# 算数・数学科の授業改善
## ～発展的な学習の視点から～

立花　正男*

（2018年11月21日受付）
（2019年２月12日受理）

Masao TACHIBANA

Improvement of Mathematics Lesson from a Developmental Learning Perspective

**要　約**

本稿は，発展的な学習について，2017（平成29）年3月に告示された中学校学習指導要領において，どのように捉えられているかを，解説に記述されていることについてまとめ，今後の算数・数学の授業の進め方を考察した。その際，平成17年度に文部科学省が実施した「特定の課題に関する調査」の考え方を確認した。それは，特定の課題に関する調査の考え方が，現在毎年，国立教育政策研究所で実施している全国学力・学習状況調査の枠組みの考え方の基盤となっているため，この調査の考え方が今後の算数・数学の授業改善をする際に重要になると考えたからである。

岩手県の教員の全国学力・学習状況調査の学校質問紙の結果をみると，補充的な学習や計算練習などの反復練習をする学習は9割以上の学校が行っていると回答しているが，発展的な学習については小学校でも中学校でも約6割である。これは，小学校，中学校とも全国の平均より少ない。このことから，発展的な学習への取り組みがまだ十分とは言えない状況が見られる。

### 第１章　統合的・発展的な学習とは何か

文部科学省では，2017（平成29）年3月に中学校学習指導要領（以下「新学習指導要領」）を告示した。今回の改訂では，知･徳･体にわたる「生きる力」を子供たちに育むために「何のために学ぶのか」という各教科等を学ぶ意義を共有しながら，授業の創意工夫や教科書等の教材の改善を引き出していけるようにするために，全ての教科等の目標を及び内容を「知識及び技能」，「思考力，判断力，表現力等」，「学びに向かう力，人間性等」の三つの柱で再整理している。

新学習指導要領の趣旨を実現するために，算数・数学科の指導に当たっては，「知識及び技能」が習得されること，「思考力，判断力，表現力等」が育成されること，「学びに向かう力，人間性等」を涵養することが偏りなく実現されるよう，単元などの内容や時間のまとまりを見通しながら，生徒の主体的・対話的で深い学びの実現に向けた授業改善を行うことが重要である。

これらの基本的な考え方を実現するために，中学校数学科の目標を次のように設定している。

＊岩手大学大学院教育学研究科

中学校数学科の目標
　数学的な見方・考え方を働かせ，数学的活動を通して，数学的に考える資質・能力を次のとおり育成することを目指す。
(1) 数量や図形などについての基礎的な概念や原理・法則などを理解するとともに，事象を数学化したり，数学的に解釈したり，数学的に表現・処理したりする技能を身に付けるようにする。
(2) 数学を活用して事象を論理的に考察する力，数量や図形などの性質を見いだし統合的・発展的に考察する力，数学的な表現を用いて事象を簡潔・明瞭・的確に表現する力を養う。（下線は引用者による）
(3) 数学的活動の楽しさや数学のよさを実感して粘り強く考え，数学を生活や学習に生かそうとする態度，問題解決の過程を振り返って評価・改善しようとする態度を養う。

上記のように，中学校数学科の目標についても，「知識及び技能」，「思考力，判断力，表現力等」，「学びに向かう力，人間性等」の三つの柱で示している。

2017（平成29）年7月に公表された中学校学習指導要領（平成29年告示）解説数学編（以下「H29解説」）では，「今回の改訂では，『見方・考え方』を働かせた学習活動を通して，目標に示す資質・能力の育成を目指すこととした。これは，中央教育審議会答申において，『見方・考え方』は，各教科等の学習の中で働き，鍛えられていくものであり，各教科等の特質に応じた物事を捉える視点や考え方として整理されたことを踏まえたものである。中学校数学科では，『数学的な見方・考え方』については，『事象を数量や図形及びそれらの関係などに着目して捉え，論理的，統合的・発展的に考えること』であると考えられる。（H29解説 P7）（下線は引用者による）」として，数学的な見方・考え方を，論理的，統合的・発展的に考えることであると説明している。

さらにH29解説では，「資質・能力を育成していくためには，学習過程の果たす役割が極めて重要である。算数科・数学科においては，中央教育審議会答申に示された『事象を数理的に捉え，数学の問題を見いだし，問題を自立的，協働的に解決し，解決過程を振り返って概念を形成したり体系化したりする過程』といった数学的に問題発見・解決する過程を学習過程に反映させることが重要である。生徒が，目的意識をもって事象を数学化し，自ら問題を設定し，その解決のために新しい概念や原理・法則を見いだすことで，概念や原理・法則に支えられた知識及び技能を習得したり，思考力，判断力，表現力等を身に付けたり，統合的・発展的に考えて深い学びを実現したりすることが可能となる。（H29解説 P7）」と説明し，数学科の学習の進め方を示すとともに，深い学びにつながる学習には，統合的・発展的な学習が必要であると説明している。

このように，目標に「統合的・発展的に考察する力」が入っており，H29解説では，「『数学的な見方・考え方』は，数学的に考える資質・能力を支え，方向付けるものであり，数学の学習が創造的に行われるために欠かせないものである。また，生徒一人一人が目的意識をもって問題を発見したり解決したりする際に積極的に働かせていくものである。そのために，今回の改訂では，統合的・発展的に考えることを重視している。なお，発展的に考えるとは，数学を既成のものとみなしたり，固定的で確定的なものとみなしたりせず，新たな概念，原理・法則などを創造しようとすることである。（H29解説 P29）（下線は引用者による）」としている。

## 第２章　「特定の課題に関する調査」について

本稿においては，新学習指導要領の統合的・発展的学習のうち，特に発展的な学習について考察することとする。発展的な学習を考える際に確認しておかなければならない調査に「特定の課題に

関する調査」がある。この調査は，国立教育政策研究所が，平成15年10月7日に中央教育審議会から出された「初等中等教育における当面の教育課程及び指導の充実・改善方策について」で答申されたことを受け，平成17年１月に中学校3年生，平成17年2月に小学校4～6年生，中学校1，2年生を対象に，国語，算数・数学を調査し，平成18年7月にその結果を公表したものである。この調査では，教育課程実施状況調査や研究指定校による調査の枠組みでは把握が難しい内容を調査したものであり，数学的に考える力や計算に関する力の児童・生徒の状況を調査している。

この調査の考え方が，現在行われている全国学力・学習状況調査の枠組みの考え方の基盤となっている。

約15年前に行った調査であり，資料としては古くなっているが，発展的な学習を考える際に重要な視点が示されているので，その調査の考え方をここで紹介することとする。

この「特定の課題に関する調査」の考え方は，諸般の事情により公にされていないことから,多くの人は目にふれていないものである。本稿では，この調査の考え方のうち，発展的な学習に関係する一部を紹介することとする。（なお，今回掲載するにあたり若干加筆修正した部分もある。）

## １　「特定の課題に関する調査」における「数学的に考える力」

「特定の課題に関する調査」（以下「特定の課題の調査」）の算数・数学専門委員会では，主な調査の対象として「数学的に考える力」と「計算に関する力」を取り上げている。

前者の「数学的に考える力」を，「『数学的活動』を支え，遂行するために必要な資質や能力などの総称」とみなし，各種調査で指摘されている課題や算数・数学科のねらいから見て，「日常事象の考察に算数・数学を生かすこと」と「算数・数学の世界で事象を考察すること」及びそれらの過程で重要なはたらきをする「論理的に考えること」に関わる力に絞っている。表１は，算数・数学専門委員会がまとめた「数学的に考える力」をとらえる枠組である。

表１　「数学的に考える力」をとらえる枠組み（特定の課題の調査）

| | | |
|---|---|---|
| 数学的に考える力 | １　日常事象の考察に算数・数学を生かすこと（実生活と数学の関連） | ★算数・数学を日常事象の考察に生かすことができるかどうかについて調査する。 |
| | ２　算数・数学の世界で事象を考察すること | ★算数・数学の世界で事象を考察し，そのことによって，事象の考察をさらに深めることができるか調査する。<br>例えば,<br>①「結果を振り返って考える力」<br>②「一般化しようとする力」<br>③「数学を発展的に考える力」<br>について調査する。 |
| | ３　論理的に考えること | ★筋道を立てて説明するために適切に表現したり，論理的に考えたりする力について調査する。<br>例えば,<br>①「演繹的に考える力」<br>②「反例をあげて考える力」<br>③「帰納的に考える力（試行接近）」<br>④「証明を構成する力，よむ力」<br>について調査する。 |

特定の課題の調査の考え方では，数学的に考える力を「事象を数理的に考察する力」と「論理的に考える力」の2つも分けて説明している。この説明の部分が新学習指導要領で強調している発展的な学習と関連が深いので，その文章を紹介することとする。

## ２ 「事象を数理的に考察する力」の説明

### １　数学科の目標と「事象を数理的に考察する力」

#### (1) 数学科の目標における「事象を数理的に考察する力」の位置

教育課程審議会答申（平成10年7月）に示された算数・数学科の教育課程の基準の改善のための基本方針には，「事象を数理的に考察し，処理することのよさを知り，自ら進んでそれらを活用しようとする態度を一層育てるようにする」ことが含まれていた。また，内容の改善を図るために，「実生活における様々な事象との関連を考慮しつつ，ゆとりをもって自ら課題を見つけ，主体的に問題を解決する活動を通して，学ぶことの楽しさや充実感を味わいながら学習を進めることができるようにすることを重視」することが示された。

これを受けて改められた数学科の目標（平成10年12月告示）には，「事象を数理的に考察する能力を高めるとともに，数学的活動の楽しさ，数学的な見方や考え方のよさを知り，それらを進んで活用する態度を育てる」ことが明示されている。

#### (2)「数理的な考察」の対象と考察における思考活動

「事象を数理的に考察する」場面については，「現実の世界のことを数学的に定式化し，数学の手法によって解を求め，これを現実に照らして解釈すること」と「数学の世界の中で関係を簡潔な使いやすい形に表現し，手際のよい方法で能率的に処理すること」の２つが例示されている（『中学校学習指導要領（平成10年12月）解説　数学編』（平成11年9月公表））。前者は，現実世界の問題を数学の舞台に載せて数学的処理によって解決する「数学的モデル化」の過程を意味する。この過程には，問題場面を理想化して考えたり，仮定をおいて条件を単純化したりするなど，数学の問題に定式化する段階，定式化された問題の解を数学的処理によって求める段階，得られた解を現実の場面に照らして（「戻して」）整合的・適切なものであるかどうかを吟味する段階などが含まれる。一方後者は，数学における探究活動のなかで，事象に含まれる関係や構造を明らかにするために，それらを簡潔に表現したり能率的に処理したりする過程である。この過程には，「帰納的な考え方，演繹的な考え方，類推的な考え方など，**数学をつくり，発展させる数学的な見方・考え方が用いられること**」にも注意する必要がある。

以上のように，「事象を数理的に考察する力」は，考察対象とする事象が属する世界によって，大きく２つに分けてとらえられること，またこの力は数学的活動において中核的な役割を果たす力であることがわかる。さらに，この事象を数理的に考察する場面では，「理想化」や「単純化」，数学的な処理，解の吟味などの様々な思考活動，**数学をつくり，発展させる数学的な見方・考え方や数学的な推論が働くことがわかる。**

### ２　事象を数理的に考察することの意義

事象を数理的に考察する力を身につけることは，数学科の目標に明示的に位置づけられていることからみて，ただちに価値あることであるといえる。このことは，次の引用からもわかる。

「数学科は，自然現象はもとより，社会現象の中から変化に内在する不変の法則や規則を発見するとともに，将来起こるであろう

様々な現象を予測し，人類にとって好ましいものは促進し，そうでなければ抑制しながら，調和のとれた社会を構築していけるような人間の育成を図ろうとするものである」（『中学校数学科指導資料 - 学習指導と評価の改善と工夫』, 1993, p.50）

また，上記のような様々な思考活動は，数学的活動の中核をなすものであり，それぞれについて，生徒がさらに数学を学んだりそれを活用したりする上で，重要な役割を果たすことはいうまでもない。

さらに，これからの時代には，事象を数理的に考察する力が一層必要となることは，最近の様々な研究からもわかる。OECD による生徒の到達度調査（OECD-PISA）では，「数学的リテラシー」を国際的に調査しているが，この調査の枠組みは，身の回りの事象を数学の舞台に乗せ（数学化），数学的に処理をする過程において用いられる様々な力量をとらえるという立場に立っている。

したがって，事象を数理的に考察する力を身につけることの意義については，生徒が(1)数学をよりよく学び活用するために，また(2)数学を実生活で活かすために，という２つの観点からとらえてみる必要がある。

## ３　事象を数理的に考察する力の育成のために

事象を数理的に考察する力を育てるために，どのような配慮が必要か。「事象を数理的に考察する」場面については，「現実の世界のことを数学的に定式化し，数学の手法によって解を求め，これを現実に照らして解釈すること」と「数学の世界の中で関係を簡潔な使いやすい形に表現し，手際のよい方法で能率的に処理すること」の２つが例示されていた。このいずれにおいても，題材選択の工夫，考える過程の重視，数学的な見方・考え方や数学的処理のよさの顕在化に配慮する必要がある。

### (1) 扱う題材の選択

第一には，実生活における様々な事象との関連を考慮しつつ指導を展開することである。そのためには，身の回りの事象を数学の眼でとらえることのよさがわかる題材を工夫する必要がある実験や実測を指導に取り入れたり，身の回りの事象に焦点を当てたりすることを一層充実する必要がある。また，数学の世界の題材を取り上げる場合にも，探究活動のなかで，帰納的な推論や類推的な推論がはたらいて規則や性質を見いだす場面，そして予想したことがらを演繹的に説明し，整理する場面をもうけられるような題材を選択する必要がある。

### (2) 考える過程の重視

次に大切なのは，考える過程を重視した指導を心掛けることである。

具体的な場面についての問題を解決する場面では，その場面を数学の舞台に載せる過程それ自体に焦点を当て，例えば立式やグラフ化の過程を大切に扱う必要がある。例えば，方程式を利用する場合，具体的な場面における関係をとらえるために，等しい関係にどう着目するか，どの要素に着目して数学的に表現する（「何を $x$ とおくか」）か，どのような表現を工夫するとよいか（「真ん中の数を $n$ とおく」）など，表現する過程を大切にする必要がある。

また，数学的に処理する過程では，一度形式化しておけば「考えなくてもよい」こと（形式的・機械的に処理すること）などに，焦点を当てることも大切である。

さらに，数学的に得られた結果を吟味するために，行った活動を振り返って考える姿勢を育てるために，そのような機会を豊かに設ける必要がある。

その一方で，数学の中での事象を発展的に考察したり一般化して考察したりする学習機会を設ける必要がある。その場合，数や図形

についての考察の範囲を拡げながら発展的に考えを進めたり，求めた結果について根拠を挙げて説明したりすることを大切にする必要がある。さらに，複数の事象を統合的に考えたり，一つの事象を多面的に考えたりすることも大切である。

### (3) 価値の明確化による数学的処理のよさの顕在化

事象を数理的に考察する力を育てるためには，事象を数理的に考察する中で用いられている数学的な見方・考え方や数理的な処理それ自体を顕在化し，生徒がそれらのよさを理解するようにする必要がある。そのためには，考察の中で用いられている方法について，それが能率的・効率的かどうか，一般性や発展の可能性を含むものであるか，そしてより単純な方法やエレガントな方法がないかなどの観点から吟味する必要がある。

この意味で，数学的な見方・考え方や数理的な処理についての価値を明確化し，生徒がそれに気づくような指導を行う必要がある。そのためには，問題解決の過程において，また問題を解き終わった後で生徒が活動を振り返ることが大切である。また，一つの問題についての複数の解決を提示し，比較することも必要である。そのような過程での方法や考え方の価値（簡潔さ，手際よさ，的確さ，効率性や経済性など）の検討を通じて，数学的な見方・考え方や数理的な処理のよさが浮き彫りになるはずである。

## 3 「論理的に考える力」の説明

### 1 それは何であるか

「論理的に考える」とは，筋道立って考えたり説明したりすること。事柄が成り立つこと（成り立たないこと）を考えたり説明したりするとき，そのもとになっていることや約束ごとを明らかにしたり，それにもとづいて論を進めること。

「論理的に考える」ことは，もとにする事柄をつくったり，それに基づいて論をつくったりしていくという生産的な面をもっている。また，もとにする事柄や論をつくっていく仕方は，自分だけでなく，他者にもわかるような形式（パターン）をもっていなくてはならない。

### (1)「特定の課題に関する調査」における「論理的に考える力」

**「論理的に考える力」**は，表１の３に該当するが，重要であると思われる点は，それが「『数学的活動』を支え，遂行するために必要な資質や能力」，特に，**一般化したり発展的に考えたりすることを通して事象の考察を深めることを支える力とみなしている**点である。これは，1960年代にさかんであった形式的推論を中心とした論理的思考よりも広い範囲を視野においているものと考える。

かくして，「論理的に考える力」は，演繹的推論のみならず，帰納，類推などの蓋然的推論も含み，数学をすることの全体を支える基本的な力と考えられる。

### (2)「数学的活動」と「論理的に考える力」

「数学的活動」を，現実世界における未解決の状況に対して条件や仮説を設定し，簡潔で御しやすい数学の問題として定式化し，数学の理論を駆使して演繹処理し，得られた数学的結果に照らして当該の問題の解決に資すると共に，解決の際の方法や結果を吟味することによって問題の本質を見定めつつ，より一般性・発展性のある理論を得ようとする営みと考える。

以下，「数学的活動」を３つの側面，すなわち，（ア）「数学化する」，（イ）「演繹的に処理する」，（ウ）「発展させる」に分け，それぞれの側面から「論理的に考える力」との

関係を述べる。

① 「数学化する」

数学化することは，現実の問題を数学的に定式化することである。数学化する際には，当面する問題状況において，そこで何が問題となるかを探り出し，適当な条件や仮説を設定し，問題を数学的に確定することが必要である。現実世界の問題を解決しようとする際には，解決の鍵となる条件が曖昧であり，むしろ，そのほうが普通である。この意味で，解決のための必要かつ十分な条件が何であるかを決定することが重要となってくる。現実の問題を数学の舞台にのせることは，現実世界についての命題と対応する数学的な命題を構成することである。

② 「演繹的に処理する」

数学的な命題の真偽は演繹によって決定される。証明を構成する力はこのことに関わる。証明は，演繹の方法によって推論すること，つまり，すでに真とされたことがらを基に，他のことがらの真であることを導くことである。したがって，証明は，あることがらが真であることを確かに示すことである。この証明という正当化の方法は，前提とされることがら（仮定）が真である限り，導かれたことがら（結論）が真であることは確立されたのであり，それはゆるぎないものとなる。

数学の世界と現実の世界は，両者が相互に依存し合うがゆえに，独自性を持っている。一方の現実の世界では，実験や観察等により当該の問題に関する経験的データを収集し，他方の数学の世界では経験的な事実とは無関係に無定義用語と公理を出発点とする演繹論理で展開する。このように，現実の世界と数学の世界は固有の論理を持っている。しかしながら，二つの世界はそれぞれ固有の論理を持ちつつも，数学的活動において，相統一される。というのも，数学の世界における理論の演繹的構成は，現実世界との関わりにおいて本来の意味を持つからである。数学の理論を，経験的事実と無関係に無定義述語を用いて演繹論理で構成し，結論を導く過程を首尾一貫したものとするのは，演繹によって導いた数学的結論（理論値）と現実世界で経験的に収集したデータ（実測値）とが許容範囲を越えて食い違った場合に，設定した条件・仮説にのみ責任を追わせるためである。かくして，数学における演繹は，経験世界との関わりにおいて位置づけることもできる。

③ 「発展させる」

**数学的結論を受け入れた場合でも，活動はそれで停止するのではなく，さらなる発展的な活動が展開される。**このように，数学的な結論が当初の問題の解決として受け入れられた際には，解決の際の方法，あるいは解決の結果を振り返ることが重要である。

**結果の振り返りは，おのずから，数学の発展につながる。**数学の問題解決の方法や解決そのものを検討してみることは，問題自身の中のどの部分が解決の際の最も重要な鍵となっているかを見抜くことにつながる。それから，**問題の本質的な部分とそうでない部分との区別ができることになる。**そして，この**本質的部分だけに着目することで，問題の発展を図ることができる。**

数学の発展において，証明が重要な役割を演ずる。証明には，ことがらの正当化だけでなく，そのことがらが「なぜ真であるかの洞察を与える」ことが期待できる。より具体的には，証明は，ことがらが真であることに，条件（仮定）がどのように関わるかを明らかにする（証明する）ことができる。こうした証明の機能によって，ことがらについての理解が深まり，その内容の吟味ができるような力を持つことができる。

かくして数学の世界で事象を考察し，そのことによって事象の考察をさらに深める際

に，「結果を振り返って考える力」，「一般化しようとする力」，「発展的に考える力」を必要とする。

「論理的に考える力」は，いろいろな事象を数学の世界で考察し理解を深めようと考える際に，どんなふうに考えを進めていけばよいか（事柄の成り立つことを明らかにする際にはもとにする事柄に帰着して考えたり，ある事柄をもとにするとどうしてそれが妥当であると結論づけることができるか，という仕方で論を進める）の形式を扱う力であると考える。

## ２　例で考える

「頂点Ａを共有する正三角形△ＡＢＣ，△ＡＱＲで，△ＡＱＲをＡのまわりに回転すると，ＢＱとＣＲの長さの間にどんな関係があるか。」について考える。

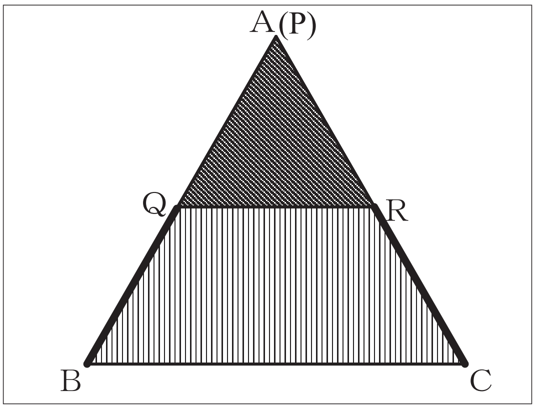



図１

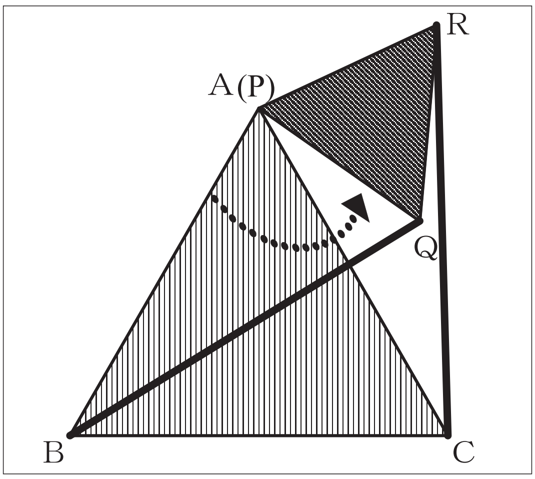



図２

ＢＱとＣＲの長さの間の関係として，ＢＱ＜ＣＲ，ＢＱ＝ＣＲ，ＢＱ＞ＣＲのいずれか一つが成り立つ。

図１の特殊な場合で，ＢＱ＝ＣＲが成り立っている。問題は，ＢＱとＣＲの長さの間の一般的な関係を考えているので，図２でも，そして他の場合もＢＱ＝ＣＲとなることを示すことはできないかを考える。（ここでは，一般に，ある事柄が成り立つか否かを考える場合，特殊な場合について調べて，それを手がかりに命題を構成する，という思考の形式をとっている。）

ＢＱ＝ＣＲであることの証明を構成する際には一定の考える方針があり，証明をかく際にも一定の筋書がある。こうした方針や筋書きは，思考の形式であり，教師による導きを必要である。

＜証明＞
△ＡＱＢと△ＡＲＣで，
ＡＱ＝ＡＲ　・・・①
ＡＢ＝ＡＣ　・・・②
∠ＱＡＢ＝∠ＲＡＣ＝60°＋∠ＱＡＣ　・・・③
①，②，③より，二辺とその間の角がそれぞれ等しいので，
△ＡＱＢ≡△ＡＲＣ
合同な図形では対応する辺が等しいので，
ＱＢ＝ＲＣ

この証明を振り返り発展することを考える際に，問題で示された正三角形であることを証明の仮定として，「ＡＱ＝ＡＲ＝ＱＲ」，「ＡＢ＝ＡＣ＝ＢＣ」，「それぞれの角が60°である」と捉え直し，仮定，証明，与えられた図を考察することで発展の学習が可能になる。

ここでは，証明を見ると，使われているのは，辺についての①，②と，

∠ＱＡＢ＝60°＋∠ＱＡＣ，∠ＲＡＣ＝60°

＋∠ＱＡＣである。この①，②，③について図を見ながら考えることになる。この学習は，学習経験に基づく発展ではなく，根拠に基づく発展の例である。つまり過去にこのような学習では，図形を変えたことがあるから，今回も図形を変えるのではないかと考えるのではなく，次のように考えることが必要である。

今，①では，「ＡＱ＝ＡＲのみが使われており，ＱＲが等しい事は使われていない。」同じように②では，「ＡＢ＝ＡＣのみが使われており，ＢＣが等しい事は使われていない。」ということに気づき，このことは何を意味するかを考えることが大切である。そして，この性質は，正三角形でもなくても成り立つのではないかと考え，そのことを吟味することが必要である。もしも正三角形でないとすれば，③のところで60°が使えなくなるが，それでもこの証明が成り立つかを考えるのである。ここで，①，②をそのままにし，アンダーラインの60°の部分を，等しい他の角に変えたとしても，∠ＱＡＢ＝∠ＲＡＣが成り立つことになり，証明そのものに何らの変更はない。だから，結果は成り立つことになる。つまり，「△ＡＢＣ，△ＡＱＲが正三角形であることは，必ずしも必要ではなく，頂角∠ＢＡＣ＝∠ＱＡＲが等しい二等辺三角形であればよい」ことになる。

証明をする際に「すべての場合が成り立つ場合について」を考えることになるが，すべての場合（仮定）のとらえ方についてしっかり指導することも大切である。**仮定を明確にするということは，発展的な学習の面からも重要である。仮定の部分を変えることが発展の眼**だからである。この場合では，正三角形である図形を二等三角形に変えた場合，証明のどの部分は同じで，どの部分が変わるかについて考えることが，必然的な発展の考え方である。

３　なぜ必要か

数学のもつ形式性は，人の望ましい資質や能力を伸ばすはたらきをする。数学では，数量，式，図形等の実質を捨象した一般的で理想的なパターンを用いる。

また，数学をつくる際に，数量，式，図形等のもつ性質，構造，関係等が簡単な原理や法則に従うように構成し，具体的事象を形式的に統御する。「論理的に考える力」は，数量，式，図形等の内容に依存しない，いわゆる「方法知」であり，思考を形式的に統御する。

数学の形式性は，一般的・理想的であるがゆえに，人間の資質や能力を伸ばすうえでの有用であり強力でもあるがゆえに，陶冶的価値がある。

**「論理的に考える」ことは，事柄の本質についての理解を深め，さらに進んだ考え方や処理の仕方を生み出す力を伸ばす。**

「帰納推論」，「演繹推論」，そして「類比的推論」は，「一般化する力」，「知識や技能を確実なものに打ち立てていく力」，そして「原理や法則の間にかくれた類似を見いだし，より進んだ数学的な考え方や，処理のしかたを生み出し，これらを活用する力」を支える。これらの力は，個別で単独に展開されるのではなく，数学をする過程，あるいは問題解決過程において互いに手に手を携えながら共同で行われるものと考える。

４　どのように育むか

論理は，自分自身の思考を反省したり検討したりするところから生まれてくる思考の形式であるから，思考を対象化することが重要となる。このことを，(1)「数学化する」，(2)「演繹的に処理する」，(3)「発展させる」のそれぞれに関して考える。

(1)「数学化する」

問題の条件・仮定を数学的に表現する（思考の対象にする）ことを重視する。

上の例であれば，「回転する」ことを角の相等で表現しなくてはならない。

(2)「演繹的に処理する」

数量・図形などの内容に依存しない思考の形式を対象化し，表現する。

演繹的思考の様式を表す比喩（例えば,「家系図」）を与える。

証明をかくさいに，かきかたの手順（証明の筋書）を示す。また，数学的な書き方を添削する。

(3)「発展させる」

証明の活動（ことがらが真であることに，条件・仮定がどのように関わるかを明らかにすること）をふまえて,一般化（変数を構成）したり，拡張したり，条件を緩めたりする。

## 第３章　特定の課題に関する調査の調査結果

特定の課題の調査では，第３章の考え方を踏まえて,「論理的に考え方」の実現状況をみるために，例で示した問題を中学校第２学年と中学校第３学年に同一の問題として調査している。

この問題の意図は，「図形に関する性質とその証明が与えられた状況で，次のことができるかどうかを調査する」ための問題である。

(1) もとの図形を連続的に変化させても性質が保たれる場合，与えられたもとの証明をよみ，その一部分を変更することで，連続的に変化した図形における証明を構成できるか。

(2) もとの図形を他の図形に置き換えた場合，与えられたもとの証明をよみ，その一部分を変更することで，図形を置き換えた場合の証明を構成することができるか。

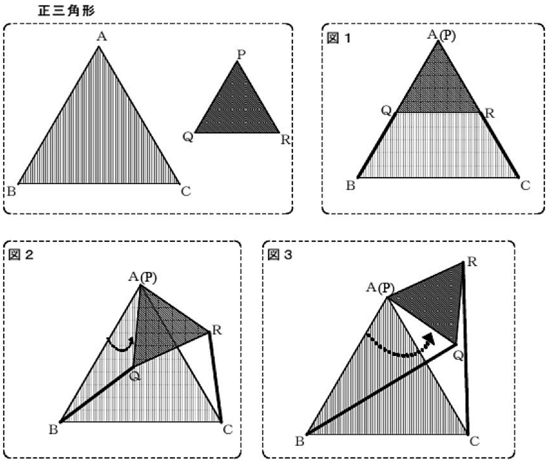
いずれの問題も，証明をゼロから構成することができない生徒でも，何らかの方針が与えられれば，筋道立てて考えることはできるのではないかという仮説に基づいている。また，指導方法の改善の手だてとして，条件をかえて発展的に考えることの有効性を示唆する意図もある。

これまでの調査では，与えられた方針などをもとに証明する問題があった。この問題では，連続的に変化する図形から，変化しない性質とその証明を取り上げ，図形の変化と共に，証明のどの部分を変更する必要があるかを考えさせる問題とした。また，図形を置き換えても，同じような見方で説明できるかを考えさせる問題とした。

また，第２学年と第３学年で同じ問題を出題しているのは，第２学年での論証の指導後，時間の経過と共に生徒の論証に対する理解が深まっているかどうかを確認するためである。

**8** 正三角形ＡＢＣと正三角形ＰＱＲがあります。それら２つの正三角形を**図１**のように，点Ｂと点Ｑ，点Ｃと点Ｒを結びます。

**図２**，**図３**は，正三角形ＰＱＲを点Ｐを中心に回転させている様子を表しています。次の各問いに答えなさい。




(1) **図２**の場合に，ＢＱ＝ＣＲであることを前田さんは次のように証明しました。

青木さんは，前田さんの証明を参考にして**図３**の場合の証明を考えました。

**前田さんの証明**

**図２の場合の証明**

△ＡＢＱと△ＡＣＲにおいて

△ＡＢＣと△ＡＱＲは正三角形だから

ア　ＡＢ＝ＡＣ　……　①
　　ＡＱ＝ＡＲ　……　②

イ　∠ＢＡＱ＝60°　−∠ＱＡＣ…③
　　∠ＣＡＲ＝60°　−∠ＱＡＣ…④

③，④から

∠ＢＡＱ＝∠ＣＡＲ　……⑤

①，②，⑤から

ウ　２辺とその間の角がそれぞれ等しい

したがって

△ＡＢＱ≡△ＡＣＲ

合同な三角形では，対応する辺が等しいので，

ＢＱ＝ＣＲ

**青木さんの証明**

**図３の場合の証明**

△ＡＢＱと△ＡＣＲにおいて

△ＡＢＣと△ＡＱＲは正三角形だから

ア

イ

③，④から

∠ＢＡＱ＝∠ＣＡＲ　……⑤

①，②，⑤から

ウ

したがって

△ＡＢＱ≡△ＡＣＲ

合同な三角形では，対応する辺が等しいので，

ＢＱ＝ＣＲ

**青木さん**は，前田さんの証明の□で囲まれた３つの部分のうち１つの部分だけ書き換えると証明できることに気づきました。

書き換えることが必要な部分を**ア**，**イ**，**ウ**の中から１つ選び，□の中のその記号を○で囲みなさい。

また，書き換える内容を□の中に書きなさい。

| ア　イ　ウ　（1つを○で囲む） |
|---|
| |

(12

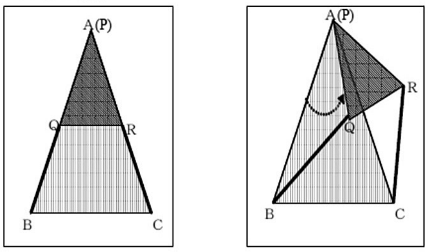
問題　正三角形の移動（1）

| | 解　答　類　型 | 転記する番号 | | 2年 I 8 | 3年 I 8 |
|---|---|---|---|---|---|
| | アを選択しているもの | 1 | | 5.9 | 7.2 |
| イを選択して | ∠ＢＡＱ＝60°＋∠ＱＡＣ<br>∠ＣＡＲ＝60°＋∠ＱＡＣ と解答しているもの<br>（点Ａを点Ｐとしていても可。以下同様） | 2 | ◎ | 17.8 | 34.4 |
| | ∠ＢＡＱ＝∠ＢＡＲ－60°<br>∠ＣＡＲ＝∠ＢＡＲ－60°　と解答しているもの | 3 | ◎ | 0.6 | 0.6 |
| | ∠ＢＡＱ＝90°－∠ＱＡＣ<br>∠ＣＡＲ＝90°－∠ＱＡＣ と解答しているもの | 4 | | 1.1 | 0.6 |
| | 上記２～４以外を解答しているもの | 5 | | 14.1 | 11.4 |
| | 記述がないもの | 6 | | 19.2 | 14.7 |
| | ウを選択しているもの | 7 | | 15.5 | 14.4 |
| | 上記以外の解答 | 9 | | 0.0 | 0.0 |
| | 無解答 | 0 | | 25.7 | 16.8 |
| | | 通過率 | | 18.4 | 35.0 |

この結果を見ると，証明で行われていることの意味を十分に捉えられていないことが分かる。H29解説には，「証明を読んで新たな性質を見いだすこと」の項目で「三角形や平行四辺形の性質の証明の学習においては，証明を書くこととともに，証明を読むことも大切である。証明を読むことは，証明を評価・改善したり，証明をもとに発展的に考えたりする際に必要である。」とある。また，「証明の必要性と意味及びその方法」では，「『証明は，命題が常に成り立つことを明らかにする方法であること』や，『証明をするためにかかれた図は，全ての代表として示されている図であること』を理解できるようにする。」とある。今後どのような指導が必要かを上記の（1）の結果と次の（2）の結果を踏まえて考えていきたい。

(2) (1)で正三角形の場合，**図２**でＢＱ＝ＣＲであることが証明されました。
下の図は，正三角形ＡＢＣを二等辺三角形ＡＢＣに，正三角形ＰＱＲを二等辺三角形ＰＱＲにそれぞれ変えたものです。このとき，二等辺三角形ＰＱＲを点Ｐを中心に回転しても，ＢＱ＝ＣＲは成り立ちますか。
下の**ア～カ**の中から１つ選び，□の中のその記号を書きなさい。
ただし，頂角をＡとする二等辺三角形ＡＢＣと頂角をＰとする二等辺三角形ＰＱＲの頂角Ａと頂角Ｐは等しいとします。

**二等辺三角形**




**ア**　正三角形の場合の証明と同じように説明できるから，ＢＱ＝ＣＲは**成り立つ**。
**イ**　∠ＢＡＲ＝90°だから，ＢＱ＝ＣＲは**成り立つ**。
**ウ**　△ＡＢＱ≡△ＡＣＲが説明できるから，ＢＱ＝ＣＲは**成り立つ**。
**エ**　二等辺三角形なので三辺が等しくないので，ＢＱ＝ＣＲは**成り立たない**。
**オ**　∠ＢＡＣと∠ＱＡＲが60°ではなくなるから，ＢＱ＝ＣＲは**成り立たない**。
**カ**　△ＡＢＱ≡△ＡＣＲが説明できなくなるから，ＢＱ＝ＣＲは**成り立たない**。

□ (13

この問題は，２年と３年に同一問題として正三角形を二等辺三角形に変える場合について出題している。この場合，正答した生徒は，２年40％弱，３年50％強であり，３年生の方が通過率がよい。しかし，「合同が証明できなくなる」や「二等辺三角形は３辺が等しくないので」等の理由をあげ，成り立たない答える生徒の３年生の方が２年生より多い。このことは，３年生になっても発展的な見方が豊かになっているとは言い切れない結果といえる。

問題　正三角形の移動（２）

| | 解答類型 | 転記する番号 | | ２年 I | 8 | ３年 I | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | アと解答しているもの | 1 | | 6.5 | | 5.1 | |
| | イと解答しているもの | 2 | | 5.4 | | 2.7 | |
| | ウと解答しているもの | 3 | | 8.5 | | 10.8 | |
| | エと解答しているもの | 4 | ◎ | 37.6 | | 51.5 | |
| | オと解答しているもの | 5 | | 7.9 | | 9.9 | |
| | カと解答しているもの | 6 | ○ | 14.4 | | 11.1 | |
| | エとカの両方を解答しているもの | 7 | | 0.0 | | 0.0 | |
| | 上記以外の解答 | 9 | | 1.1 | | 0.0 | |
| | 無解答 | 0 | | 18.6 | | 9.0 | |
| | | 通過率 | | 52.0 | | 62.6 | |

また，特定の課題では，調査の終了後，生徒と教師にアンケートを実施している。アンケートの内容は，以下の通りである。

質問紙は，「証明を構成する」という問題の特性に関連して，答えを書いたかどうかとその答えに自信があるかどうかについて問い，実際の解答と比較することで証明問題の難しさの実態に迫ることを目的にし，生徒には，「証明問題に取り組む際，証明を構成できる生徒が何らかの工夫をしているかどうかを調べる。」こととし，教師には，「日頃の授業における学習（指導）の経験が，実際の解答に影響しているかを調べる。また，問題への取り組みの意欲につながっているかどうか調べる。」ことを目的とした。

<生徒質問紙>

①答えに自信があるか。<自信>
②証明を考えるのに図に印を付けるなど工夫をしたか。<取り組み方>
③条件を変えた問題の証明を学んだ経験があるか。<経験>
④この問題をもっと別の図形に変えて考えてみたいか。<関心>

生徒用質問紙

| (1) この問題の答えをあなたは書きましたか。また，その答えが正しい　という自信がありますか。 | ２年 設問５ | ３年 設問４ |
|---|---|---|
| １　答えを書き，その答えに自信がある | 17.5 | 25.7 |
| ２　答えを書いたけれども，その答えに自信がない | 44.8 | 43.8 |
| ３　答えは出したけれども，その答えに自信がないので書かなかった | 5.8 | 4.9 |
| ４　問題を読んだけれども，答えを出せなかった | 16.9 | 14.7 |
| ５　問題を読んだけれども，問題の意味が分からなかった | 6.3 | 4.3 |
| ６　問題に取り組まなかった | 4.8 | 2.4 |
| (2) この問題の証明を考えるときに，考えている２つの三角形の等しい辺や角に印をつけたり，図形を抜き出してかいてみたりするなど分かりやすくする工夫をしましたか | | |
| １ はい | 37.4 | 41.7 |
| ２　いいえ | 58.7 | 54.1 |
| (3) この問題(1)のように，すでに証明されたことをもとにして条件を変えた問題の証明を考えることを，授業で学んだことがありますか。 | | |
| １　はい | 40.2 | 46.2 |
| ２　いいえ | 11.6 | 12.9 |
| ３　わからない | 44.8 | 38.7 |
| (4)　この問題(2)では，正三角形を二等辺三角形に変えて図形の性質を考えました。この問題をもっと別の図形（例えば正方形など）に変えてみたいと思いますか。 | | |
| １　そう思う | 10.1 | 9.2 |
| ２　どちらかといえばそう思う | 18.9 | 20.4 |
| ３　どちらかといえばそう思わない | 32.7 | 29.8 |
| ４　そう思わない | 37.8 | 40.4 |

＜教師質問紙＞

①完成された証明をもとに，条件を変えた問題の証明を指導しているか。＜経験＞

②条件を変えた問題の証明を考えることは，証明の指導に必要か。＜必要性＞

③作業的・体験的な活動を取り入れた指導を行っているか。＜経験＞

④図形の問題に限らず，発展的な見方を育てる指導を行っているか。＜経験＞

教師用質問紙

| (1) この問題のように，完成された証明をもとにして条件を変えた問題の証明を考えることの指導を行っていますか。 | ２年 設問５ | ３年 設問５ |
|---|---|---|
| １　行っている | 10.8 | 18.4 |
| ２　どちらかといえば行っている | 25.8 | 30.6 |
| ３　どちらかといえば行っていない | 40.9 | 29.6 |
| ４　行っていない | 22.6 | 17.3 |
| (2)　この問題のように，完成された証明をもとにして条件を変えた問題の証明を考えることは，証明の指導において必要だと思いますか。 | | |
| １　そう思う | 34.4 | 38.8 |
| ２　どちかといえばそう思う | 49.5 | 46.9 |
| ３　どちらかといえばそう思わない | 10.8 | 10.2 |
| ４　そう思わない | 3.2 | 0.0 |
| (3)　この問題は，三角形を移動させて考える問題ですか，このように動きを伴った問題を扱うときに作業的・体験的な活動を取り入れた指導を行っていますか。 | | |
| １　行っている | 11.8 | 13.3 |
| ２　どちらかといえば行っている | 28.0 | 28.6 |
| ３　どちらかといえば行っていない | 44.1 | 42.9 |
| ４　行っていない | 14.0 | 11.2 |
| (4)　図形の問題に限らず，もとの問題の条件を変えた問題を取り上げて，発展的な見方を育てる指導を行っていますか。 | | |
| １　行っている | 12.9 | 16.3 |
| ２　どちらかといえば行っている | 29.0 | 40.8 |
| ３　どちらかといえば行っていない | 43.0 | 33.7 |
| ４　行っていない | 12.9 | 5.1 |

教師質問紙の結果から，発展的な学習の指導を行っていない割合が4割弱あった。15年前の結果であるので，現在がこの結果の通りとは思わないが，発展的が学習の指導が足りていないことを暗示しているとも考えられる。このことについては，指導の改善のために再調査が必要である。

## 第４章　発展的な学習の岩手県の実態

学校現場の先生の中に，「数学的な考え方を育てるというのは，本当に可能なのか」，「どのように指導をすればよいか」などと言う先生がいる。さらには「数学的に考える力を育てる指導というのは夢物語ではないのか」などと言う先生までいるのが実態である。指導の状況を全国学力・学習状況調査の学校質問紙の結果から見ることとする。発展的な学習の指導を質問項目に「調査対象学年の児童（生徒）に対する算数（数学）の指導として，前年度までに，発展的な学習の指導を行いましたか」がある。結果は以下の通りであり，発展的な学習を行っていると回答している学校は，岩手県では，小学校で57．2%（全国64．5%），中学校で60．4%（全国66．5%）である。

| 調査対象学年の児童（生徒）に対する算数（数学）の指導として，前年度までに，発展的な学習の指導を行いましたか | 小学校（３８） | 小学校（３８） | 中学校（３７） | 中学校（３７） |
|---|---|---|---|---|
| | 岩手県 | 全国 | 岩手県 | 全国 |
| よく行った | 9.7％ | 11.8％ | 12.3％ | 13.5％ |
| どちらかといえば行った | 47.5％ | 52.7％ | 48.1％ | 53.0％ |
| あまり行っていない | 41.8％ | 33.9％ | 38.9％ | 31.3％ |
| 全く行っていない | 0.9％ | 1.4％ | 0.6％ | 2.0％ |
| 無回答 | 0.0％ | 0.1％ | 0.0％ | 0.1％ |

発展的な学習の指導を行っている岩手県の学校は，小学校でも中学校でも約6割であるが，小学校，中学校とも全国の平均より少ない。

また，補充的な学習や計算練習などの反復練習をする学習を行っているかを問う質問の結果は以下の通りである。

| 調査対象学年の児童（生徒）に対する算数（数学）の指導として，前年度までに，補充的な学習の指導を行いましたか | 小学校（３７） | 小学校（３７） | 中学校（３６） | 中学校（３６） |
|---|---|---|---|---|
| | 岩手県 | 全国 | 岩手県 | 全国 |
| よく行った | 48.1％ | 41.8％ | 32.7％ | 33.5％ |
| どちらかといえば行った | 48.7％ | 52.5％ | 56.8％ | 57.9％ |
| あまり行っていない | 2.8％ | 5.2％ | 9.9％ | 7.8％ |
| 全く行っていない | 0.0％ | 0.4％ | 0.6％ | 0.6％ |
| 無回答 | 0.3％ | 0.1％ | 0.0％ | 0.1％ |

| 調査対象学年の児童（生徒）に対する算数（数学）の指導として，前年度までに，計算問題などの反復練習をする授業を行いましたか | 小学校（４０） | 小学校（４０） | 中学校（３９） | 中学校（３９） |
|---|---|---|---|---|
| | 岩手県 | 全国 | 岩手県 | 全国 |
| よく行った | 59.7％ | 56.1％ | 43.8％ | 50.4％ |
| どちらかといえば行った | 37.7％ | 40.6％ | 50.6％ | 45.8％ |
| あまり行っていない | 2.5％ | 3.1％ | 5.6％ | 3.6％ |
| 全く行っていない | 0.0％ | 0.0％ | 0.0％ | 0.1％ |
| 無回答 | 0.0％ | 0.1％ | 0.0％ | 0.1％ |

補充的な学習や計算練習などの反復練習をする学習は9割以上の学校が行っていると回答しており，発展的な学習への取り組みがまだ十分でない状況が見られる。

この調査結果から推測されることは，岩手県の現場では，今だに「基礎・基本の重視」ということの誤解による取り組みが見られるということである。例えば,「学力向上＝各種調査の点数の向上」ととらえられ，この課題が学校に圧力としてかかり，各学校においては，点数をあげることに緊張感をもって取り組んでいるようである。各学校においては，過去問の反復練習・トレーニング的勉強によって各種調査の点数をあげようとする取り組みが見られること。短期間で点数に表れるような姑息な学習を目指すと，反復ドリル学習で点数をあげやすい問題の取り組みが多くなり，現在求めている思考力・判断力を指導することが疎かになるという誤った指導法をとるようになる。計算の指導においても，どのような指導の過程を通して，形式的な計算ができるように指導していくのかについて，明らかにできるようにすることが大切である。この指導は「数学的に考える力」とも関連してくるのは当然である。

これからは，普段の授業で，補充学習や計算練習などの反復学習と同様に発展的な学習を取り入れることが求められることになる。

平成10年，平成20年の学習指導要領では，数学的に考える力を育てるということが強調されていたが，その具体的な指導方法については，現場の先生方にまかされているのが実態である。そのようなことから数学的な考え方の指導に対して自信をもてない先生方がいた。また，その先生方の授業のイメージが自分が学生時代に受けた授業をもとに形成されたものであり，「解き方を教えて，練習問題を解かせる」という授業が数学の授業であると思いこんでいて，補充的な学習や計算練習などの反復練習こそが，算数・数学の学習であると考え，それ以外の授業について考えない先生もいることも考えられる。

立花（2003）は，個に応じた指導に関連して，発展的な学習について次のように述べている。「『個に応じた』指導の,『補充，回復の指導』は，とかく『反復，ドリル学習』になりがちである。しかし，それで本当に補充，回復が図られるかということを考える必要がある。前の指導で目標を実現できなかった生徒に対して，教師が教え，生徒に記憶させ，ドリル学習で反復練習させるというパターンの授業でよいのかという問題である。補充，回復というのは，目標に基づいての教師側からみた見方であり，その段階にいる生徒にとっては，そこで学習する内容は，発展であるはずである。したがって，生徒が目標を実現できなかったのは，何が原因かをしっかり考えて，指導方法を改善するなど，補充，回復の指導を活性化させることがこれからは非常に大切になる。また，深化・発展の学習というと，難易度の高い問題を与

え，解かせるような指導が多い。これが，本当に深化，発展の学習としてふさわしいか考える必要がある。今までのような指導をもう一度見直し，児童・生徒にとって，どちらも発展であるという視点で考え，この指導が活性化され，どの生徒にとっても，今の力を向上させる時間となるようにしたいものである。教師は，『生徒の今の力を認め（受容し），今に満足せず，さらに向上させるような指導』をする必要があるのである。」と発展の目を教師がもち，生徒にその目を養うことの重要性を指摘している。

## 第５章　発展的な学習の実現のために

第4章のことを踏まえると，これからの算数・数学の指導において，数学的な考え方を育てるのにはどのような指導が効果的であるかを考える必要がある。今後，発展的は学習についても数学的に考える力を育てるということが言われたときと同じようなことが言われることが予想される。そのような議論は建設的でないので，いかに授業を改善するかを考えていただきたい。

平成29年に告示された新学習指導要領では，学びの改革として「主体的・対話的で深い学びの実現に向けた授業改善」として，指導方法までを学習指導要領に示している。そこでは，次のように学習の進め方の例を示している。

授業の改善に当たっては，生徒自らが，問題の解決に向けて見通しをもち，粘り強く取り組み，問題解決の過程を振り返り，よりよく解決したり，新たな問いを見いだしたりするなどの「主体的な学び」を実現することが求められる。

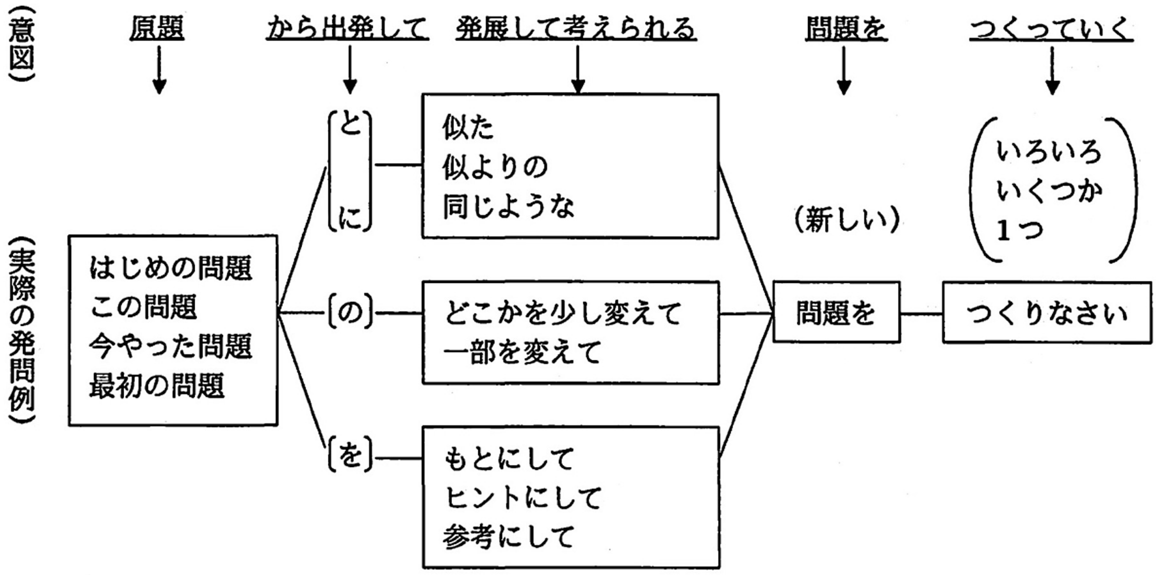
また，事象を数学的な表現を用いて論理的に説明したり，よりよい考えや事柄の本質について話し合い，よりよい考えに高めたり事柄の本質を明らかにしたりするなどの「対話的な学び」を実現することが求められる。

さらに，数学に関わる事象や，日常生活や社会に関わる事象について，数学的な見方・考え方を働かせ，数学的活動を通して，新しい概念を形成したり，よりよい方法を見いだしたりするなど，新たな知識・技能を身に付けてそれらを統合し，思考，態度が変容する「深い学び」を実現することが求められる。

平岡（2003）は，「数学の授業を通して，生徒たちが種々の問題解決ができる力〜しかもなるべくエレガントに解決できる力〜を身に付けるように指導していきたいものである。なお，この問題解決についてのストラテジーとしては，ポリアの次のようなものがよく引き合いに出されよう。①問題を理解すること，②計画を立てること，③計画を実行すること，④振り返ってみること。これは，一般的・総括的なストラテジーともいえるものであるが，これよりもっと細かくみたストラテジーとか，これらの視点をより具体的・分析的にみたストラテジーなどもある。これらのものを参考にして，生徒たちによい問題を解決するための具体的なストラテジーを‘学び方’として身に付けるように指導していきたい。特に，（中略），問題解決に当たっては，その問題を解決するために既習のどんな知識・技能や見方・考え方や方法などが活用できるかということをいつも振り返ってみる習慣も学び方の一つとして身に付けるようにしておきたい。また，‘問題解決’というとき，それは単にある問題を解くという狭義の問題解決ばかりでなく，それ以前の段階での問題を見いだす問題設定（問題作り）とか，解決後にその問題をさらに一般化したり拡張したりする問題発展をも含めて考えることができる。問題解決では，これらはいずれも大事なことである。このうち，問題作りについては，はじめは，例えば既に教科書などにある問題（原題と呼ぶことにする）を基にして，その一部を変えるような発問をして，生徒たちにいろいろな問題を作らせるとよい。（下線は引用者による）」としている。

また，このような学習を実現するための発問の

例を図のように示している。授業作りにおいて参考にしたい。




平岡が示した発展して考えることの問いを生徒が自ら発することができるように指導することが大切である。

H29解説において，統合的・発展的な学習について，具体的に解説している部分を取り上げ，学習の進め方を見ることとする。

○「数学の事象から問題を見いだし考察する過程において，事象を数学化する際には，数量や図形などに関する性質や関係を調べるねらいに即して，事象を一般化したり拡張したり，条件を数学的に表現したりすることが必要とされる。また，数量や図形などに関する性質や関係を，数学の用語や記号によって表現したり，数学的な推論に必要な仮定や，それによって得られた結論を表現したり読み取ったりすることも必要である。このような問題発見・解決の基礎をなす技能を身に付けることにより，原初となる具体的な数学の問題から，条件を変えたり，条件を弛めたりするなどして新たに設定した問題へと統合的・発展的に考察することができるようになる。（H29解説 P26）下線は引用者による」

○数学が活用できるように事象を数学化するには，ねらいに即して事象から条件や仮定を設定し，数学の問題として表現することが必要である。また，問題の解決に当たっては，解決の見通しをもつとともに，その解決の正しいことを確かな根拠から論理的に考察する力が必要である。そのような力を養う際に，一方では，直観的，帰納的，類推的に推論する力を養うとともに，他方では演繹的に推論する力を養うことも重要である。これらの二つの面を共に伸ばして，問題の発見と解決に役立てていくことが大切であり，特に，得られた結果の意味を，条件や仮定に即して考察する機会を設けることが重要である。（H29解説 P27）（下線は引用者による）

○「数量や図形などの性質を見いだし統合的・発展的に考察する力は，主に，数学の事象から問題を見いだし，数学的な推論などによって問題を解決し，解決の過程や結果を振り返って統合的・発展的に考察する過程を遂行することを通して養われていく。数学が歴史的に発展しているのは，一旦解決された問

題やその解決過程を振り返り，問題の条件や仮定を見直したり，共通する性質を見いだしたり，概念を一般化したり拡張したりする活動を数学者たちが続けているからである。したがって，数学の事象についての問題解決の指導に当たっては，振り返ることによる新たな問題の発見を生徒に促すことが大切である。その際，得られた解決に関して，『他に分かることがないかを考えること』，『問題解決の過程を振り返り，本質的な条件を見いだし，それ以外の条件を変えること』，『問題の考察範囲自体を拡げること』，「類似な事柄の聞に共通する性質を見いだすこと』などの新しい知識を得る視点を明確にしつつ，さらなる活動を促すことも大切である。（H29解説P27）（下線は引用者による）」

〇数学の事象から問題を見いだし解決したり，解決の過程や結果を振り返って統合的・発展的に考察したりする活動は，既習のことを確定的，固定的に見ないで，新たな問題を見いだし，既習の内容を活用してそれを解決し，その過程や結果を振り返ることで概念を形成したり，新たなものを見いだしたりするなど創造的な活動といえる。この活動の中で見いだされるものは，概念，性質，定理など数学的な事実，アルゴリズムや手続きなど多様である。もちろん，既習の数学はこれらを見いだす際にその支えとして重要な働きをすることになるので，既習の数学のよさを再認識する機会にもなる。この活動においては，試行錯誤すること，視点を変更して柔軟に考えること，一般化したり特殊化したりすること，抽象化したり具体化したりすること，分析したり統合したりすることなどが重要な役割を果たす。また，帰納的に考えたり類推的に考えたりすることで予測や推測をし，演繹的に考えることによりそれらを検証するといった数学的な推論を適切に用いて新たなものが見いだされることにもなる。このように，過程全体を通して数学的な見方・考え方を働かせた活動をすることが重要であり，そのことで数学的な見方・考え方は更に豊かなものになっていく。（H29解説 P96）（下線は引用者による）」

上記の中から，特に筆者は，「得られた結果の意味を，条件や仮定に即して考察する機会を設けること」，「問題の条件や仮定を見直したり，共通する性質を見いだしたり，概念を一般化したり拡張したりする」，「本質的な条件を見いだし，それ以外の条件を変えること」，「視点を変更して柔軟に考えること，一般化したり特殊化したりすること，抽象化したり具体化したりすること，分析したり統合したりすること」が授業改善をする視点としてすぐにでも取り組めることであると考えた。しかし，このことは今初めて強調していることではなく，数学教育の普遍の課題として以前から取り組んでいるが，未だに実現されていないことである。これまでも取り組んできたが，実現されていないということを頭におき，今後の取り組みを考える必要がある。

例えば，三平方の定理が成り立つのは，どのようなときか。それを考えようとするとき，直角三角形のまわりの図形は正方形で考えたが，それでは，正方形以外ではどうなるか。そうすることによって，正方形以外でも相似形であれば，同じ関係が成り立つことを見いだすことも可能になる。また，3，4，5のとき，整数値として三平方の定理が成り立つ。それでは，それ以外の整数値はないのだろうか（ピタゴラス数）。さらに，直角三角形でそうであったが，鈍角三角形，鋭角三角形ではどんな式になるか（余弦定理）などの疑問をもつような深化,発展になるように工夫をしたい。このように三平方の定理一つとっても発展の芽はたくさんあるのである。教師の教材をみる目を研ぎ澄まし，生徒と一緒に発展させるような指導をすることが，発展的な学習を活性化させる近道である。

＜引用文献＞

立花正男（2003） 数学授業を創る手順と実際（単元レベルで） 理論編 考えることの楽しさ面白さが分かり，力をつける数学授業の創造 清水静海 根本博編集代表 （株）ニチブン

平岡忠（2003） 数学授業の在り方 理論編 考えることの楽しさ面白さが分かり，力をつける数学授業の創造 清水静海 根本博編集代表 （株）ニチブン

文部省（1993） 中学校数学科指導資料 学習指導と評価の改善と工夫 大日本図書株式会社

文部科学省（1999） 中学校学習指導要領（平成10年12月）解説 数学編 大阪書籍株式会社

国立教育政策研究所 教育課程研究センター（2006） 特定の課題に関する調査（算数・数学）調査結果（小学校・中学校）

文部科学省（2018） 中学校学習指導要領（平成29年告示）解説 数学編 日本文教出版株式会社