多面体の指導における数学的活動（Ⅱ）
～パイプグラムの有効性～

立花　正男＊，佐々木　亘＊＊
（2018年２月14日受付）
（2018年２月14日受理）

Masao Tachibana, Wataru Sasaki

Mathematical Learning Activities for Teaching the Polyhedron　（Ⅱ）
The Effect of the Pipegram

要　約

中学生の空間概念の力が十分でないことについて，全国学力学習状況調査の結果からも指摘されていることである。また，このことについて，これまでも多くの研究がされているが，その課題が解決されていない。

本研究では，空間図形の中の多面体の指導を取り上げ，その指導の改善を提案するものである。多面体は，中学校第１学年で学習する内容であり，思考力，判断力等の論理的思考力を育成するために価値ある教材である。しかし，実際の指導が直感的な把握にとどまっていることが大学生への聞き取り調査から分かった。

そこで，多面体の頂点の数や辺の数の指導をする際にパイプグラムを使って指導し，指導後調査問題を実施し，その分析をしたところパイプグラムの実物モデルを使って指導することが有効である可能性が見いだせた。

第１章　多面体の指導の課題

立花（2012）は，多面体の指導の現状を「実際の指導について多面体の指導場面で大まかに見ると，次のようになる。まず，多面体とは，どのような図形かを指導し，正多面体は，正四面体，正六面体，正八面体，正十二面体，正二十面体の５種類があることを指導する。そして，それらの図形の頂点，辺，面の数を数えさせ，表にまとめるという指導が行われる。そして，その表から『頂点－辺＋面＝２』という関係を帰納的に見いださせる。しかし，これらの指導には余り時間をかけずに終わり，その指導のあとに立体図形の求積に入る。その求積の公式をおしえ，具体的な立体の求積をして終わりという傾向があった。」と指摘している。

さらに「いずれの指導においても，時間的に余裕がないという理由から，『頂点，辺，面を数えるのはどのような理由なのか？』や『多面体が５種類しかないのはどうしてか？』などという生徒から出る疑問は，問題にされることなく，また，生徒も余り考えようとせず，先生に言われた通り

＊岩手大学大学院教育学研究科，＊＊岩手大学教育学部附属中学校

従順に活動を行い，覚えているように思われることである。しかし，数学的活動の目的から考えると，ここでは，生徒が「なぜ頂点，辺，面の３つの数を表にまとめるのか」や「正十二面体や正二十面体のときは，数えるのは大変だから，数えないで分かる方法はないのか」などと疑問を持つようにすることが大切である（下線は引用者による)。」と述べている。

「生徒も余り考えようとせず，先生に言われた通り従順に活動を行い，覚えているように思われることである。」については，21名の大学生に「多面体の辺の数や，頂点の数をどのようにして求めたか」と聞き取り調査をしたところ，計算で求めたという大学生は皆無であった。また，「多面体が５種類しかない」ことについても考えたことがないという回答であった。このようなことから，多面体が，思考力，判断力等の論理的思考力を育成するために価値ある教材であるが，その価値が有効に機能していない状態であるといえる。

そこで，本稿では，多面体の辺の数や頂点の数の指導において，多面体の辺と頂点の数を直感的に数えて把握するのではなく，論理的に計算によって求める指導を行う。その際，パイプグラムの使用の有無が結果に影響するのかを調査問題を分析することによって検証し，今後の多面体の指導について提案することを目的とする。

第２章　指導の実際

今回は，附属中学校の第１学年に多面体の指導において，パイプグラムを使用するクラス３クラス，使用しないで，これまでと同じ指導をするクラス１クラスの２群で比較することとした。

立花（2012）は，「正多面体の辺や頂点の数を工夫して求める」ことについて，次のように指導することが必要であると述べている。少し長くなるが，引用することとする。

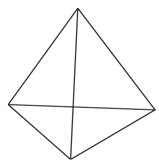
「ここでは，辺や頂点の個数を論理的に工夫して求める場面を設定する指導例を示すことにする。

まず，生徒にこの正多面体の頂点，辺，面の数を求めてみようと投げかける。生徒は，一斉にそれぞれの図形を数え始めるが，正四面体，正六面体，正八面体までは難なく数えることができる。しかし，正十二面体や正二十面体になると，混乱する生徒がでてくる。そこで，教師は，子ども達に，「数えないで分かる方法はないか？」と投げかける。

正多面体とは，「①どの面もすべて合同な正多角形である。②どの頂点にも面が同じ数だけ集まっている。」立体であることから考えることを指導する。

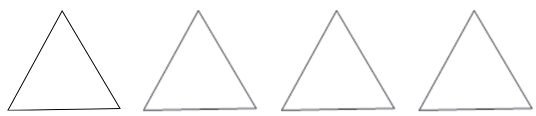
最初から，正十二面体や正二十面体で考えるのは大変だから，頂点や辺の数の分かっている正四面体などで考えてみよう。このように図形を単純化して考えることは数学的な考え方であることについて指導する。

例えば，正四面体では，

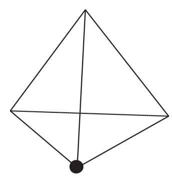


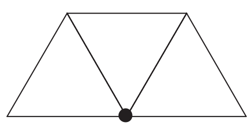
面の形は三角形であり，それが４面ある。

４面をばらばらにすると，頂点の数，辺の数は，３×４である。

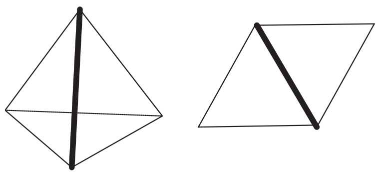


これを四面体の頂点を考えると，１つの頂点に３つの頂点が集まるので，３×４÷３＝４





辺の数は，２つの辺は重なるので，３×４÷２＝６となる。



このように，正多面体が,「どの面もすべて合同な正多面体で，どの頂点にも同じ面が同じ数だけ集まっているような，へこみのない多面体」ということを使って，頂点や辺の数を求めることができる。この考え方を使って，正十二面体や正二十面体の頂点や辺の個数を求める活動を行う。

正十二面体は，面の形が，正五角形で，面の数が12で，１つの頂点に３つ集まっている。この事から，頂点の数　５×12÷３＝20となり，辺の数　５×12÷２＝30となる。

また，正二十面体は，面の形が，正三角形で，面の数が20で，１つの頂点に５つ集まっている。この事から，頂点の数　３×20÷５＝12となり, 辺の数　３×20÷２＝30となる。このように，することによって，計算で頂点や辺の数を求めることができる。

この論文では，多面体が５種類しかないことの指導についての事例も載っているが，今回は，辺と頂点の数についての事例についての調査だけを取り上げるので，多面体が５種類しかないことについては割愛する。ただし，次の附属中の実践では，両方について実践している。

第３章　附属中学校での実践例

第２章で指摘していることを念頭におき，附属中学校では，多面体が５種類あることの説明と，辺や頂点の数を計算で求めることの指導を行った。具体的な指導は，以下のⅠ，Ⅱの２時間の実践である。授業実践後に調査問題を行った。

実践者　佐々木　亘

授業のテーマ 「１年『空間図形』単元における, パイプグラムを活用した授業づくり」

～　正多面体の指導における活用例　～

授業日と調査実施日

Ａ組　12月８日・11日
　調査実施　12月20日

Ｂ組　12月11日・12日
　調査実施　12月20日

Ｃ組　12月８日・９日
　調査実施　12月20日

Ｄ組　12月19日・20日
　調査実施　12月24日

Ⅰ　＜１時間目＞

ねらい：正多面体のもつ特徴や性質について理解させる

（以下，授業概要）

学習課題「正多面体ってどんな立体（空間図形）のこと何だろう？」

１．正多面体の条件の確認

＜条件１＞　どの面もすべて合同な正多角形である

＜条件２＞　どの頂点にも面が同じ数だけ集まっている

※デルタ六面体が正多面体ではないことを確認（教科書問６）

ここでは，正多面体の概念を指導するために，正多面体でないものを提示することによって，正多面体の概念が確実になると考える。

２．正多面体が５種類しか存在しないことの理由に関する考察

①立体の頂点には最低でも３つの面が集まる必要がある

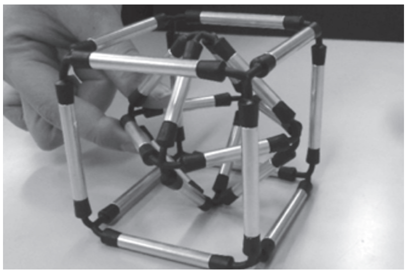
②正三角形を１つの頂点に３つ集めると正四面体，４つ集めると正八面体，５つ集めると正二十面体ができる

③６つ集めると角の和が360°になるから立体にならない（これは生徒が説明できる）。

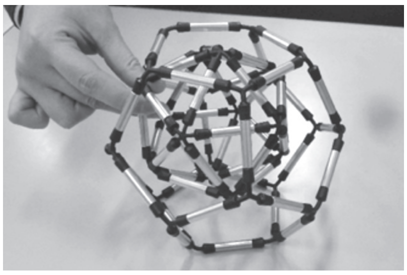
したがって，正三角形でできる正多面体は３種類のみ
④　T「正方形なら？」
　　S「３つ集めると正六面体」
　　「４つで角の和が360°になるから，できない。正方形でできる正多面体は１種類」
⑤　S「正五角形でもできるのは１種類。正六角形では３つ集めたらもう360°になっちゃうから無理。」だから５種類しかできない！
３．教科書の問７～問９による演習
問７　正多面体の頂点や辺の数を計算で求める方法
問８　正多面体の双対性（教科書では正六面体と正八面体）について
問９　オイラーの多面体定理について，一般的な多面体（三角柱など）でも成り立つことの確認

本稿では，この場面の指導の有効性について，検証しようとしている。

Ⅱ　<２時間目>
ねらい：具体物の操作経験を通して，正多面体のもつ特徴や性質について理解を深めさせる。
この時間は，パイプグラムを実際に使って活動をして，生徒が辺と頂点の数に注目するように導いた。
学習課題【パイプグラムで正多面体の性質を確認しよう】
１．４人１グループで正多面体５種類をつくる（20分）
パイプ３種類（短・中・長）・コネクタ３種類（３・４・５）を教卓に置いておき，５種類の正多面体をつくるのに必要数を各グループで考えて持っていく。
※全10グループで５種類の正多面体をつくるのには十分なパーツがある状況。ただし，大きさについてはバラバラになる。
２．前時の学習内容等をいろいろ確認してみる。（10分）
○表の辺の数や頂点の数を参考に，必要なパーツをかぞえてそれぞれの正多面体をつくることができる。ここの指導で，辺と頂点に注目させた。
○正多面体の双対性についての確認ができる。
正六面体の内部に正八面体が入った状態をつくって各面の頂点を結ぶ（前時に取り組んだ問８の内容）の状況を確認することができる。正十二面体と正二十面体でも同様に双対性について確認することができる。（正多面体の大きさにばらつきがあるため，できるグループのものを取り上げて全体で確認。）



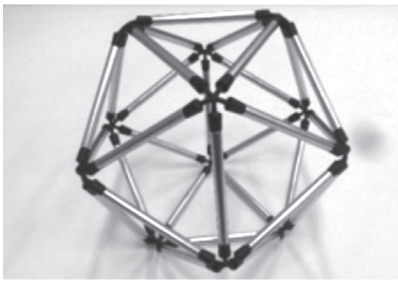
（正六面体と正八面体の双対性の確認）

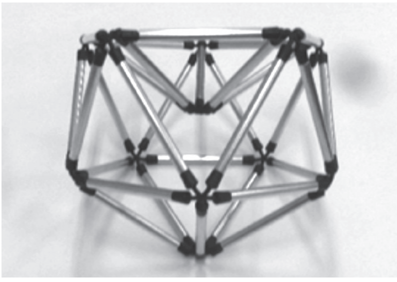


（正十二面体と正二十面体の双対性の確認）

○　正四面体をのぞく４種類は，机に置いたとき，上側にくる面が，机と平行になることを確認。
⇒平行な面がそれぞれ存在している。（後の平面と平面の位置関係につなげることができ

る内容）
○コネクタを逆向きにして，へこみのある場合の正多面体を作ったグループについてとりあげて紹介。（正二十面体を制作して，１つだけコネクタを反対向きにすると下の写真のようなへこみのある立体ができる。

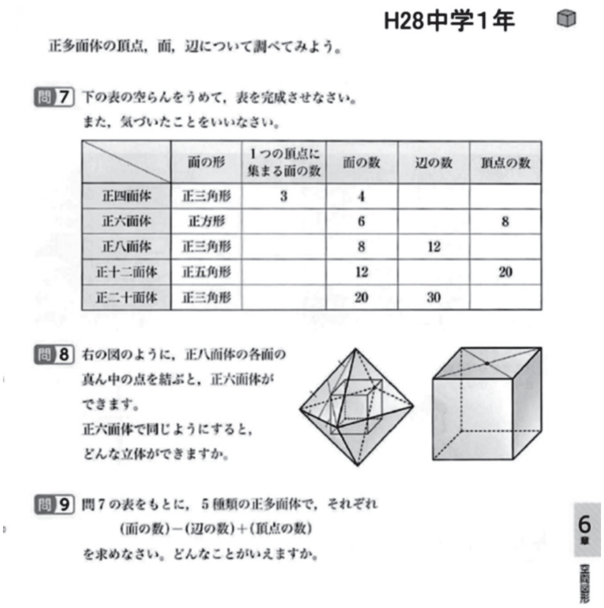




前時で正多面体の条件について学習する際に，正多面体は「へこみがないもの」という教科書の記述に触れたが，具体的な図や写真が載っているわけではない。パイプグラムならば，コネクタを１つ反対向きにするだけで簡単にへこみのある立体を作ることができる。へこみのある立体について，１度でも実際の状況を見せておくことは有効であると考える。

３．デルタ多面体づくりにチャレンジ(10分)
残り時間でパイプグラムを自由に使ってのデルタ多面体づくりに取り組ませる。
デルタ六面体・デルタ十面体などは比較的作りやすく，＜条件１＞は満たしても＜条件２＞は満たさない多面体の具体例に触れる機会とすることができた。
４．振り返り（10分）
生徒の記述例
・正四面体以外の正多面体の向かい合う面が平行ということに驚きました。
・平面で見るよりも立体のほうが見やすいというのを改めて実感できたし，正多面体は５つしかできないというのも確かめることができた。
・デルタ多面体がいろいろできて，正多面体との違いもわかった。

生徒が使っている東京書籍の教科書の多面体の部分の記述は以下の通りである。



H28中学1年

正多面体の頂点，面，辺について調べてみよう。

問7　下の表の空らんをうめて，表を完成させなさい。
また，気づいたことをいいなさい。

	面の形	1つの頂点に集まる面の数	面の数	辺の数	頂点の数
正四面体	正三角形	3	4		
正六面体	正方形		6		8
正八面体	正三角形		8	12	
正十二面体	正五角形		12		20
正二十面体	正三角形		20	30	

問8　右の図のように，正八面体の各面の真ん中の点を結ぶと，正六面体ができます。
正六面体で同じようにすると，どんな立体ができますか。

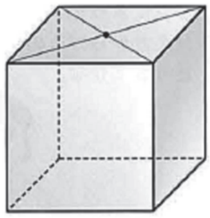
問9　問7の表をもとに，５種類の正多面体で，それぞれ
(面の数)－(辺の数)＋(頂点の数)
を求めなさい。どんなことがいえますか。

6章
空間図形

第４章　調査結果について

授業終了後，多面体についての調査問題を実施した。
調査問題は，問１～問３で構成された。

問１「正六面体の隣り合う正方形の対角線の交点どうしを結んでできる面で囲まれる図形は何ですか。下の①から⑤までの正しいものを選んで下さい。
①　正四面体　　②　正六面体
③　正八面体　　④　正十二面体
⑤　正二十面体」



（問１に示した図）

問２　正十二面体は，すべての面の形が正五角形です。

また，１つの頂点に３つの面が集まっています。

このことを使って次の問に答えて下さい。

（１）　正十二面体の辺の数はいくつですか。

下の①から⑤までの正しいものを選んで下さい。

①　12　　②　17　　③　20

④　30　　⑤　34

（２）正十二面体の頂点の数はいくつですか。

下の①から⑤までの正しいものを選んで下さい。

①　12　　②　17　　③　20

④　30　　⑤　34

問３　下の（１）～（６）はある多面体の模型の写真と見取図です。

これらの多面体の面はすべて正三角形です。それぞれの多面体は正多面体ですか。

正多面体である場合は○を，正多面体でない場合は×を解答欄に書いてください。

６つのデルタ多面体（面がすべて正三角形の多面体）の模型と見取図を示し，正多面体であるかを回答させた。

（１）は，正三角形が４面（四面体）

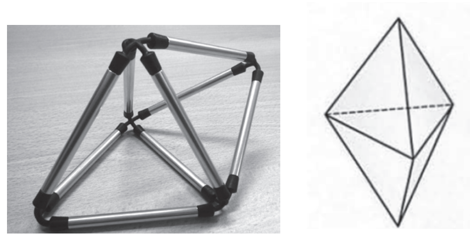
（２）は，正三角形が６面（六面体）

（３）は，正三角形が８面（八面体）

（４）は，正三角形が10面（十面体）

（５）は，正三角形が16面（16面体）

（６）は，正三角形が20面（二十面体）



（２）で示した写真と見取図

問１と問３の結果については,今回は割愛する。本稿に関係のある，問２について考察することとする。

附属中学校第１学年４クラスにおいて，３クラス（ABC 組）では，パイプグラムを使用して指導し，１クラス（D 組）では，パイプグラムを使用しないで指導した。

2(1)　12面体の辺の数

			附属中　ABC組		附属中　D組	
1	①　12		2	1.8%	1	2.5%
2	②　17		3	2.7%	3	7.5%
3	③　20		21	18.6%	12	30.0%
4	④　30	◎	82	72.6%	21	52.5%
5	⑤　34		5	4.4%	3	7.5%
0	無回答		0	0.0%	0	0.0%
	正答		82		21	
	誤答		31		19	
	計		113		40	

十二面体の辺の数について，パイプグラムありのクラス（ABC 組）と，パイプグラムなしのクラス（D 組）の正答と誤答の結果について差があるかを調べた。パイプグラムを使って指導したクラス（ABC 組）で正答した生徒は82人，誤答した生徒は31人,パイプラムを使用しないクラス（D 組）で正答した生徒は21人,誤答生徒は19人であった。直接確率計算を行った結果,その偶然確率は,p=0.00301（両側検定）であり，有意水準５％で有意だった。従って，パイプグラムを使用して指導した３クラスの方が，使わないで指導した１クラスより正答した生徒の数が多かったといえる。

また，十二面体の頂点の数についても，辺の同

様に分析を行った。

2(2)　12面体の頂点の数

			附属中	ABC組	附属中	D組
1	①　12		25	22.1%	10	25.0%
2	②　17		13	11.5%	3	7.5%
3	③　20	◎	60	53.1%	21	52.5%
4	④　30		12	10.6%	5	12.5%
5	⑤　34		2	1.8%	1	2.5%
0	無回答		1	0.9%	0	0.0%
	正答		60		21	
	誤答		53		19	
	計		113		40	

十二面体の頂点の数について，パイプグラムありのクラス（ABC 組）と，パイプグラムなしのクラス（D 組）の正答と誤答の結果について差があるかを調べた。パイプグラムを使って指導したクラス（ABC 組）で正答した生徒は60人，誤答した生徒は53人，パイプラムを使用しないクラス（D 組）で正答した生徒は21人，誤答生徒は19人であった。直接確率計算を行った結果，その偶然確率は，p=0.5467　ns（.10<p）であり，有意差がなかった。従って，この問題では，パイプグラムを使用して指導した３クラスの方が，使わないで指導した１クラスでの正答数の差は認められなかった。

辺の数については有意差があり，頂点の数については有意差がないという結果は，指導の成果として判断してよいかを今後のさらにくわしく調べないと分からない。しかし，パイプグラムを使って指導することの有効性がかる可能性については示すことができた。

調査問題を実施したあとに，受験した生徒に聞き取り調査を実施した。その結果の一部を示す。

＜生徒からの聞き取りの内容＞
正解○授業でやった求め方で，５×12÷２の計算をした
○全部で60個辺があるけど，重なる部分があるから，それを数えていって引きました
○見取り図を書いて，かぞえたらそうなりました
誤答×どう解いたか覚えていません＜多数＞
×（回答⑤）面の数を１つ増やすと辺が重なっていくから，その変わり方を面を１つずつ考えていったら大きな数になると思ったから，一番大きな答えを選んだ。
＜授業者の考察＞
授業で扱った計算式を活用できていたのは全体の４～５割程度。10分程度で取り上げた内容だったため，たしかな定着とは至っていないようだ。

また，辺の数と，頂点の数を求める２つの問題について，相関を調べた。

ABC組

辺 2(1) ＼ 頂点 2(2)	1	2	3	4	5	0	
1	1		1				2
2		1	2				3
3	8	3	1	9			21
4	14	8	55	2	2	1	82
5	2	1	1	1			5
	25	13	60	12	2	1	113

D組

辺 2(1) ＼ 頂点 2(2)	1	2	3	4	5	0	
1		1					1
2	3						3
3	4		3	4	1		12
4	2	1	18				21
5	1	1		1			3
	10	3	21	5	1		40

パイプグラムありのクラス（ABC 組）と，パイプグラムなしのクラス（D 組）の２問とも正解した生徒について差があるかを調べた。パイプグラムを使って指導したクラス（ABC 組）で２問とも正答した生徒は55人，どちらかが誤答あるいは２問とも誤答だった生徒は58人，パイプラムを使用しないクラス（D 組）で２問とも正答した生徒は18人，どちらかが誤答あるいは２問とも誤答

の生徒は22人であった。直接確率計算を行った結果，その偶然確率はp=0.7162　ns（.10<p）であり，有意差はなかった。

辺の長さを求めるときに，計算による考え方を確実に理解している生徒は，頂点の長さを求めることもできると考えるので，計算による考え方はまだ十分理解されていないとも推測できる。

従って，今回の調査結果からだけでは，パイプグラムが有効であったと断定することはできない。今後，さらにパイプグラムの有効性について検討していきたい。

また，附属中学校で，期末テストに「（デルタ十面体を図示し）この図形が正多面体といえないわけを答えなさい。」という問題を出題した。この問題に生徒は，『１つの頂点に集まる【辺】の数が異なるから』という解答が，佐々木が過去に指導した学年に比べて圧倒的に多かった。これは，パイプグラムを使って正多面体作った経験から「頂点に集まるのは（面ではなくて）辺」というイメージが定着してしまったのではないかと思われる。これは，パイプグラムでの指導が辺と頂点に注目が集まり，面をして捉えにくいということもあると考えられる。指導においては，このことも念頭におく必要がある。

第５章　他校との比較

今回の附属中学校で実施した調査問題を，公立のＡ中学校でも実施した。

この問題について，類型ごとの反応率は以下の通りである。

多面体の問題 附属中学校1学年 公立A中 1			附属中　ABC組 113 事前調査 附属中　ABC組		A中　全クラス計 112 事前調査 A中　全クラス計	
1	①　正四面体		11	9.7%	14	12.5%
2	②　正六面体		14	12.4%	14	12.5%
3	③　正八面体	◎	82	72.6%	79	70.5%
4	④　正十二面体		4	3.5%	3	2.7%
5	⑤　正二十面体		0	0.0%	2	1.8%
9	上記以外の回答		2	1.8%	0	0.0%
0	無回答		0	0.0%	0	0.0%

2(1)			附属中　ABC組		A中　全クラス計	
1	①　12		2	1.8%	7	6.3%
2	②　17		3	2.7%	9	8.0%
3	③　20		21	18.6%	22	19.6%
4	④　30	◎	82	72.6%	66	58.9%
5	⑤　34		5	4.4%	8	7.1%
9	上記以外の回答		0	0.0%	0	0.0%
0	無回答		0	0.0%	0	0.0%

2(2)			附属中　ABC組		A中　全クラス計	
1	①　12		25	22.1%	28	25.0%
2	②　17		13	11.5%	6	5.4%
3	③　20	◎	60	53.1%	59	52.7%
4	④　30		12	10.6%	15	13.4%
5	⑤　34		2	1.8%	3	2.7%
9	上記以外の回答		0	0.0%	0	0.0%
0	無回答		1	0.9%	1	0.9%

問１，問２（１），問２（３）について，直接確率計算を実施した。

附属中学校のパイプグラムを使用して指導したABC組とＡ中学校の正答と誤答の結果について差があるかを調べた。

問１は，附属中で正解した生徒は，82人，誤答した生徒は31人，Ａ中では，正答した生徒が79人，誤答した生徒が33人であった。直接確率計算を行った結果，その偶然確率は，p=0.7690　ns（.10<p）（両側検定）である。

問２（１）は，附属中で正解した生徒は，82人，誤答した生徒は31人，Ａ中では，正答した生徒が66人，誤答した生徒が46人であった。直接確率計算を行った結果，その偶然確率は，p=0.0355　*（p<.05）（両側検定），である。

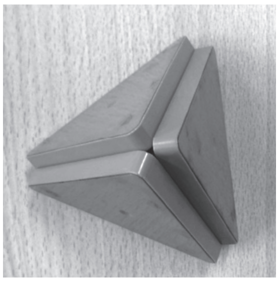
問２（２）は，附属中で正解した生徒は，60人，誤答した生徒は53人，Ａ中では，正答した生徒が59人，誤答した生徒が53人であった。直接確率計算を行った結果，その偶然確率は，p=1.0000　ns（.10<p）（両側検定）である。

問２（１）で有意差があった。この結果は，附属中での分析と同じ結果である。附属中のABC組の辺の数を求める問題で，成績がパイプブラムを使わなかったＤ組や，公立Ａ中より有意に高かったことから，パイプグラムを使って，実物モデルを作成しその観察に基づいて多面体の考察をすることに有効である可能性があることということができる。

第６章　研究のまとめ

他校との比較の結果パイプグラムの操作だけでは，今までの指導とあまり変わらないことも明らかになった。パイプグラム等の実物モデルを使って考える際は，見取図や式との関連を考える時間をとり，直感と観察と論理の行き来ができる授業を構想することが必要である。

また，パイプグラムは面として捉えにくいということも明らかになったので，多様な実物モデルを使って指導することも必要である。例えば，下記のように辺や頂点が捉えやすい実物モデル（パイプグラム等）や面が捉えやすい実物モデルを併用して，それぞれのよさを生かして指導することが必要である。

上記のような模型を併用し両方を観察することなどから，多面体の辺や頂点の数を求めることを論理的に考えることを生徒が数学的活動をして行うことが大切である。例えば，正四面体では，実物モデルを観察ながら下記の論理で考えるようにすることが必要である。

１）面の形は三角形であり，それが４面ある。
２）４面をばらばらにすると，頂点の数，辺の数は，３×４である。
３）これを四面体の頂点を考えると，１つの頂点に３つの頂点が集まるので，３×４÷３＝４
４）辺の数は，２つの辺は重なるので，３×４÷２＝６となる。

このことを学習したあとに，生徒が正十二面体では，正二十面体ではとのように考えるかについて，自ら課題を見いだし，学習を進めるようにしたい。

最後に確認したいことは，多面体の辺や頂点の数を計算によって求める知識を得ることに価値があるのではなく，そのことを論理的に考え，生徒自ら納得して説明できることが大切であるということである。このことは，多面体が５種類あることの説明でも同じことが言える。５種類あるというということ自らが納得し，相手がわかるように説明でいるということに重きを置く指導が大切である。

今後の研究において，空間図形の指導に実物モデルをどのように活用することが，論理的思考力を伸ばすことにつながるかについて探求していきたい。

〈引用文献〉

立花正男（2012）　多面体の指導における数学的活動　岩手大学教育学部附属教育実践センター研究紀要11号（2012）　137-145頁

立花正男（2016）　児童生徒の空間概念の把握についての一考察　日本数学教育学会　第49回秋期研究大会発表集録　245-248頁

立花正男（2017）　見取図の読み取りの児童の実態と指導の改善～パイプグラムの有効性～　日本数学教育学会　第50回秋期研究大会発表集録　265-268頁

今回の研究でパイプグラムを使っての指導をするにあたり，武州工業株式会社の林様にパイプグラムを準備していただいた。これらの協力があってこの研究は可能になりました。感謝申し上げます。

また，「本研究は科学研究費助成事業（学術研究助成基金助成金）（基盤研究（C）（一般）（16K00946　研究代表者　立花正男）の助成を受けたものです。」