岩手大学教育学部研究年報　第76巻（2017. 3）31 ～ 50

高校における数学学習のつまずきと支援に関する研究
－「図形と計量」の学習内容の理解に焦点を当てて－

中　村　好　則*

（2016年8月8日受付，2017年1月12日受理）

1．背景と目的

中央教育審議会答申「新しい時代にふさわしい高大接続の実現に向けた高等学校教育，大学教育，大学入学者選抜の一体的改革について（平成26年12月）」では「高等学校の進学率が98% に達する中で，高校生の進路が多様化し，教育課程や授業内容の在り方も多岐にわたり，高等学校教育として生徒に共通に身に付ける学力が確保されていないことも大きな課題となっている（p.5，下線は筆者）」ことが述べられている。高校数学においては，数学Ⅰが必履修科目であり，その内容を生徒に共通に身に付けさせることが必要である。しかし，数学Ⅰに関する全国的な学力調査は，平成17年度の教育課程実施状況調査以降は行われておらず，生徒が学習内容を身に付けているかどうかの状況が十分に検討されているとは言い難い。数学学習におけるつまずきと支援を検討するためには，学習内容の理解の様相をできるだけ具体的に把握する必要がある。平成31（2019）年度には高等学校基礎学力テスト（仮称）が実施される予定ではあるが，実施までにはまだ期間がある。昨年度は，中村（2016b）が必履修科目である数学Ⅰの「二次関数」の学習内容の理解の様相について分析し報告している。そこで，本研究では，必履修科目である数学Ⅰの「図形と計量」の学習内容の理解に焦点を当て，高校卒業後の学生の様相を明らかにし，（ⅰ）高校の数学学習におけるつまずきと支援を考察するための基礎的な資料を得ることと，（ⅱ）「図形と計量」の指導への示唆を得ることを目的とする。

2．研究方法

公立短期大学校の第1学年（2学級）の学生50名（男36名，女14名）を対象に，質問紙調査と学力調査からなる 2段階の調査を行った。研究対象を高校生ではなく学生としたのは，高校教育として生徒に共通に身に付けさせる学力が身に付いているかどうかを見るためには，高校卒業後の学生の学習内容の理解の様相を検討する必要があると考えたからである。対象とする学生は，数学的な知識や技能を必要とする工業系の学科（建築科，情報技術科）に所属してい

＊　　岩手大学教育学部

る[1)]。対象とする学生が卒業した高校の学科（平成28年度4月下旬調査）は，普通科（62%），総合学科（16%），工業科（14%），商業科（4%），農業科（4%）である（図1）。普通科の高校は進学校ではなく，就職希望者が多い高校からの進学であり，高校が所在する県では高校入試において中位に位置する高校からの進学者が多い。高校数学の科目の履修率（平成28年度4月下旬調査）は，数学Ⅰ（100%），数学Ⅱ（92%），数学Ⅲ（46%），数学A（98%），数学B（64%），数学活用（4%）である（図2）。これらから対象とした公立短期大学校の入学者学力レベルは所在する県の中位の高校のレベルと考えられる。

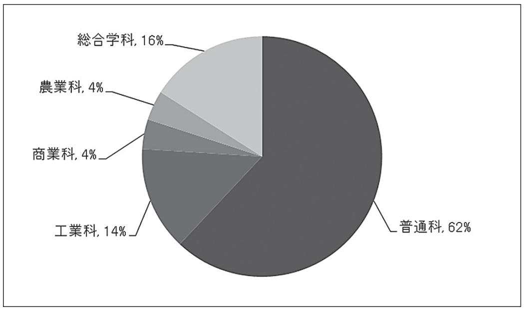


図1　卒業高校の学科

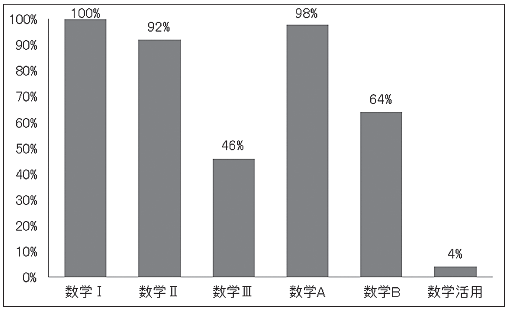


図2　高校数学の履修科目

1）第1段階調査

第1段階調査は，数学に対する学生の意識と数学Ⅰの「数と式」「図形と計量」「二次関数」「データの分析」の4つの学習内容についての理解の状況を概括的に知り，第2段階調査の内容を検討するための予備調査である。

(1) 質問紙調査（実施日：2016年4月18日，19日　第2校時）

中学校と高校の数学に関する意識調査である。質問紙調査は学力調査直前の15分間で実施した。1学級（建築科）を18日，もう一方の学級（情報技術科）を19日に実施した。

(2) 学力調査（実施日：2016年4月18日，19日　第2校時）

学力調査は，中学校卒業程度認定試験問題（2015年）[2)]と高校卒業程度認定試験問題（2015年第2回）[3)]を使用し，それぞれ中学校30分，高校40分で実施した。これらの問題はマークシート形式の問題（高校の問題は，資料1の問①から問⑳，問題番号は本研究のために通し番号に修正した）であるが，記述式で実施した。1学級（建築科）を18日，もう一方の学級（情報技術科）を19日に実施した。第1段階の学力調査にこれらの問題を使用したのは，これらが中学校或いは高校を卒業した者と同程度以上の学力があるかどうかを認定するための試験であり，中学校と高校の数学Ⅰの学習内容の習得状況を概括的に捉えることができると考えたからである。

2）第2段階調査

第2段階調査は，「図形と計量」についての学生の意識と学習内容の理解について詳細に検討するために，第1段階調査の結果をもとに内容を検討し作成した。

(1) 質問紙調査（実施日：2016年4月25日，26日　第2校時）

「図形と計量」に関する意識調査である。質問紙調査は，学力調査直前の15分間で実施した。

1学級（建築科）を 25日，もう一方の学級（情報技術科）を 26日に実施した。

(2) 学力調査（実施日：2016年4月25日，26日　第2校時）

「図形と計量」の学習内容に関する調査である。教科書の例題等で扱われる基本的な問題と「図形と計量」で学習する公式を問う問題で構成し，問題数は 35問（資料2の問①から問㉟）である。実施時間は 50分である。1学級（建築科）を 25日，もう一方の学級（情報技術科）を 26日に実施した。

3. 結果と考察

1）第1段階調査の結果と考察

(1) 質問紙調査（第1段階）の結果と考察

中学校と高校の時を振り返って，以下の質問㋐から㋕の 6項目に 4件法（①そう思う，②だいたいそう思う，③あまりそう思わない，④そう思わない）で回答するように依頼した。

㋐「数学が得意であったか（得意）」（図3）

肯定的回答（「①そう思う」と「②だいたいそう思う」と回答，以下同様）の割合は，中学校の時（64%）よりも高校の時（54%）が少ない（図3）。つまり，中学校数学よりも高校数学を得意だったと考える学生は少ないことが分かる。これは，高校数学の内容が中学校数学の内容より抽象的になり難しくなったことが考えられる。

㋑「数学が好きであったか（好き）」（図4）

肯定的回答の割合は，中学校の時（72%）よりも高校の時（64%）が少ない（図4）。つまり，中学校数学よりも高校数学が好きだったと考える学生が少ないことが分かる。これは，高校数学の内容が難しくなり，好きでなくなったことが考えられる。

㋒「数学は楽しかったか（楽しい）」（図5）

肯定的回答の割合は，中学校の時（64%）よりも高校の時（56%）が少ない（図5）。つまり，中学校数学よりも高校数学が楽しかったと考える学生が少ないことが分かる。これは，高校数学の内容が難しくなり，楽しいと感じられなくなったものと考えられる。

㋓「数学は美しいと感じたか（美しい）」（図6）

肯定的回答の割合は，中学校の時（42%）よりも高校の時（56%）が多い（図6）。つまり，中学校数学よりも高校数学が美しいと考える学生が多いことが分かる。この理由については不明であり，今後の課題としたい。

㋔「数学は役に立つと思うか（役に立つ）」（図7）

肯定的回答の割合は，中学校の時（84%）よりも高校の時（80%）が少ない（図7）。つまり，中学校数学よりも高校数学が役立つと考える学生が少ないことが分かる。しかし，どちらも 80% を超えており，中学校数学（84%）も高校数学（80%）も役に立つと考えている学生が多いことが分かる。これは，対象学生が数学的な知識や技能を必要とする工業系の学科に所属しているためと考えられる。

㋕「数学の学習は頑張ったか」（図8）

肯定的回答の割合は，中学校の時（62%）よりも高校の時（82%）が多い（図8）。つまり，中学校数学よりも高校数学を頑張って学習したと考える学生が多いことが分かる。

しかし，㋐から㋕の各項目の中学校と高校の肯定的回答と否定的回答（「③あまりそう思わない」と「④そう思わない」と回答，以下同様）の人数について直接確率計算を行った結果，㋐から㋔の項目までは有意な差はなかった〔㋐は p=0.4162, 両側,ns，㋑は p=0.5205, 両側,ns，㋒は p=0.5406, 両側,ns，㋓は p=0.2299, 両側,ns，㋔は p=0.7953, 両側,ns〕。しかし，㋕の項目については，有意水準5% で有意であった〔㋕は p=0.0440, 両側,*,p<.05,〕。つまり，中学校数学に比べて高校数学の学習は「頑張った」という学生が多いと言える。

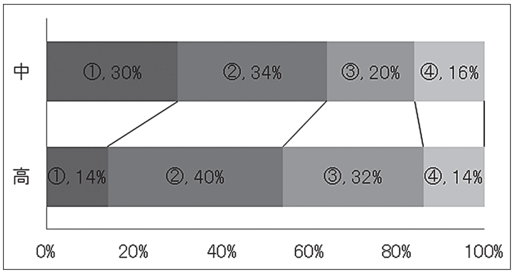


図3　㋐数学は得意（N=50）

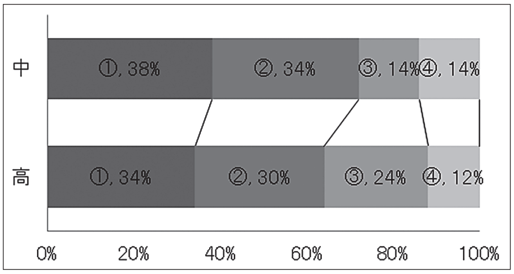


図4　㋑数学は好き（N=50）

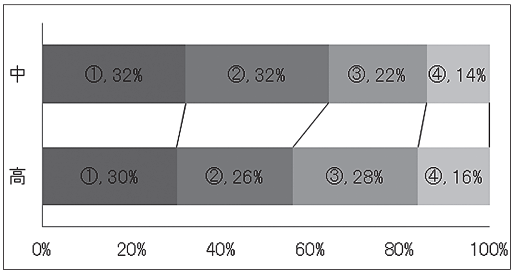


図5　㋒数学は楽しい（N=50）

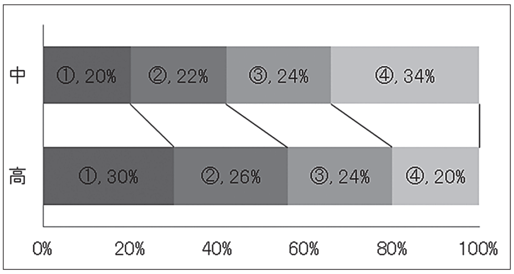


図6　㋓数学は美しい（N=50）

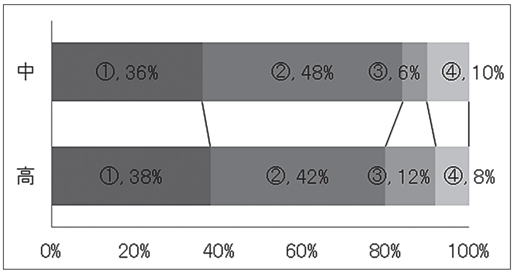


図7　㋔数学は役立つ（N=50）

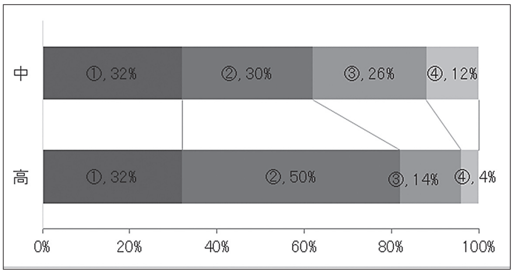


図8　㋕数学は頑張った（N=50）

㋖ 数学Ⅰにおける苦手な単元

数学Ⅰで苦手な単元を複数可で選択する質問をした（図9）。4つの単元についてカイ二乗検定を行った結果，単元間の人数差が有意であった（χ^2（3）=13.893，p<.01）。残差分析の結果，「数と式」で苦手と回答した学生が有意に少なかった（表1）。つまり，「数と式」は苦手と考えている学生が少ないが，その他の単元は苦手な学生がある程度（約40%）いると言える。

中村（2015b）が行った同様な調査でも，「数と式」は有意に少なかった。

また，長岡（2003）は「高校数学の中で，三角比や三角関数を苦手と感じている生徒が多く，また，それらの定着度もいいとは言えない実態がある（下線は筆者）」と，角田（2012）も「高校数学で学習する三角比・三角関数は，実生活に密着した数学であるが，高校生にとっては困難性を生じやすい単元である（下線は筆者）」と述べており，「図形と計量（三角比）」は高校数学において苦手な単元の1つであることが先行研究でも指摘されている。

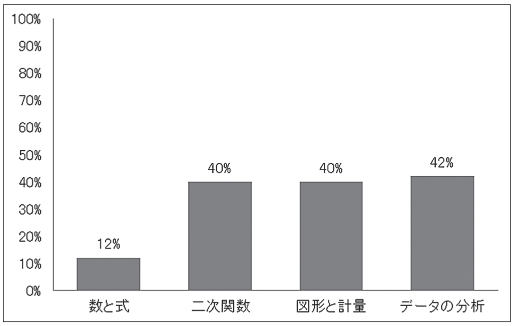


図9　数学Ⅰにおける苦手な内容（N=50）

表1　残差分析の結果

単元	苦手な生徒	苦手でない生徒
数と式	−3.719 **	3.719 **
2次関数	1.124 ns	−1.124ns
図形と計量	1.124 ns	−1.124ns
データの分析	1.470ns	−1.470ns

(**p <.01)

(2) 学力調査（第1段階）の結果と考察

対象学生は，平成25年度に高校へ入学し，平成21年度告示学習指導要領のもとで学習した学年である（ただし，旧課程学生2名が在籍）。

(ア) 学力調査（第1段階）の結果の中高比較

中学校数学と高校数学の学力調査の得点について1要因参加者内計画で分散分析を行った結果（F（1，49）＝54.52，**p <.01），中学校と高校の結果の差は有意であった（表2）。また，得点の散らばりも中学校より高校が大きい(図10)。中学校の問題では第一四分位数Q1が76で，四分の三以上の学生が7割以上得点している。高校の問題になると中央値が72.5で半数が7割強以下である。また，中学校と高校の得点の関係を見るために相関係数を計算した。その結果，中学校と高校の得点の間に有意な正の相関が見られた（r=0.711，F=49.09，df1=1，df2=48，**p<.01）。強い相関があると言える。しかし，相関図（図11）からは中学校の得点が高くても高校の得点が低い学生が多くいることがわかる。例えば，中学校数学では平均値（83.7）以上でも，高校数学では平均値（70.8）以下の学生は6名（12%，N=50）いた。これらより，中学校の学習内容はある程度理解し定着しているが，そのような学生でも高校の学習内容の理解と定着には困難があると考えられる。

表2　学力調査結果の中高比較（N=50）

	人数	平均値	標準偏差	最小値	Q1	中央値	Q3	最大値
中学校	50	83.7	9.76	52	76	84	92	96
高校	50	70.8	10.04	40	55	72.5	85	100

(F（1，49）＝54.52，**p <.01)

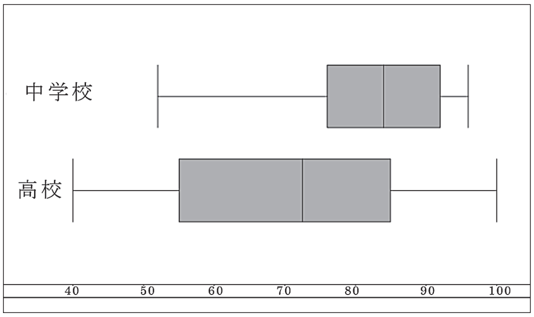


図10　中高の散らばり（N=50）

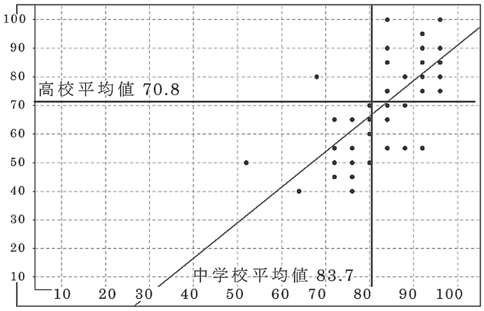


図11　学力調査結果の中高の相関（N=50）

（イ）高校数学（高校卒業程度認定試験問題）の結果の考察

各問の正答率と対象学生全体の平均正答率を比較した。対象学生全体（N=50）の平均正答率71%を母比率として直接確率計算を行った結果，問③，問⑫と⑬，問⑱と⑲（すべて p=0.0000,**p<.01, 片側），問⑮（p=0.0010,**p<.01, 片側）が有意水準1%で，問⑤（p=0.0119,*p<.05, 片側）と問⑯（p=0.0328,*p<.05, 片側）は有意水準5%で有意に低かった。また, 問⑨は有意傾向で（p=0.0780, ＋.05<p<.10, 片側）であった。各問の正答率は図12である。この結果から，平均正答率よりも有意に正答率が低い問題が問⑫⑬⑮⑯の 4問（80%，N=5）も「図形と計量」に含まれており，「図形と計量」の学習内容の理解と定着に課題があると考えられる（「数と式」は 40%，「2次関数」は 0%，「データの分析」は 50%）。

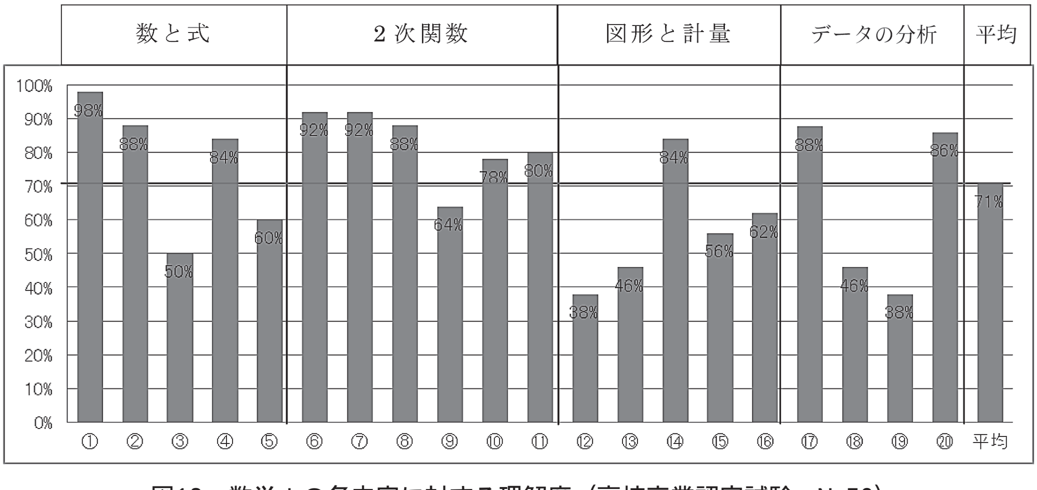


図12　数学Ⅰの各内容に対する理解度（高校卒業認定試験，N=50）

2）第2段階調査の結果と考察

（1）質問紙調査（第2段階）の結果と考察

（ア）「図形と計量」の学習に関する意識

「図形と計量」の学習について，中学校や高校の他の数学の内容と比較して「㋐得意であったか（得意）」「㋑好きであったか（好き）」「㋒楽しかったか（楽しい）」「㋓美しいと感じたか（美

しい)」「㋔役に立つと思うか（役に立つ)」という質問に 4件法（①そう思う，②だいたいそう思う，③あまりそう思わない，④そう思わない）で回答を依頼した。質問文では，「図形と計量」ではなく「三角比」とした。それは，「図形と計量」だと学習内容を想起できない学生もいると考えたためである。その結果は図13から図17の通りである。㋐から㋔の各項目の高校数学と「三角比」の肯定的回答と否定的回答の人数について直接確率計算を行った結果，有意差は得られなかった(㋐は p=0.3170, 両側,ns, ㋑は p=0.2254, 両側,ns, ㋒は p=0.4238, 両側,ns, ㋓は p=0.3173, 両側,ns，㋔は p=0.5955, 両側,ns)。

質問紙調査の項目の関連性を見るために，相関係数を計算した。その結果，「㋐得意」と「㋑好き」の間には，有意な正の相関が見られた（r=0.849，F=124.32，df1=1，df2=48，**p<.01)。相関の強さはかなり強い。「㋐得意」と「㋒楽しい」の間にも，有意な正の相関が見られた（r=0.701，F=46.34，df1=1，df2=48，**p<.01)。相関の強さはかなり強い。「㋒楽しい」と「㋓美しい」の間にも，有意な正の相関が見られた（r=0.702，F=46.62，df1=1，df2=48，**p<.01)。相関の強さはかなり強い。「㋑好き」と「㋒楽しい」の間にも，有意な正の相関が見られた(r=0.749, F=61.32, df1=1, df2=48, **p<.01)。相関の強さはかなり強い。「三角比」の学習を「㋑好き」や「㋒楽しい」であった学生ほど，「㋐得意」と回答しており，これらの意識は関連している。指導において「㋑好き」や「㋒楽しい」という意識を向上させるような工夫や配慮が必要である。また，「三角比」が「㋔役に立つ」という質問に 86% が役に立つと答えているが,「㋓美しい」に対して肯定的回答した学生は 44% と少ない。中村(2016b)の同様な調査では，「二次関数」を役に立つと考える学生は有意に少なかったが，それとは対称的な回答であり，「三角比」の方が「二次関数」よりも有用性を感じやすいものと考えられる。一方で，自由記述では，三角比の内容について，「楽しいや美しいと感じる（図18の上段)」という肯定的意見や，「どの場面で使えるかわからない（図18の中段)」や「受験のための学習であった（図18の下段)」などの有用性（図17）に関する否定的意見が述べられていた。

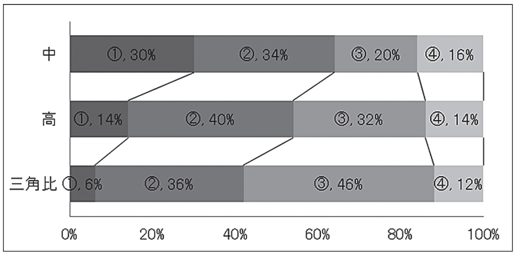


図13　㋐三角比は得意（N=50）

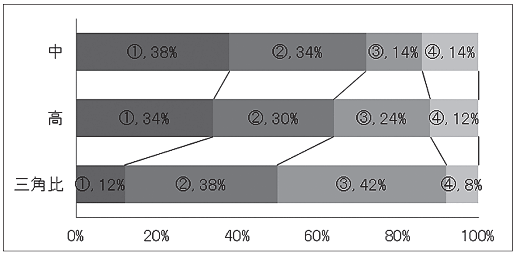


図14　㋑三角比は好き（N=50）

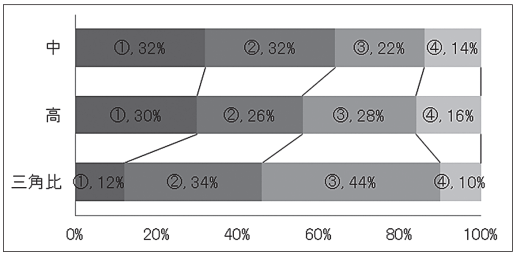


図15　㋒三角比は楽しい（N=50）

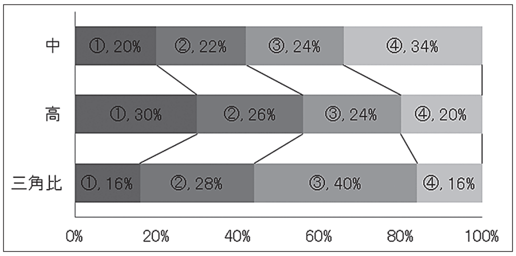


図16　㋓三角比は美しい（N=50）

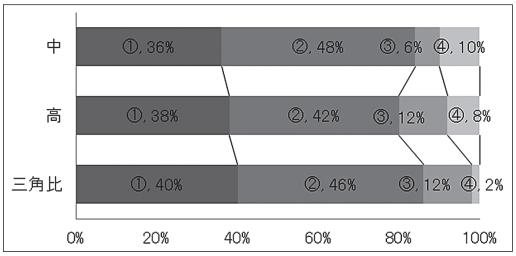


図17　㋔三角比は役立つ（N=50）

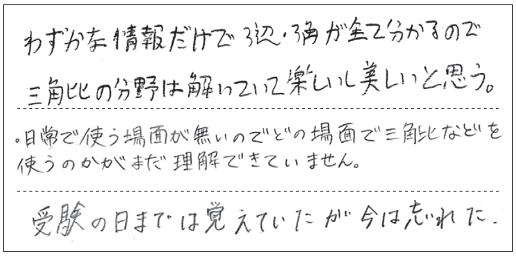


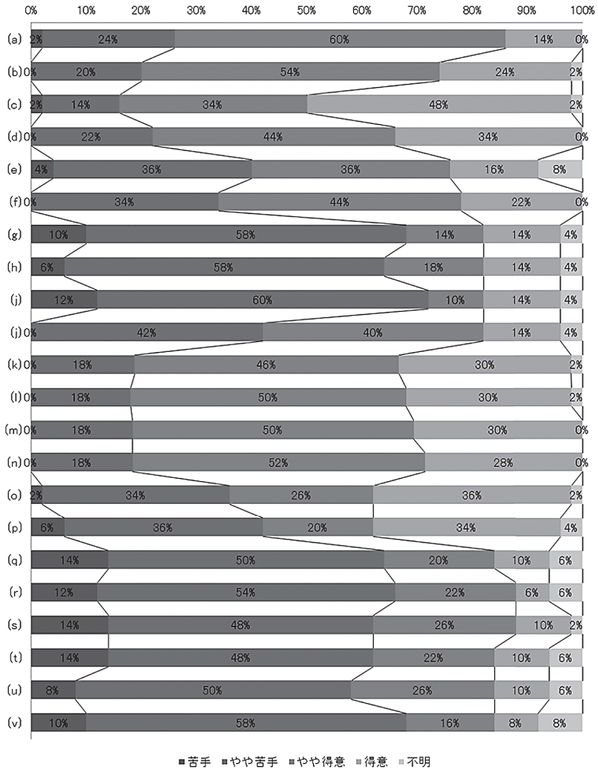
図18　主な自由記述

(イ)「図形と計量」の学習内容に関す苦手意識

「図形と計量」について，図19の右側の（a）から（v）の22項目の学習内容について「苦手であったか」を5件法（苦手，やや苦手，やや得意，得意，不明）で回答するように依頼した。その結果は図19のグラフの通りである。ただし，(s)，(t)，(u)，(v）に関する学習内容（相似形の面積比・体積比，球の表面積・体積）は平成21年度告示学習指導要領では，中学校（1年，3年）に移行した内容である。

(a）から（v）までの学習内容について，苦手意識有（「苦手」「やや苦手」と回答）の学生の割合が50%を超える項目は，以下の9つの項目である。カッコ内の数字は苦手意識有の学生の割合である。

(g)　(90° − θ）の三角比を求めること　(68%)
(h)　鈍角の三角比を求めること　(64%)
(i)　(180° − θ）の三角比を求めること　(72%)
(q)　三角比を用いる文章題を解くこと　(64%)
(r)　三角比を用いて空間図形の問題を解くこと　(66%)
(s)　相似な図形の面積の比を覚えること　(62%)
(t)　相似な立体の表面積の比と体積の比を覚えること　(62%)
(u)　球の体積の公式を覚えること　(58%)
(v)　球の表面積の公式を覚えること　(68%)



(a) 三角比（sin，cos，tan）の定義を覚えること
(b) 与えられた直角三角形の三角比を求めること
(c) 特別な直角三角形（30°，45°，60°）の辺の比を覚えること
(d) 30°，45°，60°の三角比を求めること
(e) 三角比の相互関係を覚えること
(f) sin θ の値から cos θ や tan θ の値を求めること
(g) （90° − θ）の三角比を求めること
(h) 鈍角の三角比を求めること
(i) （180° − θ）の三角比を求めること
(j) 三角比が与えられたときの角度 θ を求めること
(k) 正弦定理を覚えること
(l) 正弦定理を使って，辺の長さや角度を求めること
(m) 余弦定理を覚えること
(n) 余弦定理を使って，辺の長さや角度を求めること
(o) sin θ の三角形の面積の公式を覚えること
(p) sin θ の三角形の面積の公式を使って，面積を求めること
(q) 三角比を用いる文章題を解くこと
(r) 三角比を用いて空間図形の問題を解くこと
(s) 相似な図形の面積の比を覚えること
(t) 相似な立体の表面積の比と体積の比を覚えること
(u) 球の体積の公式を覚えること
(v) 球の表面積の公式を覚えること

図19 「図形の計量」の学習に関する意識

(2) 学力調査（第2段階）の結果と考察

(ア)「図形と計量」と数学Ⅰの学力調査結果の比較

数学Ⅰ（第1段階調査の高校卒業程度認定試験問題）と「図形と計量（第2段階調査）」の学力調査の得点について分散分析を行った結果（F（1，49）＝45.24，**p <.01），数学Ⅰと「図形と計量」の学力調査の結果の差は有意水準1% で有意であった（表3）。また，得点の散らばりも数学Ⅰより「図形と計量」が大きい（図20）。しかも，「図形と計量」の結果の中央値は51であり，学習内容の約5割を理解していない学生が 2分の 1もいることになる（図20）。また，数学Ⅰと「図形と計量」の得点の関係を見るために，相関係数を計算した。その結果，数学Ⅰと「図形と計量」の得点の間には有意な正の相関が見られた（r=0.751，F=62.03，df1=1，df2=48，**p<.01）。相関の強さは強いと言える（図21）。つまり，「図形と計量」でつまずいた生徒は数学Ⅰの他の内容においても，つまずく可能性があると考えられる。さらに，数学Ⅰの問題（第1段階調査）では平均点（70.8）以上の得点を得ていても「図形と計量」の問題（第2段階調査）では平均点（57.9）以下しか得点できていない学生が 8名（16%，N=50）いた。しかし，「図形と計量」の問題（第2段階）は教科書の例題程度の問題と公式を答える問題であり，「図形と計量」の極基本的な問題においても理解と定着に困難があると考えられる。

表3　数学Ⅰと「図形と計量」の比較（N=50）

	人数	平均値	標準偏差	最小値	Q1	中央値	Q3	最大値
数学Ⅰ	50	70.8	17.04	40	55	72.5	85	100
図形と計量	50	57.9	20.04	25	43	51	77	97

（F（1，49）＝45.24，**p ＜.01）

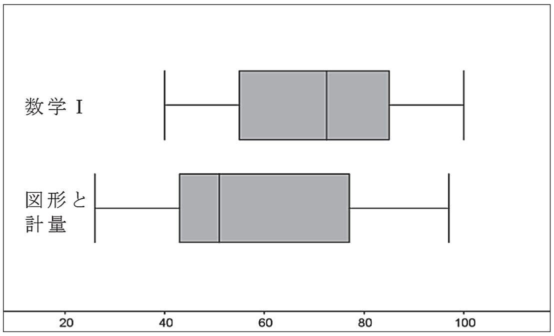


図20　数学Ⅰと「図形と計量」の散らばり

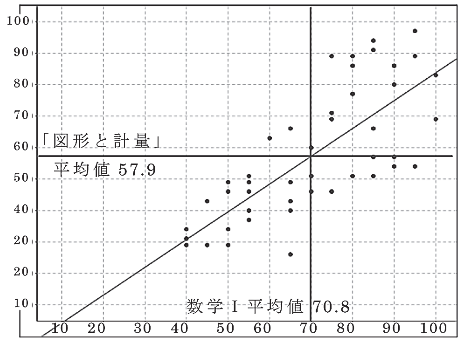


図21　数学Ⅰと「図形と計量」の得点の相関

(イ)「図形と計量」に関する学力調査結果の分析

「図形と計量」に関する学力調査の結果の正答率をグラフに表したものが図22である。「図形と計量」に関する学力調査の結果，対象学生全体の平均点（正答率）は 57.9% であった。各問の正答数と不正答数（誤答数と無答数の合計）について,対象学生全体の平均点（正答率）57.9% を母比率として，直接確率計算を行った。以下の 14の項目（40.0%，N=35）で有意な差が見られた。以下に，正答率の低い順に記す。行末のカッコ内は，問題に対応する質問紙調査（第2段階）の学習内容に関する苦手意識の項目の記号と苦手意識を持つ学生の割合である。問①以外は，どの問題も苦手意識を持つ学生の割合が 5割を超えており，学生が苦手意識を持ち実際に解答できていない問題であることが分かる。

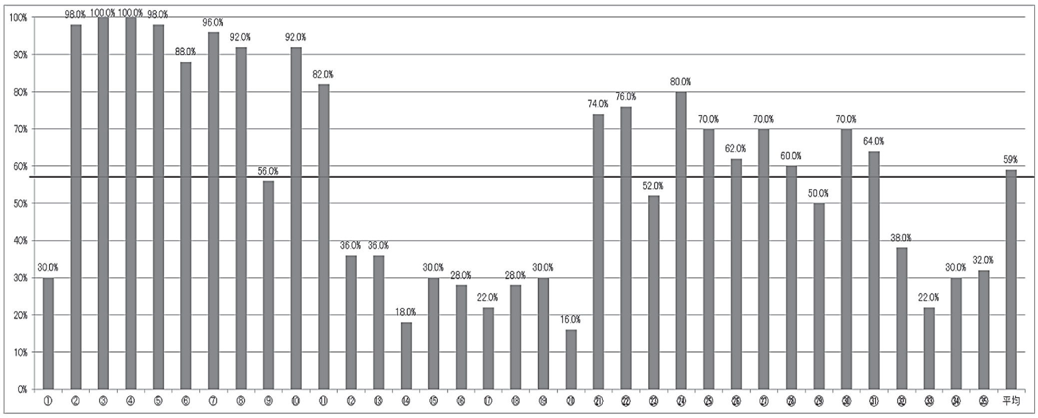


図22　「図形と計量」の問題の正答率

⑳　tan83°＝（45°以下の角に直す）：16.0%，p=0.0000 ** (p<.01)（片側確率）〔(g)，68%〕
⑭　tan（90°－θ）＝　　　　　　：18.0%，p=0.0000 ** (p<.01)（片側確率）〔(g)，68%〕
⑰　tan（180°－θ）＝　　　　　：22.0%，p=0.0000 ** (p<.01)（片側確率）〔(i)，72%〕
㉝　球の表面積Ｓを求める公式　　：22.0%，p=0.0000 ** (p<.01)（片側確率）〔(v)，68%〕
⑯　cos（180°－θ）＝　　　　　：28.0%，p=0.0000 ** (p<.01)（片側確率）〔(i)，72%〕
⑱　sin64°＝（45°以下の角に直す）：28.0%，p=0.0000 ** (p<.01)（片側確率）〔(g)，68%〕
①　三平方の定理とは　　　　　　：30.0%，p=0.0000 ** (p<.01)（片側確率）
⑮　sin（180°－θ）＝　　　　　：30.0%，p=0.0000 ** (p<.01)（片側確率）〔(i)，72%〕
⑲　cos78°＝（45°以下の角に直す）：30.0%，p=0.0000 ** (p<.01)（片側確率）〔(g)，68%〕
㉞　文章題（tan の利用）　　　　：30.0%，p=0.0000 ** (p<.01)（片側確率）〔(q)，64%〕
㉟　文章題（sin の利用）　　　　：32.0%，p=0.0001 ** (p<.01)（片側確率）〔(q)，64%〕
⑫　sin（90°－θ）＝　　　　　　：36.0%，p=0.0009 ** (p<.01)（片側確率）〔(g)，68%〕
⑬　cos（90°－θ）＝　　　　　　：36.0%，p=0.0009 ** (p<.01)（片側確率）〔(g)，68%〕
㉜　球の体積Ｖを求める公式　　　：38.0%，p=0.0022 ** (p<.01)（片側確率）〔(u)，58%〕

逆に，ある程度できたもの（正答率80% 以上）は，以下の 10項目（28.6%，N=35）であった。行末のカッコ内は，問題に対応する質問紙調査（第2段階）の学習内容に関する苦手意識の項目の番号と苦手意識を持つ学生の割合である。これら 10項目の問題は，どれも苦手意識有の割合が低く，実際に解答できている問題であることが分かる。

②　直角三角形の三角比（sin θ）　　：98.0%〔(b)，20%〕
③　直角三角形の三角比（cos θ）　　：100%〔(b)，20%〕
④　直角三角形の三角比（tan θ）　　：100%〔(b)，20%〕
⑤　直角三角形（30°，60°）の辺の比　：98.0%〔(c)，16%〕
⑥　直角三角形（45°）の辺の比　　　：88.0%〔(c)，16%〕
⑦　$\sin^2\theta+(\qquad)=1$　　　　：96.0%〔(e)，40%〕
⑧　$\tan\theta=\frac{(\quad)}{(\quad)}$　　　　：92.0%〔(e)，40%〕
⑩　sin θ が $\frac{2}{3}$ のとき，cos θ　　：92.0%〔(f)，34%〕
⑪　sin θ が $\frac{2}{3}$ のとき，tan θ　　：82.0%〔(f)，34%〕
㉔　正弦定理をかく　　　　　　　：80.0%〔(k)，18%〕

（ウ）「図形と計量」に関する学力調査（第2段階調査）の誤答分析

① 三平方の定理〔資料2の問①〕

三平方の定理について，どんな定理かを説明する問題である。三平方の定理は中学校の第3学年で学ぶが，正しく説明できた学生の割合は 3割であり，5割の学生は無答であった（表4）。表3に主な誤答を記す。カッコ内の数字は書いた学生本人を含めて同様な誤答をした学生の人数である（以下，同様である）。誤答では，三角形の決定条件（A3）や正弦定理（A4）を答える（図23）など，三平方の定理と全く異なる内容を回答する学生も見られ，「図形と計量」で必要とされる基本的な知識が十分に理解されていない状況がうかがえる。

表4　①三平方の定理

	正答	誤答	無答
回答率（%）	30.0	20.0	50.0

表5　⑳tan83°

	正答	誤答	無答
回答率（%）	16.0	28.0	56.0

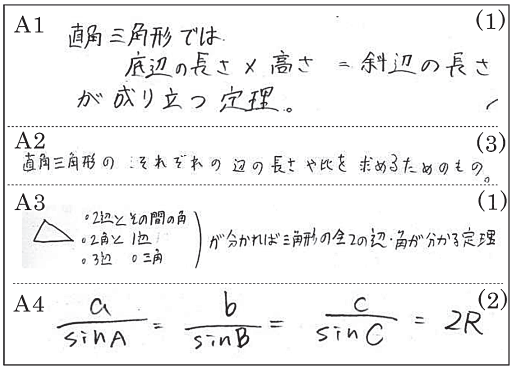


図23　①三平方の定理の主な誤答

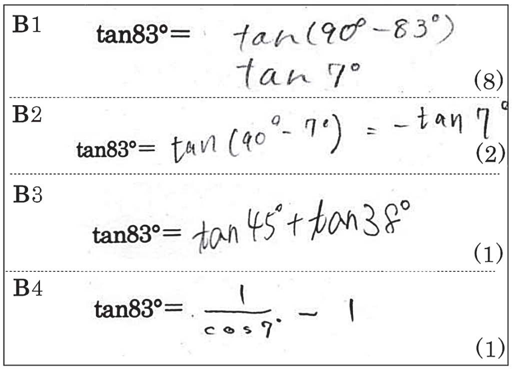


図24　⑳tan83°の主な誤答

⑳ tan83°（45°以下の角に直す）〔資料2の問⑳〕

問⑳（tan83°）の正答率は16%であり，かなり低い（表5）。同様に，問⑱（sin64°），問⑲（cos78°）も正答率はそれぞれ28%，30%と低い。問⑳の誤答をみると，（90°－θ）の公式を正しく覚えていないことが要因と考えられる（図24）。実際，（90°－θ）の公式を問う問⑭（tan（90°－θ）），問⑫（sin（90°－θ）），問⑬（cos（90°－θ））の正答率も，それぞれ18%，36%，36%と低い。特に，どちらの問いも正接に関する問いが低いと言える。これは，正接に関する（90°－θ）の公式が，正弦や余弦に関する（90°－θ）の公式と形が異なり，分数形になるために覚えにくく，正弦や余弦の公式の形に引きずられたと思われる誤答（B1とB2）が多く見られた（20%, N=50）。公式を覚えていなくても図をかいて解答可能であるが，解答するために図をかいた学生はいなかった。

㉝ 球の表面積Sを求める公式〔資料2の問㉝〕

問㉝（球の表面積）について，対象学生は中学校第1学年で学習しているが，正答率は22%である（表6）。中学校の教科書（藤井ら 2012）では「球の表面積は，その球がちょうど入る円柱の側面積に等しい（p.195）」ことを学ぶが，このことを理解していれば，球の表面積の公式を覚えていなくとも解答可能である。図25の誤答の中には円の面積（C1）や球の体積（C5）を答えるなど，何となく覚えている似たような公式を書いたと見られるものが多くあった（10%，N=50）。このことは球の体積（問㉜）でも，同様で「球の体積は，その球がちょうど入る円柱の体積の2/3である（p.194）」ことを理解していないと考えられる（正答率は38%）。

⑯ cos（180°－θ）〔資料2の問⑯〕

問⑯（cos（180°－θ））の正答率は28%と低い（表7）。同様に，問⑰（tan（180°－θ）），問⑮（sin（180°－θ））の正答率もそれぞれ22%，30%と低い。誤答を見るとcos（90°－θ）=sin θの公式と混同していると考えられる解答sin θ（D3）が多くみられた（8%，N=50）。記述された解答には公式を導くための図は見られなかったことから，公式は導くものというこ

とよりも，覚えるものという意識があることが推察される。

表6　㉝球の表面積 S

	正答	誤答	無答
回答率（%）	22.0	44.0	34.0

表7　⑯cos（180°－θ）

	正答	誤答	無答
回答率（%）	28.0	32.0	40.0

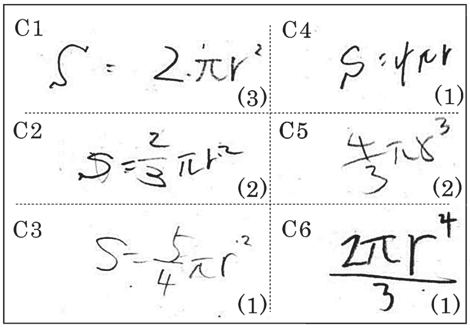


図25　㉝球の表面積 S の主な誤答

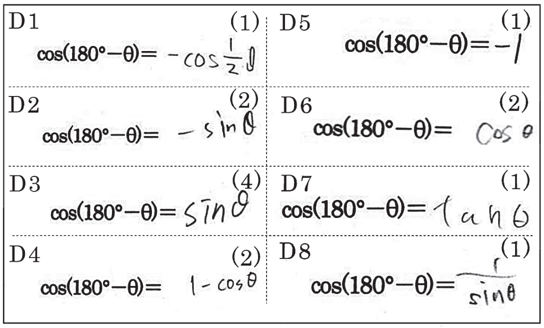


図26　⑯cos（180°－θ）の主な誤答

⑭ tan（90°－θ）〔資料2の問⑭〕

問⑭（tan（90°－θ））の正答率は 18% と低い（表8)。問⑰（tan（180°－θ））の正答率も 22% と低く，どちらの公式も正接は正弦や余弦に比べ正答率が低い。これは，先にも述べたが，正接の公式が，他の 2つに比べ，特別な形（(90°－θ）の公式が分数形）をしているためと考えられる。実際，tan θ（E1）や－tan θ（E5）の誤答（20%，N=50）が多く見られ，正弦や余弦の公式や tan（180°－θ）の公式に引きずられていることがうかがえる。記述された解答には公式を導くための図は見られなかった。

㉞ 文章題（tan の利用）〔資料2の問㉞〕

問㉞は，題意を理解し正接を利用することが分かれば，解答可能である。しかし，誤答をみると，問われている距離と違う距離を求めている解答（F2）や正弦定理を用いている解答（F4）が見られた。正弦定理でも解答は可能であるが正答を得ていない。与えられた辺の長さと角の大きさ（条件）を使って，問われた辺の長さ（未知数）を求めるために，どの三角比を活用するかが理解できていない。誤答であるほとんどの解答には，与えられた図への条件や未知数を示す x などの記号の書き込みは見られず，すぐに立式している。条件や未知数と直角三角形の辺や角との対応関係を確認しないままに覚えている公式を使って立式していることが推察される。また，文章題では得られた解が妥当であるかどうかを検討することが重要であるが，解の妥当性を検討していないのではないかと思われる解答が多くあった。例えば，F4の解答では BC=90m を得ているが，AC=88m，∠BAC=31°では BC が AC より長くなることはありえないことに気づけば，間違いであることに気づくことができたはずである。

表8　⑭tan（90°－θ）

	正答	誤答	無答
回答率（%）	18.0	36.0	46.0

表9　㉞文章題（tan の利用）

	正答	誤答	無答
回答率（%）	30.0	22.0	48.0

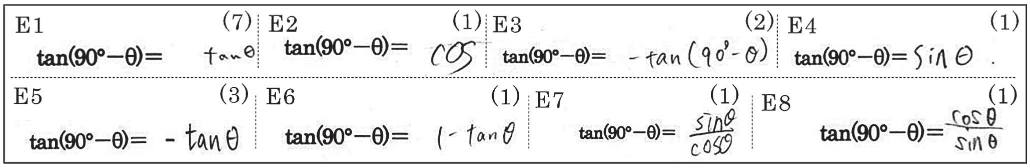


図27　⑭tan（90°－θ）の主な誤答

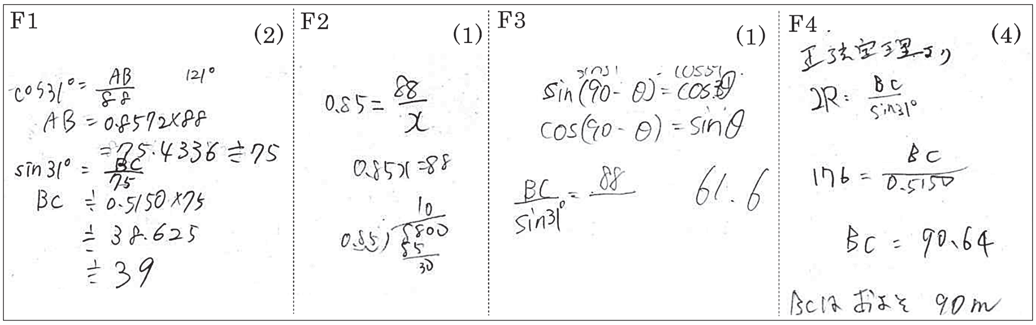


図28　㉞文章題（tan の利用）の主な誤答

4.「図形と計量」の指導への示唆

1）三角比と直角三角形との関連付けを図り，三角比の図形的な意味の理解を促進こと

(1) 鋭角の三角比の公式の指導〔資料2の問⑫，⑬，⑭，⑱，⑲，⑳〕

前章までの考察の結果，鋭角の三角比の理解には困難があることが分かった。その原因として，鋭角の三角比の公式を理解していないことが考えられる。(90°－θ）の公式をただ覚えるだけではすぐに忘れてしまう。例えば，図29のような図を用いて，三角比と直角三角形との関連付けを図り，(90°－θ）の公式の図形的な意味を促進することが重要と考える。角田(2012）も，三角比・三角関数の困難性として「sin（90°－θ）を sin θとすること」を挙げ，三角比と図との対応関係に関する困難性であることを指摘している。教科書にある図で教師が説明するだけではなく，生徒自らが三角比と直角三角形を対応付けられるように意識して工夫や配慮を行い指導する必要がある。

$$\sin(90° - \theta) = \frac{b}{c} = \cos\theta$$
$$\cos(90° - \theta) = \frac{a}{c} = \sin\theta$$
$$\tan(90° - \theta) = \frac{b}{a} = \frac{1}{\tan\theta}$$

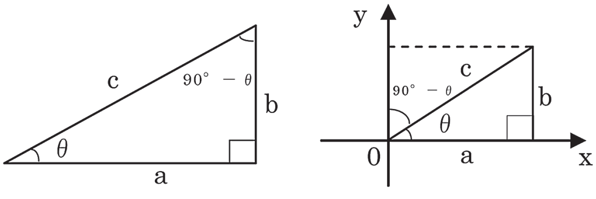


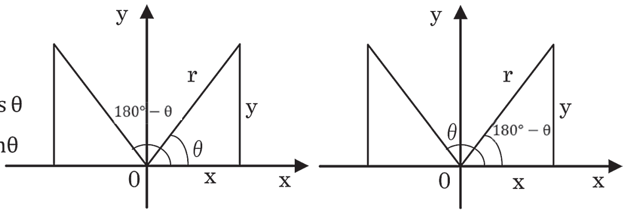
図29　(90°－θ）の三角比

(2) 鈍角の三角比の公式の指導〔資料1の問⑬，資料2の問⑮，⑯，⑰，㉑，㉒，㉓〕

鈍角の三角比についても十分に理解していないことが示唆された。三角比を苦手と感じる原

因として，長岡（2003）は『「鋭角の三角比」についてしっかりしたイメージができていないうちに,「鈍角の三角比」が「座標平面の中で定義」されてしまう』ことを指摘している。また，江連（2011）は，鈍角の三角比は「図形と計量」の他の学習内容に比べて理解度が低いことを指摘し，その原因として，鋭角の三角比は直角三角形を用いて定義するのに対し，鈍角の三角比は座標を用いて定義し，それらの結び付きが理解できないことを挙げている。（180°－θ）の公式をただ覚えるだけではすぐに忘れてしまう。例えば，図30のように三角比と座標平面上の直角三角形との関連付けを図り，（180°－θ）の公式の図形的な意味の理解を促進することが重要である（図30)。図30のような図は数学Ⅰのどの教科書（例えば,大矢ら 2011,p.131）にも載っているものであり，教師が（180°－θ）の公式を説明するために使われている。しかし，それだけでは生徒の理解は不十分であり，このような図を用いて生徒自らが公式を創り出すことや，このような図を用いて問題解決することなどを経験できるような授業を構成することこそが重要と考える。

$$\sin(180° - \theta) = \frac{y}{r} = \sin\theta$$
$$\cos(180° - \theta) = -\frac{x}{r} = -\cos\theta$$
$$\tan(180° - \theta) = -\frac{y}{x} = -\tan\theta$$



θ が鋭角　　θ が鈍角

図30　（180°－θ）の三角比

2）直観的に公式を導く指導の導入〔資料2の問㉜，㉝〕

球の表面積 $S=4\pi r^2$ と体積 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ は，円柱の表面積と体積との関連で捉えることが重要である。実際，中学校学習指導要領解説数学編（平成20年9月）では，「球の体積は，それがぴったりと入る円柱の体積の 2/3である。錐体や球の体積については，柱体の体積の関係を予想させ，その予想が正しいかどうか模型を用いたり実験による測定を行ったりして確かめるなど，実感を伴って理解できるようにする（p.72)」ことが述べられ，教科書でもそのように指導するように記されている（例えば，藤井ら 2016，pp.200-201）。同様に「球の表面積については，模型を用いたり実験による測定を行ったりして，実感を伴って理解できるようにする(p.72)」とある。つまり，中学校では模型や実験によって実感の伴った理解を図ることが推奨されている。しかし，実際は，十分に理解し定着しているとは言えない状況である。その原因として，なぜ球の体積はそれがぴったりと入る円柱の体積の 2/3なのか，なぜ球の表面積はその球がちょうど入る円柱の側面積に等しいのかの理由が分からないからだと考えられる。模型や実験では，それらの事実は分かるが，理由は分からないのである。

球の体積と表面積が「図形と計量」の学習内容にあった平成11年度版高等学校学習指導要領解説数学編では，「球の表面積と体積については，単に公式を示し，それを利用するという技術的な扱いだけに終わることのないようにする。例えば，体積については，円柱及び円錐の体積をもとにし公式を導き，表面積については，球および角錐の体積を基にして公式を導くなどの直観的な扱いが考えられる（p.51)」とある。実際，高校数学Ⅰの教科書（例えば，大矢ら 2002，pp.138-140）では，直観的に公式を導く指導が導入されていた。球の体積と表面積

の指導では，公式が成り立つ事実の理解（模型や実験など）だけではなく，公式が成り立つ理由の理解を促すために，直観的に公式を導く指導を高校で再度取り上げることが必要と考える。

3）三角比と直角三角形の辺や角との対応関係の理解の促進〔資料1問⑫，資料2問㉞㉟〕

文章題では，三角比を活用して，問われているところの長さや角度を求めることに困難があることが分かった。角田（2012）は，三角比・三角関数の困難性の1つとして，直角三角形と三角比とを関連させることを指摘している。その原因として，直角三角形の辺の長さと，三角比の記号の対応関係が希薄であることを挙げている。対応関係には，直角三角形の辺の長さを表現するために，三角比が辺の長さを表現すると捉え三角比の記号表現をそのまま利用するもの（対辺の長さ asin θ，底辺の長さは acos θ，a は斜辺の長さ）と，辺の比に着目して三角比の値を得てから辺の長さを求めるもの（例えば，cos θ=x/a，x=acos θ，a は斜辺の長さ）がある。文章題の指導では，文章題にある条件と未知数，直角三角形の辺や角，三角比との対応関係が正しく付けられるように工夫することが必要である。そのためには，文章題に対応した直角三角形をかき，その中に条件や未知数を示す記号（x など）を明示し，その上で，正弦，余弦，正接のどれが使えるかを考察できることに加え，得られた解が妥当であるかどうかを検証する態度をも育てるような指導が重要と考える。

5. まとめと課題

本研究では，必履修科目である数学Ⅰの「図形と計量」の学習内容の理解について，高校卒業後の学生の理解の様相を明らかにし，高校の数学学習におけるつまずきと支援を考察するための基礎的な資料を得ることと「図形と計量」の指導への示唆を得ることを目的に，質問紙調査と学力調査を実施し分析した。その結果，「図形と計量」の学習内容について，(A)「図形と計量」の単元は数学Ⅰの他の単元に比べても理解と定着に課題があること（正答率が第1段階調査では 80%，第2段階調査では 40% の問題で平均正答率よりも有意に低かった），(B)「得意・好き・楽しい・美しい」に対しては肯定的回答の割合（それぞれ 42%，50%，46%，44%）が低かったが，「役に立つ」に対しては肯定的回答の割合（86%）が高かったこと，(C) 鋭角の三角比の公式，鈍角の三角比の公式，文章題，空間図形，面積比と体積比，球の体積と表面積に苦手意識を持っていること（苦手意識有と回答した学生の割合が 50% 以上），(D) 鋭角の三角比の公式，鈍角の三角比の公式，文章題，球の体積と表面積に関する問題の解決に困難があること（正答率が「図形と計量」の問題の平均正答率よりも有意水準1% で有意に低い），(E) 直角三角形の三角比を求めること，三角比の相互関係，正弦定理に関する問題は正答率（80% 以上）が高いことなどが明らかとなった。

誤答分析の結果からは，「図形と計量」の指導への示唆として，（Ⅰ）鋭角の三角比の公式の指導では，三角比と直角三角形との関連付けを図り，鋭角の三角比の公式の図形的な意味の理解を促進こと〔4-1）-（1)〕，（Ⅱ）鈍角の三角比の公式の指導では，三角比と座標平面上の直角三角形との関連付けを図り，鈍角の三角比の公式の図形的な意味の促進を図ること〔4-1）-(2)〕，（Ⅲ）球の体積と表面積の指導は，中学校で終わるのではなく，高校においても直観的に公式を導く指導を取り入れ，球の体積と表面積の式の意味の理解を図ること〔4-2)〕，(Ⅳ) 文章題の指導では，三角比と直角三角形の辺と角との対応関係の理解を促すこと〔4-3)〕など

を得ることができた。

高校教育として生徒に共通に身に付ける学力として「図形と計量」の学習内容を検討してきたが，それらの理解と定着は十分とは言えない状況であった。高校数学で学習した内容を理解し，高校卒業後もそれぞれの進路に応じて学習内容が活用できるように指導する必要がある。そのためには，本研究で得た「図形と計量」の指導への示唆（Ⅰ）から（Ⅳ）を実際の高校数学の指導の中に指導者が意識して取り入れて実践していくことが重要である。

今後は，数学Ⅰを履修している高校生を対象に「図形と計量」におけるつまずきを学習内容と学習活動の両面から捉え，そのつまずきを改善するための支援を考えることが課題である。

【謝辞】

ご協力頂いた学生の皆さんに感謝いたします。

【付記】

本研究は科学研究費補助金「基盤研究（C)」課題番号JP15K04397の一部である。

【注記】

1）建築科と情報技術科の第1段階調査の中学校数学，高校数学（数学Ⅰ），第2段階調査の「図形と計量」の学力調査の得点について，それぞれ分散分析を行った結果，建築科と情報技術科の得点には，中学校数学（F（1，49）＝0.10，ns），高校数学（F（1，49）＝1.06，ns），「図形と計量」（F（1，49）＝0.21，ns）ともに有意差は見られなかった。

	人数（人）	中学校数学		高校数学（数学Ⅰ）		図形と計量	
		平均	標準偏差	平均	標準偏差	平均	標準偏差
建築科	21	84.2	7.5	67.9	16.1	56.4	20.6
情報技術科	29	83.3	11.1	72.9	17.4	59.1	19.5

2）平成27年度中学校卒業程度認定試験問題は以下を参照した（最終参照2016.6.27）。http://www.mext.go.jp/a_menu/shotou/sotugyo/1364607.htm

3）平成27年度第2回高等学校卒業程度認定試験問題は以下を参照した（最終参照2016.6.27）。http://www.mext.go.jp/a_menu/koutou/shiken/kakomon/1364431.htm

【引用・参考文献】

中央教育審議会『新しい時代にふさわしい高大接続の実現に向けた高等学校教育，大学教育，大学入学者選抜の一体的改革について（答申）（中教審第177号）平成26年12月22日』，2014.

江連雅子「鈍角の三角比の指導－理解を深め，納得を促す指導の工夫－」『日本数学教育学会誌』第93巻臨時増刊，2011，p.444.

藤井斉亮，俣野博ほか 39名『新しい数学１』東京書籍，2012，pp.194-195.

藤井斉亮，俣野博ほか 38名『新編新しい数学1』東京書籍，2016，pp.200-203.

角田直樹「高等学校数学の三角比・三角関数における困難性について」『上越数学教育研究』，2012，pp.67-76.

文部科学省『中学校学習指導要領解説数学編（平成20年9月）』教育出版，2008.

文部科学省『高等学校学習指導要領解説数学編理数編（平成21年12月）』実教出版，2009.

文部省『高等学校学習指導要領解説数学編理数編（平成11年12月)』実教出版，1999.
長岡耕一「三角比の指導に関する考察と指導順序についての提案」『日本数学教育学会誌数学教育』57-5，第85巻第9号，2003，pp.32-37.
中村好則「高校数学の学習内容におけるつまずきと支援－数学Ⅰの学習内容の理解に焦点を当てて－」『2016年度春季年会数学教育学会誌（臨時増刊)』，2016a，pp.86-88.
中村好則「高校における数学学習のつまずきと支援に関する研究～「二次関数」の学習内容の理解に焦点を当てて～」『数学教育学会誌』57巻1･2号，2016b，pp.39-50.
大矢雅則，岡部恒治ほか13名『新編数学Ⅰ』数研出版，2002，pp.138-140.
大矢雅則ほか17名『新編数学Ⅰ』数研出版，2011，pp.120-154.

【資料１】問題は概略を示している。詳細は付記（3）を参照。

高校数学（数学Ⅰ）問題（第１段階学力調査の問題）

1　数と式

① $3x^2+11x+6$ の因数分解

② $x=\frac{1}{\sqrt{5}-2}, y=\frac{1}{\sqrt{5}+2}$ のとき，x+y=

③ n は自然数とする。N が 3 の倍数であることは，n が 12 の倍数であるための(　　)。

④ $\frac{x+2}{3} \geq \frac{3x-1}{2}$

⑤ 硬貨を投げて表が出たら階段を 4 段のぼり，裏が出たら 1 段のぼるゲームをする。硬貨を 10 回投げて階段を 30 段以上のぼるためには，表は好くなとも（　　）回以上出なければならない。

2　2 次関数

⑥ $y=3x^2-1$ のグラフの概形（グラフは略）

⑦ $y=a(x-2)^2-4$（a は定数）のグラフが点(3,0)を通るときの a の値

⑧ $y=x^2+2x+1$ のグラフから，頂点の座標を求める（グラフは略）

⑨ y=-(x-3)2+k（k は定数）において，x の変域を $-2 \leqq x \leqq 4$ とするのとき，y の最小値が-20 であった。このときの k の値

⑩ $y=x^2-2x-1$ のグラフと x 軸との共有点の個数

⑪ $(x-5)(x-7) \geqq 0$

3　図形と計量

⑫ A 地点でテニスのサーブを打ったところ，ボールが B 地点に着地した。サーブの打点 P の高さは地面から 2.8m であり，AB 間の距離は 16m だった。このとき∠PBA の大きさを求めよ（図略）

⑬ sin168°

⑭ cos45° ×tan45°

⑮ 三角形 ABC において，AB=4cm，AC=3cm，$\cos A=-\frac{1}{3}$ のときの BC の長さ（図略）

⑯ 三角形 ABC において，AB=7cm，AC=7cm，$\sin A=\frac{2}{7}$ のときの△ABC の面積（図略）

4　データの分析

⑰ マラソン大会の 10km の部に出場した 7 人の記録から，データに関する誤った記述を選ぶ（表略）

⑱ 2 つの野球チーム A,B の 10 試合の得点をそれぞれ箱ひげ図に表したものをもとに，記述の正誤を判断（箱ひげ図略）

⑲ 10 人の生徒に数学のテストを実施したところ，得点の平均値が 60 点，標準偏差は 20 点であった。あとから他の 1 人の生徒がこの数学のテストを受けたところ，得点が 60 点だった。1 人を加えた 11 人の生徒について平均値と標準偏差をそれぞれ加える前と比べたときの正しい組合せを選ぶ（組合せの表略）

⑳ A 組と B 組の男子それぞれ 20 人のハンドボール投げと握力の記録を散布図にしたものから，読み取れることを選ぶ（散布図略）

【資料2】（丸囲み数字は，分析のために問題に通し番号を付したものである。）

「図形と計量」の確認問題（第２段階学力調査の問題）

1　①三平方の定理とは，どんな定理か説明しなさい。
2　次の直角三角形の三角比（②sinθ，③cosθ，④tanθ）を求めなさい。（図略）
3　次の直角三角形の辺の比を⑤⑥（　　　）に書き入れなさい。（図略）
4　次の三角形の相互関係を表す式を完成させなさい。

(1)　⑦$\sin^2\theta+(\qquad)=1$　(2)　⑧$\tan\theta=\dfrac{(\qquad)}{(\qquad)}$　(3)　⑨$1+\tan^2\theta=\dfrac{(\qquad)}{(\qquad)}$

5　sinθが $\frac{2}{3}$ のとき，⑩$\cos\theta$ と⑪$\tan\theta$ の値を求めなさい。ただし，θ は鋭角とする。

6　（90°－θ）と（180°－θ）の三角比を求める公式を書きなさい。
⑫sin(90°－θ)＝　⑮sin(180°－θ)＝
⑬cos(90°－θ)＝　⑯cos(180°－θ)＝
⑭tan(90°－θ)＝　⑰tan(180°－θ)＝
7　次の三角比を45°以下の角の三角比で表せ。
(1)　⑱sin64°＝　(2)　⑲cos78°＝　(3)　⑳tan83°＝
8　次の三角比の値を求めよ。
(1)　㉑sin120°＝　(2)　㉒cos135°＝　(3)　㉓tan150°＝
9　正弦定理と余弦定理を書きなさい。（図略）
(1)　㉔正弦定理　(2)　㉕余弦定理
10　次のような△ABCにおいて，指定されたものを求めよ。
(1)　㉖A＝45°，B＝60°，b＝$\sqrt{6}$ であるとき，辺BCの長さa
(2)　㉗b=4，c=5，A=60° のとき，辺BCの長さa
(3)　a=3，b=2，c=$\sqrt{7}$ のとき，㉘cosC の値と㉙角C

11　次の三角形の面積を求める公式を書きなさい。㉚（図略）
12　ａ＝３，ｂ＝４，Ｃ＝１２０°である△ＡＢＣの面積Ｓを求めよ。㉛
13　半径ｒの球の㉜体積Ｖと㉝表面積Ｓを求める公式を書きなさい。
14　下の図のようなドーム球場がある。頂点Aから頂点Bを見上げたところ，水平方向とのなす角が31°になった。頂点Bの真下の地点Cから地点Aまでの距離ACは88mである。このとき，ドームの高さBCはおよそ(　　)mである。ただし，sin31°=0.5150，cos31°=0.8572，tan31°=0.6009とする。（図略）㉞
15　下の図のようなサッカー場で，コーナーの地点Aからボールを蹴ったところ，ボールがゴールラインから20°の方向に40m飛んだ。このとき，ボールの落下地点Bからゴールラインまでの最短距離BCはおよそ何mか。ただし，sin20°=0.3420，cos20°=0.9397，tan31°=0.3640とする。（図略）㉟
※　14は平成26年度第2回，15は平成24年度第1回の高等学校卒業程度認定試験問題より出題