循環小数について

工藤　あい李*，吉井　洋二**
（2016年３月３日受理）

Airi KUDO, Yoji YOSHII

Repeating Decimals

Repeating decimals are taught in elementary, junior high and high school. However, they are usually not taught in university mathematics. We should learn the deep theory and some mystery of repeating decimals, and use them for teaching in several stages. We introduce some interesting examples of repeating decimals, and explain the mathematical background.

KEYWORDS: repeating decimal, purely periodic, delayed-repeating, primitive root, Artin conjecture, Riemann conjecture, cyclic number, cyclic group, Fermat's theorem, Euler's theorem, Midy's theorem

1　はじめに

循環小数は、たとえ教わらなくても、$\frac{1}{3}$や$\frac{1}{7}$のように、いつまでも続く割り算として、小学生も体験することである。その後、分数を小数で表すとき、どんな分数なら循環し、どんな分数なら有限で止まるか、曖昧なままになる。たとえ大学生になったとしてもそれを解明せず、そのまま数学とは離れてしまう（おそらく数学者にでもならない限り、この問題を追及することはないように思える）。ところが、平成24年度より新学習指導要領の高校数学Ａから、分母の素因数が2か5しかないときに限り、有限小数になることを学習するようになった。

出来ることなら､もう少しこの学習を深めたい。たとえば小数第3位から循環するのはどういうときか？　分子は関係ないのか？　循環の周期はどういう性質をもつのか等、まだまだはっきりしたいところがたくさんある。高校では時間に限りがあるので、大学の初等整数論（または群論）などの授業で取り上げるべきだと考える。本論文では、学校数学で役立つと思われる、循環小数の性質、周期の特性についてまとめ、不思議な循環小数を紹介する。さらに、巡回数や、ミディの定理について説明する。最後に、未解決と思われる単純な問題について述べる。これらの理論を理解することは、小・中・高で扱う小数の指導に役立つものと確信する。本稿では、大学での数学教育という立場から、大学教員向けの説明も加えている。

本論文は、[2] や、古典的名著 [1]（目次にないので見逃しがちだが、p.57 の附記、循環小数）を参考にしているが、これらの内容をより掘り下げたものであり、循環小数について、本稿のような丁寧かつ深い解説は他にないと思われる。

記号と言葉　整数 a, b に対して、(a, b) は a と b の最大公約数を表すものとする。また、a が

＊岩手大学教育学部、＊＊岩手大学教育学部教授

bの約数であることを$a|b$で表す。既約分数$\frac{a}{b}$とは、aを整数、bを自然数とし、aとbが互いに素、即ち、$(a, b) = 1$であることとする。

２　純循環小数

小数第１位から循環が始まる小数を**純循環小数**（purely periodic decimal）、その循環節の長さを**周期**（period）と言う。例えば、$1/3 = 0.333\cdots = 0.\overline{3}$や$1/7 = 0.\overline{142857}$は純循環小数であり、1/3の周期は1で、1/7の周期は6である。

整数でない既約分数$\frac{a}{b}$（即ち$b \neq 1$）において、

定理１　$(b, 10) = 1 \iff \frac{a}{b}$は純循環小数

（分子aは関係ない！）が成り立つ。

（$\frac{a}{b}$が純循環小数になるとき、単に$\frac{a}{b}$は純循環小数であると言うことにする。）この定理の証明はどの本にも書いてあるが、今後の展開の理解のため、さらには、群における位数という概念の有用性を鑑賞してもらうため、ここに証明を述べる。

準備として、$\mathbb{Z}_b$をbを法とする、整数$\mathbb{Z}$の剰余加法群とし、$\mathbb{Z}_b^\times$を$\mathbb{Z}_b$のユニットが作る乗法群とする。特に、$\mathbb{Z}_b^\times$の位数（$\mathbb{Z}_b^\times$の元の個数のこと）はオイラー関数φを使うと$\varphi(b)$である。また、$\mathbb{Z}_b^\times$の元x（代表元として通常使うバーは省略する）の位数とは、$x^k = 1$となる最小の自然数kのことである。（kは常に$\varphi(b)$の約数になる。）

証明）まず、$(b, 10) = 1$とすれば、$10 \in \mathbb{Z}_b^\times$である。$k$を10の位数とする。さて、

$$\begin{aligned} a &= q_0 b + r_0 \\ 10r_0 &= q_1 b + r_1 \\ 10r_1 &= q_2 b + r_2 \\ &\cdots\cdots \\ 10r_i &= q_{i+1} b + r_{i+1} \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

（但し、q_0は整数、$q_i\ (i \geq 1)$は自然数、$r_i\ (i \geq 0)$は0以上でbより小さい自然数である。）

このように、余りを10倍して、bで割った余りを求めることを繰り返して行く。（これは通常の割り算操作に他ならない。そして、$0 \leq r_i < b$だから、b回以下の操作で同じ余りが出る。これが循環小数になる理由である。）これらをbでの合同式で書けば、

$$\begin{aligned} a &\equiv r_0 \\ 10r_0 &\equiv r_1 \\ 10r_1 &\equiv r_2 \\ &\cdots\cdots \qquad (*) \\ 10r_i &\equiv r_{i+1} \end{aligned}$$

となり、$10r_0 \equiv r_1, 10^2 r_0 \equiv r_2, \cdots, 10^{i+1} r_0 \equiv r_{i+1}, \cdots$を得る（余りの列は、初項$r_0$, 公比10の等比数列である）。ここで$10^k \equiv 1$だから、$r_k = r_0$となり、$r_{k+1} = r_1$となって、以下余りは繰り返される。従って、$\frac{a}{b} = q_0.q_1q_2\cdots q_kq_1q_2\cdots q_k = q_0.\overline{q_1q_2\cdots q_k}$となる。

故に、(10, b) = 1 ならば、aが何であっても$\frac{a}{b}$は純循環小数となり、その周期もaに関係なく、$\mathbb{Z}_b^\times$での10の位数に一致する。

逆に、$\frac{a}{b}$が周期kの純循環小数ならば、$10^k\frac{a}{b} - \frac{a}{b}$は、小数部分が消えるので、整数$m$となる。よって、$(10^k - 1)a = mb$となり、$\frac{a}{b}$が既約であることから、$b \mid 10^k - 1$を得る。ここで、$10^k - 1 = 99\cdots9$より、$b$は2の倍数でも5の倍数でもない。よって、$(b, 10) = 1$となる。　□

この証明で、「$\frac{a}{b}$が純循環小数$\iff b$は$99\cdots9$の約数」ということも分かった。もちろん、これは10と互いに素な数bの性質であって、小数の話を絡める必要はない。2と5以外の素数、あるいは2と5を因数に含まない整数は、必ず$99\cdots9$の約数なのである。

さらに、上の証明で、$10^k r_0 \equiv r_0$となるから、$(10^k - 1)r_0$をbで割った商がちょうど循環節$q_1q_2\cdots q_k$になることが分かる。即ち、

定理２　$(b, 10) = 1$ならば、$q_1 q_2 \cdots q_k \times \mathrm{b} = (10^k - 1) r_0$となる。　□

例えば、$b = 7, r_0 = 1$ のとき、$142857 \times 7 = 999999$ である。

３　混循環小数

小数第 m 位（$m \geq 2$）から循環するものを**混循環小数**と言う。（英語ではこのような言い回しはせず、delayed-repeating decimal と言う。）有限小数や整数も、後尾に$999\cdots$を付けることで循環小数と見なせるが、ここでは、有限小数は混循環小数ではないとする（整数も純循環小数ではないとする）。

混循環小数は、10を何回か掛けることで純循環小数になるので、高等数学的には同じようなものであるが、小・中学生にはかなり違う小数に見えると思う。そこで、混循環小数について、純循環小数との違い、さらには有限小数との違いをはっきりさせておく。

定理３

(i) $\dfrac{a}{b}$は小数第 m 位（$m \geq 2$）から循環 $\Longleftrightarrow$ $b = 2^s \cdot 5^u \cdot b',\ (b',\ 10) = 1,\ b' \neq 1,\ \max(s, u) = m - 1$

(ii) $\dfrac{a}{b}$は小数第 m 位で止まる $\Longleftrightarrow$ $b = 2^s \cdot 5^u,\ \max(s, u) = m$

証明）(i): 既約分数$\dfrac{a}{b}$が小数第 m 位（$m \geq 2$）から循環するならば、$10^{m-1}\dfrac{a}{b}$は純循環小数である。

よって定理1 より、$(b', 10) = 1$ となる整数$b' \neq 1$が存在して、$2^s \cdot 5^u \cdot b'$と書ける。もし、s も u も $m - 1$より小さいならば、ある$m' < m$が存在して、$\dfrac{a}{b}$は小数第 m' 位から循環することになる。故に、s か u は $m - 1$に等しくなければならない。

逆に、$b = 2^s \cdot 5^u \cdot b'$が上の条件を満たせば、$10^{m-1}\dfrac{a}{b}$を約分すると、分母が$\mathrm{b}'$となる。よって定理１より純循環小数である。従って、$\dfrac{a}{b}$は、小数第 m 位から循環する。

(ii): $\dfrac{a}{b}$が小数第 m 位で止まるならば、定理１より分母に2と5以外の素因数があってはならない。故に$b = 2^s \cdot 5^u$となり、$\max(s, u) = m$である。

逆に、$b = 2^s \cdot 5^u$が上の条件を満たせば、$10^m \dfrac{a}{b}$は整数になる。故に$\dfrac{a}{b}$は小数第 m 位で止まる有限小数である。　□

４　不思議な循環小数

$\dfrac{1}{7} = 0.\overline{142857}$の周期は6 であり、小・中学生にとっては結構長い。大人も含めて、周期が6より大きい割り算の経験がない人も多いと思う（現実の世界では小数第3 位くらいで四捨五入するのが常なので）。少年時代のガウスは、$\dfrac{1}{71}$の周期が35であることを発見した。71より身近な$\dfrac{1}{49}$を、是非皆さんも計算してみて欲しい。

まず、周期が42にもなることに驚くだろう。次にその数字の並びに注意して欲しい。実際、

$$\frac{1}{49} = 0.\overline{020408163265306122448\,979591836734693877551}$$

となる。自分で計算しなければ、気づかず通り過ぎるところだが、よく見ると、最初の2, 4, 8, 16, 32まで、馴染みある数列が並んでいる。この後は規則がないように見えるがどうだろう？

実は、$\dfrac{2}{10^2} + \dfrac{4}{10^4} + \dfrac{8}{10^6} + \dfrac{16}{10^8} + \dfrac{32}{10^{10}} + \dfrac{64}{10^{12}} + \dfrac{128}{10^{14}} + \cdots$ なる無限級数を考えると、$0.020408163265\cdots$ となることが分かる（最後の65は64に次の128の1が足されて65になっている）。これが等比級数であることに気づけば、高校生も習う公式で、この極限は

$$\frac{\frac{2}{10^2}}{1-\frac{2}{10^2}}=\frac{2}{100-2}=\frac{1}{49}$$ となる。

次に、111111111 ÷ 9を計算してみよう。不思議なことに、答は割り切れて12345679となる（8が飛んで9になる）。この現象を分数で表せば、$\frac{1}{9}$= 0.111･･･ を9つ周期に分けて、それぞれを9で割ると、$\frac{1}{81}=0.\overline{012345679}$として良さそうである。

あるいは、$\frac{1}{10^2}+\frac{2}{10^3}+\frac{3}{10^4}+\cdots+\frac{8}{10^9}+\frac{9}{10^{10}}+\frac{10}{10^{11}}+\frac{11}{10^{12}}+\cdots$ なる無限級数を考えると、0.012345679･･･ となることが分かる（10のところで繰り上がるから）。

これは等比級数ではないが、微分（ダッシュ）を使うことで、

$x^2+2x^3+3x^4+\cdots=x^2(1+2x+3x^2+\cdots)=x^2(x+x^2+x^3+\cdots)'=x^2\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{x^2}{(1-x)^2}$ に

$x=\frac{1}{10}$を代入すれば、上の無限級数の極限は$\frac{1}{81}$となる。

余裕があれば、111111111111111111 ÷ 99を計算してから､同様の考察をしてみるのもよいだろう。

余談だが、自然数をずっと並べた小数

0.123456789101112131415 ･･･

はチャンパーノウン定数（Champernowne constant）と呼ばれ、これは超越数かつ正規数（数字が一様に現れる）であることが知られている。

最後に、$\frac{1}{89}$= 0.011235･･･ について調べよう（89は素数）。フィボナッチ数列が現れているように見えるが、実際は、$\frac{1}{89}=0.\overline{01123595505617977528089887640449438202247191}$（周期44）となる。上の考察のように、繰り上がることを考えると、やはりフィボナッチ数列から、

$\frac{0}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\frac{2}{10^4}+\frac{3}{10^5}+\frac{5}{10^6}+\frac{8}{10^7}+\frac{13}{10^8}+\frac{21}{10^8}+\cdots$ のように出来ているのではないかと思われる。そこでこの極限を調べてみよう。

まず、次のようなフィボナッチ数列を係数とする母関数 $F(x)$ を考える：

$F(x)=x^2+x^3+2x^4+3x^5+\cdots$

このとき、$F(x)+xF(x)=(x^2+x^3+2x^4+3x^5+\cdots)+(x^3+x^4+2x^5+3x^6+\cdots)=x^2+2x^3+3x^4+5x^5+\cdots=\frac{1}{x}(x^3+2x^4+3x^5+5x^6+\cdots)=\frac{1}{x}(F(x)-x^2)$ より、

$\left(1+x-\frac{1}{x}\right)F(x)=-x$ だから、$F(x)=\frac{x^2}{1-x-x^2}$

となる。今問題の極限は $F\left(\frac{1}{10}\right)$ であり、$F\left(\frac{1}{10}\right)=\frac{1}{100-10-1}=\frac{1}{89}$ を得る。

このように、しっかりとフィボナッチ数列が現れているのに、繰り上げ操作が積もり積もって、44回で繰り返しになってしまうというのは真に不思議である。

因みに、$F\left(\frac{1}{100}\right)=\frac{1}{10000-100-1}=\frac{1}{9899}$

は、周期が468になり、フィボナッチ数は55まで大丈夫である：

$\frac{1}{9899}=0.000101020305081321345590 46\cdots$

5　巡回数

純循環小数$\frac{1}{b}$の分母 b が素数 p ならば、周期 k は $\varphi(p)=p-1$ の約数だが、$k=p-1$（即ち、10が p の原子根）のとき、$\frac{1}{b}$の循環節を巡回数と呼ぶことがある。典型的な例は、142857である。この名前は、

$1/7=0.\overline{142857}$

$3/7=0.\overline{428571}$

$2/7=0.\overline{285714}$

$6/7=0.\overline{857142}$

$$4/7 = 0.\overline{571428}$$
$$5/7 = 0.\overline{714285}$$

から分かるように、142857 に1 から6 までのどの数を掛けても、その結果は単に数字を回せばよいことに由来する（定理２参照）。

この数が$\frac{1}{7}$から来ていることを隠して、いくつかの計算を即座に計算してみせる例などがある。例えば、142857に6を掛けたら？　もちろん答は857142である。では、142857に13を掛けたら？答は、$10^6 - 1 = 142857 \times 7$だから、$142857 \times 13 = (10^6 - 1) \times \frac{13}{7} = (10^6 - 1) \times 1.\overline{857142} = 1857142 - 1 = 1857141$となる。142857に25を掛けたら？　答は、$14285725 = (10^6 - 1) \times 3.\overline{571428} = 3571428 - 3 = 3571425$というように。

巡回数は他にないか？　$\frac{1}{17}$や$\frac{1}{19}$の循環節は巡回数ある。巡回数を生み出す素数はいくらでも見つかっている：p =7, 17, 19, 23, 29, 47, 59, 61, 97, 109, 113, 131, ⋯ だが、このような素数が無限にあるかどうかは未解決問題である。これはアルティン予想と呼ばれ、リーマン予想が正しければ正しいことが知られている。（正確には、10 に限らず、「m が平方数でなければ、m を原始根とする素数は無限に存在する」とアルティンは予想した。）

$\frac{1}{13}$の循環節は巡回数ではないが、初等群論的には、こちらの方がよい教材となる。これについて、群の基本用語の説明なしで述べておく。まず、$G := \mathbb{Z}_{13}^{\times}$ における10 の位数は6である。そこで、G の部分群 $H := \langle 10 \rangle$ について詳しく調べると、$H = \{1, 10, 9, 12, 3, 4\}$ となる。そして、H によるコセット分解は、$2H = \{2, 7, 5, 11, 6, 8\}$ から $G = H \sqcup 2H$ となる。循環小数を調べると、

$$1/13 = 0.\overline{076923}$$
$$10/13 = 0.\overline{769230}$$
$$9/13 = 0.\overline{692307}$$
$$12/13 = 0.\overline{923076}$$
$$3/13 = 0.\overline{230769}$$
$$4/13 = 0.\overline{307692}$$

となるので、自然数076923（10万の位に0があると思って）は、10倍、9倍、12倍、3倍、4倍に関して巡回する。同様に、

$$2/13 = 0.\overline{153846}$$
$$7/13 = 0.\overline{538461}$$
$$5/13 = 0.\overline{384615}$$
$$11/13 = 0.\overline{846153}$$
$$6/13 = 0.\overline{461538}$$
$$8/13 = 0.\overline{615384}$$

となるので、自然数153846は、$\frac{7}{2}$倍、$\frac{5}{2}$倍、$\frac{11}{2}$倍、3倍、4倍に関して巡回する。

10の位数 k が何であろうが、それは $n = |\mathbb{Z}_b^{\times}|$ の約数であり、巡回するグループは$\frac{n}{k}$個に別れる。$b = 13$ のときは、$\frac{12}{6} = 2$ 個に別れたわけである。

６　ミディの定理

1836年、E. Midy は、2, 3, 5 以外の素数 p に対して、$\frac{a}{p}$の周期が偶数ならば、循環節を２つに分けて足すと99 ⋯ 9 になることを示した。

例１　前節までに登場した純循環小数はどれも例として採用できるが、具体的に例えば、

(1) $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$（周期6）

$142 + 857 = 999999$

(2) $\frac{5}{7} = 0.\overline{714285}$（周期6）

$714 + 285 = 999999$

(3) $\frac{1}{11} = 0.\overline{09}$（周期2）　$0 + 9 = 9$

(4) $\frac{2}{13} = 0.\overline{153846}$（周期6）

$153 + 846 = 999999$

(5) $\frac{1}{17} = 0.\overline{0588235294117647}$（周期16）

$5882352 + 94117647 = 99999999$

(6) $\dfrac{15}{19} = 0.\overline{789473684210526315}$（周期18）

$789473684 + 210526315 = 999999999$　などである。

Midy の定理は分母が素数に限らず、次のように一般化できる。

定理４　純循環小数$\dfrac{a}{b}$の周期が偶数$k = 2\ell$とする。このとき、

「$10^{\ell} \equiv -1 \bmod b \iff$ 循環節を２つに分けて足すと99･･･9 になる」

が成り立つ。

証明） まず、($\Longrightarrow$) を示す。$\dfrac{a}{b} = c.q_1q_2\cdots q_k$ とするとき、$q_1\cdots q_{\ell} + q_{\ell+1}\cdots q_{2\ell} = 99\cdots9$ を示せばよい。第2 節の合同式 (＊) に、
$10^{\ell} \equiv -1 \bmod b$ を使えば、

$$r_{\ell+1} \equiv -r_1$$
$$r_{\ell+2} \equiv -r_2$$
$$\cdots\cdots$$
$$r_k \equiv -r_{\ell}$$

となり、$r_i + r_{\ell+i} \equiv 0$ ($1 \le i \le \ell$) を得る。ここで、$0 < r_i + r_{\ell+i} < 2b$ だから、$r_i + r_{\ell+i} = b$ ($1 \le i \le \ell$) を得る。故に、

$$q_i + q_{\ell+i} = \frac{10r_i - r_{i+1}}{b} + \frac{10r_{\ell+i} - r_{\ell+i+1}}{b}$$
$$= \frac{10(r_i + r_{\ell+i}) - (r_{i+1} + r_{\ell+i+1})}{b}$$
$$= 10 - 1 = 9$$

となる。

次に、($\Longleftarrow$) を示す。定理2 より、$q_1q_2\cdots q_k \times b = (10^k - 1)r_0 = (10^{\ell} + 1)(10^{\ell} - 1)r_0$となる。ここで、等式 $q_1q_2\cdots q_k = 10^{\ell}q_1\cdots q_{\ell} + q_{\ell+1}\cdots q_{2\ell} = q_1\cdots q_{\ell} + q_{\ell+1}\cdots q_{2\ell} + (10^{\ell} - 1)q_1\cdots q_{\ell}$ と $q_1\cdots q_{\ell} + q_{\ell+1}\cdots q_{2\ell} = 10^{\ell} - 1$から、$q_1q_2\cdots q_k$ は$10^{\ell} - 1$ で割り切れる。故に、$b \mid (10^{\ell} + 1)r_0$ となるが、$(r_0, b) = 1$ だから、$b \mid 10^{\ell} + 1$を得る。　□

Midy の定理は、$x := 10^{\ell}$と置くと、定理４より、$x \equiv -1 \bmod p$ を示せばよい。ところが、$\mathbb{Z}_p^{\times}$は巡回群（ガウスの定理）で、$x^2 \equiv 1$ かつ $x \not\equiv 1 \bmod p$ なので、$x \equiv -1 \bmod p$ を得る。（巡回群において、$x^2 = 1$となる元は高々2個である。）

同様に考えると、$\mathbb{Z}_b^{\times}$が巡回群であれば定理４が使えるわけである。一般に、

定理５　$\mathbb{Z}_n^{\times}$が巡回群$\iff n \in \{2, 4, p^k, 2p^k \mid p$ は奇素数$\}$

が知られている。従って、b が5 以外の奇素数の巾で、周期が偶数なら定理４が成り立つのである。

例えば、$\dfrac{1}{49}$の周期は偶数42で、第4節で示した循環節を見ると、確かに

020408163265306122448
＋979591836734693877551
＝999999999999999999999 となっている。

では、$(b, 10) = 1$の既約分数$\dfrac{a}{b}$の周期が偶数で、b が素数または素数べきでないのに、循環節を２つに分けて足すと99･･･9 になる例はあるか？

例えば、$\dfrac{1}{21} = 0.\overline{047619}$ の周期は6だが、$047 + 619 = 666$ である（これも興味深いが)。計算すると、$10^3 \equiv 13 \not\equiv -1 \bmod 21$ である。

分母が素数巾でない例はないかと考えていたところ、白百合学園高等部での循環小数についての研究授業において、分母77 を考察した生徒がいた（詳しくは[3] を参照)。実際、$\dfrac{1}{77} = 0.\overline{012987}$ や$\dfrac{25}{77} = 0.\overline{324675}$ は周期6 で、$12 + 987 = 324 + 675 = 999$ となる。計算すると、確かに$10^3 \equiv -1 \bmod 77$ である。

既に定理５により$\mathbb{Z}_{77}^{\times}$は巡回群でないことは分かっているが、果たしてどんな群だろう？　これはアーベル群の初歩としてもよい教材なので、前節同様、群の基本用語や記号の説明なしで述べておく。まず、位数は$(7-1)(11-1) = 60$ である。2 の位数を調べると30で、$76 \equiv -1 \bmod 77$ は巡回部分群 $\langle 2\rangle$ に含まれないので、$\mathbb{Z}_{77}^{\times} = \langle 2\rangle \times \langle -1\rangle \cong \mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{Z}_2$ となる。$\langle 10\rangle$ を調べると位数は6

で、〈－１〉を含む部分群である。一方、$\mathbb{Z}_{21}^{\times}$を調べると、$\mathbb{Z}_{21}^{\times} = \langle 2\rangle \times \langle -1\rangle \cong \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2$ となる。$\langle 10\rangle$ は位数6で、〈－１〉を含まない部分群である。

比較的最近の論文[4]によれば、２つの素数 c, d（どちらも10と互いに素とする）の周期が、それぞれ$2^s r$, $2^s t$（但し、s, r, t は自然数で、r, t は奇数）であれば、$b = cd$ について定理４が成り立つ。例えば、11・13 = 143 で、11の周期は2で、13 の周期は6だから、上の条件を満たす。実際、$\frac{1}{143} = 0.\overline{006993}$（周期6）で6 + 993 = 999 となる。

また、11・19 = 209 で、19 の周期は18だから、上の条件を満たす。実際、

$\frac{1}{209} = 0.\overline{004784688995215311}$（周期18）で

4784688 + 995215311 = 999999999 となる。

あるいは、7・13 = 91 で、7 も13 も周期6 だから、上の条件を満たす。実際、$\frac{1}{91} = 0.\overline{010989}$（周期6）で10 + 989 = 999 となる。（[4] では、さらに一般化された定理が証明されている。）

７　未解決問題

$(b, 10) = 1$ なる既約分数$\frac{a}{b}$の周期を k とする。

もし $(b, 3) = 1$ ならば、

$X := 1 + 10 + 10^2 + \cdots + 10^{k-1} = 11\cdots1$

は常に $X \equiv 0 \bmod b$ である。実際、$(1-10)X = 1-10^k \equiv 0$ だから、$(b, 3) = 1$ ならば、9 が $\mathbb{Z}_b$で可逆なので $X \equiv 0$を得る。

さて、$X \equiv 0 \bmod b$ とはどういう意味をもつか考えてみよう。もちろんこれはb が11 ⋯ 1(1がk 個)の約数であることと同値である。またこれは、$X\frac{a}{b}$が整数になることとも同値だから、「$\frac{a}{b}$の小数部分の位を10倍することで1 つずつずらして、k 個の純循環小数を作ってから、それらを全部足すと、小数部分が999⋯ になる」ことと同値である。これはごく自然な問題であり、とても興味深い。b が3の倍数でなければ必ずこの性質があるというのも面白いが、果たして b が3の倍数でも成り立つのだろうか？

次の補題は、便利な判定法となる。

補題１　$X \equiv 0 \bmod b \iff$ 循環節の各位の和が9の倍数

証明） まず、($\Longrightarrow$) を示す。定理２より、$q_1q_2\cdots q_k \times b = (10^k - 1)r_0 = (10-1)Xr_0$ より、$9 \mid q_1q_2\cdots q_k$ を得る。よって $q_1 + q_2 + \cdots + q_k$ は9の倍数となる。

次に ($\Longleftarrow$) は、逆に辿って、$9 \mid q_1q_2\cdots q_k$ はよいので、$q_1q_2\cdots q_k = 9m$ と置けば、$mb = Xr_0$ となる。ここで、$(r_0, b) = 1$ だから $b \mid X$ を得る。 □

分母が13の場合、２つのグループに分かれると第5節で述べたが、例えば、$\frac{1}{13} = 0.\overline{076923}$は7 + 6 + 9 + 2 + 3 = 27, $\frac{2}{13} = 0.\overline{153846}$ は1 + 5 + 3 + 8 + 4 + 6 = 27 となり、どちらも9 の倍数である。

さて、$\frac{1}{21} = 0.\overline{047619}$ の各位の和は27だから、b が3の倍数のときも成り立つ例はある。ところが、$\frac{1}{3} = 0.\bar{3}$, $\frac{1}{9} = 0.\bar{1}$, $\frac{1}{33} = 0.\overline{03}$ などは駄目である。

補題１を使って、かなり大きな b に関しても、計算サイトなどを使って調べることが出来た。例えば、$\frac{1}{3\cdot 17} = \frac{1}{51} = 0.\overline{0196078431372549}$（周期16）の各位の和は69 = 3・23 で、9 の倍数ではない。

最初は、3×(素数 p) の場合に限って調べたが、未だその規則が分からない。p = 7, 13, 19, 31, 37, 43, 61, 67, 97, ⋯ と続くが、第5節で述べたアルティン予想に現れる素数列とは違う。これらは、$6m$+1 型の素数だが、すべての$6m$+1 型素数が現れているわけではない。さらに、9 の倍数や3 × (素数) × (素数) でも成り立つ例が見つかった。現在まで調べた結果を表にまとめて終わりにする。

b	21	39	57	93	111	129
素因数	3・7	3・13	3・19	3・31	3・37	3・43
周期	6	6	18	15	3	21
$1/b$の各位和	27	18	81	54	9	90

b	147	171	183	201	231	273
素因数	$3 \cdot 7^2$	$3^2 \cdot 19$	3・61	3・67	3・7・11	3・7・13
周期	42	18	60	33	6	6
$1/b$の各位和	189	81	270	144	18	18

b	291	309	327	357	381	453
素因数	3・97	3・103	3・109	3・7・17	3・127	3・151
周期	96	34	108	48	42	75
$1/b$の各位和	432	126	486	216	198	306

b	471	483	489	507	・・・
素因数	3・157	3・7・23	3・163	$3 \cdot 13^2$	・・・
周期	78	66	81	78	・・・
$1/b$の各位和	315	288	360	342	・・・

注意１　例えば、各位和が27なら

2.　7
0.　2　7
+　0.　0　2　7
…

のような足し算を続けることで、$2.999\cdots = 3$ であり、これは$\frac{1}{21}+\frac{10}{21}+\frac{16}{21}+\frac{13}{21}+\frac{4}{21}+\frac{19}{21}$にも等しいことが分かる。

各位和が189だとしても、

18.　9
1.　8　9
0.　1　8　9
+　0.　0　1　8　9
…

のような足し算を続けることで、$20.999\cdots = 21$ になる。

注意２　表のbにおいて、既約分数$\frac{a}{b}$の循環節の各位の和はどれも9の倍数となるが、各位の和は一定でない。例えば、$\frac{1}{39} = 0.\overline{025641}$の各位和は18だが、$\frac{17}{39} = 0.\overline{435897}$の各位和は36である。

謝辞　岩手県立大学、村木尚文先生、盛岡大学、冨江雅也先生、岩手大学教育学研究科，田村祐太君、そして白百合学園、伊藤潤一先生から多くの助言を頂いた。ここに感謝の意を表する。

参考文献

[1]　飯高茂,「環論, これはおもしろい」, 共立出版, 2013.

[2]　高木貞治,「初等整数論講義」，共立出版（改訂第2版），1985.

[3]　工藤あい李,「群論およびその周辺の教育的考察」，岩手大学教育学部卒業論文，2016.

[4]　Harold W. Martin, "Generalizations of Midy's theorem on repeating decimals", Elec. J. of com. num. theory 7, #A03, 2007.