岩手大学教育学部研究年報　第77巻（2018. 3）121 ～ 132

ICT 活用による数学と実社会との関わりを意識した指導の可能性
～「同じ高さに見える位置」と「アポロニウスの円」の関連を題材に～

中　村　好　則*

（2017年8月10日受付，2018年1月17日受理）

第1章　背景と目的

平成28年12月に中央教育審議会から公表された答申の算数科，数学科の目標の在り方の中で , 日本の小中学生は「実社会との関連に対して肯定的回答をする割合の改善が見られる一方で，諸外国と比べると低い状態にあり課題であること（TIMSS2015）」が述べられ，「各学校段階を通じて，実社会との関わりを意識した数学的活動の充実等を図っていくこと」の必要性が指摘されている（p.140）。実際，平成29年3月に公示された学習指導要領の目標においても，小学校算数では「日常の事象を数理的に処理する技能を身に付けるようにする」ことや「算数で学んだことを生活や学習に活用しようとする態度を養う」ことが，中学校数学では「事象を数学化したり，数学的に解釈したり，数学的に表現・処理したりする技能を身に付けるようにする」や「数学を活用して事象を論理的に考察する力」「数学的な表現を用いて事象を簡潔・明瞭・的確に表現する力」「数学を生活や学習に生かす態度」などの表現が見られ，数学と実社会との関わりを意識した指導を重視していることが分かる（波線は筆者，以下同様）。また，指導計画の作成と内容の取扱いでも「数学的な見方･考え方を働かせながら，日常の事象を数理的に捉え，算数の問題を見いだし，問題を自立的，協働的に解決し，学習の過程を振り返り，概念を形成するなどの学習が充実するようにすること（小学校算数）」「数学的な見方・考え方を働かせながら，日常の事象や社会の事象を数理的に捉え，数学の問題を見いだし，問題を自立的，協働的に解決し，学習の過程を振り返り，概念を形成するなどの学習が充実するようにすること（中学校数学）」の表現が見られる。数学と実社会との関わりを意識した指導の検討は喫緊の課題と言える。数学と実社会との関わりを意識した指導は，従来から多数の実践的研究が行われ検討されている。例えば，長崎編（2001）では，算数・数学と社会・文化とのつながりを意識した指導が，小中高校において具体的に多数提案されている。一方，算数・数学と実社会との関わりを意識した指導において, ICT を活用した実践的研究は, 長崎編（2001）の中にもいくつか見られるものの，あまり多くは見られない。ICT を活用することで，算数･数学と実社会との関わりをより密接に意識できる可能性がある。そこで，本研究では，

＊　　岩手大学教育学部

ICT（Cabri ⅡPlus，Cabri3Dなど）を活用することによって，数学と実社会との関わりを意識した指導（「同じ高さに見える位置（実社会)」と「アポロニウスの円（数学)」の関連）を構想し，大学院生を対象とした実験授業を基に，その可能性について考察することを目的とする。

第2章　研究方法

(1) 特定の課題に関する調査（論理的な思考）における「同じ高さに見える位置」に関する課題（「高さと距離」の課題）の生徒の解答状況を検討するとともに，大学生72名を対象に同じ調査を行い，その結果と併せて，数学と実社会との関わりを意識した指導の現状を考察する（第3章)。
(2) 「アポロニウスの円」の指導について，高校の教科書を検討するとともに，大学生72名を対象に質問紙調査を行い，「アポロニウスの円」の指導の現状を考察する（第4章)。
(3) (1) と (2) の結果を基に，「同じ高さに見える位置」と「アポロニウスの円」の関連を題材として，ICT活用による数学と実社会との関わりを意識した指導を構想する（第5章第1節)。
(4) 構想した指導を基に，大学院生2名（中高の数学科教諭免許状を保有）を対象とした実験授業を行い，ワークシートの記録とインタビューを基に，その可能性を考察する（第5章第2節)。
(5) 研究の成果（可能性）をまとめ，今後の課題について述べる（第6章）

第3章　数学と実社会との関わりを意識した指導の現状

平成25年3月に特定の課題に関する調査（論理的な思考）の結果が公表された。調査ⅡBの$\boxed{3}$「高さと距離」において「東京タワーと東京スカイツリーを異なる場所から見た時に，どちらが高く見えるかを選択し，言葉や図でその理由を具体的に問う」課題が出題された（図1)。調査は，平成24年2月に高等学校2年生を対象に実施された。調査Ⅱは数学的な表現形式による問題である（調査Ⅰは一般的な表現形式による問題である)。その中で，この問題は，必要な情報を抽出し分析する活動の問題の1つで，問題の趣旨としては「現実事象を数学化し，論理的な見方考え方ができるかどうかを見る」ものである。学習指導要領との関係は，相似な図形の性質を具体的な場面で活用すること（中学校3学年）である。通過率は37.3％（図2）で，条件や情報を基に推論，解決することに課題があることや数学的な問題解決のために適切な図をかくことができないことが指摘されている。実際，この問題を数学的に解決するには数学化（幾何化）された図をかくことが必要であるが，スケッチ風のものの中には，解答を導くような三角形を意識できない図になっているものがあったことが述べられている。図形の性質，比，縮図など，この課題で取り組む内容は高校2年生にとっては既習の内容であるが，それらを直接この課題の解決のために活用することができていない。数学をいろいろな場面で活用できるようにするためには実社会の場面を数学化する経験も必要であることが指摘されている（国立教育政策研究所教育課程研究センター 2013)。つまり，数学と実社会との関わりを意識した指導は，

現状では不十分であり，もっと充実させていくこと（多く経験させること）が必要であることを示唆するものである。

3「高さと距離」

次の文を読み，後の問いに答えなさい。

賢治さんは，高さ 333m の東京タワーと高さ 634m の東京スカイツリーが，下の図のＡ地点とＢ地点のように，場所によって高さが違って見えることに気付いた。

賢治さんは，東京タワーまでの距離が５km，東京スカイツリーまでの距離が 12km のＣ地点では，どちらが高く見えるかを，下のように考えた。ただし，東京タワーと東京スカイツリーが建てられている地点の標高や，それらを見る目の高さは同じものとする。

下の**賢治さんの考え**の（　　）の中の**東京タワー**または**東京スカイツリー**のどちらか適切なものに○を付けなさい。また，**賢治さんの考え**に基づいて，言葉や図を使って，そう考えた理由を書きなさい。

賢治さんの考え

東京タワーの高さに対する東京スカイツリーの高さの比は $\frac{634}{333}=1.904$ で，Ｃ地点から，東京タワーまでの距離に対する東京スカイツリーまでの距離の比は $\frac{12}{5}=2.4$ であるから

（ **東京タワー** ・ **東京スカイツリー** ）

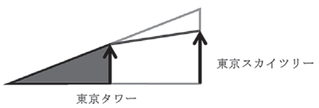
の方が高く見える。

図１　「高さと距離」の課題（国研2013）

理由：

（例）

距離の比が 2.4 だから，高さの比が 2.4 であれば同じ高さに見える。
距離の比 2.4＞高さの比 1.904　だから東京タワーの方が高く見えるから。



【高さと距離　解答類型ごとの反応率】　　**通過率：37.3%**

類型番号	解答類型（◎：正答，○：準正答）	反応率（%）
◎1	東京タワーに○を付け，高さの比や距離の比を適切に用いて正しく理由を説明しているもの。（図などを用いてあってもよい。以下，同）（例）C 地点からの距離の比が 2.4 であるから，高さの比が 2.4 であれば，C 地点から見たとき同じ高さに見える。距離の比 2.4＞高さの比 1.904 だから東京タワーの方が高く見える。	11.0
○2	東京タワーに○を付けているが，理由が不十分なもの。（例）図を正しくかいて，数値などは書き入れているが，説明がないもの。	26.3
3	東京タワーに○を付けているが，理由が間違っているもの。	20.6
4	東京タワーに○を付けているが，理由が記述されていないもの。	15.8
5	東京スカイツリーに○を付けているもの。	20.2
9	上記以外の解答	0.4
0	無解答	5.7

図２　解答例と解答類型ごとの反応率（国研2013）

平成29年4月上旬に国立大学の学生72名（対象は３～４年）に対して，上記の「高さと距離」の課題を課した。小学校教諭免許状の取得を希望する学生が受講する科目「小学校数理」の受講学生である。その結果は，表1の通りである。大学生の通過率は63.9%と高校生の通過率37.3%よりも高いが，４分の１以上（26.4%）の学生が正しい答えを選択できているにもかかわらず，その理由を説明できていない（表１の類型番号の３と4）。このことは，大学生になっても実社会の場面を数理的に捉え，解釈し，表現するなど，数学を色々な場面で活用する力がついていないことを示すものである。大学生になれば自然と数学をいろいろな場面で活用する力がつくものではないとすれば，小中高校の頃から算数・数学の指導において数学と実社会との関わりを意識した指導をもっと経験させる必要があることが，このことからも示唆される。

表1　学生の解答類型ごとの反応数（人）と反応率（%，N=72）　　通過率：63.9%

類型番号	◎1	○2	3	4	5	9	0
反応数（人）	30	16	18	1	7	0	0
反応率（%）	41.7	22.2	25.0	1.4	9.7	0	0

第4章　「アポロニウスの円」の指導の現状

「アポロニウスの円」は高校数学Ⅱの「図形と方程式」単元の「軌跡の方程式」で学ぶ。教科書では，具体的な数値による例題の後に「一般に m ≠n のとき，2定点A，B に対し，AP:BP=m:n を満たす点P の軌跡は，線分AB を m:n に内分する点と外分する点を直径の両端とする円になる。この円を“アポロニウスの円”という。また，m=n のときは，線分AB の垂直二等分線となる」とある（俣野ら 2013，p.95）。しかし，実社会との関連については触れられていない。また，数学Ⅲの「平面上の曲線」の「媒介変数表示と極座標」では，サイクロイドについて学習する。そこでは，「1つの円が定直線に接しながら，すべることなく回転するとき，その円周上の定点がえがく曲線をサイクロイドという（俣野ら 2015，p.29）」ことと，サイクロイドの媒介変数表示

$$\begin{cases} x = a\,(\theta - sin\theta) \\ y = a\,(1 - cos\theta) \end{cases}$$

を学ぶ。しかし，サイクロイドが最速降下曲線になるなどの実社会との関連性等には触れられていない。

「高さと距離」の課題の調査をした学生72名は，全員が数学Ⅱを履修していた。そのうち，数学Ⅲを履修していた学生は21名（29.2%）であった。「アポロニウスの円」と「サイクロイド曲線」について，それぞれ「(1) 知っているか（4件法で回答）」「(2) 内容を説明せよ」「(3) 日常生活や社会等との関連について知っていることを記述せよ」を質問した（平成29年4月上旬）。その結果は表2の通りである。「アポロニウスの円」と「サイクロイド曲線」は，既習事項であっても（「サイクロイド曲線」は既習でない学生が70.8%），聞いたことがない（それぞれ66.7%，69.8%），或いは用語しか知らない状況（それぞれ31.9%，25.0%）であり，それらを説明できないこと（それぞれ100%，94.5%）が分かる。まして，実社会との関連なども全くわからない状況（それぞれ97.2%，98.6%）であった。数学的内容と実社会との関連を学ぶことで，数学的な内容の理解と定着が図れるのではないだろうか。

表2　「アポロニウスの円」と「サイクロイド曲線」に対する質問の反応数（人）と反応率（%，N=72）

	(1) 知っているか				(2) 説明せよ。			(3) 社会との関連	
	①	②	③	④	正答	誤答	無答	記述有	記述無
アポロニウスの円	0 (0)	1 (1.4)	23 (31.9)	48 (66.7)	0 (0)	2 (2.8)	70 (97.2)	2 (2)	70 (97.2)
サイクロイド曲線	0 (0)	4 (5.6)	18 (25.0)	50 (69.4)	4 (5.5)	2 (2.8)	66 (91.7)	1 (1.4)	71 (98.6)

（①よく知っている，②だいたい知っている，③聞いたことはあるが内容は知らない，④聞いたことがない）

また，同じ学生72名に対して次のような問題を課した（平成29年4月上旬）。「中学生のA君は東京に修学旅行に行ったときに，東京スカイツリーと東京タワーが同じ高さに見える場所があることに偶然気づき写真を撮りました（写真略）。そのことを友達に話したところ，他にも同じ高さに見えるところがあるかもしれないと言われ，同じ高さに見える場所を探すことにしました。しかし，歩いてすべて探すのは難しそうです。東京スカイツリーと東京タワーが同じ高さに見える場所を，下の【図】の中にすべて記入しなさい（図略）。また,同じ高さに見える場所をどのようにして探したかを【探した方法】の欄に，言葉や図，式などを使って説明してください。ただし，東京スカイツリーは634m，東京タワーは333mなので東京スカイツリーと東京タワーの高さの比を２：１として考えてください。」その結果は表３の通りである。正しく答えらえた学生はわずか2.8%しかいない。ほとんどの大学生が「同じ高さ見える位置」を既習事項（図形の性質，比，縮図，アポロニウスの円など）を活用して，解答することができておらず，このことからも小中高校において数学と実社会との関わりをより意識した指導をしていくことの必要性が分かる。

表３　「同じ高さに見える位置」の課題の学生の反応数（人）と反応率（%，N=72）

	円	３点以上	２点	１点	誤答	無答
反応率（%）	2（2.8）	15（20.8）	19（26.4）	19（26.4）	15（20.8）	2（2.8）

第５章　「同じ高さに見える位置」と「アポロニウスの円」の指導の構想と実験授業

本章では，前章までの考察結果を基に，第１節では「同じ高さに見える位置」と「アポロニウスの円」の指導の構想について延べ，第２節ではその構想に基づいて大学院生２名を対象に行った実験授業の結果について述べる。

1）「同じ高さに見える位置」と「アポロニウスの円」の指導の構想

(1) 題材名：「異なる高さの電灯が同じ高さに見える位置を探そう」

(2) 指導目標：

異なる高さの電灯が同じ高さに見える位置が分かり，その理由を数学的に説明できる。

(3) 対象生徒：高校第２学年の生徒を想定（実験授業は大学院２年生２名を対象に実践）

(4) 教材：

パソコン（Cabri Ⅱ plus，Cabri3D），iPad（Keynote），Apple Pencil，傘（90cm），
メジャー，角度計（学生が作成）

(5) 指導計画等：

・構想した指導では，グループでの活動を想定しているが，実験授業では対象大学院生が２名なので個別の活動としている。ただし，測定は２名で協力して行う。
・授業時間は２時間続きで100分（50分×２コマ）を想定している。
・高校数学Ⅱの「図形と方程式」単元の「軌跡と領域」（「軌跡の方程式」の項目）を学習後に実施する。

(6) 展開過程：表４

(7) 題材の意図：

「同じ高さに見える位置」或いは「アポロニウスの円」に関する指導は，東京スカイツリーと東京タワーの高さを題材とした実践が多く行われている（例えば，高山2015）。しかし，東京スカイツリーや東京タワーでは，実際に見える位置がアポロニウスの円上にあることを体験することは難しい。同じ高さに見えるという状況は，身の回りには数多くあり，実際に体験することが可能である。そこで，本実践では，同じ高さに見える位置を体験すること（体験による図形的モデルの作成）を重視し，東京スカイツリーと東京タワーではなく，身近にある高さの異なる２つの電灯を題材とした。

(8) ICT 活用の意図：

ICT 活用によって，体験による図形的モデル，作図による図形的モデル（2D），軌跡の数式モデル，計算による数式モデルなどの多様な数学的モデルを作成し，比較することで，これらの数学的モデルが数学（「アポロニウスの円」）と実社会（「同じ高さに見える位置」）とをより強く関連付けることを意図している。また，作図による図形的3D モデル（Cabri3D）を通して，同じ高さに見える理由の視覚的な理解を期待している。

表４　指導過程

	学習活動	指導上の留意点
導入 20分	**1. 課題の提示** 高さが違う２つの電灯A と電灯B が同じ高さに見える位置を探そう。 ・同じ高さに見える位置を考え，ワークシートに記入する。 **2.「同じ高さに見える位置」の観察** ・実際に２つの電灯がある場所に移動し，同じ高さに見える位置を探し，iPad 上の地図に記入する。 ・最初の予想との相違を考え，ワークシートに記入する。 ・同じ高さに見える位置を特定する方法を考える。	・ワークシートの配布 ・電灯A と電灯B が写った２つの写真（1つは違う高さに見える写真，一方は同じ高さに見える写真）を提示する（図3）。 ・教室の外に出る。 ・測定に必要な道具を持参する。 ・iPad には，２つの電灯が写っている航空写真（Google Maps を使用，以下同様）を保存しておく。 ・体験による図形的なモデルの作成。 ・電灯A と電灯B の高さが必要であることに気付かせる。
展開 60分	**3. 電灯A と電灯B の高さの測定** ・同じ高さに見える位置を特定するために必要な情報を考え，測定する。 ・予想される測定方法の例 ①電灯A と電灯B について，それぞれ5m と10m 離れた地点で仰角を測る。 ② 電灯A と電灯B の影の長さ，90cm の傘の影の長さを測る。	 ・測定はグループ毎に協同で行う（実験授業では２名で協力する）。 ・①の方法のために，仰角を測るための道具「角度計」とメジャーを準備する。 ・②の方法のために，90cm の傘とメジャーを準備する。

展開 60分	・測定が終わったら，教室に戻り，電灯A と電灯B の高さを計算し，比を求める。 **4.Cabri Ⅱplus による作図** ・測定した結果を基に，図形作成ソフトで，同じ高さに見える位置を作図する。 **5.Cabri3D による作図** ・4と同様に，測定した結果を基に，Cabri3D（3D 作成ソフト）で，同じ高さに見える位置を作図する（作図による図形的3D モデル）。	・測定が終わったら，教室に戻る。 ・Cabri Ⅱplus には，2つの電灯が写っている航空写真を保存しておく。 ・2つの定点A，B からの距離の比が一定である点の軌跡の作図を考える。 ・作図方法については，既習済である。 ・作図による図形的モデルを作成する。 ・作図方法については，ここで指導する（4とほぼ同様の操作で作図できる)。 ・「視点からそれぞれの頂点を見上げた角度が等しくなること」を視覚的に理解する。
終末 20分	**6. 計算による検証** ・測定した数値を基に円の中心と半径を計算し円の方程式を求める。 ・求めた円の方程式と，Cabri Ⅱplus で求めた軌跡の方程式と比較する。	・計算による数式モデルを作成する。 ・作図による図形的モデルから，軌跡の数式モデルを作成し，計算による数式モデルと比較する。

2) 「同じ高さに見える位置」と「アポロニウスの円」の実験授業とその結果

⑴「同じ位置に見える位置」の観察と測定（表4の1と2と3)

実践は大学院生2名の協力を得て平成28年10月上旬に行った。課題「高さの違う2つの電灯A と電灯B が同じ高さに見える位置を探そう」を提示する（表4の1,図3)。まずは，どの位置なら同じ高さに見えるかを予想する。2人とも同じ高さに見える位置は1か所しか予想できていない。そこで，実際に，２つの電灯の周辺を歩きながら，同じ高さに見える位置を探し，iPad（Keynote）に取り込んだ地図（Google Maps を使用，以下同様）にその位置を記入する（図4)。それを基に同じ位置に見える場所はどうなるかを，最初の予想と比較しながら考える。記入した図を見ると円になりそうであり，1か所だけではなく多数あることが分かる（体験による図形的モデルの作成)。同じ高さに見える位置は，なぜ円になるか，それを示す（同じ高さに見える位置を特定する）ためにはどうすればよいかを考える。教室では，同じ高さに見える位置についてすぐには考えられなくとも，実際に外に出て状況を観察しながら考えると，同じ高さに見えるためには仰角が等しくなることや，同じ高さに見える位置を特定するためには高さの比が必要であることをすぐに考えだすことができた。

図3　高さが異なる2つの電灯（左は高さが異なるように見え，右は同じ高さに見える）

次に，実際に同じ高さに見える位置を特定するためには，電灯A と電灯B の高さが必要であることが分かったため，それらを測定する（表4の3の①，図5)。正接を利用して高さを求めるために，電灯A と電灯B からそれぞれ5m と10m 離れた地点で仰角を図る。仰角は学生が自作した角度計（図6）を使用した。その結果，電灯A の仰角は31°，学生の身長は1.70m なので，

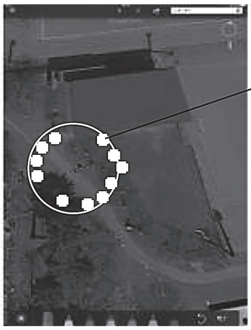
$$電灯A の高さ = 5m \times \tan 31^\circ + 1.70m = 5 \times 0.60 + 1.70 = 4.7m$$

同様に，電灯B の仰角を求めると，60° であり，

$$電灯B の高さ = 10m \times \tan 60^\circ + 1.70m = 10 \times 1.73 + 1.70 = 19.0m$$

電灯A と電灯B の高さの比は，約1：4であった（計算は教室に戻ってから行った）。

別の学生は比を利用して高さを求めることにした（表4の3の②，図7)。90cm の傘の影の長さは約56cm であった。電灯A の影の長さは，約3.0m であったので，比を利用すると，0.56：0.9=3.0：x となり，x=4.82m であった。よって，電灯A の高さは，約4.8m である。同様に，電灯B の影の長さは，約11.70m であったので，0.56：0.9=11.7：x となり，x=18.8m であった。これより，電灯A と電灯B の高さの比は，約1:3.9である（計算は教室に戻ってから行った）。先の学生とほぼ同じ結果であったので，電灯A と電灯B の高さの比を，1：4として考えることとした。



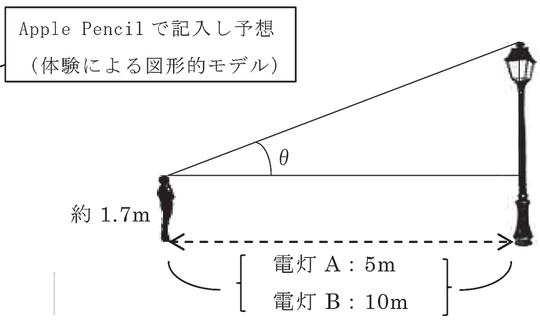


図4　体験による図形的モデル　　**図5　2つの電灯の高さの求め方（正接の利用）**

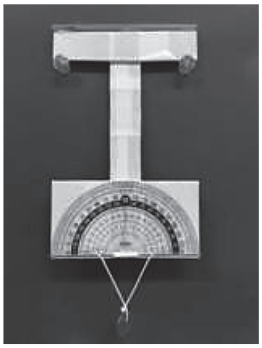


図6　角度計

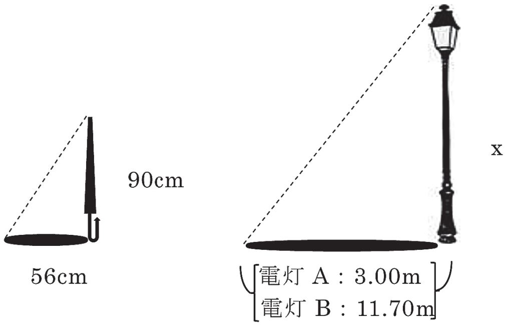


図7　2つの電灯の高さの求め方（比の利用）

⑵ Cabri ⅡPlus と Cabri 3D による作図（表4の4と5）

「2定点A,B からの距離の比が1：4である点の軌跡」の条件に合うように，Cabri ⅡPlus を用いて作図し，その条件を満たす軌跡を描く（図8，作図による図形的モデルの作成）。最初に歩いて記録した地図（図4）と比較すると，ほぼ同じである（体験による図形的モデルの図4と作図による図形的モデルの図8との比較）。Cabri ⅡPlus の作図方法は，本時の前に練習し，既習である。

図8　Cabri ⅡPlus による作図（作図による図形的モデル）

しかし，平面（図8）では「視点からそれぞれの電灯の頂点を見上げた角度が等しくなればよい」ということ（同じ高さに見える理由）が分からない。そこで，Cabri 3D を用いて作図することにした。作図した図（作図による図形的3D モデル）からは，視点（視点はアポロニウスの円上を自由に動かすことができる）からそれぞれの電灯の頂点を見上げた角度が同じなることが視覚的に確認可能である（図9）。実際,院生のワークシートには,「アポロニウスの円上ならば，どこに居ても2つの電灯の頂点を見上げた角（仰角）が同じになることがよく分かった」という感想があった。Cabri3D による作図方法はここで指導しながら行ったが，平面（Cabri ⅡPlus）での作図方法が理解できていれば，比較的簡単に Cabri3D の作図方法も理解できた。

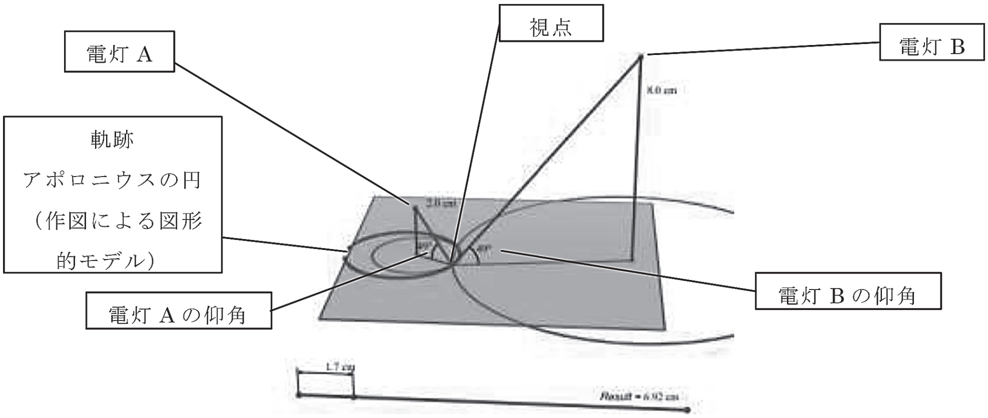


図9　Cabri 3D による作図（作図による図形的3D モデル）

⑶ 計算による検証（表4の6）

1）で測定した数値をもとに，円の中心と半径を計算し円の方程式（計算による数式モデル）を求め，Cabri ⅡPlus で求めた軌跡の方程式（軌跡の数式モデル）と比較する。図10は，電灯A を原点，電灯B を x 軸上にとったものである。

Cabri ⅡPlus の航空写真に，座標軸を挿入し，電灯A，電灯B はそれぞれ A（0,0），B（5,0）になるように，軸と目盛りを移動し調整する。

Cabri ⅡPlus の軌跡の方程式を求める機能を用いて，軌跡の方程式を自動的に求めると（作図による図形的モデルから軌跡の数式モデル①の作成），

$$5.96x^2+5.96y^2+4.16x-0.04y-10=0$$

$$x^2+y^2+0.70x+0.01y-1.68=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}$$

A（0,0），B（5,0）からの距離の比が 1：4 である点の軌跡P（x,y）を代数的に計算で求める（計算による数式モデル②）。AP：PB ＝ 1 ： 4 より，

$$(x-5)^2+y^2=16\,(x^2+y^2)$$
$$15x^2+15y^2+10x-25=0$$
$$x^2+y^2+\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}=0$$
$$\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+y^2=\left(\frac{4}{3}\right)^2$$
$$x^2+y^2+0.67x-1.67=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\text{②}$$

軌跡の方程式①（軌跡の数式モデル）と②（計算による数式モデル）を比較すると，ほぼ同じ方程式である。実際，実験授業後のインタビューでは，「作図して得られた円の方程式①と計算して得られた円の方程式②がほとんど同じになったので驚いた。どちらの方法でも同じ高さに見える位置を特定できることがよく分かった」や「アポロニウスの円が，

同じ高さに見える位置と関係があるとは，全然知らなかった。電車に乗っていても，遠くのものがだんだん同じ高さに見えたり，高さが入れ替わったりする経験があるが，そういう現象の理由が分かった。今後は，いろいろな現象を数学的な目で見れそうだ」などの感想を聞くことができた。

図10　Cabri ⅡPlus による軌跡の方程式（軌跡の数式モデル）

第6章　まとめと課題

本研究では，「同じ高さに見える位置」に関する課題（「高さと距離」など）について特定の課題に関する調査や大学生を対象とした調査を行うとともに，「アポロニウスの円」の指導について，教科書の取り扱いの調査と大学生への質問紙調査を行い，数学と実社会との関わりを意識した指導の必要性を考察した。それらの結果を基に，ICT を活用することによって，数学（「アポロニウスの円」）と実社会（「同じ高さに見える位置」）との関わりを意識した指導を構想した。さらに，構想した指導を基に大学院生2名を対象に実験授業を行い，ワークシートとインタビューを基にその可能性について考察した。その結果，①ICT を活用することで，「同じ高さに見える位置」の体験による図形的モデルと作図による図形的モデル（2D），軌跡の数式モデル，計算による数式モデルなどの多様な数学的モデルを作成し，それらを比較することで，これらの数学的モデルが数学（「アポロニウスの円」）と実社会（「同じ高さに見える位置」）とをより強く関連付けることができること，②「同じ高さに見える位置」を視覚的に捉えることができること（作図による図形的モデルにより「同じ高さに見える位置」は「アポロニウスの円」上にあることの理解が深まること，作図による図形的3D モデルによりなぜ「アポロニウスの円」上だと同じ高さに見えるのかの理由が分かること）などから，数学的な概念（「アポロニウスの円」の定義や意味）の理解がより深まり，その有用性（「アポロニウスの円」と「同じ高さに見える位置」との関連性）を感得することができることなどの可能性が示唆された。

また，構想した指導は，高校2年生を対象とはしているが，ICT を活用することで，中学生を対象としても課題学習などの題材として実践可能である。実際，構想した指導では，円の方程式が出てくるが，円の方程式を学習していなくとも，軌跡の数式モデルは軌跡の方程式を求めるソフトウェアの機能で求めることができ，計算による数式モデルは三平方

の定理を学習していれば求めることが可能である。

今後は，「同じ高さに見える位置」と「アポロニウスの円」以外の題材についても検討することと，構想した指導を基に実際に高校において実践を行い，その有効性を具体的に検証することが課題である。

［付記］

・本研究では，Cabri ⅡPlus と Cabri3D を活用した実践を検討しているが，GeoGebra を活用しても同様な実践が可能である。GeoGebra を活用した実践については，中村（2015）で検討している。

・本研究の調査と実験授業にご協力頂いた学生及び大学院生に感謝いたします。

・本研究の一部は科学研究費補助金「基盤研究（C)」課題番号JP15K04397によって行われた。

［参考・引用文献］

中央教育審議会『幼稚園，小学校，中学校，高等学校及び特別支援学校の学習指導要領等の改善及び必要な方向等について（答申）（中教審第197号)』，2016，pp.140-144.

国立教育政策研究所 教育課程研究センター『特定の課題に関する調査（論理的な思考）調査結果～21世紀グローバル社会における論理的に思考する力の育成を目指して～（平成２５年３月)』，2013.

俣野博・河野俊丈ほか27名『数学Ⅱ』，東京書籍，2013.

俣野博・河野俊丈ほか27名『数学Ⅲ』，東京書籍，2015.

文部科学省『小学校学習指導要領（平成29年３月)』，2017.

文部科学省『中学校学習指導要領（平成29年３月)』，2017.

長崎栄三編『算数・数学と社会・文化のつながり～小・中・高校の算数・数学教育の改善を目指して～』，明治図書，2001.

中村好則「ICT 活用による数学と日常生活との関連を重視した指導」『日本教育工学会第31回全国大会（電気通信大学）講演論文集』，2015，pp.73-74.

高山琢磨「図形領域におけるモデル化に関する授業実践：スカイツリーと東京タワーが同じ高さに見える場所」『日本数学教育学会誌臨時増刊総会特集号97』，2015，p.400.