

水中に置かれた水平な楕円形状伝熱管周りの
凍結現象に関する研究

2017年9月

岩手大学大学院工学研究科
機械・社会環境システム工学専攻

王 強勝

目次

主要記号	1
第1章 序論	3
1.1 本研究の背景	3
1.2 相変化伝熱現象に関する過去の研究	5
1.3 相変化伝熱現象における本研究の位置づけ	6
1.4 本研究の目的と章の構成	7
参考文献	8
第2章 数値解析	9
2.1 緒言	9
2.1 物理モデルおよび座標系	10
2.2 仮定	11
2.3 流れ解析	11
2.3.1 基礎方程式	12
2.3.2 座標変換	17
2.3.3 格子生成	20
2.3.4 離散化	22
2.3.5 圧力補正式	26
2.3.6 境界条件	29
2.3.7 相変化の取り扱い	31
2.4 解析手法および検討	32
2.4.1 数値解析の流れ	32
2.4.2 格子依存性	35
2.5 結言	36
参考文献	37
第3章 数値解析における妥当性の検証および実験	38
3.1 緒言	38
3.2 実験装置	39
3.3 実験方法	43
3.4 結果および考察	44
3.4.1 数値解析結果および考察	44
3.4.2 実験結果および考察	52
3.4.3 数値解析結果と実験結果の比較	59
3.4.4 数値解析結果と厳密解の比較	63
3.5 結言	64

参考文献	65
第 4 章 蓄熱槽の形状および初期水温の影響	66
4.1 緒言	66
4.2 水槽サイズ $X=180\text{ mm}$, $Y=270\text{ mm}$ の場合の凍結現象.....	69
4.2.1 $T_{ini}=4\text{ }^{\circ}\text{C}$ の場合における数値解析.....	69
4.2.2 $T_{ini}=7\text{ }^{\circ}\text{C}$ の場合における数値解析.....	90
4.2.3 各管形状および配置角度の凝固率の時間変化の比較	112
4.3 水槽サイズ $X=270\text{ mm}$, $Y=180\text{ mm}$ の場合の凍結現象.....	116
4.3.1 $T_{ini}=4\text{ }^{\circ}\text{C}$ の場合における数値解析.....	116
4.3.2 $T_{ini}=7\text{ }^{\circ}\text{C}$ の場合における数値解析.....	137
4.3.3 各管形状および配置角度の凝固率の時間変化の比較	159
4.4 各水槽サイズおよび初期水温の凍結現象	163
4.5 結言	170
参考文献	172
第 5 章 水中に置かれた 2 本の水平な伝熱管周りの凍結現象とブリッジング時間 ..	173
5.1 緒言	173
5.2 同軸における数値解析	175
5.2.1 物理モデルおよび座標系	175
5.2.2 同軸におけるブリッジング時間の判定	175
5.2.3 同軸におけるブリッジング現象	179
5.2.4 Stefan 問題の解.....	182
5.2.5 同軸の解析における結果結果および考察	183
5.3 異軸における数値解析	188
5.3.1 物理モデルおよび座標系	188
5.3.2 異軸におけるブリッジング時間の判定	188
5.3.3 異軸におけるブリッジング現象	192
5.3.4 Stefan 問題の解.....	195
5.3.5 異軸の解析における結果および考察	196
5.4 結果および考察	200
5.5 結言	207
参考文献	208
第 6 章 結論	209
謝 辞	211
業績一覧	212

主要記号

a	: 温度伝導率	[m ² /s]
A_c	: 楕円管総断面積	[m ²]
A_s	: 氷の断面積	[m ²]
c_p	: 比熱	[kJ/(kg·K)]
c_{ph}	: 相変化領域 (PCZ) での比熱	[kJ/(kg·K)]
h	: 熱伝達率	[W/(m ² ·K)]
D	: 管直径	[m]
D_x	: x 方向の中心管距離	[m]
D_y	: y 方向の中心管距離	[m]
f	: 一般座標系における変数	
g	: 重力加速度	[m/s ²]
J	: ヤコビアン	[-]
L	: 潜熱	[kJ/kg]
Nu	: ヌセルト数	[-]
\overline{Nu}	: 平均ヌセルト数	[-]
p	: 圧力	[kPa]
Pr	: プラントル数, $Pr = \nu / a$	[-]
q	: 演算子	[-]
S	: 生成項の係数	[m ² /s]
Ra	: レイリー数	[-]
$B(T)$: 密度近似関数	
Gr	: グラスホフ数, $Gr = g\beta T_w - T_\infty R^3/\nu^2$	[-]
t	: 時間	[s]
Δt	: 時間間隔	[s]
T	: 温度	[k]
ΔT	: 相変化温度幅	[k]
T_{sp}	: PCM 凝固点	[k]
T_{ini}	: 初期温度	[k]
T_l	: 管壁温度	[k]
T_∞	: 管周囲の熱媒体温度	[k]
t_B	: ブリッジング時間	[s]
$t_{B,S}$: Stefan 解におけるブリッジング時間	[s]
u	: x 方向速度	[m/s]
v	: y 方向速度	[m/s]

(x, y)	: デカルト座標系	
U	: ξ 方向反変速度	[m/s]
V	: η 方向反変速度	[m/s]

ギリシャ文字

α	: 楕円率 (=短径/長径)	[-]
β	: 体膨張係数	[1/K]
Γ	: 拡散項の係数	[m ² /s]
ϕ_g	: 楕円管の配置角度	[°]
ν	: 動粘性係数	[m ² /s]
λ	: 熱伝導率	[W/(m·k)]
μ	: 粘性係数	[m ² /s]
ρ	: 密度	[kg/m ³]
(ξ, η)	: 一般座標系	

下添字

ph	: 相変化(phase change)
1	: 上部管
2	: 下部管
l	: 液相(liquid)
nb	: 隣接格子点
∞	: 管周囲
s	: 固相(solid)
t	: 管
x	: x 方向微分, $\partial/\partial x$
y	: y 方向微分, $\partial/\partial y$
η	: η 方向微分, $\partial/\partial \eta$
ξ	: ξ 方向微分, $\partial/\partial \xi$

Superscript

+ : 無次元数

第1章 序論

1.1 本研究の背景

近年、気候変動・地殻変動の激しさや原油を主とするエネルギーの安定供給が大きな問題となっており、省エネルギーやクリーンなエネルギーの利用が必要になってきている。そのような中で、電力需要の昼夜間及び季節格差縮小の手段が求められており、その1つとして潜熱蓄熱システムが挙げられる。これは、相変化物質(Phase Change Material: 以下 PCM と省略する)が凝固・融解する際の大きな潜熱を利用する技術である。凝固・融解など相変化を伴う熱伝達は、移動境界問題の基本的な現象であり、工学的にも多く利用されている。相変化現象を利用した実用的な技術の一例として、濃縮装置に用いられる凍結濃縮がある。これは、水溶液が凍結する際にできる氷には、溶質が入り込みにくく、凍結が進行すると液の部分の溶質濃度が増加していくという特徴を利用して溶液を濃縮するものである。この原理を利用した流下液膜式凍結濃縮装置では、工場からの排水を約 1/10 まで減容することができ、排水処理コストを大きく下げることが出来る。さらには、減容する際に生成された氷は蓄熱装置のように冷房等の熱源として利用することが可能である⁽¹⁾。

PCM は固有の温度で凝固・融解するために、一様温度の良質なエネルギーが得られるという特徴がある。潜熱蓄熱の PCM としては、使用温度域によって多種多様なものが開発され使用されている。しかし、住空間の冷房などを対象とする場合において安全性や経済性の面から判断して主に水が使用されている場合が多い。水の潜熱は顕熱の約 80 倍もあるため、氷として冷熱を蓄えることで、蓄熱空間の縮小化が考えられる。

特に氷を用いる氷蓄熱システムは経済性、安全性、環境への影響など蓄熱システムとしての PCM に求められる条件を満たしており、現在ではビルの空調システムとして利用されることが多い。氷蓄熱も潜熱蓄熱の一つであり、装置により安価な深夜電力を使用して蓄熱し、夏季の日中など電力負荷が大きい時間帯に蓄熱したエネルギーを使用することが出来るため、省エネルギーや電力需給の平準化への貢献が期待されている。

氷蓄熱システムには大きく分けてスタティック型とダイナミック型があり、スタティック型とは熱交換器表面(伝熱面)に接触している水を、熱交換器壁面を通して間接的に冷却し、その表面に氷層として成長させるものである。これは同一の場所で製氷・解氷を繰り返すのでスタティック型と呼称される。また、スタティック型には解氷の方法によって内融式と外融式がある。スタティック型における氷蓄熱装置の多くは蓄熱層内に多数の伝熱管が配置されていて、蓄熱時にはこの管群周囲に氷層を生成し、放熱時には氷層を融解させている。それに対し、ダイナミック型は伝熱面上で生成した氷を剥ぎ取り、蓄熱槽に移すという方式である。

ダイナミック型の場合、水を急激に過冷却する装置や製氷した氷を掻き砕くための装置が必要となる場合が多く、全体が大型化し、高コスト化してしまう問題がある。今後の氷蓄熱システムの普及が一般住宅や小規模店舗など小規模分散需要者に進むことを予測すると、経済性を損なうことなくシステムをコンパクトかつ高性能化したスタティック型に対する研究開発及び実用化が望まれる。

このようなスタティック型の氷蓄熱システムを一般的に実用化するための 1 つの見解として、氷生成の高効率化が挙げられる。一般向けの氷蓄熱システムは、コンパクト化されることで生じる装置全体の縮小の影響で伝熱管の大きさや本数が制限されるため従来の氷蓄熱システムより蓄熱効率が低下してしまうのが問題である。この問題を解決するためには、伝熱管の形状や相互配置、蓄熱槽のアスペクト比等を変化させることによって、蓄熱槽内の温度を短時間で冷却し、氷生成の効率を上げることが重要だと考えられる。

1.2 相変化伝熱現象に関する過去の研究

相変化現象は工学的に重要な現象であり、PCM の相変化現象を利用した装置が実用化するために、現在まで多くの研究が行なわれてきている。実験的な研究としては古くから多くの報告がある。齋藤らは密度反転を伴う水平な円管内、外の凍結過程について、凍結界面形状に対する自然対流の影響を明らかにした^{(2),(3)}。笹口らは2本の円管周りの固-液相変化に対して、初期水温が凝固過程に及ぼす影響及び管壁温が融解過程に及ぼす影響を明らかにした⁽⁴⁾。また、鳥越らは、水平な円管群周りの固-液相変化過程について、管の本数や配置の影響を調べている⁽⁵⁾。

一方、数値解析を行なう場合、相変化現象は固相と液相との境界が時間と共に移動する移動境界問題となるために、相界面位置の取り扱いの上で困難な問題となる。この問題に対する解析方法を大別すると、固相と液相を別々の式で解き、相界面でのエネルギーバランス式によって界面の位置及び移動を決定する Multi-domain model と、固相と液相を区別せず混合モデルによる一組の式で解く Single-domain model がある⁽⁶⁾。

Multi-domain model には境界固定法や Body fit 法などがある。境界固定法は正確な相界面位置を求めることが出来るという利点があるが、相界面形状が複雑な場合には界面位置の取り扱い上の問題がある。Body fit 法は、境界固定法では困難な複雑な問題でも解析可能なように改良したものであるが、時間ステップごとにメッシュ生成を行なう必要があり計算時間が多くかかるという問題がある。Single-domain model にはエンタルピ法や潜熱を比熱に組み込む方法などがあり、いずれの場合もモデル全体を同一の方程式系で解くことが出来る。また、Multi-domain model よりも複雑な幾何学形状に対応できるという利点があり、現在ではより多く使用されている。しかし、欠点として相界面位置が若干曖昧になることが挙げられるが、これは格子を細かくすることである程度防ぐことが出来る。

このような解析手法を用いて相変化現象を解析した例はこれまで、いくつか報告されている。Multi-domain model により相変化現象を解析した例としては、古くは齋藤らが境界固定法により水平な円管周りの凍結問題を解析し⁽⁷⁾、Single-domain model による相変化現象を解析した例としては、笹口らがエンタルピ法により水平な円管周りや矩形容器内の凍結問題を解いている⁽⁸⁾。潜熱を比熱に組み込む方法により T.J.Scanlon らが矩形容器内の融解・凍結問題について⁽⁹⁾、千葉らが円管内を流れる水の凍結問題について解析している⁽¹⁰⁾。

このように伝熱管周りの相変化現象は、管本数が1本あるいは2本の場合について数値解析した例はあるが、計算モデルとして対称性があるものに限られていた。笹口らは Single-domain model であるエンタルピ法により、水平な円管まわりや矩形容器内の凍結問題について先駆的な研究⁽¹¹⁾を行ったが、解析領域全体を写像する手法のため、管周りの全周での相変化や対称性のない管群まわりの相変化などへの展開が困難であった。それで、廣瀬らは Single-domain model と潜熱を比熱に組み込む方法を採用し

た解析法が示され、対称性を有さないモデルや管群モデルへと拡張を有することが報告⁽¹²⁾されている。また、佐々木らは水中に置かれた2本の水平円管まわりの凍結現象とブリッジング時間について実験および解析し、水平な円管周りや矩形容器内の凍結問題を解いている⁽¹³⁾。

1.3 相変化伝熱現象における本研究の位置づけ

本研究では、蓄熱装置や流下液膜式凍結濃縮装置の基本的なモデルでもある伝熱管周りの相変化現象に着目した。伝熱管周りの凍結過程に着目し、Single-domain modelと潜熱を比熱に組み込む方法による数値解析を行い、特に水槽内の初期水温や伝熱管の形状、相互配置（主に水平方向軸間距離に着目）、水槽の大きさの変化や影響での氷生成の挙動や効率について調べることを目的としている。まず、水槽内の初期水温を一定の温度とし、垂直方向軸間距離を固定、水平方向軸間距離を拡張、さらに管形状の変化（円管→楕円管）の影響による2本の伝熱管周りの凍結現象や水槽内の流体の流れ場の様子を詳細に調べた。次に水槽の容積を一定として幅と高さを逆転させ、初期水温や管形状等は同条件のもと、凍結現象や水槽内の流体の流れ場の様子を調べ、初期水温や管の形状、水平方向軸間距離、水槽のアスペクト比が氷生成の効率にどのような影響を及ぼすのかを詳細に調べた。さらに解析の妥当性を確認するため、実験を行い、伝熱管周りの凍結過程における伝熱現象について凍結界面形状の時間変化及び、凝固率などについて比較検討を行った。

1.4 本研究の目的と章の構成

本研究は氷蓄熱装置における自然対流熱伝達およびブリッジング時間について着目し、凍結現象に加えて蓄熱装置の最適化およびブリッジング時間の数値的予測の可能性を探ることを目的としている。このための基礎データとして、蓄熱槽のアスペクト比および伝熱管の形状を変え、2本の楕円形伝熱管を重力方向と2楕円形伝熱管それぞれの中心が一致するよう配置した同軸配置の場合や、同軸配置された伝熱管の管中心を水平方向にずらした異軸配置の場合など対称性を有さないモデルにおける伝熱現象を解析的に調べ、凍結現象とブリッジング時間について詳細に研究している。

本論文は以下の章により構成されている。

第1章は序論であり、本論文の背景とその位置付け、研究目的について述べる。

第2章では、本研究における数値解析手法を示す。

第3章では、本研究における実験方法および方法を示す。

第4章では、水槽内の初期水温や伝熱管の形状、相互配置（主に水平方向軸間距離に着目）、水槽の大きさの変化や影響での氷生成の挙動や効率について調べている。この際、数値解析結果の妥当性を評価するために実験結果との比較を行っている。

第5章では、水中に置かれた2本の水平な楕円形伝熱管が同軸および異軸配置された場合、管の楕円率や軸間距離、また管の壁温と水温をパラメータとして変化させた場合において数値解析と実験を行っている。

第6章では、本論文の結論である。

参考文献

- (1) 黒田尚紀：“流下液膜式凍結濃縮システム”，日本冷凍空調学会，82(955), pp.409-413, (2007).
- (2) 齋藤武雄，廣瀬宏一：“密度反転を伴う水平円管内の2次元凍結の研究”，日本冷凍空調学会，54(624), pp.845-852, (1979).
- (3) 齋藤武雄：“密度反転領域における水平円柱まわりの2次元凍結の実験”，日本冷凍空調学会，53(612), pp.891-896, (1978).
- (4) 笹口健吾，草野剛嗣，北川秀昭：“二円筒回りの固-液相変化（水の密度逆転の影響に関する実験的研究）”，日本機械学会論文集 B 編, 61(581), pp.208-214, (1995).
- (5) 鳥越邦和，仲沢優司，木下和彦：第28回伝熱シンポジウム講演，pp.334(1991).
- (6) 笹口健吾：“多孔質層内の固-液相変化 水の密度逆転が矩形領域の融解過程に及ぼす影響”，日本機械学会論文集 B 編, 60(580), pp.4138-4144, (1994).
- (7) 齋藤武雄，廣瀬宏一：“密度反転領域における水平円柱まわりの二次元凍結問題の数値解法”，日本機械学会論文集 B 編, 46(405), pp.971-980, (1980).
- (8) 笹口健吾，草野剛嗣：“矩形容器内に置かれた円筒回りの固-液相変化-凝固過程の数値解析-”，日本冷凍協会論文集, 12(3), pp.295-306, (1995).
- (9) T.J.Scanlon and M.T.Stickland: “A numerical analysis of buoyancy-driven melting and freezing”, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 47, No. 3, pp.429-436, (2004).
- (10) 千葉良一，泉正明：“周囲から冷却される円管内を流れる水の凍結挙動解析：凍結回避のための限界流速と氷による管閉塞時間”，日本冷凍空調学会論文集, 23(1), 25-32, (2006).
- (11) K.Sasaguchi and H.Takeo: “Effect of the orientation of a finned surface on the melting of frozen porous media”, Int. J. Heat Mass Transfer, Volume 37, Issue1, pp.13-26, (1994).
- (12) 廣瀬宏一，高橋勇樹，地代所昌幸：“水中に置かれた水平伝熱管周りの相変化伝熱特性”，日本冷凍空調学会論文集, 25(2), pp.141-148, (2008).
- (13) 佐々木治，廣瀬宏一，地代所昌幸，藤田尚毅：“水中に置かれた2本円管周りの凍結現象とブリッジング時間”，日本冷凍空調学会論文集, 28(4), pp.353-362, (2011).

第2章 数値解析

2.1 緒言

数値流体力学(Computational Fluid Dynamics, CFD)とは、計算機を利用して流体力学の支配方程式を数値的に解き、様々な流体力学の問題に対する答えを出すものである。1970年代半ばに出てきた陰解法は渦度のつまったせん断層のひとつである境界層をよりよく捕らえるため、壁付近に多くの格子が必要となる。そのため、陽解法ではCLF条件(Courant-Friedrichs-Levy condition)のため時間刻みに制限が出てくる。陰解法を使うことによりこの条件が緩和され、より短い時間で計算が可能となる。

数値流体力学の基本的な考え方は理論流体力学で使用されている連続関数による流体の記述を離散的なものに置き換えることである。すなわち、流体の方程式を離散的な方程式で記述する。理論流体力学と違って、数値流体力学における流体の状態は離散関数で表される。それらの離散関数は空間および時間に関して、有限個の点の集合において定義される。これらの離散関数は適当な離散方程式あるいは代数方程式によって支配され、それらは考えている現象を十分記述できるように物理モデルから誘導される。

ナビエ・ストークス方程式などの微分方程式を離散化する手法として、差分法、有限体積法、有限要素法の3種類が主なものとして挙げられる。コンピュータは微分方程式を解析的に解くことはできないため、解くべき領域に配置された有限個の格子点上において、未知数に関する代数方程式や関係式を作ることが要求される。これを離散化という。これらの式をもとに、連立方程式を解いたり、あるいは単純な四則演算により未知数を求めることになる。数値計算法として広く利用される差分法は微分方程式に現れる微分項をテイラー級数展開を利用して表現する手法である。つまり離散化に要求される精度にあわせて、格子点やその近隣の格子点のテイラー級数展開による関係式を組み合わせ、微分項を近似的に表す。打ち切り誤差を格子幅の2乗のオーダーにとること、つまり2次精度が一般的であるが、3次精度以上の高次精度に取ることも容易である。

有限体積法は、運動量や質量の保存則を満たしやすいうように、積分で基礎方程式を離散化する手法である。具体的には、考えている格子点を中心とした微小領域内で方程式を積分し、その境界の値を近隣の格子点を利用して求められる精度で与えて、積分式を離散化するものである。微小領域で保存則を満たすことは、ナビエ・ストークス方程式などの基礎方程式を求めるときに当然実行されてきている。しかし、最終的に得られた微分方程式を単純に差分した場合には、離散式が保存則を満たさない事態が発生することもある。これに対し、有限体積法は積分してから離散化するため、常にその微小領域内の運動量などの出入りを考えていることになり、保存則を確実に満たす離散式を得ることができる。

有限要素法は、未知数を求められている精度の近似関数で表現し、その係数の大きさを重み付き残差法などを利用して微小領域ごとに決定するものである。多くの場合、三角形の微小領域を組み合わせて計算領域を構成し、流れ場の複雑な境界形状にも容易に対応できる特徴を有する。一方、高レイノルズ数流れのように、壁面近くに大きな速度勾配が存在するために格子を集中する必要がある場合には、その収束性などに問題が残ることがある。本研究では、離散化手法として有限体積法を採用する。これを選んだ理由は、上述の保存性を満たしやすい性質のみならず、非圧縮性流れの数値解法の1つである SIMPLE 解法の導入にも関連する。この解法は、定常流れを効率的に解くことができ、パソコンやワークステーションなどの小型計算機での利用にも十分耐えられるものである。長い間の経験と伝統から SIMPLE 解法と有限体積法が一体化して発展しており、本研究ではこの手法を踏襲する。

2.1 物理モデルおよび座標系

図 2.1.1 に伝熱管本数がそれぞれ 2 本管の場合の本研究で用いた物理モデル及び座標系を示す。

物理モデルは周囲が水に満たされた領域に管を水平に配置し、管内部に冷媒を流し込み管の周りに凍結層ができることを想定している。また、伝熱管の配置については、垂直方向軸間距離 D_y を、水平方向距離 D_x を取り、伝熱管の相互配置を決めている。伝熱管表面温度は予め設定されている温度（上部管，下部管共に $-10.0\text{ }^{\circ}\text{C}$ ）を保持しているため、その影響で管周囲の水が冷却され、自然対流が発生するとともに、凍結層が形成されてゆく。図 2.1.1 中の一点鎖線は計算領域を表す周囲境界を示し、破線は計算領域を連結している部分であり、流れや温度の移動が円滑に繋がるようにしている。固体断熱壁を想定した場合は、non-slip 条件及び、断熱条件を与えた。座標系については、計算領域左下を原点とするデカルト (x, y) 座標系を用いている。

伝熱管周囲に満たされている PCM は、入手や扱いが容易で環境負荷もなく、界面形状が比較的はっきり捉えることが出来る水を使用した。管の材質については、銅のような熱伝導率が非常に良いものを想定し、管肉厚部分では管の半径方向に温度分布は生じないものと考え、解析的には肉厚部分は無視できるものとした。

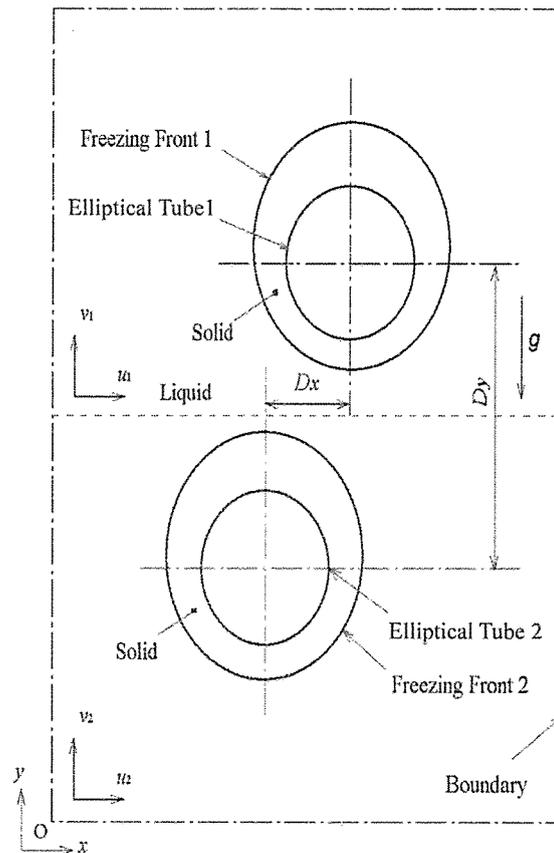


Fig. 2.1.1 Physical model and coordinate systems for two elliptical tubes.

2.2 仮定

数値解析を進めるにあたり、次のような仮定を導入した。

- (1) 流れは二次元層流で非圧縮である。
- (2) 液体の密度は浮力項のみで変化する。
- (3) 相変化による体積変化はない。
- (4) 過冷却現象は発生しない。

以上の仮定を用い、基礎方程式の導出及び離散化を行う。

2.3 流れ解析

管周囲の流れを解析するにあたり、任意の管形状に沿った境界条件を設定することが出来るように、境界適合座標法を使用した。境界適合座標法は物理平面での解析領域を一般座標系における計算平面へと座標変換し、計算平面上で支配方程式を解く方法である。本解析では、デカルト座標系 (x, y) における基礎方程式を基に、一般座標系 (ξ, η) における計算平面での式に変換して解析を行った。

2.3.1 基礎方程式

自然対流場における二次元デカルト座標系の基礎方程式は以下ようになる。

連続の式

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial y_k} = 0 \quad (2.3.1)$$

x 方向の運動方程式

$$\frac{\partial u_k}{\partial t_k} + u_k \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + v_k \frac{\partial u_k}{\partial y_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_k}{\partial x_k} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial y_k^2} \right) \quad (2.3.2)$$

y 方向の運動方程式

$$\frac{\partial v_k}{\partial t_k} + u_k \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + v_k \frac{\partial v_k}{\partial y_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_k}{\partial y_k} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_k}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2 v_k}{\partial y_k^2} \right) + b_{y,k} \quad (2.3.3)$$

エネルギー式

$$\frac{\partial T_k}{\partial t_k} + u_k \frac{\partial T_k}{\partial x_k} + v_k \frac{\partial T_k}{\partial y_k} = a \left(\frac{\partial^2 T_k}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2 T_k}{\partial y_k^2} \right) \quad (2.3.4)$$

ここで、 $b_{y,k}$ は体積力、 a は温度伝導率で $a = \lambda / \rho c_p$ である。

(以後、式中の下添え字 k は省略する)

ある点の圧力 p は流動に起因する p' と、位置 y における温度 T_∞ の静止流体圧 p_∞ (y のみの関数) によって次のように表される。

$$p = p' + p_\infty \quad (2.3.5)$$

ここで、 $p_\infty = \rho_\infty g(H - y)$ とする。

これを x 、 y で微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial p'}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial p'}{\partial y} + \frac{\partial p_\infty}{\partial y} = \frac{\partial p'}{\partial y} - \rho_\infty g \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

ここで p_∞ は位置 y における圧力である。 y 方向における b_y は、本解析においては重力のみであるから、 $b_y = -g$ と考えれば良い。従って式(2.3.6)より運動方程式はそれぞれ次のようになる。

x 方向の運動方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2.3.7)$$

y 方向の運動方程式

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\rho_\infty}{\rho} - 1 \right) g \quad (2.3.8)$$

本解析では管周囲の PCM として密度反転を有する水を考えているため、密度反転の影響を浮力項に組み込まなくてはならない。 y 方向の運動方程式における右辺第 3 項は浮力項であり、 ρ は局所温度 T に対応する密度である。 ρ_∞ は位置 y における温度 T_∞ の密度であるから、基準となる温度における密度である。水の密度反転の影響を考慮する際には、水の密度と温度の関係式として藤井の式⁽¹⁾を用いた。藤井の式は次式のようになる。

$$\rho = \rho_{mi} \frac{1}{1 + \beta_1 T + \beta_2 T^2 + \beta_3 T^3 + \beta_4 T^4} \quad (2.3.9)$$

ただし、

$$\rho_{mi} = 0.9998396 (\text{g/cm}^3)$$

$$\beta_1 = -0.678964520 \times 10^{-4} (1/^\circ\text{C})$$

$$\beta_2 = 0.907294338 \times 10^{-5} (1/^\circ\text{C}^2)$$

$$\beta_3 = -0.964568125 \times 10^{-7} (1/^\circ\text{C}^3)$$

$$\beta_4 = 0.873702983 \times 10^{-9} (1/^\circ\text{C}^4)$$

藤井の式による温度と密度の関係は図 2.3.1 のようになる。

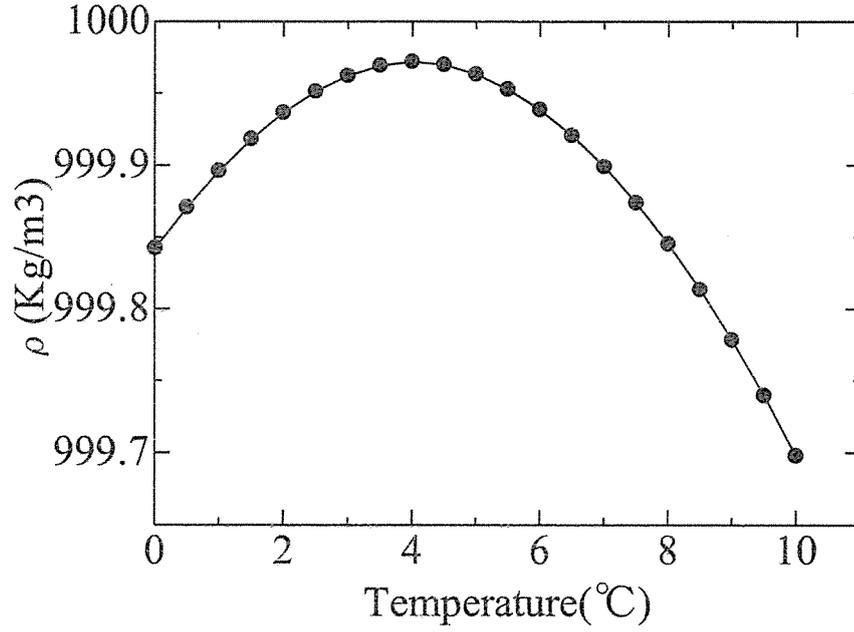


Fig. 2.3.1 Relationship of temperature and water density by Fujii's equation.

藤井の式を用いて浮力項を整理すると以下のようなになる。

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\rho_\infty}{\rho} - 1\right)g &= \left(\frac{\frac{\rho_{mi}}{1 + \beta_1 T_\infty + \beta_2 T_\infty^2 + \beta_3 T_\infty^3 + \beta_4 T_\infty^4}}{\frac{\rho_{mi}}{1 + \beta_1 T + \beta_2 T^2 + \beta_3 T^3 + \beta_4 T^4}} - 1 \right) g \\
&= \left(\frac{1 + \beta_1 T + \beta_2 T^2 + \beta_3 T^3 + \beta_4 T^4}{1 + \beta_1 T_\infty + \beta_2 T_\infty^2 + \beta_3 T_\infty^3 + \beta_4 T_\infty^4} - 1 \right) g \\
&= \left(\frac{g}{1 + \beta_1 T_\infty + \beta_2 T_\infty^2 + \beta_3 T_\infty^3 + \beta_4 T_\infty^4} \right) \{ \beta_1 (T - T_\infty) \\
&\quad + \beta_2 (T^2 - T_\infty^2) + \beta_3 (T^3 - T_\infty^3) + \beta_4 (T^4 - T_\infty^4) \} \\
&= \left(\frac{(T - T_\infty)g}{1 + \beta_1 T_\infty + \beta_2 T_\infty^2 + \beta_3 T_\infty^3 + \beta_4 T_\infty^4} \right) \{ \beta_1 + \beta_2 (T + T_\infty) \\
&\quad + \beta_3 (T^2 + TT_\infty + T_\infty^2) + \beta_4 (T + T_\infty)(T^2 + T_\infty^2) \} \\
&= \left(\frac{(T - T_\infty)g}{1 + \beta_1 T_\infty + \beta_2 T_\infty^2 + \beta_3 T_\infty^3 + \beta_4 T_\infty^4} \right) \\
&\quad \times \{ (\beta_1 + 2\beta_2 T_\infty + 3\beta_3 T_\infty^2 + 4\beta_4 T_\infty^3) \\
&\quad + (T - T_\infty)(\beta_2 + 3\beta_3 T_\infty + 6\beta_4 T_\infty^2) \\
&\quad + (T - T_\infty)^2 (\beta_3 + 4\beta_4 T_\infty) + (T - T_\infty)^3 \beta_4 \} \tag{2.3.10}
\end{aligned}$$

式を扱い易くするために次の変数を改めて定義する。

$$\begin{aligned}
A &= 1 + \beta_1 T_\infty + \beta_2 T_\infty^2 + \beta_3 T_\infty^3 + \beta_4 T_\infty^4 \\
B &= \beta_1 + 2\beta_2 T_\infty + 3\beta_3 T_\infty^2 + 4\beta_4 T_\infty^3 \\
C &= \beta_2 + 3\beta_3 T_\infty + 6\beta_4 T_\infty^2 \\
D &= \beta_3 + 4\beta_4 T_\infty \\
E &= \beta_4
\end{aligned} \tag{2.3.11}$$

また代表体膨張係数 β を

$$\beta = \frac{B}{A} \tag{2.3.12}$$

とすれば、 y 方向の運動方程式における浮力項は次式のようにになる。

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\rho_\infty}{\rho} - 1\right)g &= \frac{g}{A}(T - T_\infty)\{B + (T - T_\infty)C + (T - T_\infty)^2 D + (T - T_\infty)^3 E\} \\
&= g\beta(T - T_\infty)\left\{1 + \frac{(T - T_\infty)C}{B} + \frac{(T - T_\infty)^2 D}{B} + \frac{(T - T_\infty)^3 E}{B}\right\}
\end{aligned} \tag{2.3.13}$$

従って、 y 方向の運動方程式は

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + g\beta(T - T_\infty)f(T) \tag{2.3.14}$$

ここで関数 $f(T)$ は

$$f(T) = \left\{ 1 + \frac{(T - T_\infty)C}{B} + \frac{(T - T_\infty)D}{B} + \frac{(T - T_\infty)E}{B} \right\} \tag{2.3.15}$$

である。

以上から二次元デカルト座標系の基礎方程式は次のように展開された。

連続の式

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{2.3.1}$$

x 方向の運動方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2.3.7)$$

y 方向の運動方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + g\beta(T - T_\infty)f(T) \\ f(T) &= \left\{ 1 + \frac{(T - T_\infty)C}{B} + \frac{(T - T_\infty)D}{B} + \frac{(T - T_\infty)E}{B} \right\} \end{aligned} \quad (2.3.8')$$

エネルギー式

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (2.3.4)$$

以後、式中の p' を p と表記する)

ここで以後の式変形を簡略化するために、運動方程式とエネルギー式については変数 f の輸送方程式として一般形を用い、次式のように定義する。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uf) + \frac{\partial}{\partial y}(vf) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial f}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial f}{\partial y} \right) = S \quad (2.3.16)$$

各方程式は、式(2.3.16)の f , Γ , S が以下のように対応している。

運動方程式

$$\begin{array}{lll} \langle x \text{ 方向} \rangle & f = u & \Gamma = \nu & S = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \langle y \text{ 方向} \rangle & f = v & \Gamma = \nu & S = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + g\beta(T - T_\infty)f(T) \\ \text{エネルギー式} & f = T & \Gamma = a & S = 0 \end{array} \quad (2.3.17)$$

2.3.2 座標変換

物理平面 (x, y) における基礎方程式を計算平面 (ξ, η) に変換するには、物理平面での微係数を計算平面の微係数に変換すればよい。

はじめに、チェイン・ルールと呼ばれる両平面の変換法則について述べる。 ξ 方向の微分は、 (x, y) 平面との関係から

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (2.3.18)$$

で与えられる。 η 方向の微分も同様に求め、行列の形で表すと

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x_\xi & y_\xi \\ x_\eta & y_\eta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (2.3.19)$$

となる。従って変数 f の任意方向の微分は

$$\begin{pmatrix} f_\xi \\ f_\eta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x_\xi & y_\xi \\ x_\eta & y_\eta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} \quad (2.3.20)$$

である。これを f_x, f_y について解くと

$$f_x = \frac{1}{J} (y_\eta f_\xi - y_\xi f_\eta) \quad (2.3.21)$$

$$f_y = \frac{1}{J} (-x_\eta f_\xi + x_\xi f_\eta)$$

$$J = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi \quad (2.3.22)$$

となる。ここで J (Jacobian) は座標変換係数の行列式であり、物理平面におけるセルの面積に相当する。以上で物理平面上の微係数を計算平面上に変換できたことになる。

なお、以後の式の変換を容易にするため、逆方向にチェイン・ルールを適用して次式を得る。これは式(2.3.20)における (x, y) と (ξ, η) を取り替えたものである。

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f_\xi \\ f_\eta \end{pmatrix} \quad (2.3.23)$$

幾何学量 $\xi_x, \xi_y, \eta_x, \eta_y$ は式(2.3.21)の f に ξ, η を代入することにより得られる。

$$\xi_x = \frac{y_\eta}{J}, \quad \xi_y = -\frac{x_\eta}{J}, \quad \eta_x = -\frac{y_\xi}{J}, \quad \eta_y = \frac{x_\xi}{J} \quad (2.3.24)$$

計算平面における座標である ξ, η に沿った速度を表す反変速度成分 U, V を次のように定義する.

$$\begin{aligned} U &= J(\xi_x u + \xi_y v) \\ V &= J(\eta_x u + \eta_y v) \end{aligned} \quad (2.3.25)$$

はじめに、式(2.3.1)に示した物理平面における連続の式について計算平面への変換を行う.

式(2.3.23), 式(2.3.25)を用い、両辺に J を掛けると次式のように変換される.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \xi_x u_\xi + \eta_x u_\eta \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \xi_y v_\xi + \eta_y v_\eta \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} = 0 \end{aligned} \quad (2.3.26)$$

x, y 方向の運動方程式(式(2.3.7), 式(2.3.8'))及びエネルギー式(式(2.3.4))については変数 f の輸送方程式を用い、各項ごとに物理平面から計算平面への変換を行う. 一般化した f の輸送方程式を再度示す.

$$\frac{\partial f}{\partial t_0} + \frac{\partial}{\partial x}(uf) + \frac{\partial}{\partial y}(vf) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial f}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma \frac{\partial f}{\partial y}\right) = S$$

対流項については

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(uf) &= \xi_x (uf)_\xi + \eta_x (uf)_\eta = \frac{1}{J} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} (J \xi_x uf) + \frac{\partial}{\partial \eta} (J \eta_x uf) \right\} \\ \frac{\partial}{\partial y}(vf) &= \xi_y (vf)_\xi + \eta_y (vf)_\eta = \frac{1}{J} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} (J \xi_y vf) + \frac{\partial}{\partial \eta} (J \eta_y vf) \right\} \\ \frac{\partial}{\partial x}(uf) + \frac{\partial}{\partial y}(vf) &= \frac{1}{J} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \{J(\xi_x u + \xi_y v)f\} + \frac{\partial}{\partial \eta} \{J(\eta_x u + \eta_y v)f\} \right] \\ &= \frac{1}{J} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \{Uf\} + \frac{\partial}{\partial \eta} \{Vf\} \right] \end{aligned} \quad (2.3.27)$$

拡散項については

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial f}{\partial x} \right) &= \xi_x \left(\Gamma \frac{\partial f}{\partial x} \right)_\xi + \eta_x \left(\Gamma \frac{\partial f}{\partial x} \right)_\eta = \frac{1}{J} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\Gamma J \xi_x \frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\Gamma J \eta_x \frac{\partial f}{\partial x} \right) \right\} \\
&= \frac{1}{J} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \Gamma J \xi_x (\xi_x f_\xi + \eta_x f_\eta) \right\} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \Gamma J \eta_x (\xi_x f_\xi + \eta_x f_\eta) \right\} \right] \\
&= \frac{1}{J} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \Gamma J (\xi_x^2 f_\xi + \xi_x \eta_x f_\eta) \right\} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \Gamma J (\xi_x \eta_x f_\xi + \eta_x^2 f_\eta) \right\} \right] \\
\frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial f}{\partial y} \right) &= \xi_y \left(\Gamma \frac{\partial f}{\partial y} \right)_\xi + \eta_y \left(\Gamma \frac{\partial f}{\partial y} \right)_\eta = \frac{1}{J} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\Gamma J \xi_y \frac{\partial f}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\Gamma J \eta_y \frac{\partial f}{\partial y} \right) \right\} \\
&= \frac{1}{J} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \Gamma J \xi_y (\xi_y f_\xi + \eta_y f_\eta) \right\} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \Gamma J \eta_y (\xi_y f_\xi + \eta_y f_\eta) \right\} \right] \\
&= \frac{1}{J} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \Gamma J (\xi_y^2 f_\xi + \xi_y \eta_y f_\eta) \right\} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \Gamma J (\xi_y \eta_y f_\xi + \eta_y^2 f_\eta) \right\} \right] \\
\frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial f}{\partial y} \right) &= \frac{1}{J} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \Gamma J (\xi_x^2 f_\xi + \xi_x \eta_x f_\eta) \right\} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \Gamma J (\xi_x \eta_x f_\xi + \eta_x^2 f_\eta) \right\} \right] \\
&\quad + \frac{1}{J} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \Gamma J (\xi_y^2 f_\xi + \xi_y \eta_y f_\eta) \right\} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \Gamma J (\xi_y \eta_y f_\xi + \eta_y^2 f_\eta) \right\} \right] \\
&\quad + \frac{1}{J} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \Gamma J (\xi_y^2 f_\xi + \xi_y \eta_y f_\eta) \right\} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \Gamma J (\xi_y \eta_y f_\xi + \eta_y^2 f_\eta) \right\} \right] \tag{2.3.28} \\
&= \frac{1}{J} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \Gamma J (q_{11} f_\xi + q_{12} f_\eta) \right\} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \Gamma J (q_{21} f_\xi + q_{22} f_\eta) \right\} \right]
\end{aligned}$$

ここで,

$$q_{11} = \xi_x^2 + \xi_y^2, \quad q_{12} = \xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y, \quad q_{21} = q_{12}, \quad q_{22} = \eta_x^2 + \eta_y^2$$

生成項については

$$S(\xi, \eta) \begin{cases} = -\frac{1}{\rho} \left(\xi_x \frac{\partial p}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) & x \text{ 方向の運動方程式} \\ = -\frac{1}{\rho} \left(\xi_y \frac{\partial p}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) + g\beta(T - T_\infty) f(T) & y \text{ 方向の運動方程式} \\ = 0 & \text{エネルギー式} \end{cases} \tag{2.3.29}$$

計算平面に変換された各項を纏めて、両辺に J を掛けて整理すると、一般座標系における変数 f の輸送方程式は次式のようなになる。

$$J \frac{\partial f}{\partial t_o} + \frac{\partial}{\partial \xi} (Uf) + \frac{\partial}{\partial \eta} (Vf) - \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \Gamma J (q_{11} f_\xi + q_{12} f_\eta) \right\} - \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \Gamma J (q_{21} f_\xi + q_{22} f_\eta) \right\} = J \cdot S(\xi, \eta) \tag{2.3.30}$$

$$q_{11} = \xi_x^2 + \xi_y^2, \quad q_{12} = \xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y, \quad q_{21} = q_{12}, \quad q_{22} = \eta_x^2 + \eta_y^2$$

2.3.3 格子生成

基礎方程式を一般座標系における計算平面に変換することに加えて、物理平面上に適切に格子を生成することによって、一般座標系の格子線を物理平面での境界に適合させる必要がある。これは計算平面の境界上に指定した物理平面における座標値から、計算平面内部の点に対応する物理平面における座標値を求めることであり、求める座標系を偏微分方程式の解と見なすことができる。

本解析においては楕円型の偏微分方程式を利用し⁽²⁾、また管及び周囲境界付近の格子線を調整するために式(2.3.31)に示すようなポアソン方程式を用いた。

$$\begin{aligned}\xi_{xx} + \xi_{yy} &= P(\xi, \eta) \\ \eta_{xx} + \eta_{yy} &= Q(\xi, \eta)\end{aligned}\tag{2.3.31}$$

上式を (x, y) から (ξ, η) に独立変数の入れ換えを行うと次式のように変換される。

$$\begin{aligned}(x_\eta^2 + y_\eta^2)x_{\xi\xi} - 2(x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta)x_{\xi\eta} + (x_\xi^2 + y_\xi^2)x_{\eta\eta} + J^2(Px_\xi + Qx_\eta) &= 0 \\ (x_\eta^2 + y_\eta^2)y_{\xi\xi} - 2(x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta)y_{\xi\eta} + (x_\xi^2 + y_\xi^2)y_{\eta\eta} + J^2(Py_\xi + Qy_\eta) &= 0\end{aligned}\tag{2.3.32}$$

式(2.3.31)の P と Q は、格子密度制御に関する関数であり次のように定義する。

$$\begin{aligned}P(\xi, \eta) &= -\sum_{i=1}^n a_i \text{sign}(\xi - \xi_i) \exp(-c_i |\xi - \xi_i|) \\ &\quad - \sum_{j=1}^m b_j \text{sign}(\xi - \xi_j) \exp\left(-d_j \left((\xi - \xi_j)^2 + (\eta - \eta_j)^2\right)^{1/2}\right) \\ Q(\xi, \eta) &= -\sum_{i=1}^n a_i \text{sign}(\eta - \eta_i) \exp(-c_i |\eta - \eta_i|) \\ &\quad - \sum_{j=1}^m b_j \text{sign}(\eta - \eta_j) \exp\left(-d_j \left((\xi - \xi_j)^2 + (\eta - \eta_j)^2\right)^{1/2}\right)\end{aligned}\tag{2.3.33}$$

図 2.3.2 は代表的な場合として、 $D=40$ mm の円管の周長と同じ、楕円率 0.85、2 本楕円管を用いて垂直方向軸間距離を $D_y = 60$ mm、水平方向軸間距離 $D_x = 20$ mm とした場合について、上述の手法を用いて生成した格子系の例である。図(a)に物理平面、図(b)に変換した計算平面を示す。そして図(c)のように 1 本分の格子を積み重ねることにより多数の管群を構成できる。このとき領域の接合面において、等間隔に格子を配置することにより、重ね合わせる際の管の配置位置や管形状による格子の変化に対応させている。

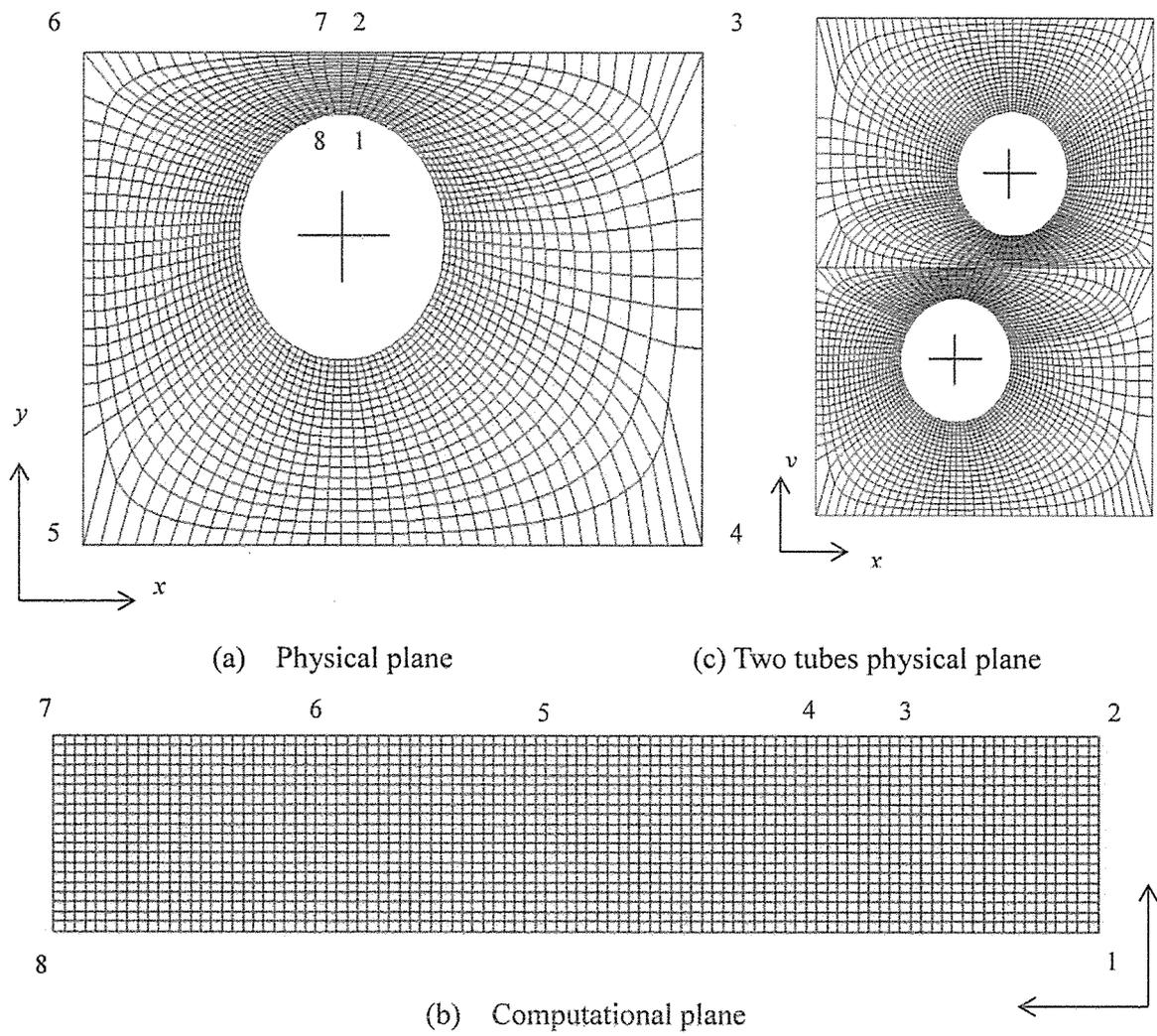


Fig. 2.3.2 Grid system around the elliptical tube.

2.3.4 離散化

一般にナビエ・ストークス方程式を用いる数値解析においては、チェスボード状の振動解を防ぐために圧力 p を速度 u, v とは異なる格子点に配置するスタガード格子が用いられる。しかし、このような変数配置を計算平面に適用するには各変数位置に対して座標変換係数が必要となり、計算量及び記憶容量が膨大になる。また壁面などの境界条件の与え方も複雑になる。そこで全ての変数を同一の格子点に配置し、チェスボード状の振動解を防ぐことができる集中格子⁽³⁾と呼ばれる手法を採用する。集中格子における変数配置を図 2.3.3 に示す。

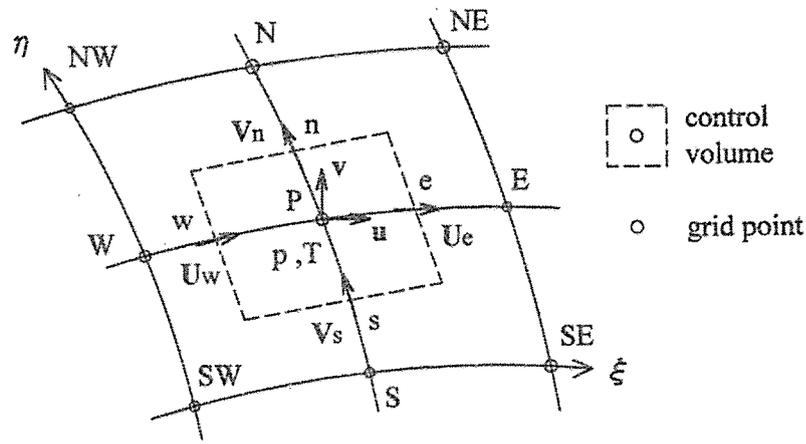


Fig. 2.3.3 Collocated grid.

一般座標系 (ξ, η) に変換された基礎方程式を図 2.3.3 に示すコントロール・ボリュームについて面積分することにより、有限体積法による離散化を行う。式(2.3.26)の計算平面における連続の式は次のように離散化される。

$$\iint \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} \right) d\xi d\eta = \Delta\eta(U_e - U_w) + \Delta\xi(V_n - V_s) = 0 \quad (2.3.34)$$

運動方程式及びエネルギー式については変数 f の輸送方程式を用い、各項ごとに離散化を行う。

式(2.3.30)の計算平面における f の輸送方程式を再度示す。

$$J \frac{\partial f}{\partial t_o} + \frac{\partial}{\partial \xi} (Uf) + \frac{\partial}{\partial \eta} (Vf) - \frac{\partial}{\partial \xi} \{ \Gamma J (q_{11} f_\xi + q_{12} f_\eta) \} - \frac{\partial}{\partial \eta} \{ \Gamma J (q_{21} f_\xi + q_{22} f_\eta) \} = J \cdot S(\xi, \eta)$$

$$q_{11} = \xi_x^2 + \xi_y^2, \quad q_{12} = \xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y, \quad q_{21} = q_{12}, \quad q_{22} = \eta_x^2 + \eta_y^2$$

対流項については

$$\begin{aligned}
& \iint \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} (Uf) + \frac{\partial}{\partial \eta} (Vf) \right\} d\xi d\eta \\
&= \Delta\eta (U_e f_e - U_w f_w) + \Delta\xi (V_n f_n - V_s f_s) \\
&= C_e \frac{f_E + f_P}{2} - C_w \frac{f_P + f_W}{2} + C_n \frac{f_N + f_P}{2} - C_s \frac{f_P + f_S}{2}
\end{aligned} \tag{2.3.35}$$

ここで,

$$C_e = U_e \Delta\eta, \quad C_w = U_w \Delta\eta, \quad C_n = V_n \Delta\xi, \quad C_s = V_s \Delta\xi$$

拡散項については

$$\begin{aligned}
& \iint \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \{ \Gamma J (q_{11} f_\xi + q_{12} f_\eta) \} + \frac{\partial}{\partial \eta} \{ \Gamma J (q_{21} f_\xi + q_{22} f_\eta) \} \right] d\xi d\eta \\
&= \Delta\eta \left[(\Gamma J q_{11} f_\xi)_e - (\Gamma J q_{11} f_\xi)_w \right] + \Delta\eta \left[(\Gamma J q_{12} f_\eta)_e - (\Gamma J q_{12} f_\eta)_w \right] \\
&\quad + \Delta\xi \left[(\Gamma J q_{21} f_\xi)_n - (\Gamma J q_{21} f_\xi)_s \right] + \Delta\xi \left[(\Gamma J q_{22} f_\eta)_n - (\Gamma J q_{22} f_\eta)_s \right]
\end{aligned} \tag{2.3.36}$$

式(2.3.36)の右辺第1項は

$$(f_\xi)_e = \frac{f_E - f_P}{\xi_E - \xi_P} \quad \text{とすると}$$

$$\begin{aligned}
\Delta\eta \left[(\Gamma J q_{11} f_\xi)_e - (\Gamma J q_{11} f_\xi)_w \right] &= d_e (f_E - f_P) - d_w (f_P - f_W) \\
\Delta\eta \left[(\Gamma J q_{11} f_\xi)_e - (\Gamma J q_{11} f_\xi)_w \right] &= d_e (f_E - f_P) - d_w (f_P - f_W)
\end{aligned} \tag{2.3.37}$$

$$d_e = \frac{\Delta\eta (\Gamma J q_{11})_e}{\xi_E - \xi_P}, \quad d_w = \frac{\Delta\eta (\Gamma J q_{11})_w}{\xi_P - \xi_W} \tag{2.3.38}$$

式(2.3.36)の右辺第2項は

$$\begin{aligned}
& \Delta\eta \left[(\Gamma J q_{12} f_\eta)_e - (\Gamma J q_{12} f_\eta)_w \right] \\
&= \Delta\eta \left[\frac{1}{2} \left\{ (\Gamma J q_{12} f_\eta)_E + (\Gamma J q_{12} f_\eta)_P \right\} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \left\{ (\Gamma J q_{12} f_\eta)_P + (\Gamma J q_{12} f_\eta)_W \right\} \right] \\
&= b_{d\eta E} (f_\eta)_E - b_{d\eta W} (f_\eta)_W
\end{aligned}$$

$$(f_\eta)_e = \frac{1}{2} \left\{ (f_\eta)_E + (f_\eta)_P \right\} \quad \text{とすると}$$

$$\begin{aligned}
& \Delta\eta \left[(\Gamma J q_{12} f_\eta)_e - (\Gamma J q_{12} f_\eta)_w \right] \\
&= \Delta\eta \left[\frac{1}{2} \left\{ (\Gamma J q_{12} f_\eta)_E + (\Gamma J q_{12} f_\eta)_P \right\} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \left\{ (\Gamma J q_{12} f_\eta)_P + (\Gamma J q_{12} f_\eta)_W \right\} \right] \\
&= b_{d\eta E} (f_\eta)_E - b_{d\eta W} (f_\eta)_W
\end{aligned} \tag{2.3.39}$$

ここで,

$$b_{d\eta E} = \frac{1}{2} (\Gamma J q_{12})_E \Delta\eta, \quad b_{d\eta W} = \frac{1}{2} (\Gamma J q_{12})_W \Delta\eta, \quad (f_\eta)_E = \frac{f_{NE} - f_{SE}}{2\Delta\eta}, \quad (f_\eta)_W = \frac{f_{NW} - f_{SW}}{2\Delta\eta}$$

式(2.3.35)の右辺第3項及び第4項についても, 式(2.3.38), 式(2.3.39)と同様に離散化できる.

右辺第3項

$$\Delta\xi \left[(\Gamma J q_{21} f_\xi)_n - (\Gamma J q_{21} f_\xi)_s \right] = b_{d\xi N} (f_\xi)_N - b_{d\xi S} (f_\xi)_S \tag{2.3.40}$$

$$b_{d\xi N} = \frac{1}{2} (\Gamma J q_{21})_N \Delta\xi, \quad b_{d\xi S} = \frac{1}{2} (\Gamma J q_{21})_S \Delta\xi, \quad (f_\xi)_N = \frac{f_{NE} - f_{NW}}{2\Delta\xi}, \quad (f_\xi)_S = \frac{f_{SE} - f_{SW}}{2\Delta\xi}$$

右辺第4項

$$\Delta\xi \left[(\Gamma J q_{22} f_\eta)_n - (\Gamma J q_{22} f_\eta)_s \right] = d_n (f_N - f_P) - d_s (f_P - f_S) \tag{2.3.41}$$

$$d_n = \frac{\Delta\xi (\Gamma J q_{22})_n}{\eta_N - \eta_P}, \quad d_s = \frac{\Delta\xi (\Gamma J q_{22})_s}{\eta_P - \eta_S}$$

生成項については

$$S(\xi, \eta) \begin{cases} = -\frac{1}{\rho} \left(\xi_x \frac{p_E - p_W}{2\Delta\xi} + \eta_x \frac{p_N - p_S}{2\Delta\eta} \right) \\ = -\frac{1}{\rho} \left(\xi_y \frac{p_E - p_W}{2\Delta\xi} + \eta_y \frac{p_N - p_S}{2\Delta\eta} \right) + g\beta(T - T_\infty) f(T) \\ = 0 \end{cases} \tag{2.3.42}$$

式(2.3.36)の右辺第2, 3項の離散化においては, 格子点Pの隣接点E, W, N, S以外の点NE, NW, SE, SWでの変数 f の値が含まれている. これらの点を未知数として扱えば, 3重対角行列解法(TDMA)を組み合わせた反復解法において係数行列の個数が多くなるなどの問題を生じる. 一般にこれらの項は格子が直交に近ければ影響

が小さくなることから、点 NE, NW, SE, SW の項は定数項と見なして生成項に加え、最新の反復によって得られた値を利用して生成項を算出する。

以上の式展開において、変数 f に対しては中心差分形を採用して展開を行った。しかし、 f の輸送方程式において二次精度の中心差分を用いた場合、対流項が大きくなると不合理な解を与えることが一般に知られている。これを防ぐため、対流が拡散に比べて小さいときには中心差分、対流が大きいつきには拡散を 0 とした 1 次精度の風上差分での値を用いるハイブリッド法を採用する⁽⁴⁾。

ハイブリッド法を用いた f の輸送方程式の離散化式は次式で表される。

$$a_p f_p = a_e f_e + a_w f_w + a_n f_n + a_s f_s + b_f + J \cdot S(\xi, \eta) \Delta \xi \Delta \eta \quad (2.3.43)$$

$$a_e = -\frac{C_e}{2} + d_e = \left[-C_e, d_e - \frac{C_e}{2}, 0 \right], \quad a_w = \frac{C_w}{2} + d_w = \left[C_w, d_w + \frac{C_w}{2}, 0 \right],$$

$$a_n = -\frac{C_n}{2} + d_n = \left[-C_n, d_n - \frac{C_n}{2}, 0 \right], \quad a_s = \frac{C_s}{2} + d_s = \left[C_s, d_s + \frac{C_s}{2}, 0 \right],$$

$$a_p = \frac{J \Delta \xi \Delta \eta}{\Delta t_o} + a_e + a_w + a_n + a_s,$$

$$b_f = b_{d\eta E} (f_\eta)_E - b_{d\eta W} (f_\eta)_W + b_{d\xi N} (f_\xi)_N - b_{d\xi S} (f_\xi)_S + \frac{J \Delta \xi \Delta \eta}{\Delta t_o} f_p^0$$

2.3.5 圧力補正式

本解析においては、連続の式から圧力補正式を導き圧力を求める SIMPLE 解法⁽⁵⁾と呼ばれる半陰的解法を採用する。

式(2.3.34)に示した連続の式を満たすため、コントロール・ボリュームの境界面での反変速度 U , V を表現する必要があり、以下のように定式化を進める。

格子点 P における物理平面での速度 u , v は、式(2.3.43)から次のように一般的な形式で離散化式を表わすことができる。

$$a_p u_p = \sum_{nb} a_{nb} u_{nb} + b_u - \left(\xi_x \frac{\partial p}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) J \Delta \xi \Delta \eta \quad (2.3.44)$$

$$a_p v_p = \sum_{nb} a_{nb} v_{nb} + b_v - \left(\xi_y \frac{\partial p}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) J \Delta \xi \Delta \eta \quad (2.3.45)$$

ここで式中に含まれる圧力勾配については、前節で述べた振動解を防ぐために特殊な平均を行うため、 u , v から圧力に関与する項を取り除く。

u , v の $\partial p / \partial \xi$ に関与しない項, u^ξ , v^ξ は以下のように定義する。

$$u_p^\xi = u_p - k_u^\xi \frac{p_E - p_W}{2\Delta \xi}, \quad k_u^\xi = -\frac{J \Delta \xi \Delta \eta}{a_p} \xi_x \quad (2.3.46)$$

$$v_p^\xi = v_p - k_v^\xi \frac{p_E - p_W}{2\Delta \xi}, \quad k_v^\xi = -\frac{J \Delta \xi \Delta \eta}{a_p} \xi_y \quad (2.3.47)$$

同様に $\partial p / \partial \eta$ に関与しない項, u^η , v^η は以下のように定義する。

$$u_p^\eta = u_p - k_u^\eta \frac{p_N - p_S}{2\Delta \eta}, \quad k_u^\eta = -\frac{J \Delta \xi \Delta \eta}{a_p} \eta_x \quad (2.3.48)$$

$$v_p^\eta = v_p - k_v^\eta \frac{p_N - p_S}{2\Delta \eta}, \quad k_v^\eta = -\frac{J \Delta \xi \Delta \eta}{a_p} \eta_y \quad (2.3.49)$$

圧力に関与する項を取り除いた速度 u^ξ , v^ξ , u^η , v^η を用いると、各境界面での反変速度は次式のように表される。

$$U_e = U_e^\xi + m_e \frac{p_E - p_P}{\Delta \xi} \quad (2.3.50)$$

$$V_n = V_n^\eta + m_n \frac{p_N - p_P}{\Delta \eta} \quad (2.3.51)$$

ここで、

$$U_e^\xi = \frac{1}{2} \{ J_P (\xi_x u_P^\xi + \xi_y v_P^\xi) + J_E (\xi_x u_E^\xi + \xi_y v_E^\xi) \} \quad (2.3.52)$$

$$V_n^\xi = \frac{1}{2} \{ J_P (\eta_x u_P^\eta + \eta_y v_P^\eta) + J_N (\eta_x u_N^\eta + \eta_y v_N^\eta) \} \quad (2.3.53)$$

$$m_e = \frac{1}{2} \{ J_P (\xi_x (k_u^\xi)_P + \xi_y (k_v^\xi)_P) + J_E (\xi_x (k_u^\xi)_E + \xi_y (k_v^\xi)_E) \} \quad (2.3.54)$$

$$m_n = \frac{1}{2} \{ J_P (\eta_x (k_u^\eta)_P + \eta_y (k_v^\eta)_P) + J_N (\eta_x (k_u^\eta)_N + \eta_y (k_v^\eta)_N) \} \quad (2.3.55)$$

U_w , V_s についても同様の手法で算出できる.

$$U_w = U_w^\xi + m_w \frac{P_P - P_W}{\Delta \xi} \quad (2.3.56)$$

$$V_s = V_s^\eta + m_s \frac{P_P - P_S}{\Delta \eta} \quad (2.3.57)$$

ここで,

$$U_w^\xi = \frac{1}{2} \{ J_W (\xi_x u_W^\xi + \xi_y v_W^\xi) + J_P (\xi_x u_P^\xi + \xi_y v_P^\xi) \} \quad (2.3.58)$$

$$V_s^\xi = \frac{1}{2} \{ J_S (\eta_x u_S^\eta + \eta_y v_S^\eta) + J_P (\eta_x u_P^\eta + \eta_y v_P^\eta) \} \quad (2.3.59)$$

$$m_w = \frac{1}{2} \{ J_W (\xi_x (k_u^\xi)_W + \xi_y (k_v^\xi)_W) + J_P (\xi_x (k_u^\xi)_P + \xi_y (k_v^\xi)_P) \} \quad (2.3.60)$$

$$m_s = \frac{1}{2} \{ J_S (\eta_x (k_u^\eta)_S + \eta_y (k_v^\eta)_S) + J_P (\eta_x (k_u^\eta)_P + \eta_y (k_v^\eta)_P) \} \quad (2.3.61)$$

式(2.3.50), (2.3.51), (2.3.56), (2.3.57)について, 右辺第2項の圧力勾配は境界面を挟んだ隣接する2点の圧力から求められることから, 圧力の振動解を防ぐことができる. ここで SIMPLE 解法を導入し, 反変速度 U , V を予測値として式(2.3.34)の連続の式を満たすように補正圧力 p' , 及び補正反変速度 U' , V' を求める.

U' , V' に対しては周囲の点の速度補正量による影響は小さく, また境界面の法線方向以外の圧力補正の影響が支配的ではないと仮定することにより, 境界面の反変速度補正量は次式で表される.

$$U_e' = m_e \frac{P_E' - P_P'}{\Delta \xi}, \quad U_w' = m_w \frac{P_P' - P_W'}{\Delta \xi} \quad (2.3.62)$$

$$V_n' = m_n \frac{P_N' - P_P'}{\Delta \eta}, \quad V_s' = m_s \frac{P_P' - P_S'}{\Delta \eta} \quad (2.3.63)$$

ここで、上添え字アスタリスク(*)は圧力・速度の予測値を、上添え字プライム(')は補正值を示す。求める真の値と推測値、補正值との関係式は次式のようなになる。

$$U_e = U_e^* + U_e', \quad U_w = U_w^* + U_w', \quad V_n = V_n^* + V_n', \quad V_s = V_s^* + V_s' \quad (2.3.64)$$

式(2.3.62), (2.3.63), (2.3.64)を式(2.3.34)の連続の式に代入して整理すると、次式のような圧力補正量 p' の離散化式を得ることができる。

$$a_p p_p' = a_E p_E' + a_W p_W' + a_N p_N' + a_S p_S' + b \quad (2.3.65)$$

$$a_E = m_e \frac{\Delta \eta}{\Delta \xi}, \quad a_W = m_w \frac{\Delta \eta}{\Delta \xi},$$

$$a_N = m_n \frac{\Delta \xi}{\Delta \eta}, \quad a_S = m_s \frac{\Delta \xi}{\Delta \eta}$$

$$a_p = a_E + a_W + a_N + a_S$$

$$b = \Delta \eta (U_e^* - U_w^*) + \Delta \xi (V_n^* - V_s^*)$$

式(2.3.65)に対して3重対角行列解法(TDMA)を組み合わせた緩和法を用いることにより、 p' を算出することができる。

2.3.6 境界条件

・伝熱管壁面

実験での管壁温度は、 $t=0$ でステップ的に目標温度に到達するのは困難であり、図 2.3.4 に示す破線のように変化した。そこで、解析において実験結果との比較をする際には、管壁面温度として実験による平均値を使用することとし、等温条件とした。流れに対する境界条件としては non-slip 条件を与えた。

$$\text{管壁} \quad : \quad T = T_w, \quad u = 0, \quad v = 0 \quad (2.3.66)$$

・周囲境界

周囲境界条件として断熱条件を与えている。

断熱条件

$$\text{(上下境界)} \quad : \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad u = 0, \quad v = 0 \quad (2.3.67)$$

$$\text{(左右境界)} \quad : \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad u = 0, \quad v = 0 \quad (2.3.68)$$

管本数を 2 本とした場合の解析の接合境界面においては、1 本管の場合の計算領域を積み重ねる方法で行っている。その際には領域接合部分において他計算領域の影響を組み込んだ計算をしなければならない。図 2.3.5 には計算を行う際の接合部分における境界条件の位置を示す。図中の赤のプロットが境界条件として組み込むために必要な格子点の場所であり、青の領域が計算対象の領域である。図 2.3.5 (a) のように管 1 の領域は、接合面を含んで計算を行う。計算を行う際には、管 2 の領域の一部を境界の外側の計算上、必要な格子点データとして使用する。これによって、管 2 の領域の影響を加味できる。そして、この計算で得られた接合面での値を、図 2.3.5 (b) のように管 2 の計算を行う際の境界条件として用いることで、管 1 の影響を加味した管 2 の領域の値を得ることが出来る。これを解が安定するまで繰り返すことで、管 1 及び管 2 の領域が 1 つの領域のように接合される。

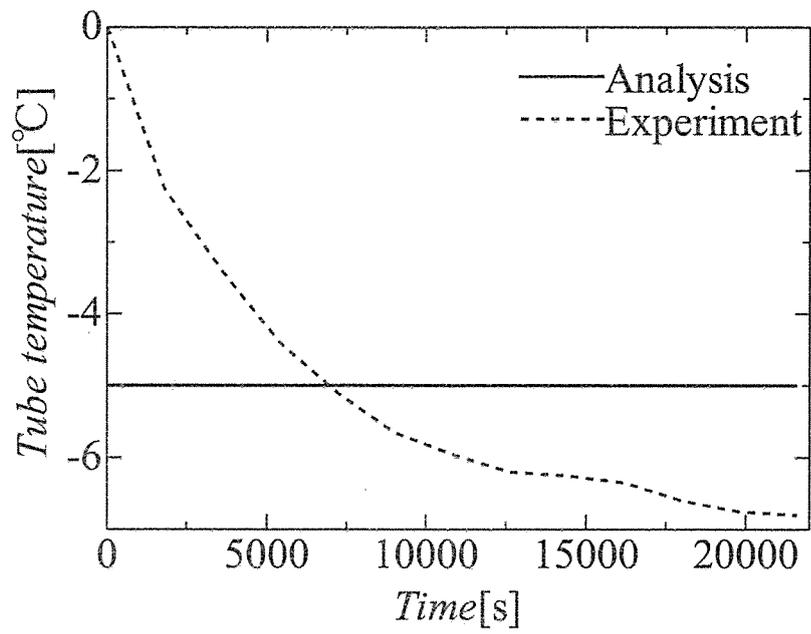
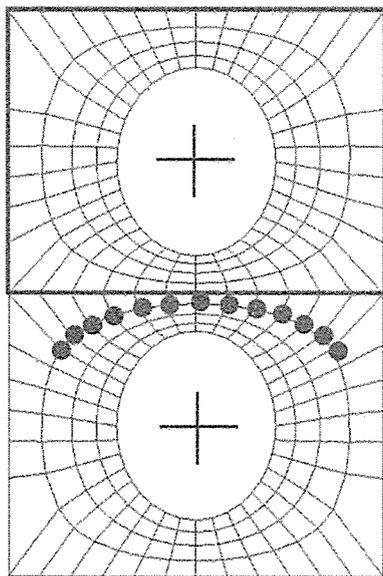
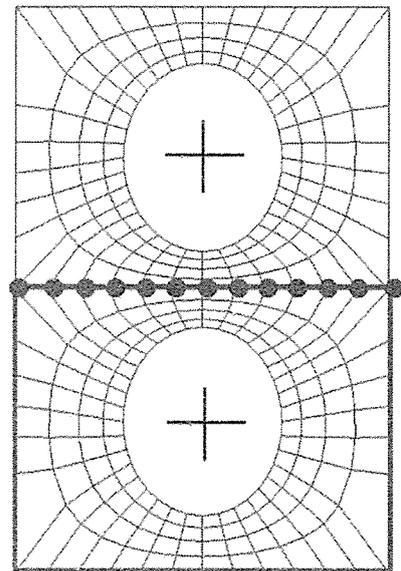


Fig. 2.3.4 Time history of tube wall temperature.



(a) Calculation domain 1



(b) Calculation domain 2

Fig. 2.3.5 Combined condition for coupling two calculation domains.

2.3.7 相変化の取り扱い

凝固・融解現象など相変化問題（移動境界問題）の最大の特徴は、考える領域の内部に2つの相（固相と液相）、あるいは領域を分割する界面が存在し、その界面の位置は未知であることである。このことから相変化現象を解析する際に2つの相を別々に考えた場合には、界面位置を決定するためエネルギーバランス式を連成させた複雑な方程式を解かなければならないという問題がある。そこで本解析では、そういった問題に対して固相・液相を区別せず単相扱いすることができるように、Single-domain model である潜熱を比熱に組み込む方法⁽⁶⁾を採用した。

- ・ 潜熱を比熱に組み込む方法

相変化が起こる温度領域（PCZ）を次のように仮定する。

$$T_2 \leq T \leq T_1 \quad (2.3.69)$$

この領域内で相変化時の潜熱を比熱に組み込むためには、以下のように行う。

$$L = \int_{T_2}^{T_1} c_{latent}(T) dT \quad (2.3.70)$$

$$c_{ph} = c_p + c_{latent} \quad (2.3.71)$$

ここで c_{latent} は潜熱分の比熱であり、 c_{ph} は相変化時の潜熱を組み込んだ比熱である。図 2.3.6 には比熱と温度の関係をグラフ化したものを示す。本研究では、以下のようを与えることで潜熱を比熱に組み込んでいる。

$$\begin{aligned} \Delta T &= T_1 - T_2 \\ c_{latent} &= \frac{L}{\Delta T} \\ c_p &= \frac{c_{p,s} + c_{p,l}}{2} \\ c_{ph} &= c_{latent} + c_p \end{aligned} \quad (2.3.72)$$

$$L = 333 \text{ (kJ/kg)}, T_1 = 0.01 \text{ (}^\circ\text{C)}, T_2 = -0.5 \text{ (}^\circ\text{C)}, c_{p,l} = 4.18 \text{ (kJ/kg} \cdot \text{K)}, c_{p,s} = 2.217 \text{ (kJ/kg} \cdot \text{K)}$$

格子点上での固相・液相の判定は、各格子点の温度を観測し、 T_1 以上の場合は液相、 T_1 より小さい場合は固相としている。固相となった格子点については速度を 0 とし、エネルギー式のみ扱いとなる。

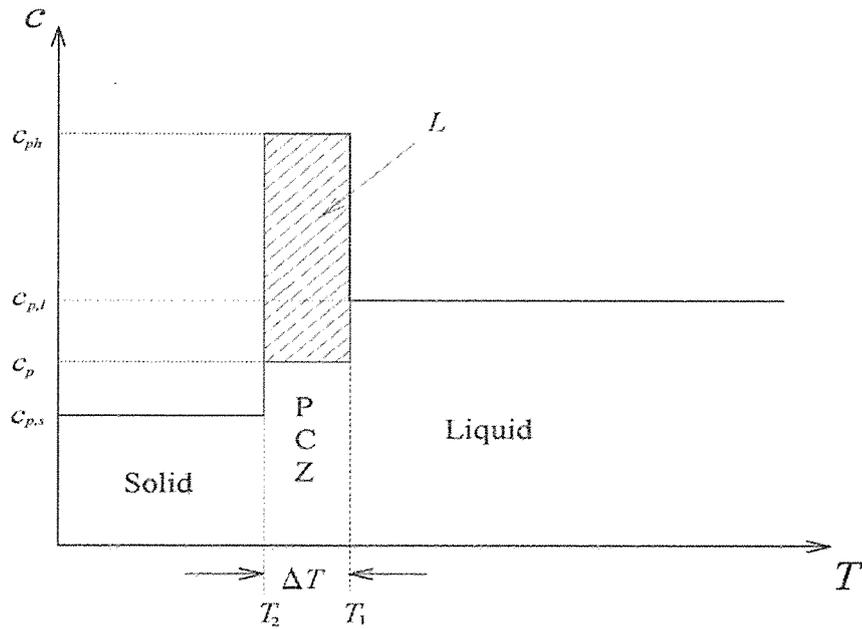


Fig. 2.3.6 Variation of specific heat capacity c_p dependence on temperature.

2.4 解析手法および検討

数値解析を行なうにあたっては、準定常近似解法に基づき行なった。これは相変化時の潜熱が大きいときに成り立つものであり、相変化により界面が移動する速度よりも、流れ場や速度場が安定する速度の方が速いという考えによるものである。

2.4.1 数値解析の流れ

図 2.4.1 に本解析における 2 本管の場合のフローチャートを示す。管本数が 3 本となった場合でも、管 2 の計算後、管 3 の計算が入るだけであり、さらに管本数が増加しても同様である。本解析においては、複数本の管の周囲の流れを対象としているが、流れを計算する際は管周囲の全計算領域に対して一括して計算を行うのではなく、上に位置する管の周囲の計算を行い、接合境界面が持つ値を下に位置する管の周囲の境界条件として与え計算を行う。その結果をさらに下に位置する管の周囲の境界条件として与えると共に、上に位置する管周囲の 1 つ先の時間ステップにおける境界条件として与えることで、次々と複数本配置した管周囲の全計算領域の計算を進めている。全ての管の計算が終了し、解が収束した段階で次の時間ステップに移る。新しい時間での計算を行う前に、全ての管の計算領域で温度を観測し、固相の場合には速度を 0 としている。これを所定の時間まで計算し、流れ場、温度場を求めた。なお、この手法は流れの向きと管の計算順序に関係なく適用することが可能であり、拡張性を有するものである。

水及び氷の熱物性値は，伝熱工学資料⁽⁷⁾に記載されている，0℃，27℃の値を線形近似することで求めた．以下に近似式を示す．

水の熱物性値

$$\begin{aligned}
 c &= -0.0014T_i + 4.217 && (\text{kJ/kg} \cdot \text{K}) \\
 \lambda &= 0.0018T_i + 0.562 && (\text{W/m} \cdot \text{K}) \\
 \mu &= -34.909T_i + 1791.7 && (\mu\text{Pa} \cdot \text{s}) \\
 \rho &= -0.1181T_i + 999.83 && (\text{kg/m}^3)
 \end{aligned}
 \tag{2.4.1}$$

運動方程式中の浮力項の密度に関しては，藤井の式を用いている．

氷の物性値

$$\begin{aligned}
 c &= 0.0055T_s + 2.0 && (\text{kJ/kg} \cdot \text{K}) \\
 \lambda &= -0.0123T_s + 2.2 && (\text{W/m} \cdot \text{K}) \\
 \rho &= -0.0411T_s + 917 && (\text{kg/m}^3)
 \end{aligned}
 \tag{2.4.2}$$

式(2.4.1)，(2.4.2)中の T_i ， T_s はそれぞれ流体の温度，固体の温度である． T_i の値には水の凝固点と初期水温の平均値を， T_s の値には水の凝固点と管壁面温度の平均値を用いた．相変化領域での密度，比熱，熱伝導率については，固相と液相の物性値の平均を使用している．解析では過冷却現象を考慮していないため，実験結果との比較を行う際の初期水温には，実験において過冷却が解除した時点での水槽内の平均水温を使用している．

本解析では，円管，楕円管 ($\alpha=0.7, 0.85$) の2種類の管形状を使用する．楕円管の全周が円管と等しくなるようにし，管表面の温度条件が等しい場合に伝熱量が等しくなるように定めた．また，楕円管の場合に，配置角度 ϕ_g を 0° とした縦型， 90° とした横型を想定した．図2.4.2には管形状と配置角度の詳細図を示す．

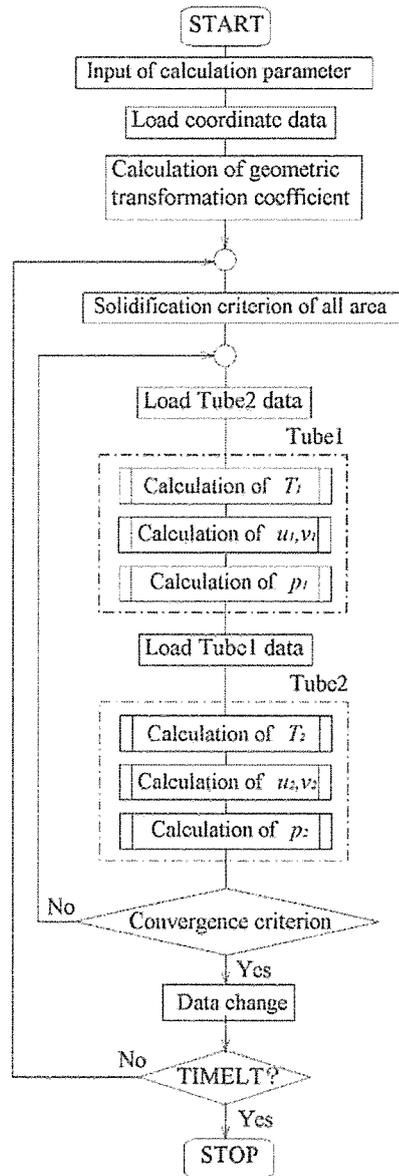


Fig.2.4.1 Flow chart for numerical calculation.

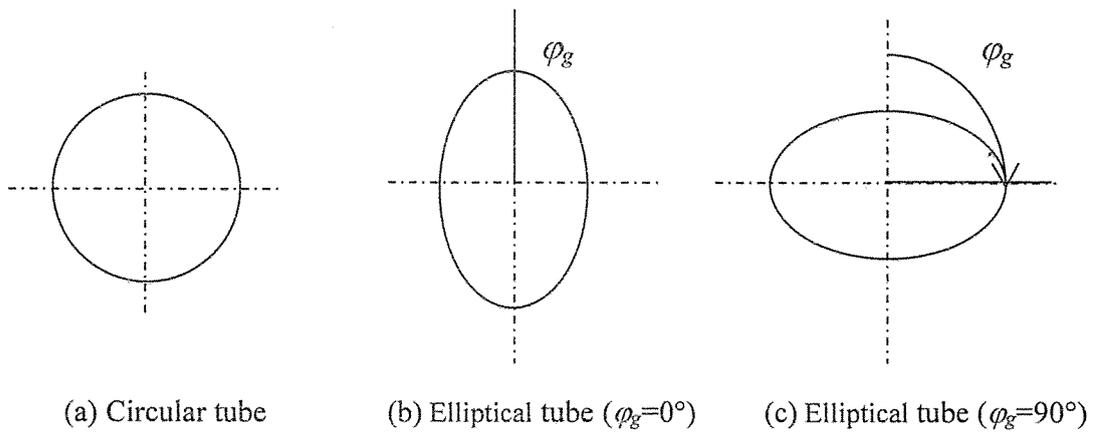


Fig.2.4.2 Tube geometry and inclined angle.

2.4.2 格子依存性

解析を進める前に、総格子点数の変化による流れ場の影響を調べた。この際には、管周りの自然対流について、総格子点数の変化に対する平均 Nu 数の変化を調べることで格子依存性の確認を行った。本解析には、周囲境界に対する流動条件として、固体壁を想定し流れが停止する場合である。そこで、固体壁を想定し流れが停止する場合の境界条件として、基準温度を定義できる等温条件を使用して、平均 Nu 数の格子依存性を確認した。解析は有次元で行なっているが、有次元での結果から各無次元変数を算出する際には以下の式を用いている。

$$Ra = \frac{g\beta(T_i - T_\infty)D^3}{\nu\alpha}$$

$$Nu_j = \frac{\partial T^+}{\partial \eta^+} \tag{2.4.3}$$

$$\overline{Nu} = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} (Nu_j R_j) d\theta$$

図 2.4.3 には、仮想境界面に断熱壁が存在することを仮定し、 Ra 数が 6.64×10^4 の条件とし、その代表として等温条件としたモデルの、総格子点数の変化による平均 Nu 数の変化を示す。自然対流の場合は、一般的に Ra 数が 6.64×10^4 では、平均 Nu 数が 7 付近となることが知られているが、本解析結果でも 7 付近となっており、流れの解析手法は妥当であることが分かる。図から、総格子点数が約 7500 点以上の場合に平均 Nu 数の変化がほとんど見られなくなっている。このことから仮想境界面として壁を想定した際には、計算精度と解析時間を考慮したうえで、総格子点数を 7500 点付近 ($M=50$, $N=150$) にすることと決定した。

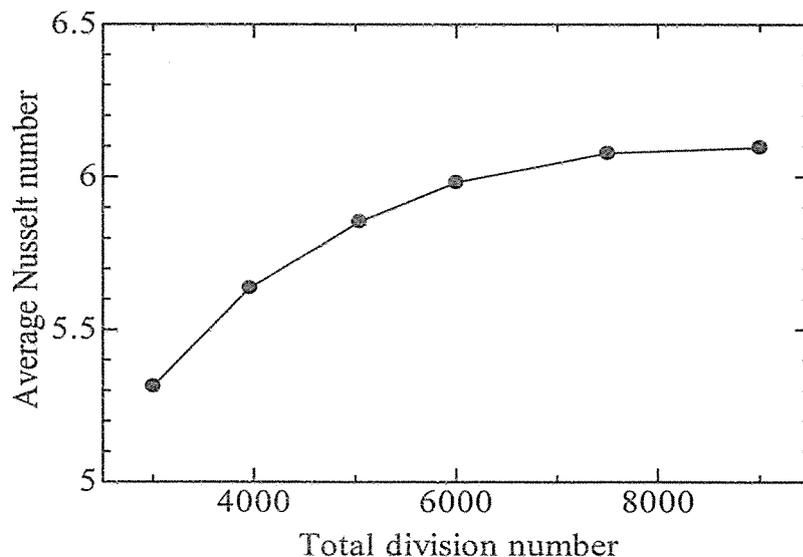


Fig.2.4.3 Average Nusselt number for isothermal condition.

2.5 結言

本研究ではスタティック型の氷蓄熱装置をモデル化し、蓄熱槽のコンパクトと蓄熱密度の向上を目指している。よって水槽は比較的小さく水の出入りが無い壁に囲まれた閉じた系を想定している。このため、水槽全体としての温度低下と凍結現象を把握するためには、滑りなしの断熱条件が妥当と考えられる。また、筐口らは相変化の取り扱いにはエンタルピ法を使用し、解析領域全体を写像する手法を使用していたため管周りの全周での相変化や対称性のない管群まわりの相変化などへの展開が困難であったが、本研究では Single-domain model を用い、潜熱を比熱に組み込む手法により、より制約のない全周を対象とした数値解析を行っている。これにより対称性を有さないモデルや管群モデルへの拡張性を考慮している。

本章で述べた数値解析法は、将来的に千鳥配置など対称ではない管配置へ比較的容易に展開できる解析法であり、水中に置かれた2本の水平楕円形伝熱管周りの凍結現象や水槽の最適化を探る本研究の目的のための解析手法として妥当と考える。

参考文献

- (1) 藤井哲, 片山功蔵, 斎藤彬夫, 服部賢, 戸田三朗 : “伝熱工学の進展 3”, 養賢堂, pp.65-68, (1974).
- (2) 小国力, 河村哲也訳, Joe F.Thompson, Z.U.A.Warsi, C.Wayne Mastin 原著 : “数値格子生成の基礎と応用”, 丸善株式会社, (1994).
- (3) C.M.Rhie and W.L.Chow : “A numerical study of the turbulent flow past an isolated airfoil with trailing edge separation”, AIAA J, 21(11), pp.1525-1532, (1983).
- (4) 水谷幸夫, 香月正司訳, S.V.Patankar 原著 : “コンピュータによる熱移動と流れの数値解析”, 森北出版, pp.82-115, (1985).
- (5) 荒川忠一 : “数値流体工学”, 東京大学出版, pp.29-73, pp.123-153, (1994).
- (6) Piia Lamberg, Reijo Lehtiniemi, Anna-Maria Henell: “Numerical and experimental investigation of melting and freezing processes in phase change material storage”, Int.J.Thermal Sciences, Volume 43, Issue 3, pp.277-287, (2004).
- (7) 日本機械学会編 : “伝熱工学資料”, 日本機械学会, pp.291-293, (2009).