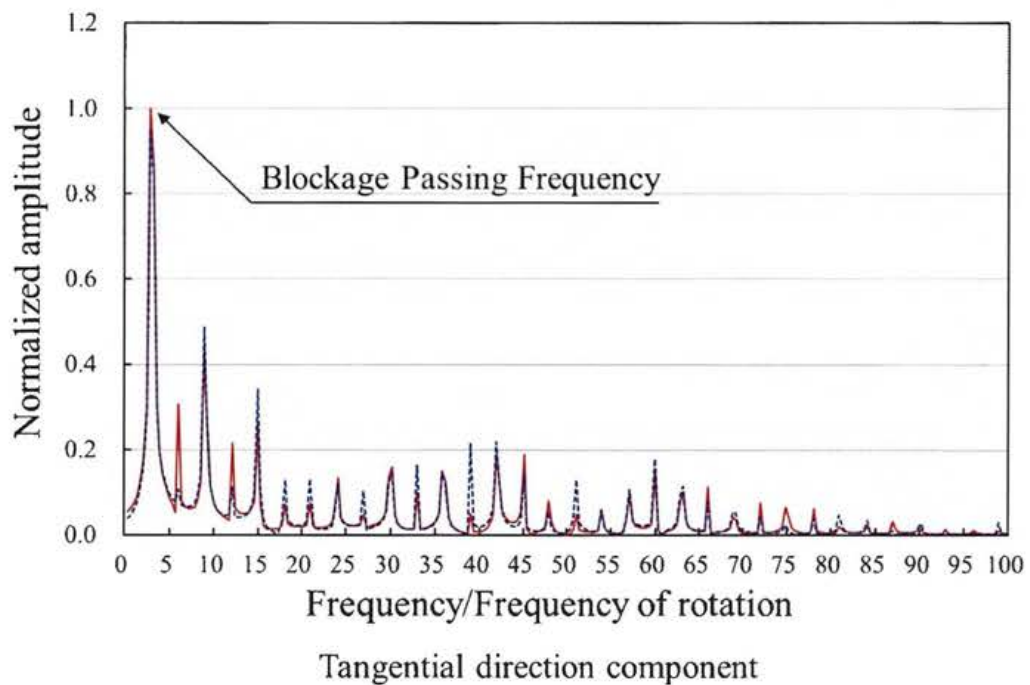
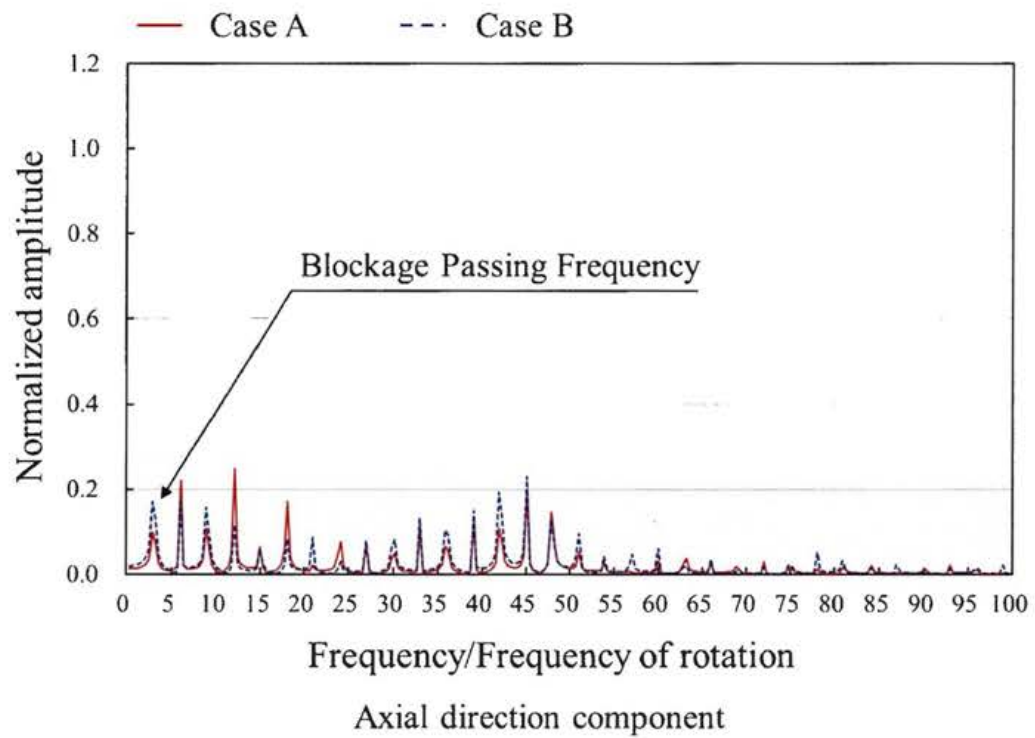


Fig.4.19 Unsteady aerodynamic force on a 1st Rotor blade of the Case A and Case B in frequency domain

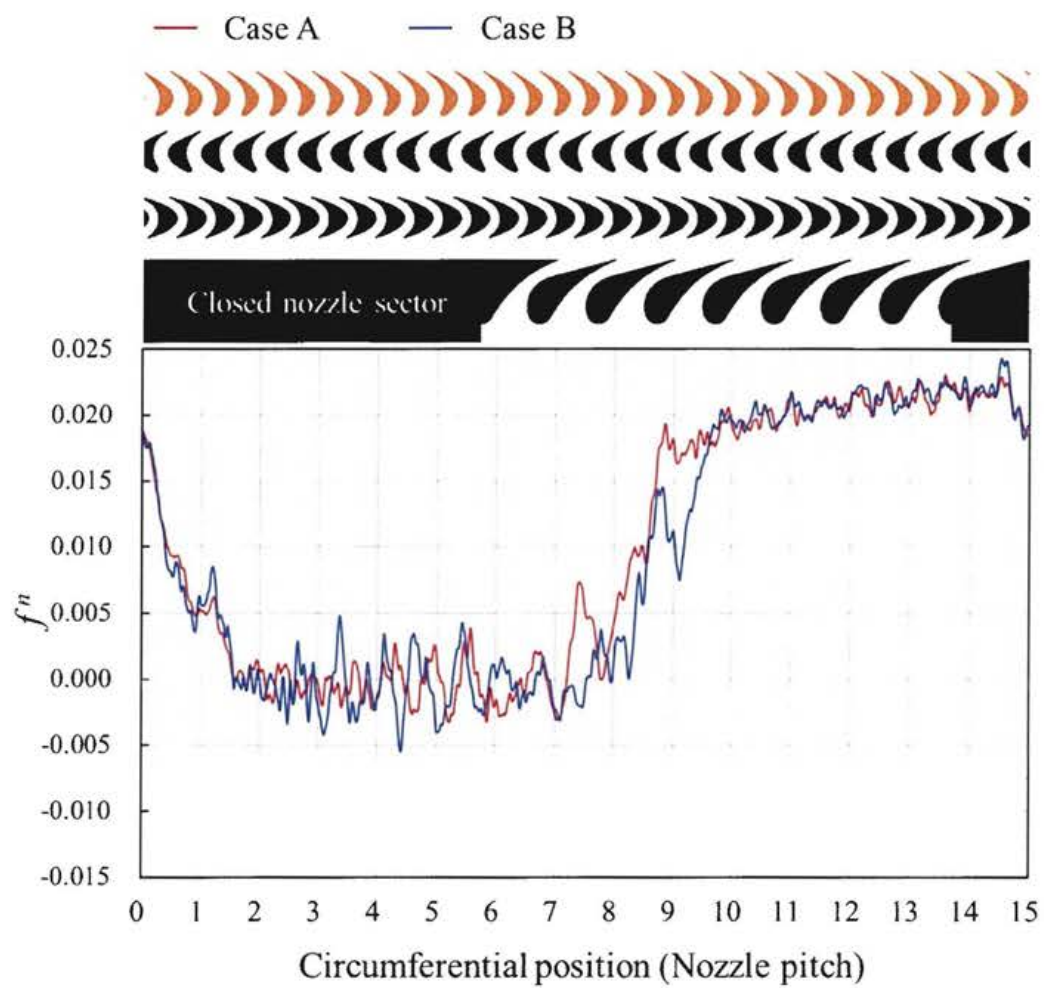


Fig.4.20 Axial directional unsteady aerodynamic force on a 2nd Rotor blade of the Case A and Case B in time domain

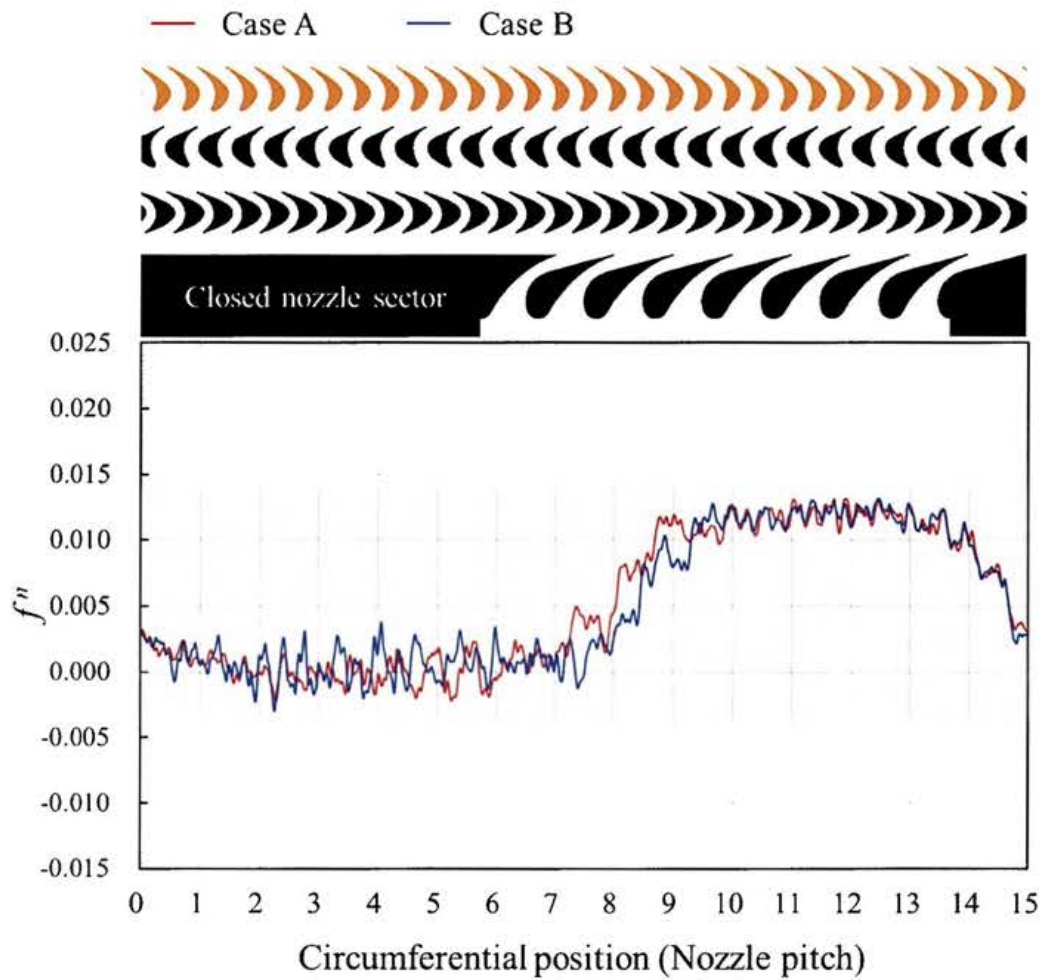


Fig.4.21 Tangential directional unsteady aerodynamic force on a 2nd Rotor blade of the Case A and Case B in time domain

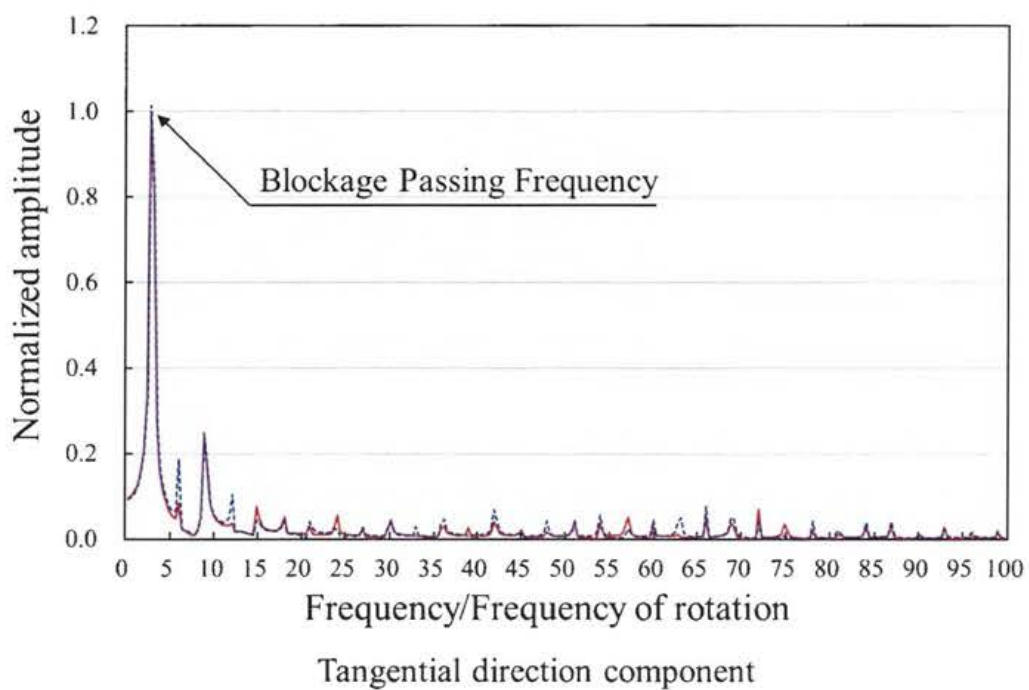
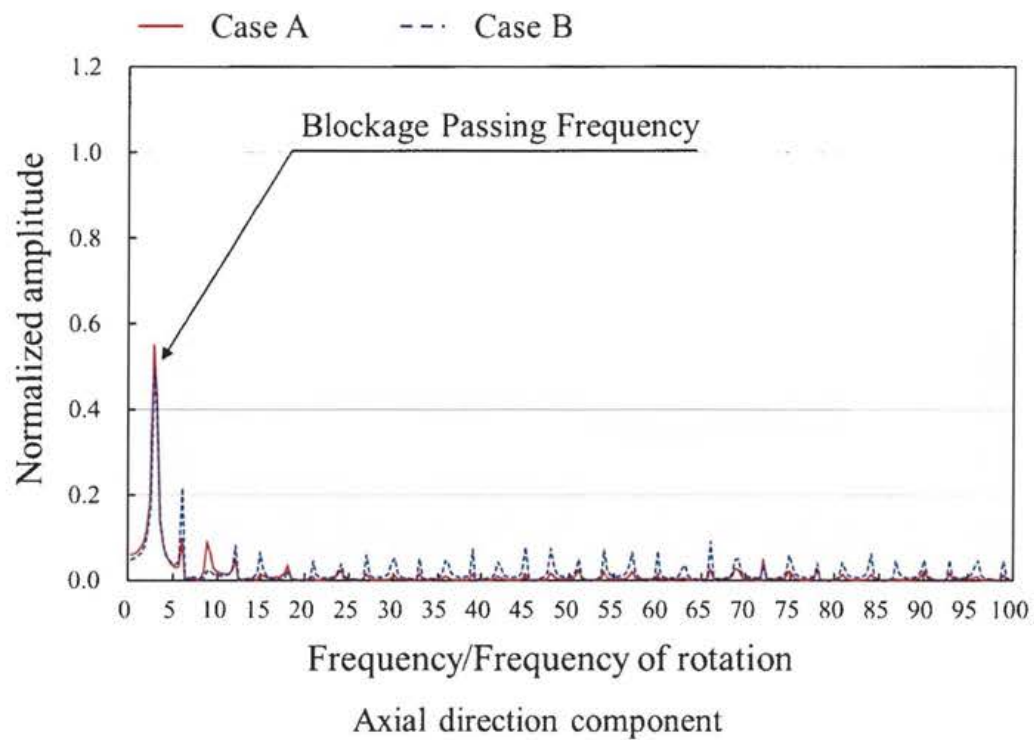


Fig.4.22 Unsteady aerodynamic force on a 2nd Rotor blade of the Case A and Case B in frequency domain

4. 8 結論

第4章では、第3章と同様に JAXA M-1 タービンを対象として、3つ穴部分挿入タービン全段の時空間高解像度スキームによる2次元非定常CFD解析を実施し、閉塞部周囲の複雑な流動パターンや損失要因とメカニズムの解明、流体力変動について論じた。さらに、ノズル閉塞方法がタービン効率や流体力変動に与える影響についても考察した。本章で得られた知見と結論は以下の通りである。

1. 本章の結果は、異なるソルバによって得られた第3章の結果と流れ場や流体力変動において共通の特徴を示すことが確認された。
2. 超音速部分挿入タービン段では、閉塞部の存在により周方向に極めて強い分布が表れる。特にノズル - 初段動翼間での非一様性が強く、閉塞部開始端側ではノズル流れの膨脹による強い加速（静圧低下）が表れるという第3章と同様の特徴が確認された。一方、タービン後段では圧力の周方向分布はおおよそサインカーブを描く。
3. ノズル - 初段動翼間の閉塞部背後では、動翼回転方向に進む周方向流れが表れる。
4. ノズルを閉塞することによって、タービン出口におけるエントロピーは閉塞しない場合の1.5倍程度に増加する。付加的なエントロピー生成の大部分は初段部で発生し、閉塞部侵入時の動翼でのインシデンス増加や強い衝撃波の負圧面への衝突による大規模な剥離、閉塞部通過中の動翼前後での周方向流れと動翼流路内滞留ガスとのミキシングがこのような損失を生み出す。
5. 初段動翼では変動流体力に極めて強い非定常性が表れ、閉塞部侵入時は周方向流体力が増加し、第3章と同様の特徴が確認された。また、過去に蒸気タービンで報告されたのと同様に、広い周波数範囲に変動成分のピークが表れる。一方、2段動翼の変動流体力はおおよそサインカーブを描き、閉塞部通過周波数成分が支配的となる。

6. 閉塞方法の差によって、閉塞部背後の周方向流れや損失生成に差が表れた。ノズルを中実モデルとして閉塞した方がノズル入口を閉塞する場合よりもミキシングによる損失源が減少し、約 1.7Pt タービン効率が高い結果を得た。
7. 閉塞方法によって変動流体力の様子を差が表れた。初段動翼では中実モデルによって閉塞した方が多くの周波数成分において振幅が低下する。しかし、いくつかの低周波成分では中実モデルの振幅の方が大きく、どちらが優位であるかを断言することは困難である。一方、2 段動翼では、わずかではあるもののほぼすべての周波数成分で中実モデルの振幅の方が小さく、中実モデルによる閉塞の方がノズル上流を閉塞する方法よりも優位であると考えられる。

本章の結果も第 3 章と同様にその議論は 2 次元流れ場に限定されているが、第 3 章で得られた知見に加え、タービン後段部までを含めたより詳細なフローパターンや損失源、閉塞方法が性能に与える影響について知見を得ることができたと考えられる。次章では、汎用 CFD ソフトによって議論を 3 次元に拡張し、流れ場の 3 次元性について議論する。