アフィンワイル群の一般化について

菅原　隆介*，冨江　雅也**，吉井　洋二***
（2018年２月14日受理）

Ryusuke Sugawara, Masaya Tomie, Yoji Yoshii

A generalization of affine Weyl groups

Affine reflection groups were studied in euclidean geometry. A subclass of affine reflection groups consisting of the Weyl groups of affine Kac-Moody Lie algebras is known to be affine Weyl groups. We review these groups and introduce a natural generalization of affine Weyl groups extended by an abelian group. We also discuss the relation between the generalized affine Weyl groups and Rubik's cube groups or complex reflection groups.

KEYWORDS: reflection group, Weyl group, affine Kac-Moody Lie algebra, affine root system, affine Weyl group, Lie torus, Rubik's cube group, complex reflection group

Ⅰ　はじめに

アフィン鏡映群の研究は古くから知られており、コクセター群と共にブルバキ [B] などで論じられている。affine Kac-Moody Lie algebras が登場すると、アフィンルート系やアフィンワイル群の研究は、ユークリッド幾何学から離れて、表現論や数理物理で応用されるようになる（[Ka] 参照）。ここでは、A 型のアフィンワイル群の代数的構造を調べ、その自然な一般化および複素鏡映群との関係を考察する。

2　アフィンルート系

$\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ を $\mathbb{R}$ 上の n 次元ユークリッド空間、

$$B := \{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n\}$$

を正規直交基底とする。このとき、ベクトルの集合

$$\Delta = \{\epsilon_i - \epsilon_j \mid 1 \le i \ne j \le n\}$$

を A_{n-1} 型のルート系と言う。さらに、1 次元増やした $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間

$$V := \mathbb{E} \oplus \mathbb{R}\delta$$

に、$\mathbb{E}$ の内積を拡張した対称双一次形式

$$(x + a\delta, y + b\delta) := (x, y) \qquad (1)$$

（$x, y \in V$, $a, b \in \mathbb{R}$）を定義する。このとき、

$$R := \Delta + \mathbb{Z}\delta$$

を A_{n-1} 型の**アフィンルート系**（affine root system）と言う（[M] 参照）。任意の $\alpha + k\delta \in R$（$\alpha \in \Delta$, $k \in \mathbb{Z}$）と $x + a\delta \in V$（$x \in \mathbb{E}$, $a \in \mathbb{R}$）に対して、V 上の線形変換 $\sigma_{\alpha+k\delta}$ を

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha+k\delta}(x + a\delta) :&= x + a\delta - (x + a\delta, \alpha + k\delta)(\alpha + k\delta) \\ &= x + a\delta - (x, \alpha)(\alpha + k\delta)\end{aligned}$$

と定義すれば、$\sigma_{\alpha+k\delta}$ は (1) に関して V の直交変換となる。また、$\sigma_{\alpha+k\delta}^2 = \mathrm{id}$ も成り立つ。この

＊筑波大学大学院数理物質科学研究科，＊＊盛岡大学文学部，＊＊＊岩手大学教育学部

$\sigma_{\alpha+k\delta}$ は、$\mathbb{E}$ の超平面 $\{x \in \mathbb{E} \mid (x,\alpha)=k\}$ に関する鏡映変換

$$\sigma_{\alpha,k}(x) = x - ((x,\alpha)-k)\alpha$$

と同一視できるが、ここではこの説明を省略する（例えば [H] を参照）。（通常のベクトル $\alpha \neq 0$ の場合は、(x,α) ではなく、$\frac{2(x,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$ でなければならないが、本稿での α は Δ の元より、$(\alpha,\alpha)=2$ であることに注意されたい。）

さて、$\sigma_{\alpha+k\delta}$ で生成される V の (1) に関する直交変換群の部分群

$$W := \langle \sigma_{\alpha+k\delta} \mid \alpha \in \Delta,\ k \in \mathbb{Z} \rangle$$

を A_{n-1} 型の**アフィンワイル群**（affine Weyl group）と言う。また、σ_α（$n=0$ のとき）を $\mathbb{E}$ に制限したものは、ユークリッド空間における超平面 $\{x \in \mathbb{E} \mid (x,\alpha)=0\}$ に関する鏡映変換だから、

$$W' := \langle \sigma_\alpha \mid \alpha \in \Delta \rangle$$

は A_{n-1} 型のワイル群と同型である。そしてこの群は、実は n 次対称群 S_n に他ならない。実際、$\sigma_{\epsilon_i-\epsilon_j}$ は、

$$\sigma_{\epsilon_i-\epsilon_j}(\epsilon_i)=\epsilon_j,\quad \sigma_{\epsilon_i-\epsilon_j}(\epsilon_j)=\epsilon_i,$$

および他の ϵ_k を固定するので、互換 (i,j) と同一視できるからである。

そこで、W は $W' \cong S_n$ のどのような拡大であるかを調べる。まず、

$$\sigma_{\alpha+k\delta}(x+a\delta) = \sigma_\alpha(x) + (a - k(x,\alpha))\delta$$

と書けるので、

$$\ell_\alpha(x) := -(x,\alpha)$$

と定義すれば ℓ_α は $\mathbb{E}$ の線形形式である。この表記により、

$$\sigma_{\alpha+k\delta}(x+a\delta) = \sigma_\alpha(x) + (a + k\ell_\alpha(x))\delta$$

となる。従って、

$$\sigma_{\beta+m\delta}\sigma_{\alpha+k\delta}(x+a\delta) = \\ \sigma_\beta\sigma_\alpha(x) + (a + k\ell_\alpha(x) + m\ell_\beta(\sigma_\alpha(x)))\delta$$

となり、

$$\begin{aligned} \ell_\beta(\sigma_\alpha(x)) &= \ell_\beta(x-(x,\alpha)\alpha) \\ &= \ell_\beta(x) - \ell_\alpha(x)(\alpha,\beta) \\ &= (\ell_\beta - (\alpha,\beta)\ell_\alpha)(x) \\ &= \ell_{\sigma_\alpha(\beta)}(x) \end{aligned}$$

に注意すると、

$$\sigma_{\beta+m\delta}\sigma_{\alpha+k\delta}(x+a\delta) = \\ \sigma_\beta\sigma_\alpha(x) + (a + k\ell_\alpha(x) + m\ell_{\sigma_\alpha(\beta)}(x))\delta \tag{2}$$

となる。ここで、任意の $\alpha,\beta \in \Delta$ に対して、

$$\sigma_\alpha(\beta) \in \Delta \tag{3}$$

が成り立つこと（ルート系の基本性質）に注意しておく。また、ℓ_α は $\mathbb{E}$ の双対空間 $\mathbb{E}^*$ の元と見なしてよい。従って、W の元は、$\sigma \in W'$, $\ell \in \mathbb{E}^*$ に対して、

$$(\sigma,\ell)(x+a\delta) := \sigma(x) + (a+\ell(x))\delta$$

と定義することで、集合として $W \subset W' \times \mathbb{E}^*$ と見なすことができ、

$$T := \left\{ \sum_{\alpha\in\Delta} k_\alpha \ell_\alpha \mid k_\alpha \in \mathbb{Z} \right\} \tag{4}$$

とおくことで、$W \subset W' \times T$ であるが、任意の $k \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\sigma_\alpha\sigma_{\alpha+k\delta}(x+a\delta) = x + (a+k\ell_\alpha(x))\delta \tag{5}$$

となるから、$W = W' \times T$ である。

さらに、

$$\{\epsilon_1^*, \ldots, \epsilon_n^*\}$$

を $\mathbb{E}^*$ の双対基底とし、

$$\mathbb{Z}_0^n := \{\sum_{i=1}^n k_i\epsilon_i^* \in \mathbb{E}^* \mid \sum_{i=1}^n k_i = 0,\ k_i \in \mathbb{Z}\}$$

$$\left(=\{\sum_{i=1}^{n-1}(k_1+\cdots+k_i)(\epsilon_i^*-\epsilon_{i+1}^*) \mid k_i \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}^{n-1} \right)$$

なる $\mathbb{Z}$-部分加群を用意すれば、$T \subset \mathbb{Z}_0^n$ となる。実際、$\alpha = \epsilon_i - \epsilon_j$ に対して、$\ell_\alpha = \epsilon_j^* - \epsilon_i^*$ だから、(2) と (3) より、W の任意の元は、

$$(\sigma,\ \sum_{i\neq j} k_{ij}(\epsilon_i^* - \epsilon_j^*)),\quad k_{ij} \in \mathbb{Z}$$

と書け、第 2 因子は明らかに $\mathbb{Z}_0^n$ の元だからである。さらに (2) から、

$$(\sigma_\beta, m\ell_\beta)(\sigma_\alpha, k\ell_\alpha) = (\sigma_\beta\sigma_\alpha,\ m\ell_{\sigma_\alpha(\beta)} + k\ell_\alpha)$$

であるから、$\ell_{\sigma_\alpha(\beta)}$ を σ_α の ℓ_β への作用、即ち、

$$\sigma_\alpha.\ell_\beta := \ell_{\sigma_\alpha(\beta)}$$

による W' から $\mathbb{Z}_0^n$ への作用を考えれば、この作用は $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_0^n)$（自己同型群）の元となる。よって $W = W' \ltimes T \subset W' \ltimes \mathbb{Z}_0^n$ となる。次に、$\mathbb{Z}_0^n \subset T$ を示す。勝手な $X := \sum_{i=1}^n k_i\epsilon_i^* \in \mathbb{Z}_0^n$ に対して、

$$\begin{aligned} X &= k_1(\epsilon_1^* - \epsilon_2^*) + (k_1 + k_2)(\epsilon_2^* - \epsilon_3^*) \\ &\quad + (k_1 + k_2 + k_3)(\epsilon_3^* - \epsilon_3^*) + \cdots \\ &\quad + (k_1 + \cdots + k_{n-1})(\epsilon_{n-1}^* - \epsilon_n^*) \\ &\quad + (k_1 + \cdots + k_n)\epsilon_n^* \\ &= \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{i} k_j(\epsilon_i^* - \epsilon_{i+1}^*) \end{aligned} \tag{6}$$

より $X = -\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{i} k_j\ell_{\epsilon_i^* - \epsilon_{i+1}^*} \in T$ となるから、$\mathbb{Z}_0^n \subset T$ を得る。故に、

$$W = W' \ltimes T = W' \ltimes \mathbb{Z}_0^n \cong S_n \ltimes \mathbb{Z}_0^n$$

を得る。

説明が長くなってしまったが、A_{n-1} 型のアフィンワイル群とは、名前は難しそうだが、実は非常に身近な群と言ってよい。実際それは、S_n から $\mathbb{Z}^n$ へ、座標置換を作用として定まる群 $S_n \ltimes \mathbb{Z}^n$ の部分群 $S_n \ltimes \mathbb{Z}_0^n$ に他ならない。少し詳しく書くと、$(\sigma, \mathbf{x}), (\tau, \mathbf{y}) \in S_n \ltimes \mathbb{Z}_0^n$ の積は、

$$(\sigma, \mathbf{x})(\tau, \mathbf{y}) = (\sigma\tau, \tau(\mathbf{x}) + \mathbf{y})$$

但し、$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ に対して、

$$\tau(\mathbf{x}) = (x_{\tau(1)}, \ldots, x_{\tau(n)})$$

と定義する（$\mathbf{x}$ の座標を τ^{-1} で入れ換えてから $\mathbf{y}$ に足すと言ってもよい）。初めから、A_{n-1} 型のアフィンワイル群とは、$S_n \ltimes \mathbb{Z}^n$ の部分群 $S_n \ltimes \mathbb{Z}_0^n$ であると述べてもよかったが、アフィンルート系からスタートする丁寧な解説本が見当たらなかったので、ここにまとめてみた。

また、$\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n\}$ を基本列ベクトルの集合としておけば、S_n が置換行列全体

$$\{(\epsilon_{\sigma(1)}, \ldots, \epsilon_{\sigma(n)}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z}) \mid \sigma \in S_n\}$$

と同型であることから、W は

$$\begin{aligned} M_{n,t} := \{&(t^{k_1}\epsilon_{\sigma(1)}, \ldots, t^{k_n}\epsilon_{\sigma(n)}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]) \mid \\ &k_1 + \cdots + k_n = 0,\quad \sigma \in S_n\} \end{aligned} \tag{7}$$

なる可逆行列全体がなす群（行列式は ± 1）とも同型である。

3 アーベル群による拡大ルート系

アフィンワイル群 $S_n \ltimes \mathbb{Z}_0^n$ において、無限巡回群 $\mathbb{Z}$ の部分を勝手なアーベル群 G に変えた群 $S_n \ltimes G_0^n$（あるいはその剰余群）も、あるルート系のワイル群と考えてよいことを説明する。まず、上記 $\mathbb{E}$ の代わりに、通常の n 次元ユークリッド格子

$$\Lambda := \mathbb{Z}\epsilon_1 + \cdots + \mathbb{Z}\epsilon_n$$

からスタートすると、V の代わりに、

$$\tilde{\Lambda} = \Lambda \oplus G$$

（アーベル群の直和）を使っても、対称双一次形式 $\tilde{\Lambda} \times \tilde{\Lambda} \longrightarrow \mathbb{Z}$ を

$$(x + g, y + h) := (x, y) \tag{8}$$

（$x, y \in V,\ g, h \in G$）と定義することで、前と同様、線形変換（アーベル群としての準同型）

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha+g}(x + h) &= x + h - (x + h, \alpha + g)(\alpha + g) \\ &= \sigma_\alpha(x) + h - (x, \alpha)g \\ &= \sigma_\alpha(x) + h + \ell_\alpha(x)g \end{aligned}$$

$(x \in \Lambda, g, h \in G)$ が定義できる（[Y1] 参照)。この線形変換 $\sigma_{\alpha+g}$ は (8) に関して直交変換である。また、$\sigma_{\alpha+g}^2 = \mathrm{id}$ も成り立つ。

さて、$\tilde{\Lambda}$ の部分集合 $\Delta + G$ を $(\mathbf{A}_{n-1}, G)$ **型ルート系**と呼び、アーベル群 $\tilde{\Lambda}$ の自己同型群の部分群

$$W = \langle \sigma_{\alpha+g} \mid \alpha \in \Delta,\ g \in G \rangle$$

を $(\mathbf{A}_{n-1}, G)$ **型ワイル群**と呼ぶ。このとき、

$$W \cong S_n \ltimes G_0^n \quad 但し、$$
$$G_0^n := \{(g_1, \ldots, g_n) \in G^n \mid g_1 + \cdots + g_n = 0\}$$

が証明できる。実際、(2) と同様、

$$\sigma_{\beta+k}\sigma_{\alpha+g}(x+h) = \\ \sigma_\beta\sigma_\alpha(x) + h + \ell_\alpha(x)k + \ell_{\sigma_\alpha(\beta)}(x)g \qquad (9)$$

が成り立つところまではよい。次に、勝手な線形写像 $\ell : \Lambda \longrightarrow \mathbb{Z}$ と $g \in G$ に対して、

$$g \otimes \ell : \Lambda \longrightarrow G$$

を $(g \otimes \ell)(x) := \ell(x)g$ で定義すれば、$g \otimes \ell$ は線形写像になる。従って、(4) の T を少し変えて、

$$\mathcal{T} := \left\{ \sum_{\alpha\in\Delta} g_\alpha \otimes \ell_\alpha \mid g_\alpha \in G \right\} \subset G \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda^*$$

とし、

$$(\sigma, \sum_{\alpha\in\Delta} g_\alpha \otimes \ell_\alpha)(x+h) := \sigma(x) + h + \sum_{\alpha\in\Delta} \ell_\alpha(x) g_\alpha$$

と定義することで、(5) と同様の等式から、集合として $W = W' \times \mathcal{T}$ と見なせる。ここで、Λ の双対基底 $\{\epsilon_1^*, \ldots, \epsilon_n^*\}$ を使って

$$\mathcal{T} \subset \mathcal{H} := \{\sum_{i=1}^n g_i \otimes \epsilon_i^* \mid g_i \in G\}$$

を定義すると、表現の一意性、即ち、$\sum_{i=1}^n g_i \otimes \epsilon_i^* = \sum_{i=1}^n g_i' \otimes \epsilon_i^*$ ならば $g_i = g_i'$ $(1 \le i \le n)$ に注意すれば（任意の j に対して $g_j = \sum_{i=1}^n g_i \otimes \epsilon_i^*(\epsilon_j) = \sum_{i=1}^n g_i' \otimes \epsilon_i^*(\epsilon_j) = g_j'$ より）、W' の $G \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda^*$ への作用を、

$$\sigma_\alpha.\epsilon_i^* = \sigma_\alpha(\epsilon_i)^*$$

と定義できる。この作用は $\mathrm{Aut}(G \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda^*)$（自己同型群）の元となるから、(9) より、

$$W = W' \ltimes \mathcal{T} = W' \ltimes \mathcal{H}_0 \cong S_n \ltimes \mathcal{H}_0 \quad 但し、$$
$$\mathcal{H}_0 := \{\sum_{i=1}^n g_i \epsilon_i^* \in \mathcal{H} \mid g_1 + \cdots + g_n = 0\}$$

となる。実際、$g \otimes \ell_\alpha = g \otimes \epsilon_j^* - g \otimes \epsilon_i^* \in \mathcal{H}_0$ であるから $\mathcal{T} \subset \mathcal{H}_0$ であり、$\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{T}$ は、(6) と同様の式から分かる。

最後に、$G_0^n \cong \mathcal{H}_0$ かどうかを調べる。但し、

$$G_0^n := \{(g_1, \ldots, g_n) \in G^n \mid g_1 + \cdots + g_n = 0\}$$

である。まず、φ を $\varphi(g_1, \ldots, g_n) = \sum_{i=1}^n g_i \otimes \epsilon_i^*$ と定義すれば $\varphi : G_0^n \longrightarrow \mathcal{H}_0$ は全射準同型である。従って、$\ker\varphi$ を調べればよい。もし $\varphi(g_1, \ldots, g_n) = \sum_{i=1}^n g_i \otimes \epsilon_i^* = 0$ ならば、$1 \le k \le n-1$ なる k に対して、$\sum_{i=1}^n g_i \otimes \epsilon_i^*(\epsilon_k - \epsilon_{k+1}) = 0$ から、$g_k - g_{k+1} = 0$ となる。従って $\ker\varphi$ は

$$K := \{(g, \ldots, g) \in G^n \mid ng = 0\}$$

に含まれるが、K の元を φ で写せば、$g \otimes (\epsilon_1^* + \cdots + \epsilon_n^*)$ となるので、任意の α を 0 にする。従って、$\ker\varphi = K$ である。故に、$G_0^n/K \cong \mathcal{H}_0$ となり、

$$W = W' \ltimes \mathcal{H}_0 \cong S_n \ltimes (G_0^n/K)$$

を得る。特に、$K = (\mathrm{id}, K)$ は $W' \ltimes G_0^n$ のセンターである。また、G が巡回群 $\mathbb{Z}_m$ の場合、$|K| = \gcd(m, n)$ である。実際、$d = \gcd(m, n)$ とすれば、$K = \{(mk/d, \ldots, mk/d) \in G^n \mid k = 1, \ldots, d\}$ である。

例えば、$(\mathrm{A}_3, \mathbb{Z}_2)$ 型ならば、$K \cong \mathbb{Z}_2$ となるから $G_0^n/K \cong (\mathbb{Z}_2^4)_0/\mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2^2$ となり、$W \cong S_4 \ltimes \mathbb{Z}_2^2$ となる。（これは D_4 型ワイル群 $S_4 \ltimes \mathbb{Z}_2^3$ をセンター $\{\pm\mathrm{id}\}$ で割った群に等しい。）

また、G が位数 m の巡回群の場合、ζ を 1 の原始 m 乗根とすれば、(7) で定義した $M_{n,t}$ 同様、$M_{n,m,\zeta}$ を

$$M_{n,m,\zeta} = \{(\zeta^{k_1}\epsilon_{\sigma(1)}, \ldots, \zeta^{k_n}\epsilon_{\sigma(n)}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z}[\zeta]) \mid \\ k_1 + \cdots + k_n \equiv 0 \mod m,\ \ \sigma \in S_n\} \qquad (10)$$

なる可逆行列全体がなす群（行列式は ± 1）とするとき、$\gcd(m,n)=1$ ならば、$K=0$ となり、W は $M_{n,m,\zeta}$ と同型になる。

もちろん G が n-torsion 元を持たなければ、

$$W = W' \ltimes \mathcal{H}_0 \cong S_n \ltimes G_0^n$$

となる。特に、$G = \mathbb{Z}\delta_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\delta_k$ のときは、前節の自然な拡張として、$W \cong S_n \ltimes (\mathbb{Z}_0^n)^k$ となる。イランを中心とする数学グループでは、さらに $D = \mathbb{Z}d_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}d_k$ を加えたアーベル群 $\hat{\Lambda} = \Lambda \oplus G \oplus D$ に対称双一次形式を

$$(\hat{\Lambda}, \delta_i) = 0, \quad (\Lambda, D) = 0, \quad (\delta_i, d_j) = \delta_{i,j}$$

のように定めた（非退化となるようにした）ときのワイル群の研究がなされている。彼らはこれは nullity k の A_{n-1} 型 extended affine Weyl group と呼んでいる（例えば [AS] 参照）。

4　例

まず、(A_{n-1}, G) 型のルート系 $\Delta + G$ をもつリー代数を紹介しておく。F を標数 0 の体とし、可換な twisted group algebra $F^t[G]$ を係数環とする A_{n-1} 型リー代数

$$\mathrm{sl}_n(F^t[G])$$

は、Δ と G によって double graded されることから $\Delta + G$ をルート系にもつ。これは、より一般に定義される、Lie G-torus の特別な場合である（[Y2], [Y3] 参照）。

具体例として、$A = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) = \oplus_{g \in \mathbb{Z}_3} A_g$, 但し、$A_0 = \mathbb{Q}$, $A_1 = \mathbb{Q}\sqrt[3]{2}$, $A_2 = \mathbb{Q}\sqrt[3]{4}$ とおけば、A はこの grading で可換な twisted group algebra となる。このとき、$\mathbb{Q}$ 上のリー代数 $\mathrm{sl}_n(A)$ は $\Delta + \mathbb{Z}_3$ をルート系にもち、ワイル群は上で示したように、n が 3 の倍数でなければ $S_n \ltimes (\mathbb{Z}_3^n)_0$ となる。

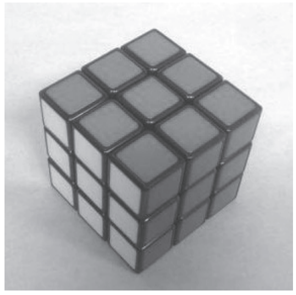
また、$2\times2\times2$ のルービックキューブ群（別名ポケットキューブ群、写真左）は

$$S_7 \ltimes (\mathbb{Z}_3^7)_0 \cong S_7 \ltimes \mathbb{Z}_3^6$$

で、位数は、

$$7! \cdot 3^6 = 367,4160$$

（約 367 万）である。この数は 1 つのコーナーキューブを固定して数えたものなので、立方体群の位数 24 で割る必要はない（[S] 参照）。この群は、上記行列群 $M_{7,\omega}$ に同型である（ω は 1 の原始 3 乗根）。



通常の $3\times3\times3$ のルービックキューブ群（写真右）は

$$\big(S_8 \ltimes (\mathbb{Z}_3^8)_0\big) \times \big(S_{12} \ltimes (\mathbb{Z}_2^{12})_0\big)$$

の部分群

$$C_{8,12} \ltimes \big((\mathbb{Z}_3^8)_0 \times (\mathbb{Z}_2^{12})_0\big)$$

但し、

$$C_{8,12} := (A_8 \times A_{12}) \sqcup (B_8 \times B_{12})$$

で、A_n は n 次交代群、B_n は S_n の奇置換全体とする。位数は、

$$8! \cdot 12! \cdot 3^7 \cdot 2^{10} = 4325,2003,2744,8985,6000$$

（約 4325 京）である。この数はセンターキューブを固定して数えたものなので、立方体群の位数 24 で割る必要はない。この群は、

$$\{x \oplus y \in \mathrm{M}_{20}(\mathbb{Z}[\omega]) \mid x \in M_{8,\omega},\ y \in M_{12,-1},\ \det(x \oplus y) = 1\}$$

なる行列群に同型である（[K], [S] 参照）。また、

$$C_{8,12} \cong (A_8 \times A_{12}) \rtimes \mathbb{Z}_2 \cong S_8 \ltimes A_{12} \cong S_{12} \ltimes A_8$$

も成り立つ。

5　他の型について

ここまで A 型についてだけ述べたが、他の型についても、勝手なアーベル群 G に対してアフィンワイル群 W を構成できる。ここでは、B_n, C_n, D_n 型について、その結果だけを述べる。

(B_n, G) 型と (C_n, G) 型は同じで、

$$W \cong (S_n \ltimes \mathbb{Z}_2^n) \ltimes (G^n/B) \quad \text{但し、}$$
$$B = \{(0, \dots, 0, g) \in G^n \mid 2g = 0\}$$

である。(D_n, G) 型は、

$$W \cong (S_n \ltimes \mathbb{Z}_2^{n-1}) \ltimes (G^n/D) \quad \text{但し、}$$
$$D = \{(0, \dots, 0, g, h) \in G^n \mid 2g = 2h = 0\}$$

である。これらの核 B および D は、B 型と C 型のカルタン行列の単因子が $(1, \dots, 1, 2)$, D 型の場合は $(1, \dots, 1, 2, 2)$ であることから説明できる。

これらの結果は未だ論文等に載っていないようである。他の型 E_6, E_7, E_8, F_4, G_2 についても調べる価値がある。

6　複素鏡映像群との関係

G が位数 m の巡回群の場合、第 3 節で述べた (A_{n-1}, G) 型ワイル群は、所謂、有限既約複素鏡映群 $G(m,p,n)$ になることがある。簡単に定義を述べると、m, p, n は自然数で、$p \mid m$ のとき、$G(m,p,n)$ は (10) で定義した $M_{n,m,\zeta}$ を含む群

$$G(m,p,n) = \{(\zeta^{k_1}\epsilon_{\sigma(1)}, \dots, \zeta^{k_n}\epsilon_{\sigma(n)}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z}[\zeta]) \mid k_1 + \cdots + k_n \equiv 0 \mod p,\ \sigma \in S_n\} \tag{11}$$

である。（これらは、imprimitive という性質を持つ群で、他に 34 個の primitive な群がある。詳しくは[C]を参照。）

特に、$G(m,m,n) = M_{n,m,\zeta} \cong S_n \ltimes \mathbb{Z}_m^{n-1}$ であり、$G(m,p,n)$ は $G(m,1,n) \cong S_n \ltimes \mathbb{Z}_m^n$ の部分群である。従って $G(m,p,n)$ は $S_n \ltimes \mathbb{Z}_m^{n-1}$ と $S_n \ltimes \mathbb{Z}_m^n$ の中間群に他ならない。例えば、

$$G(1,1,n) \cong S_n$$
$$G(2,1,n) \cong S_n \ltimes \mathbb{Z}_2^n \cong \mathrm{B}_n \cong \mathrm{C}_n$$
$$G(2,2,n) \cong S_n \ltimes \mathbb{Z}_2^{n-1} \cong \mathrm{D}_n$$

は有限型ワイル群だが、$m \geq 3$ なら $G(m,m,n)$ は、もはや有限型ワイル群ではない。特に、$\gcd(m,n) = 1$ ならば $G(m,m,n)$ は $(\mathrm{A}_{n-1}, \mathbb{Z}_m)$ 型ワイル群である。また、$\gcd(m,n) \neq 1$ でも、$G(m,m,n)$ をセンターで割れば $(\mathrm{A}_{n-1}, \mathbb{Z}_m)$ 型ワイル群となる。

ルービックキューブ群は、$G(3,3,8) \times G(2,2,12)$ の指数 2 の部分群である。ポケットキューブは、将に $G(3,3,7)$ を実現したパズルと言える。

最後に $G(m,p,n)$ の構造を調べて終わりにする。まず、$\mathbf{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in \mathbb{Z}_m^n$ に対して、

$$\mathrm{tr}(\mathbf{x}) = x_1 + \cdots + x_n$$

とし、$\varphi : G(m,p,n) \longrightarrow \mathbb{Z}_{m/p}$ を

$$\varphi((\zeta^{x_1}\epsilon_{\sigma(1)}, \dots, \zeta^{x_n}\epsilon_{\sigma(n)})) = \overline{\mathrm{tr}(\mathbf{x})/p}$$

と定義すれば、$\ker\varphi = G(m,m,n)$ となる。実際、$\ker\varphi \supset G(m,m,n)$ は明らかであり、もし $\mathrm{tr}(\mathbf{x})/p$ が m/p を割れば、$\mathrm{tr}(\mathbf{x})$ が m を割るので、$\ker\varphi \subset G(m,m,n)$ もよい。よって完全系列

$$0 \longrightarrow G(m,m,n) \longrightarrow G(m,p,n) \longrightarrow \mathbb{Z}_{m/p} \longrightarrow 0$$

を得る。さらに、$\psi : \mathbb{Z}_{m/p} \longrightarrow G(m,p,n)$ を

$$\psi(\bar{k}) = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_{n-1}, \zeta^{pk}\epsilon_n)$$

で定義すれば、

$$\begin{aligned}\psi(\bar{k} + \bar{\ell}) &= (\epsilon_1, \dots, \epsilon_{n-1}, \zeta^{p(k+\ell)}\epsilon_n) \\ &= (\epsilon_1, \dots, \epsilon_{n-1}, \zeta^{pk}\epsilon_n)(\epsilon_1, \dots, \epsilon_{n-1}, \zeta^{p\ell}\epsilon_n) \\ &= \psi(\bar{k})\psi(\bar{\ell})\end{aligned}$$

より、この完全系列はスプリットする。従って、

$$\begin{aligned}G(m,p,n) &\cong G(m,m,n) \rtimes \mathbb{Z}_{m/p} \\ &\cong (S_n \ltimes \mathbb{Z}_m^{n-1}) \rtimes \mathbb{Z}_{m/p}\end{aligned}$$

であり、特に、

$$|G(m,p,n)| = n! \cdot m^n/p$$

である。ここで、$A, B \in G(m,m,n)$ の積は、

$$A = (A', \bar{k}),\ B = (B', \bar{\ell}) \in G(m,m,n) \rtimes \mathbb{Z}_{m/p}$$

なる同一視を使うと、

$$AB = \left(A'\psi(\bar{k})B'\psi(\bar{k})^{-1}, \bar{k}+\bar{\ell}\right)$$

で与えられる。この式は分かり難いと思われるので、具体例を書いておく。

例

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \zeta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \zeta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta^3 \\ 0 & \zeta^2 & 0 \end{pmatrix}$$ を

$G(12,3,3)$ の元とする。このとき、

$$A = A'\psi(\bar{1}) = \begin{pmatrix} 0 & \zeta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta^{10} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta^3 \end{pmatrix}$$

$$B = B'\psi(\bar{2}) = \begin{pmatrix} \zeta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta^9 \\ 0 & \zeta^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta^6 \end{pmatrix}$$

のように分解して、

$$\begin{aligned} AB &= A'\psi(\bar{1})B'\psi(\bar{2}) \\ &= A'\psi(\bar{1})B'\psi(\bar{1})^{-1}\psi(\bar{1})\psi(\bar{2}) \\ &= \left(A'\psi(\bar{1})B'\psi(\bar{1})^{-1}, \bar{3}\right) \end{aligned}$$

となる。

7　おわりに

後半は少し丁寧さを欠いたが、アフィンワイル群がいろいろな分野と関連することを強調したかった。有限鏡映群や単純リー環の分類論からアフィンワイル群の研究が盛んになったと言ってよい。アフィンワイル群の構造を見ると、勝手なアーベル群に対しても、同様な概念、即ち、ルート系・ワイル群・リー環といったものが定義できることが分かる。また、一見関係ないようなルービックキューブ群や複素鏡映群とも関連してくることがとても面白い。第 4 節で紹介した twisted group algebra を係数環とするリー代数 $\mathrm{sl}_n(F^t[G])$ やそのワイル群、そして複素鏡映群との関係を書いた本は未だないように思える。今後はこのような関連をさらに研究して行きたい。

謝辞　筑波大学、森田純教授に数々の助言を頂いた。ここに感謝の意を表します。

参考文献

[AS] S. Azam, V. Shahsanaei, *Simply laced extended affine Weyl groups (a finite presentation)*, RIMS, Kyoto Univ. **43** (2007), 403–424.

[B] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, chapitres 4-6, Masson, Paris, 1981.

[C] A. Cohen, *Finite complex reflection groups*, Ann. scient. Eć. Norm. Sup. 4e série t. 9 (1976), 379-436.

[H] J. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge Univ. Press (1990).

[K] 陰山圭一,「ルービックキューブの解析 — 群論の題材として」, 兵庫教育大学大学院修士論文, 2014.

[Ka] V. Kac, *Infinite dimensional Lie algebras*, Cambridge Univ. Press, third edition (1990).

[M] M. Macdonald, *Affine root systems and Dedekind's η-functions*, J. Invent. Math., **15** (1972), 91–143.

[S] 菅原隆介,「単純リー代数およびルービックキューブ群の研究」, 岩手大学教育学部卒業論文, 2017.

[Y1] Y. Yoshii, *Root systems extended by an abelian group and their Lie algebras*, J. Lie Theory, **14(2)** (2004), 371–394.

[Y2] Y. —, *Lie tori, a simple characterization of extended affine Lie algebras*, RIMS., Kyoto Uviv., **42** (2006), 739–762.

[Y3] Y. —, *New Lie tori from Naoi tori*, Toyama J., **37** (2015), 155–187.